

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT**

Spécialité

**Physique**

(ED 564 - Physique en Île-de-France)

Préparée à l'INSTITUT LANGEVIN - ONDES ET IMAGES

Présentée par

**Vincent BACOT**

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Sujet de la thèse :

**De certaines analogies entre le temps et l'espace pour la propagation des ondes : les miroirs et cristaux temporels.**

Soutenue le lundi 9 janvier 2017

devant le jury composé de :

M. Josselin	Garnier	Rapporteur
M. Marc	Rabaud	Rapporteur
M. Cristiano	Ciuti	Examineur
M. Jean	Dalibard	Examineur
M. Sébastien	Manneville	Examineur
M. Emmanuel	FORT	Directeur de thèse
M. Mathias	Fink	Membre invité





*Abt Terrasson sagt zwar : wenn man die Größe eines Buchs nicht nach der Zahl der Blätter, sondern nach der Zeit mißt, die man nötig hat, es zu verstehen, so könne man von manchem Buche sagen : daß es viel kürzer sein würde, wenn es nicht so kurz wäre. Andererseits aber, wenn man auf die Faßlichkeit eines weitläufigen, dennoch aber in einem Prinzip zusammenhängenden Ganzen spekulativer Erkenntnis seine Absicht richtet, könnte man mit eben so gutem Rechte sagen : manches Buch wäre viel deutlicher geworden, wenn es nicht so gar deutlich hätte werden sollen.*

*Kritik der reinen Vernunft, Immanuel Kant.*

"L'abbé Terrasson dit certes : si l'on mesure la longueur d'un livre non pas au nombre des pages mais au temps dont on a besoin pour le comprendre, on pourrait dire alors de certains livres qu'ils seraient bien plus courts, s'ils n'étaient pas si courts. D'un autre côté, si l'on aspire à l'intelligibilité d'un ensemble, tenant d'un seul principe en dépit de son étendue, de découvertes théoriques, on pourrait tout aussi légitimement dire : certains livres auraient été bien plus clairs s'il n'avait pas fallu qu'ils soient si clairs."

*Critique de la raison pure, Emmanuel Kant.*

*The Big Business Man smiled. "Time," he said, "is what keeps everything from happening at once."*

*The Girl in the Golden Atom, Ray Cummings.*

"Le grand homme d'affaires sourit. *Le temps*, dit-il, *c'est ce qui évite que tout ne se produise à la fois.*"

*La fille dans l'atome d'or, Ray Cummings.*



---

## Remerciements

---

Ce travail doit beaucoup à beaucoup. Ces quelques lignes représentent pour moi l'occasion de rattraper en partie des remerciements de vive voix qui n'ont pu être effectués tout à fait comme ils auraient dû l'être le jour de ma soutenance. Aussi je prie le lecteur de bien vouloir en excuser une concentration et un volume peut-être trop grands d'allusions privées, qui auraient été plus à leur place dans un discours oral et que je me vois obligé, à défaut, de coucher sur le "format portable de document" de cette thèse.

Je remercie tout d'abord Josselin Garnier et Marc Rabaud d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail de thèse, et pour leurs nombreuses questions et remarques qui ont permis de l'améliorer. Cristiano Ciuti et Sébastien Manneville ont bien voulu être examinateurs de mon travail ainsi que Jean Dalibard qui a présidé à la soutenance. Je mesure l'honneur qui m'a été fait d'être examiné par ce jury et je le remercie vivement.

Je remercie Arnaud Tourin pour son accueil au sein de son laboratoire, pour son soutien et pour des discussions toujours très intéressantes.

Merci aussi pour les amplificateurs, transducteurs, pots vibrants, lasers, cartes d'acquisition, emporte-pièces, caméras rapides, adaptateurs, imprimantes 3D, et tous les autres appareils et pièces en tout genre, ainsi que les nombreux conseils associés, sans lequel ce travail expérimental n'aurait pas été possible et qui ont été prêtés ou donnés par : Jean-François Aubry, Jean-Luc Gennisson, Olivier Thouvenin, Jean-François Ramaz, Baptiste Jayet, Olivier Couture, Samuel Grésillon, Patricia Danaens, Aurélien Baelde, Philippe Annic, Alexandre Houdoin, Jean-Baptiste Laudereau, Jérôme Laurent, Michaël Jorda, Claire Prada-Julia, Michaël Atlan, Hicham Serroune, Yves Couder, Lucie Domino, Antonin Eddi, Maxime Harazi, Xiaoping Jia, Matthieux Dupré, Nadège Kaine, Geoffroy Lerosey, Christophe Barrière, Jean-Marie Chassot, Élodie Perros, Yannick Dewilde, Christian Dorme, Nikos Fayard, et tous ceux que j'oublie et qui voudront bien m'excuser. Un grand merci à notre technicien Abdelhak Souilah pour sa grande contribution aux montages expérimentaux utilisés lors de ma thèse, dont le départ pour un autre laboratoire fut grandement regretté. Je n'oublie pas aussi toutes les autres personnes à qui il fut également un plaisir de demander de l'aide pour diverses raisons, et en particulier Emmanuel Labbey, Johnny Pinson, Patricia Danaens, Lorraine Monod, Christelle Jacquet, Jérôme Gaumet, Laurine Simandre et Marjolaine Vernier.

Un grand merci aussi pour les échanges scientifiques très intéressantes avec les différents membres du laboratoire et en particulier Arthur Goetschy, Xiaoping Jia, Rémi Carminiati, Julien de Rosny, Jérôme Laurent et Claire Prada-Julia. Je garderai un très bon souvenir de nos discussions. C'est sans doute un lieu commun que de dire que la diversité des personnalités et des points de vue

scientifiques des différents chercheurs est un élément majeur de la richesse du laboratoire, mais j'en ai apprécié la vérité au cours de mon passage à l'institut Langevin. Merci aussi à Samuel Grésillon et Mickaël Atlan, qui ont souvent apporté le premier regard critique sur nos premières réflexions, souvent encore à l'état brut, issues des discussions à bâtons rompus avec Emmanuel.

Merci également aux nombreux doctorants du laboratoire dont j'ai beaucoup appris tant scientifiquement que personnellement et pour les bons moments passés ensemble. Les souvenirs et les amis que j'aurai gagnés ici seront ce que j'emporte de plus précieux. Merci en particulier au bureau R31 pour être devenu une deuxième maison, pour m'avoir appris tant de choses scientifiquement, culturellement et techniquement (avec une mention spéciale à Baptiste, Olivier et Jean-Baptiste pour leur grande aide en programmations et pour la rédaction de thèse). Merci donc à mes illustres et néanmoins excessivement sympathiques prédécesseurs Fabien, Amir, Baptiste, Yann, Marion et Jean-Baptiste, et successeurs Olivier, Peng, Aurélien, Slava, Kamel et Sander. Merci pour les échanges nombreux et variés, notamment gastronomiques, et pour les Reese's. J'associe aussi les membres virtuels du bureau François, Laurine et dans une certaine mesure Clotilde, Mai et Gauthier pour l'honneur et le plaisir de leurs nombreuses visites.

Je remercie les quelques stagiaires que j'ai eu beaucoup de plaisir à encadrer ou co-encadrer : Guillaume Marcaini et Mohamed Nouhoum, Maxellende Joulia et Mickaël Jorda. Merci en particulier à ceux qui ont très directement contribué à ce travail : Maurice Van Tiggelen qui a construit le premier montage de pression de radiation, et Guillaume Durey qui a travaillé brillamment sur des expériences de conjugaison de phase hydrodynamique. Merci aussi à Guillaume d'Hardemare qui a indirectement contribué à cette thèse par ses remarques et ses participations aux discussions et qu'il a été un plaisir d'avoir pendant toute une partie de ma thèse dans l'équipe. Au moment de partir, je remercie aussi Lucie Domino, Lorenzo Périssé et Sander Wildeman, qui ont constitué un grand gain lors de leur arrivée récente au sein de notre salle de manip.

Un très grand merci également à mes "grands frères" de thèse Stéphane Perrard et Matthieu Labousse qui étaient là au début de mon doctorat, avec qui il était un véritable plaisir de travailler et qui m'ont beaucoup aidé à me lancer. J'ai admiré la beauté de leur association et profité de leur exemple bien qu'il s'accompagne d'une certaine pression puisqu'ils avaient placé je pense la barre très haut. Il me faut rajouter une mention très spéciale à Matthieu qui a grandement contribué à la partie théorique de ce travail, au cours de nos discussions collectives, en proposant certaines avancées, et en écrivant le code de la simulation du MTI, que je n'ai fait qu'adapter légèrement selon mes besoins.

Je remercie chaudement les personnes par lesquelles j'ai eu la chance d'être encadré et formé. Merci beaucoup à Antonin Eddi pour avoir toujours pris le temps de me pousser, de venir faire marcher ma manip de temps en temps ou encore de m'apprendre le fonctionnement du monde académique en général et du groupe d'Emmanuel et Yves en particulier. Je remercie de même chaleureusement Yves Couder pour sa disponibilité, pour m'avoir également beaucoup et précieusement conseillé et aidé, notamment pour me lancer et puis aussi pour avoir évoqué un jour la similarité entre Bloch et Floquet. Un grand merci également à Mathias Fink pour ses très (trop ?) nombreuses idées, inspirations et discussions qui ont joué un rôle moteur dans ces travaux. Je pense qu'il est peu courant d'une part d'avoir parmi ses encadrants des personnes dont de très nombreuses inspirations, qui semblaient de prime abord très extravagantes, s'avèrent justes, dont la moitié est membre de l'académie des Sciences sans s'en donner l'air et qui conjuguent des personnalités aussi exceptionnelles que variées. Je mesure la chance que j'ai eue ainsi que l'étendue du chemin que j'ai parcouru grâce à eux et à mes collègues en même temps que j'ai pu

mieux réaliser (en partie) celui que je suis encore loin d'avoir réalisé. Ces remarques concernent naturellement également mon directeur de thèse Emmanuel Fort, à qui j'adresse également un formidable remerciement. D'abord pour ses conseils pratiques qui m'ont permis de ne pas me perdre tout au long de mon doctorat, au premier rang desquels les places cachées de la station de Vélib' rue du Quatrefages. Ensuite pour son extrême inventivité expérimentale, dont je ne donnerai pas d'exemple mais qui est le mieux caractérisée je pense par une certaine invention sur les poubelles, dont, s'il ne se décide pas à la breveter un jour, je finirai par la commercialiser à sa place. Enfin pour les idées théoriques qui semblent parfois sortir de son imagination comme la lave d'un volcan de type explosif. Je garderai un très bon souvenir de nos discussions, sans limites à l'ambition, effectuées tout en gardant dans un coin de sa tête la conscience de dépasser parfois par beaucoup son domaine de connaissance et de compétence, permettant de faire le tri sur les idées *in fine*. Il est clair que de nombreux concepts essentiels des travaux présentés dans cet ouvrage sont nés de ces discussions nébuleuses avec "le chef" et souvent aussi d'autres membres du groupe. Alternativement opticien, hydrodynamicien, expérimentateur, théoricien, il ne fut pas toujours facile de gérer un chef aussi enthousiaste et dont l'ordre hiérarchique n'est pas la première nature. Mais à la fin, *il capo, anche se il fatto di essere il capo le rompe le scatole, fa un buon capo*.

Merci à tous les amis et membres de ma famille qui ont pu se déplacer et ont eu la gentillesse de venir me féliciter le jour de ma soutenance. Vous ne vous doutez sans doute pas de combien votre présence m'a touché. Merci aussi aux docteurs Ottow de m'avoir accueilli en pension complète pendant une partie de ma rédaction, ce qui m'a permis de m'aérer beaucoup l'esprit pour palier l'absence de vacances l'été.

Merci à mon père et à ma mère d'avoir, en plus de leur soutien, gentiment participé à rendre ce texte lisible en en supprimant ce que, malgré tous mes efforts, sa longueur et les séances nocturnes de sa rédaction avaient contribué à accumuler d'écorchures à la langue française. Je tiens à remercier aussi mes frères et toute ma famille pour leur soutien sans faille et très agréable et appréciable, parfois à distance, tout au long de mon parcours, avec une pensée émue pour Denis, Mamita, Gisèle et Merita qui n'auront malheureusement pu en voir l'aboutissement.

Merci enfin et infiniment à Milena. Je pourrais la remercier pour ses conseils, pour la confiance redonnée dans les moments de doutes et pour mille autre choses. Mais je me contenterai simplement de mentionner ma gratitude pour le fait de m'avoir supporté, parfois au sens littéral du terme lorsque j'avais besoin d'un soutien, notamment pendant les difficultés et pendant la rédaction et la soutenance, d'autres fois, ou parallèlement, au sens dérivé et constamment au sens anglo-saxon.

Merci.





**Résumé :** L'universalité des phénomènes ondulatoires classiques est largement décrite par la structure de l'équation de d'Alembert. Dans cette dernière, les variables spatiales et temporelles jouent des rôles analogues. Nous revisitons dans cet ouvrage cette analogie bien connue en introduisant de nouveaux concepts de contrôle temporel de la propagation des ondes, qui peuvent être interprétés comme la transposition au domaine temporel de phénomènes ondulatoires spatiaux standard, en remplaçant la variation spatiale des propriétés du milieu qui y est mise en jeu par une variation temporelle équivalente. Nous démontrons expérimentalement, en utilisant les ondes à la surface d'un liquide comme système ondulatoire modèle, la pertinence de cette approche et montrons théoriquement sa généralisation à tout type d'onde classique, gouvernée par une équation d'onde de structure similaire à celle de l'équation de d'Alembert. Toute l'étendue de cette analogie est étudiée dans le cadre deux phénomènes ondulatoires bien connus (dans leurs versions spatiales), et dont nous montrons qu'ils sont étroitement liés : la réflexion des ondes et leur transformation par un cristal. L'équivalent temporel d'un miroir conduit à la génération instantanée, depuis tout l'espace, d'une onde retournée temporellement c'est-à-dire dont l'évolution temporelle est inversée par rapport à l'onde initiale. Une variante monofréquentielle de ce miroir temporel instantané, qui possède des liens étroits avec le concept de conjugaison de phase utilisé pour le retournement temporel d'ondes monochromatiques en optique, est également présentée. Nous montrons que la modulation temporelle périodique du milieu qui y est mise en jeu constitue l'équivalent temporel d'un cristal pour les ondes et étudions les propriétés générales des ondes dans ces milieux. Nous cherchons à sonder les limites de ces analogies spatiotemporelles, dont, de toute évidence, le principe de causalité est un élément majeur, et qui révèlent des différences intéressantes entre les concepts présentés et leurs équivalents spatiaux.

**Zusammenfassung :** Die Universalität der klassischen Wellenphänomenen lässt sich weitgehend durch die d'Alembertsche Struktur der Wellengleichungen beschreiben. In letzterer spielen die Zeit- und Raumvariablen eine ähnliche Rolle. Wir betrachten in diesem Werk diese bekannte Analogie unter einem neuen Licht, indem wir neue Konzepte der Zeitkontrolle von der Wellenpropagation introduzieren, die als Transposition zum Bereich der Zeit von standarden Wellenphänomenen des Raumes interpretiert werden können, wobei die räumliche Variation der Eigenschaften des Mediums, die sie bestimmen, durch eine zeitliche ersetzt wird. Wir bringen den experimentellen Beweis der Relevanz dieses Ansatzes, wobei wir die Wellen an der Oberfläche einer Flüssigkeit als Modelwellensystem verwenden und zeigen durch theoretische Erkenntnisse, dass er auf alle Wellensysteme generalisiert werden kann, die durch eine Wellengleichung beschrieben wird, deren

Struktur die der d'Alembertschen Gleichung ähnelt. Die ganze Reichweite dieser Analogie wird im Rahmen zweier längst bekannten Wellenphänomenen (in deren räumlichen Version), von denen wir zeigen, dass sie eng verbunden sind : die Spiegelung einer Welle und deren Umwandlung durch einen Kristal. Das Equivalent eines Spiegels führt zur augenblicklichen Erscheinung aus dem gesamten Raum einer zeitumgekehrten Welle, das heißt einer Wellenform, derer zeitliche Entwicklung im Vergleich zu der originellen Welle umgekehrt ist. Eine Einzelfrequenzvariante dieses augenblicklichen Zeitspiegels wird auch vorgestellt, die enge Verbindungen mit dem für die Zeitumkehr monochromatischer Wellen angewendeten Konzept der optischen "Phase Conjugation" (Phasenkonjugierung ) besitzt. Wir zeigen, dass die dazugehörige periodische Zeitmodulation des Mediums das zeitliche Equivalent eines Kristals für die Welle bildet, und wir studieren die generellen Eigenschaften der Wellen in solchen Medien. Wir versuchen, die Grenzen dieser raumzeitlichen Analogien zu erkundigen, in derer Bestimmung selbstverständlich das Kausalitätsprinzip eine maßgebliche Rolle spielt, und die interessanten Unterschiede zwischen den vorgestellten Konzepten und deren räumlichen Pendants offenbaren.

**Abstract :** The universality of classical wave phenomena is widely described by the structure of d'Alembert's equation. In the latter, the spatial and time variables play analogous roles. In this work, we revisit this well-known analogy introducing new concepts of time control of wave propagation which can be interpreted as the transposition onto the time domain of standard spatial wave phenomena, where the spatial variation of the properties of the medium is replaced by an equivalent time variation. We demonstrate experimentally, using waves at the surface of a liquid as a model wave system, the relevance of this approach and show theoretically its generalization to all classical types of waves, which are governed by equations whose structure resembles that of d'Alembert. The depth of this analogy is thoroughly studied in the framework of two well-known wave phenomena (in there spatial version) : Reflection of waves on a mirror and their transformation by a crystal. We show that they are intimately related. The time equivalent of a mirror leads to the emergence from the entire medium at once of a time reversed wave, that is a wave whose time dependence is inverted compared to the original one. A monofrequency variant of this instantaneous time mirror, which has strong connections to the concept of wave phase conjugation used for time reversing monochromatic waves in Optics, is also studied. We show that the periodic time modulation of the medium involved in the latter experiments constitutes the time equivalent of a crystal for waves and we study the general properties of waves in such media. We address the issue of the limits of theses space time analogies, of which, the principle of causality is evidently a major element and who reveal interesting differences between the concepts presented and their spatial counterparts.

**Resumen :** La universalidad de los fenómenos ondulatorios clásicos es ampliamente descrita por la estructura de la ecuación de d'Alembert. En esta ecuación, las variables espaciales y temporales desempeñan un papel similar. En esa obra, revisitamos esta analogía bien conocida a través de nuevos conceptos de control temporal de la propagación de las ondas, quienes pueden ser interpretados como transposiciones de fenómenos espaciales estandartes al ámbito temporal, en los cuales las variaciones espaciales de las propiedades del medio son reemplazadas por las correspondientes variaciones temporales. Hacemos la prueba, usando ondas a la superficie de un líquido, de la relevancia de este enfoque y mostramos teóricamente su generalización a todo tipo de onda clásica, es decir gobernada por una ecuación cuya estructura es similar a la de d'Alembert. Toda la extensión de esta analogía queda estudiada en el cuadro de los dos fenómenos clásicos (en sus versiones espaciales) que son la reflexión de una onda sobre un espejo y su transformación en un

cristal. Además, mostramos que los dos son íntimamente relacionados. El equivalente temporal de un espejo produce instantáneamente desde el medio entero una onda retornada en el tiempo, es decir cuya evolución temporal es invertida comparado a la onda inicial. Una variante monofrecuencial de este espejo queda estudiada también. Posee estrechos vínculos con el concepto de Phase Conjugation (conjugación de fase), usado en Óptica para hacer retornamiento temporal de ondas monocromáticas. Mostramos que la modulación temporal implicada constituye el equivalente de un cristal para las ondas et estudiamos las características generales de ondas en estos medios. Sondamos los límites de esas analogías espaciotemporales de cuyos obviamente el principio de causalidad es un elemento mayor y que revelan diferencias interesantes entre los conceptos presentados y sus equivalentes espaciales.

**Riassunto :** L'universalità dei fenomeni ondulatori classici è in larga misura descritta dalla struttura dell'equazione di d'Alembert. In quest'equazione, le variabili spaziali e temporali svolgono ruoli analoghi. Nell'opera seguente rivisitiamo questa ben nota analogia introducendo nuovi concetti sul controllo temporale della propagazione delle onde. Questi concetti possono essere interpretati come trasposizione di fenomeni ondulatori spaziali standard nell'ambito temporale, sostituendo le variazioni spaziali delle proprietà del mezzo con le variazioni temporali corrispondenti. Usando delle onde sulla superficie di un liquido come modello fisico, facciamo fede della rilevanza di quell'approccio e mostriamo teoricamente la generalizzazione a tutti i tipi di onde classiche, governate da equazioni simili a quella di d'Alembert. Questa analogia viene studiata nell'ambito di due fenomeni ondulatori ben noti (nella loro versione spaziale) : la riflessione delle onde generata da un specchio e la loro trasformazione generata da un cristallo. Mostriamo inoltre che i due concetti sono intimamente vincolati. L'equivalente temporale di un specchio porta alla generazione in tutto lo spazio di un'onda restituita nel tempo, vale a dire un'onda di cui l'evoluzione temporale è invertita in relazione all'onda originale. In questa tesi viene presentata anche una variante monofrequenziale di questo specchio temporale istantaneo che possiede legami stretti con il concetto di coniugazione di fase usato in ottica per invertire nel tempo onde monocromatiche. Mostriamo in questo lavoro che la modulazione temporale periodica del mezzo in questione costituisce, per le onde, l'equivalente temporale di un cristallo e ne studiamo le proprietà generali. In questa tesi, cerchiamo di sondare i limiti dell'analogia spaciotemporale, di cui il principio di causalità ne è l'essenziale e che rivelano differenze interessanti tra i concetti presentati e i loro equivalenti spaziali.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1 Contexte : La réversibilité des ondes</b>	<b>19</b>
1.1 Réversibilité des ondes : symétries spatiales et temporelle . . . . .	21
1.2 Le retournement temporel d'ondes monochromatiques : holographie et conjugaison de phase . . . . .	22
1.3 Le retournement temporel large bande d'ondes acoustiques . . . . .	23
<b>2 Retourner le temps instantanément</b>	<b>25</b>
2.1 Un démon de Loschmidt pour les ondes . . . . .	27
2.1.1 Le retournement du temps par le démon de Loschmidt . . . . .	27
2.1.2 Émergence d'une onde retournée temporellement par "refroidissement de Loschmidt" . . . . .	32
2.2 Un retournement temporel instantané par disruption de la célérité . . . . .	37
2.2.1 Propagation d'une onde et frontières temporelles . . . . .	37
2.2.2 Découplage du champ et de sa dérivée par un choc bref et intense de célérité	40
2.2.3 Émergence instantanée d'une onde retournée temporellement . . . . .	42
<b>3 Réalisation d'un Miroir temporel instantané pour les ondes de surfaces</b>	<b>47</b>
3.1 Montage général : moduler la célérité des ondes de surface . . . . .	49
3.1.1 Moduler la célérité des ondes de surface . . . . .	49
3.1.2 Comment générer les ondes de surfaces ? . . . . .	50
3.1.3 Visualisation et mesure des ondes de surface . . . . .	54
3.2 Choc de gravité : Observation d'une onde retournée temporellement . . . . .	59
3.2.1 Observation d'une onde contrapropagative . . . . .	59
3.2.2 Retournement temporel . . . . .	61
3.2.3 Caractérisation de l'onde retournée . . . . .	65
3.3 Retournement temporel en situation de complexité . . . . .	71
3.3.1 Images de motifs complexes . . . . .	71
3.3.2 Obstacle sous-marin . . . . .	75
3.3.3 Retournement temporel de sources temporellement étendues . . . . .	79
<b>4 Théorie du miroir temporel instantané</b>	<b>81</b>
4.1 Un miroir temporel instantané . . . . .	85
4.1.1 Origine de l'onde retournée : le principe d'Huygens-Fresnel revisité . . . . .	85
4.1.2 Lien avec la réfraction temporelle en électromagnétisme : une double frontière temporelle . . . . .	89
4.1.3 Symétries spatio-temporelles . . . . .	93
4.1.4 Une nouvelle approche du retournement temporel . . . . .	95
4.2 Généralisation à d'autres types d'ondes . . . . .	103

4.2.1	Généralisation du MTI à d'autres ondes classiques . . . . .	103
4.2.2	Influence de la dissipation . . . . .	108
4.2.3	Perspectives : limites d'applicabilités du concept ? . . . . .	111
4.3	Perspectives : au-delà du simple choc de célérité . . . . .	117
4.3.1	Couplage instantané à une autre onde : Choc de pression de radiation . . .	117
4.3.2	Choc de dissipation . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Le MTI monofréquentiel : un miroir à conjugaison de phase de Faraday</b>	<b>125</b>
5.1	La conjugaison de phase en optique . . . . .	129
5.1.1	Le miroir à conjugaison de phase : un retournement temporel monofréquentiel	129
5.1.2	Le mélange à quatre ondes dégénérées comme miroir à conjugaison de phase	130
5.1.3	Un équivalent hydrodynamique : la modulation par la vibration du bain ? .	133
5.2	Mise en évidence expérimentale de la conjugaison de phase d'ondes de surface . .	137
5.2.1	Réalisation d'un miroir à conjugaison de phase hydrodynamique . . . . .	137
5.2.2	Observation d'une onde conjuguée en phase dans le petit bain . . . . .	140
5.2.3	Construction d'une frontière temporelle plutôt que spatiale : un miroir tem- porel à conjugaison de phase . . . . .	144
5.3	Théorie du miroir à conjugaison de phase hydrodynamique . . . . .	149
5.3.1	Théorie standard des bains vibrés et de l'instabilité de Faraday . . . . .	149
5.3.2	Conjugaison de phase hydrodynamique dans l'approximation de faible vi- bration . . . . .	152
5.3.3	Équivalence à l'approximation d'enveloppe temporelle lentement variable .	156
5.3.4	Équivalence à l'approximation d'enveloppe spatiale lentement variable dans le cas de l'eau peu profonde . . . . .	158
5.4	Conjugaison de phase hydrodynamique, instabilité de Faraday et MTI . . . . .	163
5.4.1	Effet de la dissipation visqueuse : un seuil d'amplification . . . . .	163
5.4.2	Miroir à conjugaison de phase hydrodynamique et instabilité de Faraday .	167
5.4.3	Liens entre le miroir à conjugaison de phase de Faraday et le MTI . . . . .	171
<b>6</b>	<b>Ondes (de surface) dans un cristal temporel</b>	<b>177</b>
6.1	Équivalent temporel d'un cristal . . . . .	181
6.1.1	Analogie formelle entre périodicité temporelle et spatiale pour les ondes : l'équation de Hill . . . . .	181
6.1.2	Rappels sur les structures périodiques spatiales : la théorie de Floquet-Bloch	182
6.1.3	Modulation périodique d'un milieu de propagation homogène : un cristal temporel . . . . .	186
6.1.4	Croissance ou décroissance exponentielle ? : des bandes d'amplification . .	192
6.2	Instabilité dans les cristaux temporels . . . . .	195
6.2.1	Langues d'amplification, langues d'instabilité . . . . .	195
6.2.2	Dissipation dans un cristal temporel et effet de la viscosité . . . . .	198
6.2.3	Influence de la fréquence de modulation du milieu . . . . .	203
6.3	Perspectives : Propriétés d'un émetteur ponctuel dans un cristal temporel . . . . .	207
6.3.1	Échanges fréquentiels dans un cristal temporel . . . . .	207
6.3.2	Influence de la phase de l'émetteur : nœuds et ventres temporels d'un mode stationnaire du cristal . . . . .	212
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>221</b>

<b>A</b>	<b>Éléments de théorie des fonctions de Green pour la propagation des ondes</b>	<b>227</b>
A.1	La "règle d'or de la propagation des ondes" . . . . .	227
A.2	Équivalence du champ émis par un champ de sources instantanées à une condition initiale . . . . .	229
A.3	Expressions explicites de la fonction de Green de l'équation de d'Alembert . . . . .	229
A.4	Fonction de Green de l'oscillateur harmonique et généralisation à une source dépendant du champ . . . . .	230
A.4.1	Cas où $\alpha$ est une constante : fonction de Green de l'oscillateur harmonique	231
A.4.2	Cas où $\alpha$ est proportionnelle à $f$ : équation du MTI dans l'espace de Fourier	231
<b>B</b>	<b>Équations générales de l'hydrodynamique d'un bain de liquide vibré</b>	<b>233</b>
B.1	Équations des ondes de surface en profondeur quelconque . . . . .	233
B.2	Cas particulier de l'eau peu profonde : équation de d'Alembert . . . . .	235
B.3	Cas de l'eau profonde . . . . .	236
B.4	Équations des ondes de surface en eau profonde pour un liquide faiblement visqueux	237
<b>C</b>	<b>Simulation du MTI pour les ondes de surface</b>	<b>239</b>
<b>D</b>	<b>Choc de Potentiel de Schrödinger et discontinuité</b>	<b>241</b>
D.1	Discontinuité de $\psi$ . . . . .	241
D.2	Contournement du problème . . . . .	242
<b>E</b>	<b>Refroidissement par dissipation</b>	<b>243</b>
<b>F</b>	<b>Éléments de théorie de Floquet</b>	<b>245</b>
	<b>Références</b>	<b>249</b>





Les ondes sont l'un des concepts les plus importants de la physique moderne. Des ondes électromagnétiques aux vagues à la surface de l'eau, des vibrations d'une corde au transport d'électrons dans des fils conducteurs, du son aux ondes gravitationnelles, le terme d'onde est utilisé pour caractériser des phénomènes si différents, dans des domaines à ce point éloignés de la physique, qu'il en devient difficile d'en donner une définition générale rigoureuse. On associe usuellement une onde à l'oscillation d'une quantité physique locale, correspondant à un transport d'énergie sans transport de matière. Depuis les travaux de d'Alembert sur les cordes vibrantes [1], l'universalité de très nombreux phénomènes ondulatoires est comprise par le fait qu'ils sont régis par la même équation, l'équation des ondes ou équation de d'Alembert :

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

$\phi$  est une fonction (à valeurs scalaires ou vectorielles) des coordonnées d'espace et de temps (deux fois dérivables par rapport à chacune de ses variables), appelée champ d'onde, et  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien associé aux coordonnées spatiales. L'équation (1) fait apparaître une symétrie évidente entre les rôles joués par les variables temporelles et spatiales : à la dérivée d'ordre deux en temps correspond une dérivée d'ordre deux dans chacune des directions de l'espace. Nous verrons que cette propriété est associée à une double réversibilité temporelle et spatiale, qui est une caractéristique fondamentale des ondes usuelles (de d'Alembert).

Cet ouvrage présentera de nouveaux aspects de cette analogie entre temps et espace pour les ondes, à travers des concepts de contrôle temporel de la propagation des ondes, qui peuvent être interprétés comme la transposition au domaine temporel d'opérations standard du domaine spatial. Nous étudierons ainsi toute l'étendue de cette analogie dans le cadre de deux phénomènes ondulatoires bien connus (dans leurs versions spatiales), et dont nous verrons qu'ils sont étroitement liés : la réflexion des ondes et leur transformation par un cristal. En particulier, il sera démontré expérimentalement que l'analogie temporelle de la réflexion par un miroir génère une onde retournée temporellement, c'est-à-dire dont l'évolution temporelle est inversée. Nous chercherons naturellement à sonder les limites de cette analogie spatio-temporelle, dont, de toute évidence, le principe de causalité doit être un élément majeur. Bien que l'équation de d'Alembert soit sans conteste la plus répandue en physique des ondes, notons dès à présent qu'il existe d'autres équations faisant intervenir des dérivées partielles en espace et en temps, dont certaines propriétés sont identiques à celle de l'équation (1), et qui décrivent également des phénomènes ondulatoires. Citons en exemple les équations des ondes à la surface d'un liquide (qui seront plus longuement décrites ultérieure-

ment) ou encore, dans une certaine mesure, les équations de Schrödinger, Klein-Gordon ou Dirac pour des fonctions d'onde en mécanique quantique. Nous verrons que les concepts présentés dans ce travail sont cependant applicables à de nombreux types d'ondes.

La première partie de cet ouvrage présentera le contexte de cette étude en introduisant la notion de retournement temporel. La question de la réversibilité ou de l'irréversibilité temporelle d'un système physique est un problème fondamental dans de nombreux contextes. Dans le cadre du développement de la théorie de la dynamique des gaz au XIX<sup>e</sup> siècle, une expérience de pensée, appelée aujourd'hui expérience du démon de Loschmidt et induisant l'inversion de l'évolution temporelle d'un système de particules, a été imaginée pour mettre en évidence la réversibilité attendue. Nous verrons dans la deuxième partie comment cette idée peut être adaptée de façon particulièrement adéquate aux systèmes ondulatoires linéaires pour en tirer un procédé physique de génération d'une onde retournée temporellement, à l'aide d'une variation temporelle de la célérité du milieu de propagation. Pour valider ce nouveau concept, nous avons développé un dispositif expérimental permettant de contrôler temporellement la célérité des ondes à la surface d'un liquide. Nous en présenterons les résultats dans la troisième partie et en donnerons une description théorique générale dans la quatrième partie. Nous montrerons notamment que ce procédé réalise l'équivalent temporel d'un miroir. Une variante monofréquentielle de ce dernier, dont nous verrons qu'elle possède des liens étroits avec le concept de conjugaison de phase utilisé pour le retournement temporel d'ondes monochromatiques en optique, sera présentée et étudiée expérimentalement à la partie 5. Nous montrerons à la partie 6 que la modulation temporelle périodique du milieu mise en jeu dans ces expériences constitue l'équivalent temporel d'un cristal pour les ondes et étudierons les propriétés générales des ondes dans ces milieux.

---

Contexte : La réversibilité des ondes

---

## Table des matières

---

1.1	Réversibilité des ondes : symétries spatiales et temporelle . . . . .	<b>21</b>
1.2	Le retournement temporel d'ondes monochromatiques : holographie et conjugaison de phase . . . . .	<b>22</b>
1.3	Le retournement temporel large bande d'ondes acoustiques . . . . .	<b>23</b>

---



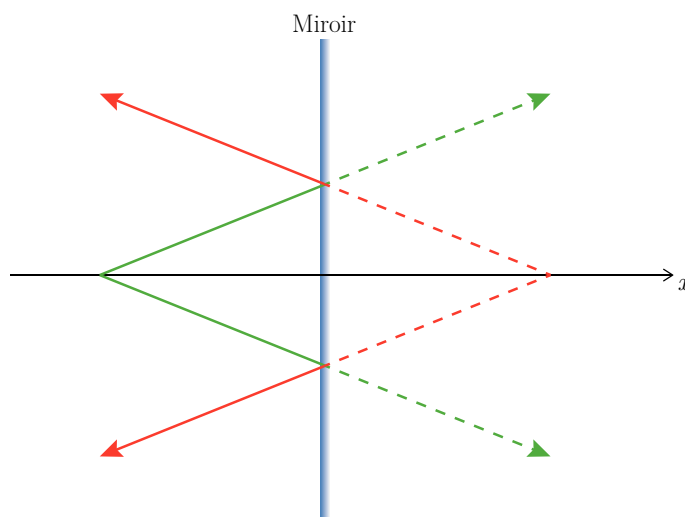
Cette partie introductive présentera brièvement le contexte de notre étude. Nous montrerons que les ondes usuelles possèdent la particularité d'être réversibles à la fois temporellement et spatialement. Nous définirons le concept central de retournement temporel comme la génération, à partir d'une onde quelconque, de l'onde possédant une évolution temporelle inversée. Des techniques variées ont été développées pour obtenir ce résultat pour différents systèmes ondulatoires. Elles peuvent être regroupées en deux catégories que nous présenterons successivement : la conjugaison de phase et les cavités à retournement temporel.

## 1.1 Réversibilité des ondes : symétries spatiales et temporelle

Dans un milieu de propagation homogène, comme l'air au sein d'une pièce pour des ondes acoustiques ou le vide pour des ondes électromagnétiques, la propagation des ondes se fait indifféremment dans n'importe quelle direction de l'espace. Cela implique qu'une onde peut se propager indifféremment dans une direction ou, en sens inverse, dans la direction opposée. Cette symétrie se traduit dans l'équation de d'Alembert (1) gouvernant la propagation des ondes par les dérivées d'ordre deux par rapport à chaque variable spatiale. En effet, si un champ d'onde  $\phi(x, y, z, t)$  est solution de l'équation d'onde, son champ retourné spatialement selon la première direction du repère,  $\phi_{Rx}(x, y, z, t) = \phi(-x, y, z, t)$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 \phi_{Rx}}{\partial x^2}(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(-x, y, z, t). \quad (1.1)$$

Le champ  $\phi_{Rx}$  est donc également une solution de l'équation de d'Alembert, traduisant l'indifférence que nous avons évoquée du système au sens de la propagation. Une onde retournée spatialement selon une direction est obtenue en pratique de façon très simple, par l'action d'un miroir (voir figure 1.1).



**Figure 1.1** – Schéma du retournement spatial effectué par un miroir. Vert : rayons correspondant à l'onde originelle ; rouge : rayons correspondant à l'onde retournée spatialement.

À cette symétrie spatiale fait écho une symétrie temporelle. En effet, si  $\phi(\vec{r}, t)$  est un champ d'onde solution de (1), alors  $\phi_{Rt}(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, -t)$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 \phi_{Rt}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, -t), \quad (1.2)$$

et est donc également solution de (1). Les champs d'onde usuels, gouvernés par l'équation de d'Alembert constituent donc des systèmes réversibles. Le terme de réversibilité possède plusieurs significations en physique, suivant le contexte dans lequel il est utilisé, mais nous entendons ici par réversibilité uniquement cette symétrie du système par rapport à la variable temporelle :

*Un système physique, caractérisé par une fonction  $f(t, \dots)$  à valeurs quelconques, du temps et éventuellement d'autres variables quelconques est réversible (temporellement) si, pour tout instant  $t_0$ , la fonction retournée temporellement  $f(t_0 - t, \dots)$  caractérise également une évolution physique permise du système.*

Usuellement, le système physique est gouverné par une ou plusieurs équations dont les solutions donnent les fonctions caractérisant les évolutions physiques possibles pour le système. Dans ce cadre, la réversibilité au sens où nous l'entendons correspond à la symétrie des équations par le changement de variable  $t \rightarrow -t$ . La mention d'un temps  $t_0$  quelconque signifie que nous considérons ici les systèmes pour lesquels cette symétrie s'applique à chaque instant (et non uniquement autour d'un instant de référence spécifique). Notons que la réversibilité (temporelle) est une propriété de nombreux systèmes physiques usuels comme le point matériel dans un champ de force statique, dont la dynamique est gouvernée classiquement par la relation fondamentale de la dynamique de Newton (faisant également intervenir une dérivée temporelle d'ordre deux pour la fonction  $\vec{r}(t)$  caractérisant le système). Les ondes de d'Alembert ont la particularité de posséder à la fois la symétrie temporelle et spatiale. Ainsi, par exemple, le principe de retour inverse de la lumière, utilisé en optique géométrique [2], peut ainsi être interprété indifféremment comme une conséquence de la réversibilité spatiale ou de la réversibilité temporelle des ondes. Puisque la propagation d'une onde correspond à son évolution dans l'espace au cours du temps, le retournement temporel est équivalent à des retournements spatiaux effectués dans toutes les directions de l'espace, ce qui fait qu'une onde retournée temporellement parcourt le chemin inverse de l'onde originelle, "comme si le film de son évolution était joué à l'envers". Si la réversibilité temporelle est une propriété fondamentale des ondes usuelles, elle ne se manifeste pas spontanément. Générer l'onde d'évolution temporelle inverse associée à une onde quelconque est l'objet des techniques de "retournement temporel".

## 1.2 Le retournement temporel d'ondes monochromatiques : holographie et conjugaison de phase

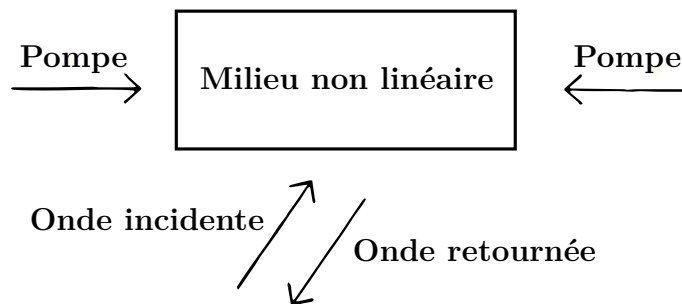
Les travaux pionniers de Dénes Gábor [3] ont permis la découverte d'une première technique de production d'une onde retournée temporellement à travers la méthode holographique, applicable aux ondes monochromatiques en optique. Pour de telles ondes, le retournement temporel est équivalent à une "conjugaison de la phase". En effet, une onde monochromatique  $\phi_m$  de pulsation  $\omega$  peut s'écrire en notation complexe en toute généralité  $\phi_m(\vec{r}, t) = \text{Re} [A(\vec{r})e^{i\omega t}]$ , où  $A(\vec{r})$  est une fonction quelconque (complexe) de l'espace, dite de phase. Son complexe conjugué est associé à l'onde retournée temporellement :

$$\text{Re} [A^*(\vec{r})e^{i\omega t}] = \text{Re} [A(\vec{r})e^{-i\omega t}] = \phi_m(\vec{r}, -t). \quad (1.3)$$

Le fonctionnement de l'holographie repose sur le fait qu'un champ d'onde dans un volume donné peut être entièrement déterminé par sa valeur sur une surface fermée entourant ce volume (et celle de sa dérivée normale à la surface) [4]. Le principe de l'holographie consiste à faire interférer une

onde initiale avec une onde référence connue et à enregistrer le motif d'interférences sur une plaque holographique. Cette dernière est utilisée pour construire une plaque dont la transmittance est une fonction de l'intensité lumineuse du motif d'interférences initial. En renvoyant l'onde de référence, on obtient, par diffraction, l'onde initiale. Mais ce principe peut être également utilisé pour obtenir l'onde retournée temporellement. En envoyant l'onde conjuguée (donc retournée temporellement) de l'onde référence (connue) sur cette plaque, on obtient par diffraction une onde proportionnelle au conjugué de phase de l'onde initiale.

Un principe similaire gouverne la technique de conjugaison de phase optique par mélange à quatre ondes [5]. Dans ce procédé l'onde à retourner est envoyée dans un milieu présentant une non linéarité d'ordre 3, en même temps que deux ondes de références. Ces deux ondes, dites de pompe, sont contrapropagatives l'une par rapport à l'autre, sont de même fréquence que l'onde à retourner et sont beaucoup plus intenses que cette dernière. L'interaction entre ces trois ondes à travers la non linéarité du milieu en génère une quatrième, qui est proportionnelle au retourné temporel de l'onde de la première. Ce procédé peut être interprété comme une méthode d'holographie en temps réel : tout se passe comme si l'onde initiale interférait avec l'une des ondes de pompe et imprimait dans le milieu un hologramme dynamique, qui est éclairé en temps réel par la seconde onde de pompe (qui est la conjuguée de phase de la première) pour générer par diffraction l'onde retournée de l'onde initiale. D'autres techniques de conjugaison de phase, comme la diffusion de Brillouin stimulée, existent en optique [6–8], et certaines ont également été adaptées en acoustique [9–11] ; comme nous le verrons plus en détails au chapitre 5.1, elles utilisent une modulation du milieu analogue à celle induite par les deux ondes de pompes.



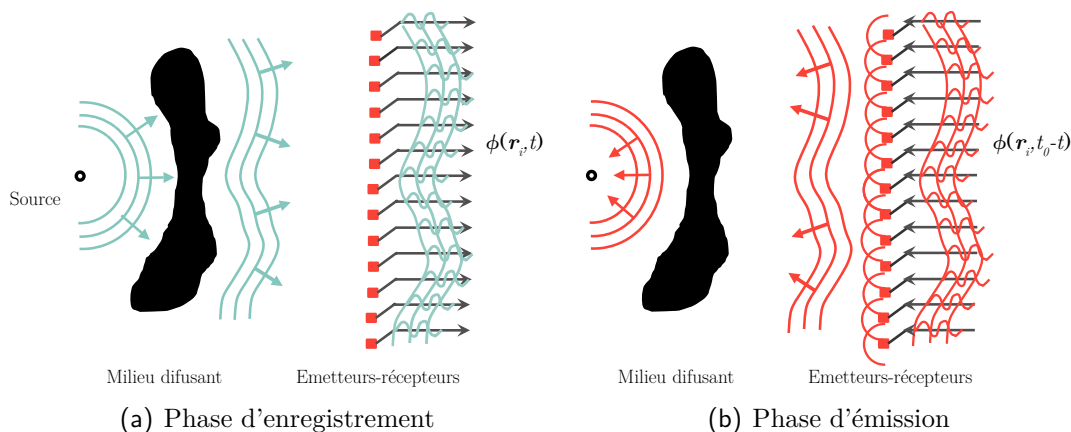
**Figure 1.2** – Schéma de principe du mélange à quatre ondes dégénéré. Les deux ondes de pompe intenses interagissent dans le milieu non linéaire avec l'onde incidente pour générer une onde proportionnelle à son retourné temporel.

Les conditions d'accord de fréquence (entre l'onde à retourner et les ondes de modulation), imposées par le mécanisme de retournement dans ces diverses techniques de conjugaison de phase, restreignent leur application à des ondes monochromatiques exclusivement.

### 1.3 Le retournement temporel large bande d'ondes acoustiques

Pour retourner une onde polychromatique, telle qu'une impulsion brève, un autre principe a été développé en acoustique [12–14], baptisé "miroir à retournement temporel" par ses concepteurs.

Comme pour les techniques de type holographique, il repose sur le fait que le champ dans un volume puisse être reconstruit par l'information enregistrée sur une surface. Le procédé utilise un réseau d'émetteurs-récepteurs (des transducteurs pour les ondes ultrasonores) disposés sur une surface entourant le volume considéré. Dans une première phase d'enregistrement, le champ d'onde acoustique est enregistré localement à la position de chaque récepteur au cours du temps. Le signal obtenu en chaque point est alors numérisé et la séquence obtenue est inversée sur ordinateur. Puis, dans une deuxième phase, ces signaux inversés sont émis simultanément depuis chacun des points d'enregistrement initiaux du réseau. Si les sources de l'onde initiale et la zone d'observation de l'onde ré-émise depuis le réseau sont situées dans un domaine de champ lointain par rapport aux émetteurs-récepteurs, l'onde obtenue par ce procédé est une bonne approximation du retourné temporel de l'onde initiale [15].



**Figure 1.3** – Schéma de principe des cavités à retournement temporel. Dans une première phase (a), le champ d'onde est enregistré sur un réseau d'émetteurs-récepteurs. Dans une deuxième phase (b), le signal *inversé temporellement* est réémis par les émetteurs-récepteurs. Une onde retournée temporellement est obtenue.

Ce procédé a été initialement développé pour la focalisation d'ondes ultrasonores [16] dans divers contextes comme les milieux réverbérants et chaotiques [17, 18] ou les milieux complexes [19]. Dans ces derniers, le désordre du milieu constitue de façon remarquable une aide à la focalisation [20, 21]. L'opération de retournement temporel effectuée possède une large bande passante, limitée en premier lieu par celle des transducteurs. Son principe est applicable à d'autres types d'ondes et a ainsi également été démontré pour des ondes élastiques [22], visco-élastiques [23], électromagnétiques [24] ou encore des ondes à la surface d'un liquide [25–28]. Il n'est en revanche pas applicable à l'optique par faute de récepteurs assez rapides pour enregistrer directement l'amplitude des ondes lumineuses. Pour ce type d'ondes, d'autres procédés ont été proposés [29–31] ou mis en œuvre [32] reposant sur l'utilisation de structures spatiales dont les paramètres sont contrôlés dans le temps. Ils sont applicables dans des géométries unidimensionnelles et ne permettent pas de générer directement le retourné temporel d'un champ d'onde donné, mais constituent un moyen, pour des paquets d'onde de fréquence porteuse connue, d'en retourner temporellement l'enveloppe.

Ces derniers procédés témoignent néanmoins des nombreuses possibilités offertes par le contrôle temporel des propriétés du milieu de propagation. L'étude des propriétés des ondes dans un milieu variant dans le temps connaît actuellement un développement important [33–41]. Nous allons montrer dans la partie suivante, en nous inspirant de la célèbre expérience de pensée du démon de Loschmidt (voir section 2.1), que nous pouvons utiliser ce type de manipulation temporelle pour générer le retourné temporel d'une onde de large spectre.



---

Retourner le temps instantanément

---

**Table des matières**

---

2.1	Un démon de Loschmidt pour les ondes . . . . .	<b>27</b>
2.1.1	Le retournement du temps par le démon de Loschmidt . . . . .	27
	Incompatibilité entre réversibilité microscopique et irréversibilité macroscopique . . . . .	27
	Irréversibilité "pratique" de systèmes réversibles classiques . . . . .	29
	Le démon de Loschmidt pour d'autres systèmes . . . . .	30
2.1.2	Émergence d'une onde retournée temporellement par "refroidissement de Loschmidt" . . . . .	32
	"Refroidissement de Loschmidt" . . . . .	32
	Généralisation à tout découplage du champ et de sa dérivée temporelle	34
2.2	Un retournement temporel instantané par disruption de la célérité . . . . .	<b>37</b>
2.2.1	Propagation d'une onde et frontières temporelles . . . . .	37
	Du théorème de Cauchy aux fonctions de Green . . . . .	37
	Continuités du champ à travers une frontière temporelle . . . . .	38
	Décomposition explicite en ondes contrapropagatives dans le cas unidimensionnel . . . . .	39
2.2.2	Découplage du champ et de sa dérivée par un choc bref et intense de célérité . . . . .	40
	"Lame mince temporelle" . . . . .	40
	Modélisation par une fonction delta de Dirac et dimension quelconque	42
2.2.3	Émergence instantanée d'une onde retournée temporellement . . . . .	42
	Découplage et onde retournée . . . . .	42
	Une nouvelle approche du retournement temporel : le Miroir temporel instantané . . . . .	43
	Quelle type d'ondes pour une preuve de concept ? . . . . .	44

---



Dans cette partie, nous présenterons une nouvelle approche de retournement temporel basée sur une perturbation de l'évolution du champ d'onde induite par une modification temporelle de la célérité du milieu. Dans une première section, nous présenterons la célèbre expérience de pensée du démon de Loschmidt et nous en tirerons une variante ondulatoire de "refroidissement" du champ d'onde, faisant apparaître une onde retournée temporellement. Nous montrerons que l'obtention d'une onde retournée peut être généralisée à tout "découplage", effectué en tout point et en un instant donné, entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle, qui caractériser à eux deux l'évolution ultérieure spontanée de l'onde. Dans une deuxième section, nous montrerons comment obtenir un tel découplage à l'aide d'une modification brève et intense des propriétés du milieu. Nous obtiendrons ainsi un nouveau type de procédé pour réaliser un retournement temporel.

## 2.1 Un démon de Loschmidt pour les ondes

Cette section présentera un nouveau principe pour la génération d'une onde retournée temporellement, inspirée du démon de Loschmidt. Nous présenterons d'abord ce démon, imaginé par Loschmidt en son temps pour illustrer les contradictions entre différentes descriptions de la cinétique des gaz, et nous verrons pourquoi cette approche est pertinente pour sonder la réversibilité des nombreux systèmes, notamment des systèmes ondulatoires. Nous montrerons ensuite que le principe de superposition permet d'envisager pour les systèmes ondulatoires une variante plus simple de cette expérience de pensée, que nous baptiserons "refroidissement de Loschmidt", conduisant à l'apparition d'une onde retournée temporellement. Nous montrerons enfin que l'ingrédient essentiel de cette opération est un découplage instantané entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle et nous généraliserons ce nouveau principe de retournement temporel.

### 2.1.1 Le retournement du temps par le démon de Loschmidt

#### Incompatibilité entre réversibilité microscopique et irréversibilité macroscopique

La réversibilité temporelle est une caractéristique de nombreux systèmes en physiques. Comme précédemment, nous entendons ici la réversibilité au sens de symétrie temporelle : si une évolution observable dans le temps d'un système donné, caractérisée par une fonction  $S(t)$  est possible, son évolution inverse, "comme si le film était joué à l'envers" caractérisée par  $S(-t)$  est également possible. Pour les ondes, la réversibilité vient du fait que leur évolution temporelle est régie par un terme de dérivée d'ordre deux en temps dans l'équation des ondes, qui est invariant par changement de variable de  $t$  en  $-t$ . De façon évidente, c'est également le cas pour tous les oscillateurs harmoniques non amortis (pendule, système masse ressort, etc.). C'est encore pour la même raison que les mouvements des particules interagissant deux à deux selon un potentiel d'interaction dépendant de leur distance relative (interactions gravitationnelle, électrostatiques, ...) sont aussi décrits classiquement par des équations de Newton réversibles temporellement [42]. Cependant, dans le cadre de la thermodynamique, qui décrit l'évolution conjointe d'un grand nombre de particules au niveau macroscopique, c'est l'irréversibilité qui caractérise l'évolution physique (notamment à travers le deuxième principe). Ainsi apparaît une contradiction fondamentale entre les descriptions classiques microscopiques et macroscopiques des processus physiques mis en jeu dans l'évolution spontanée d'un ensemble formé d'un très grand nombre de particules. Cette contradiction a été mise en évidence par Loschmidt [43] au XIX<sup>e</sup> siècle dans une critique de la théorie de la cinétique des gaz de Boltzmann [44]. Il s'oppose à l'idée selon laquelle la théorie de Boltzmann permet de déduire le théorème de "Thomson-Clausius" (deuxième principe) de la description microscopique des vitesses

des particules, associées à la distribution de Maxwell. Pour illustrer le paradoxe que représente une déduction, à partir des lois microscopiques réversibles, des lois macroscopiques irréversibles de la thermodynamique, Loschmidt imagine une expérience de pensée simple. Il considère la situation d'un gaz de particules soumis uniquement à un champ de gravité, ayant évolué, depuis un instant initial  $t_{\text{initial, hors éq.}}$  auquel le système est dans un état initial particulier loin de l'équilibre, vers l'état d'équilibre stationnaire prédit par la théorie de Boltzmann, atteint à un instant ultérieur  $t_0$ . L'état initial est caractérisé par l'ensemble  $(\vec{r}_i(t_{\text{initial, hors éq.}}), d\vec{r}_i/dt(t_{\text{initial, hors équilibre}}))$  des valeurs des positions et des vitesses des  $N$  particules composant le système. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz [45], ces conditions initiales (aussi appelées conditions de Cauchy), suffisent à déterminer l'évolution ultérieure  $(\vec{r}_i(t))_{i \in [1, N]}$  du système ( régi par le système des  $N$  équations différentielles linéaires couplées du mouvement des différentes particules). À l'instant  $t_0$ , où le système est à l'équilibre de Boltzmann, Loschmidt imagine d'inverser instantanément les vitesses de toutes les particules :

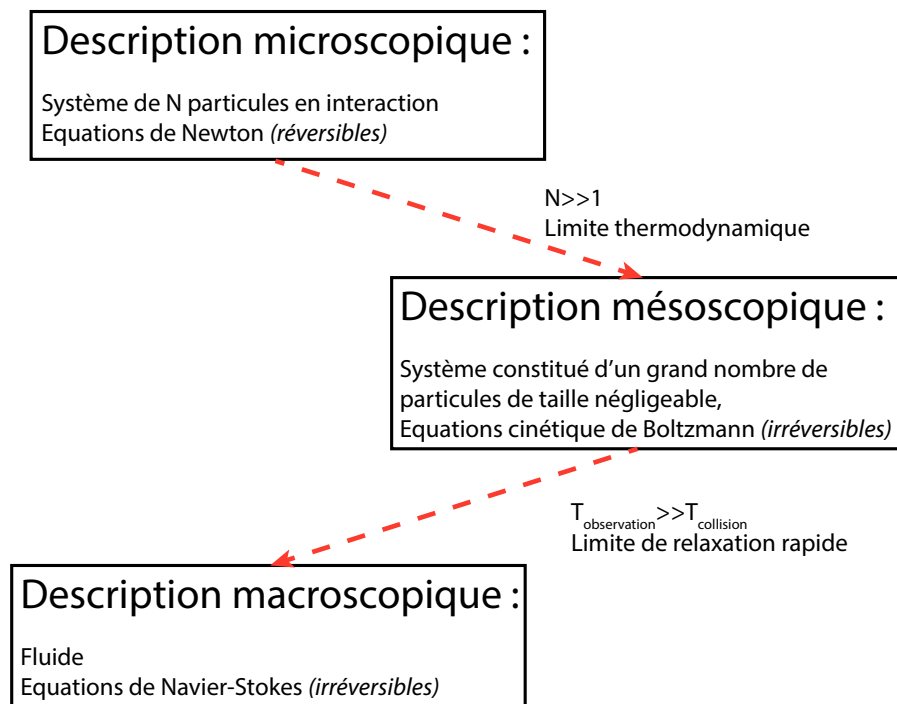
$$\forall i \in [1, N], \left( \vec{r}_i(t_0^-), \frac{d\vec{r}_i}{dt}(t_0^-) \right) \rightarrow \left( \vec{r}_i(t_0^+), \frac{d\vec{r}_i}{dt}(t_0^+) \right) = \left( \vec{r}_i(t_0^-), -\frac{d\vec{r}_i}{dt}(t_0^-) \right). \quad (2.1)$$

Cette opération, communément appelée aujourd'hui opération du démon de Loschmidt, constitue bien évidemment une expérience de pensée. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'unique évolution ultérieure acceptable est donnée par le retourné temporel de l'évolution précédente :

$$\forall t > t_0, \forall i \in [1, N], \vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(2t_0 - t). \quad (2.2)$$

Notons que  $2t_0 - t = t_0 - (t - t_0)$  correspond à l'opération de retournement de la variable temporelle autour de l'instant  $t_0$ . Ainsi, à partir de l'instant  $t_0^+$ , le système évolue spontanément depuis un état à l'équilibre vers un état hors équilibre (atteint à l'instant  $2t_0 - t_{\text{initial, hors équilibre}}$ ). On peut ainsi a priori envisager n'importe quelle évolution. Ce résultat est en contradiction avec le second principe selon lequel toute évolution spontanée d'un système isolé s'accompagne d'une augmentation d'entropie puisque, à l'aide de cette opération d'inversion des vitesses, on peut construire, à partir de toute évolution physique, une évolution physique acceptable, retournée temporellement, associée à une décroissance de l'entropie. Loschmidt n'en déduit pas que le deuxième principe doit être remis en cause, mais au contraire que la description microscopique réversible des interactions entre particules est un modèle idéal qui ne décrit la réalité que d'une manière approchée, de la même manière que l'oscillateur harmonique non amorti est un modèle idéal pour un pendule réel (pour lequel la friction introduit un terme de dissipation qui rend l'équation irréversible). Comment la théorie cinétique des gaz de Boltzmann parvient-elle à établir un lien entre les descriptions microscopiques et macroscopiques en dépit du fait qu'elles sont incompatibles? En déplaçant le problème par l'introduction d'une hypothèse supplémentaire à la description usuelle du mouvement microscopique des particules, communément appelée hypothèse du chaos moléculaire (ou "Stosszahlansatz", c'est-à-dire en allemand hypothèse sur le nombre (important) de collisions) : les vitesses et les positions des différentes particules sont supposées être des variables aléatoires non corrélées [46]. Cette hypothèse introduit de facto une irréversibilité de la dynamique de l'ensemble des particules et est incompatible avec la réversibilité temporelle des équations microscopiques gouvernant les interactions entre les particules. Elle permet cependant à Boltzmann d'établir une description mésoscopique, statistique, du mouvement des particules au sein du gaz, constituant une base théorique à partir de laquelle il peut démontrer certaines lois macroscopiques de la thermodynamique, décrivant des états d'équilibre. La figure 2.1 schématise les positions des différentes descriptions physiques existantes pour un gaz de particules. Plusieurs travaux

(voir notamment [42, 47–50]) ont permis d'étendre l'approche de Boltzmann à des systèmes hors équilibre en démontrant que les équations de Boltzmann convergeaient asymptotiquement dans certains régimes vers certaines équations macroscopiques hydrodynamiques, comme les équations de Navier-Stokes pour un liquide visqueux incompressible, mais le problème reste ouvert pour d'autres régimes [51]. De surcroît, la question clef de l'établissement du lien entre le niveau de description microscopique (réversible) et les équation de Boltzmann (irréversibles) est un problème encore largement ouvert. Notons que des avancées importantes ont très récemment été réalisées dans cette direction par Bodineau *et al* [52]. Ils reprennent notamment les idées de Grad [53] et Lanford [54] : en faisant certaines hypothèses sur la distribution statistique des *conditions initiales* (inconnues lors d'une expérience), le système (ici des sphères dures) vérifiera les équations macroscopiques (ici de Fourier-Stokes) avec une probabilité qui tend vers l'unité à grand nombre de particules.



**Figure 2.1** – Est-il possible d'unifier les descriptions physiques utilisées aux différentes échelles par un passage à la limite? Des liens ont été établis dans certains régimes particuliers mais d'autres sont encore largement incompris [52].

### Irréversibilité "pratique" de systèmes réversibles classiques

L'expérience de pensée du démon de Loschmidt, bien qu'impossible à réaliser à ce jour, a ainsi permis de mettre en évidence des incompatibilités fondamentales entre différentes descriptions de la dynamique des particules d'un fluide. Remarquons par ailleurs que, en plus de son infaisabilité pratique, la réalisation d'une inversion temporelle instantanée sur un gaz de particules, telle qu'envisagée par Loschmidt, se heurte à un autre obstacle essentiel. La dynamique des interactions d'un système de nombreuses particules présente la particularité d'être chaotique [55]. La sensibilité aux conditions initiales implique que toute erreur effectuée lors du retournement des vitesses croît exponentiellement avec le temps, si bien que la dynamique après l'action du démon s'éloigne rapidement du retourné temporel de la dynamique initiale, rendant le procédé inefficace. Cette impossibilité d'effectuer un démon de Loschmidt en pratique met donc en évidence une

autre forme d'irréversibilité ("pratique"), contenue dans les équations (pourtant réversibles) de la dynamique moléculaire.

Ainsi, l'expérience de pensée du démon de Loschmidt a permis de soulever une question fondamentale sur la dynamique des gaz en révélant un aspect essentiel, celui de la réversibilité temporelle. Dans la suite de cette section, nous allons montrer que cette démarche peut être pertinente pour l'étude de nombreux systèmes, et nous nous en inspirerons en particulier pour explorer la réversibilité temporelle des systèmes ondulatoires.

### Le démon de Loschmidt pour d'autres systèmes

*Inversions de l'excitation appliquée au système :*

L'intérêt du concept de retournement instantané de l'évolution d'un système physique dépasse le seul cadre de la théorie cinétique des gaz et cette expérience de pensée peut être adaptée pour étudier la réversibilité temporelle d'autres systèmes. Afin de montrer comment cette adaptation est possible, citons-en ici quelques exemples caractéristiques. Le plus célèbre est le concept d'écho de Loschmidt, qui a été développé pour étudier la robustesse de la réversibilité de plusieurs systèmes quantiques, sur le modèle des travaux pionniers de Hahn [56], qui réalisa l'inversion temporelle instantanée de la précession de spins nucléaires. Dans ces travaux, les précessions de spins sont gouvernées par des équations différentielles d'ordre un de la forme :

$$\frac{dS}{dt} = H[S], \quad (2.3)$$

où  $S$  est le moment magnétique global et  $H$  est un opérateur qui dépend du champ magnétique appliqué sur le système. Par une modification importante et brève du champ appliquée à un instant  $t_0$ , une inversion instantanée équivalente de cet opérateur est obtenue :

$$\begin{cases} t < t_0, H(t) = H_0 \\ t > t_0, H(t) = -H_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Le changement effectué sur l'équation d'évolution du système est équivalent à la transformation  $dS/dt \rightarrow -dS/dt$ , correspondant au changement de variable  $t \rightarrow -t$ , et, comme pour le démon de Loschmidt, le résultat est une inversion de la dynamique du système à partir de l'instant  $t_0$ .

D'autres applications de l'idée de Loschmidt suivent le même schéma. Ainsi, une version adaptée de l'opération de retournement du démon de Loschmidt a été utilisée dans le cadre de l'étude d'un système quantique chaotique, le modèle du "delta kick rotor" [55, 57, 58]. Dans ces travaux, le système considéré est un condensat de Bose-Einstein placé dans un réseau optique, auquel on applique périodiquement un "coup" de potentiel affectant sa quantité de mouvement. Un tel système est gouverné par une équation de Schrödinger, d'ordre un :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \\ H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + K \sin(kx) \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t - nT). \end{cases} \quad (2.5)$$

Comme pour les échos de spins, l'ingrédient principal de l'opération effectuée est l'inversion du signe du potentiel (des "coups"), et conduit approximativement à l'inversion de la dynamique du système. Notons que dans ces deux exemples, à la différence du démon de Loschmidt, l'action effective réalisée pour obtenir le retournement temporel n'est pas instantanée mais continue : ainsi le signe du potentiel est inversé à partir d'un instant donné  $t_0$  et pendant toute la phase d'évolution

temporelle inversée (et non seulement en  $t_0$ ). Nous verrons ultérieurement (voir section 4.2.3) que cette différence est rendue nécessaire par le fait que les équations qui gouvernent ces deux systèmes sont d'ordre un en temps, au contraire des équations de Newton pour les particules envisagées par Loschmidt.

Remarquons également que ce schéma d'étude, dans lequel on observe l'évolution d'un champ d'onde sous l'effet d'une action extérieure dont on retourne l'évolution temporelle, n'est pas réservé à la physique quantique. Il a été utilisé par exemple dans le cas des ondes à la surface d'un bain liquide mis en vibration verticalement. Il est bien connu depuis Faraday [59] que des ondes peuvent apparaître spontanément à la surface de ces bains sous l'effet d'une vibration périodique. CPietschmann *et al* ont comparé dans ce contexte les effets obtenus par une vibration temporellement asymétrique appliquée dans un sens d'évolution et dans l'autre [60]. Les ondes spontanées de Faraday possèdent le même seuil d'instabilité dans les deux cas ce qui témoigne d'une réversibilité particulière de ce système paramétrique, mais les motifs obtenus sont différents, suivant le sens d'évolution du mouvement de vibration du bain, ce qui montre que cette réversibilité disparaît en régime non linéaire.

L'approche de retournement temporel par une action équivalente à celle d'un démon à la Loschmidt a ainsi été adaptée dans de nombreux contextes, et a permis de mettre en évidence des propriétés fondamentales de réversibilité.

*Le démon de Loschmidt ondulatoire :*

Notons que tous les systèmes que nous venons de présenter possèdent une caractère ondulatoire lié à l'existence de phénomène d'interférences. L'approche de Loschmidt se révèle donc particulièrement pertinente dans le contexte ondulatoire. C'est notamment le cas pour les systèmes classiques, gouvernés par l'équation de d'Alembert. En effet, le principe d'une inversion de l'évolution temporelle par une modification instantanée des paramètres caractérisant le système peut être *directement* transposé et conduit à un retournement temporel (théorique) "robuste". L'équivalent ondulatoire du démon de Loschmidt s'écrit sous une forme proche du démon de Loschmidt pour les particules (2.1) :

$$\forall \vec{r}, \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) \rightarrow \left( \phi(\vec{r}, t_0^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) \right) = \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), -\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right). \quad (2.6)$$

Le retournement de la vitesse dans le cas d'un système (discret) de particules est remplacé pour un système ondulatoire par le retournement de la dérivée temporelle du champ d'onde. De façon analogue au cas des particules, le théorème de Cauchy-Kowalevski [61,62] donne l'unicité de la solution de l'équation de d'Alembert vérifiant ces (nouvelles) conditions "initiales", et permet de conclure que l'onde obtenue par cette opération est nécessairement l'onde retournée temporellement :

$$\forall \vec{r}, \forall t > t_0, \phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, 2t_0 - t). \quad (2.7)$$

Cette propriété théorique résiste à la présence d'un désordre [15]. Elle est surtout robuste aux imperfections : le système étant linéaire, il n'est pas chaotique et il n'y a pas de croissance rapide dans le temps d'une erreur induite lors du retournement. Contrairement à la dynamique d'un gaz newtonien de particules, celle d'un champ d'onde régi par l'équation de d'Alembert est donc "véritablement" réversible.

Notons que cette opération de retournement temporel instantanée par inversion de la dérivée temporelle du champ a déjà été envisagée d'un point de vue théorique par des physiciens [18] et des mathématiciens [63] ayant étudié le retournement temporel en acoustique. Ces derniers, qui

utilisent cette approche plus simple mathématiquement pour modéliser les phénomènes observés dans les expériences de retournement temporel utilisant un réseau de transducteurs (voir la partie 1), introduisent de surcroît une fonction d'amplification et une fonction de "floutage", qui modifient la nouvelle condition initiale (2.6), pour prendre en compte les défauts introduits lors de l'opération de traitement du signal et de ré-émission.

## 2.1.2 Émergence d'une onde retournée temporellement par "refroidissement de Loschmidt"

### "Refroidissement de Loschmidt"

Le retournement instantané, sur tout l'espace, de la dérivée du champ d'onde ne semble pas plus simple à mettre en œuvre que celui de la vitesse pour les particules et le démon de Loschmidt ondulatoire reste à ce jour, tout comme son équivalent pour les particules, une expérience de pensée. Il est cependant intéressant de constater que la linéarité de l'équation des ondes (1) nous permet d'envisager une approche plus simple et plus générale pour générer à la Loschmidt (instantanément) une onde retournée temporellement. Considérons l'opération suivante d'effacement de la dérivée temporelle :

$$\forall \vec{r}, \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) \rightarrow \left( \phi(\vec{r}, t_0^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) \right) = \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), 0 \right). \quad (2.8)$$

Par analogie avec le "refroidissement delta kick" effectué sur des particules d'un gaz quantique (et sur lequel nous reviendrons ultérieurement) [64], nous appelons cette opération le "refroidissement de Loschmidt". Notons que le terme de refroidissement est ici également naturel car l'opération correspond à un gel du champ d'onde. Pour donner une image visuelle, on peut imaginer l'expérience de pensée suivante. Une vague (*i.e.* une onde de surface) se propage à la surface d'un liquide jusqu'à l'instant  $t_0$ . On suppose qu'à cet instant, "un démon" est capable d'induire un gel instantané (infiniment rapide devant le mouvement de la vague) de l'ensemble du liquide. Le champ d'élévation de la surface a conservé par cette opération la forme qu'il avait immédiatement avant le gel. En revanche, il n'évolue plus temporellement ( $\partial \phi / \partial t = 0$ ). Si, ensuite, le démon est capable de refaire fondre le liquide instantanément, celui-ci évolue par la suite d'après les conditions initiales de l'équation (2.8).

Comment le champ d'onde évolue-t-il après cette opération de refroidissement de Loschmidt ? La solution est obtenue par le théorème de superposition qui s'applique à ce système linéaire. En effet, les nouvelles conditions initiales issues de cette opération peuvent être décomposées de la façon suivante :

$$\left( \phi(\vec{r}, t_0^-), 0 \right) = \frac{1}{2} \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) + \frac{1}{2} \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), -\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right). \quad (2.9)$$

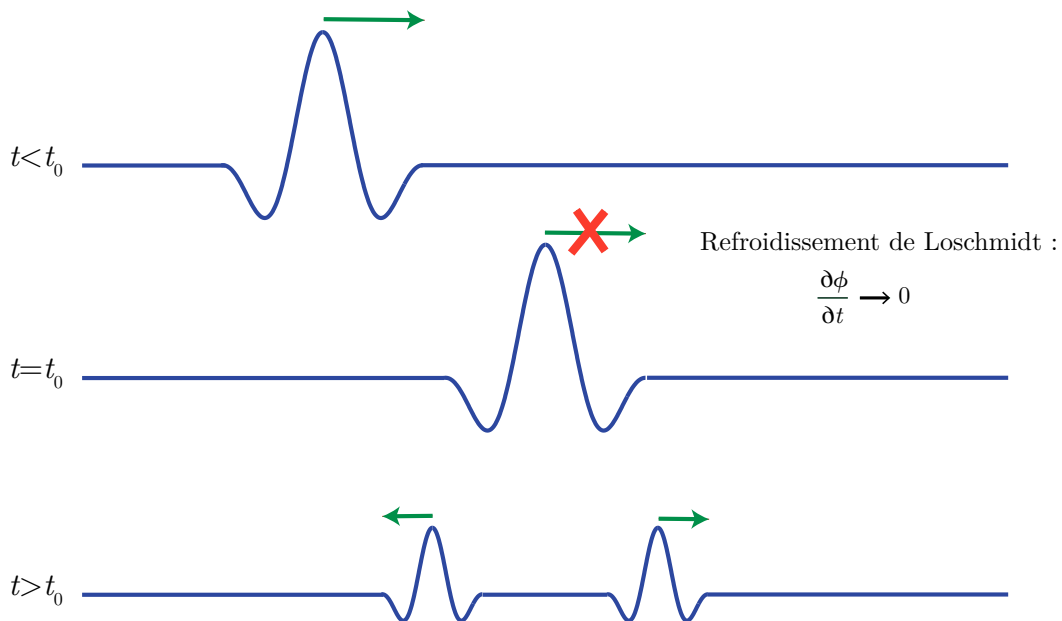
Par théorème de superposition, aux instants ultérieurs  $t > t_0$ , l'unique champ d'onde vérifiant les conditions de Cauchy (2.8) est la somme du champ d'onde vérifiant les conditions de Cauchy du premier terme de la décomposition et du champ d'onde vérifiant les conditions de Cauchy du second terme de la décomposition. Le premier terme correspond exactement aux valeurs prises par le champ d'onde et de sa dérivée temporelle juste avant l'opération de refroidissement de Loschmidt, multipliées par un facteur un demi. Par linéarité, le champ d'onde solution associé est donc le champ non perturbé qui aurait été obtenu sans opération de refroidissement de Loschmidt, diminué de moitié en amplitude. De même, le deuxième terme de la décomposition (2.9) correspond (à un



facteur d'amplitude un demi près) au conditions de Cauchy du démon de Loschmidt ondulatoire (2.6) et correspond par conséquent au champ d'onde retourné temporellement. Ainsi, le champ d'onde résultant peut être séparé en deux composantes dont l'une est associée à une propagation normale et l'autre est le retourné temporel de l'onde initiale :

$$\forall t > t_0, \phi(\vec{r}', t) = \frac{1}{2}\phi_{\text{non perturbé}}(\vec{r}', t) + \frac{1}{2}\phi_{\text{non perturbé}}(\vec{r}', 2t_0 - t). \quad (2.10)$$

Dans l'exemple de la vague, après l'opération de refroidissement de Loschmidt, celle-ci se scinde spontanément en deux parties égales d'amplitude moitié : l'une d'entre elles poursuit sa propagation dans la direction de propagation initiale, tandis que l'autre se propage dans la direction opposée, en suivant l'évolution temporelle inverse de la vague initiale. Le schéma de principe de cette opération de pensée est présenté à la figure 2.2.



**Figure 2.2** – Schéma de principe du refroidissement de Loschmidt. À l'instant  $t_0$ , la dérivée temporelle du champ d'onde est annulée par un "démon". Cela revient à figer le champ d'onde instantanément. Lorsque le champ est aussitôt "relâché" par le démon, rien ne privilégie une direction de propagation par rapport à l'autre. Le champ d'onde se sépare donc en deux composantes d'amplitudes égales, l'une se propageant vers l'avant, l'autre dans la direction opposée. Cette dernière est proportionnelle au retourné temporel de l'onde initial (avec une amplitude moitié).

Notons que ce résultat est lié à la nature ondulatoire du système et ne serait pas obtenu pour un refroidissement de Loschmidt appliqué à des particules. En effet, si, "un démon", au lieu d'inverser la vitesse de chacune des particules d'un gaz comme celui imaginé par Loschmidt, l'annule, la particule, parce qu'elle est par définition un quantum indivisible de matière, ne se scinde pas spontanément en deux parties superposées. Le théorème de superposition ne s'applique pas et on ne crée pas de système retourné temporellement. Dans un gaz dilué de particules interagissant essentiellement par collisions, l'effet de ce refroidissement serait d'arrêter l'évolution du système en immobilisant toutes les particules. Le terme de refroidissement prend ici tout son sens : l'opération peut être assimilée à l'accession instantanée à un état de température nulle. Il est utile de signaler ici que cette procédure a pu être mise en œuvre dans ce contexte particulière, grâce à une technique inventée par Ammann et Chistensen [64], qu'ils ont baptisée "refroidissement par coup delta". Dans ces travaux, les auteurs présentent une procédure permettant de réaliser une distribution de vitesse initiale connue pour les particules, puis, grâce à l'allumage pendant un

temps très bref d'un potentiel extérieur, nommé "coup delta" en référence à la fonction delta de Dirac qui correspond à l'évolution temporelle de ce potentiel, ils parviennent à induire pour chaque particule un changement de quantité de mouvement égal à sa quantité de mouvement initiale, de sorte que sa vitesse après le coup soit nulle. Ainsi, ces expériences réalisent le pendant pour les particules de l'expérience de pensée du refroidissement de Loschmidt ondulatoire que nous venons de présenter, avec un résultat très différent de celui qui serait attendu pour des ondes. Remarquons qu'aux échelles considérées pour ce type de refroidissement d'atomes, la dualité onde-corpuscule se manifeste et les atomes doivent être décrit par des fonctions d'ondes. Cependant, si le théorème de superposition s'applique aux fonctions d'ondes gouvernées par l'équation de Schrödinger, la structure différente de cette équation empêche d'utiliser le principe de refroidissement décrit précédemment pour générer une fonction d'onde retournée temporellement. Les particules quantiques se comportent donc vis à vis de cette opération essentiellement comme le feraient des particules classiques. Nous y reviendrons en détail à la section 4.2.3.

### Généralisation à tout découplage du champ et de sa dérivée temporelle

En tirant parti du théorème de superposition, nous avons donc obtenu, à partir de la procédure de Loschmidt, une variante, le refroidissement de Loschmidt, qui n'est pas applicable au système de particules, mais qui permet de retourner temporellement (partiellement) les champs d'ondes classiques, régis par l'équation de d'Alembert (1). Cette approche ouvre de nombreuses possibilités car cette propriété remarquable de génération d'une onde retournée temporellement peut être généralisée à tout un ensemble d'opérations similaires. L'ingrédient essentiel de cette opération est en effet le "découplage" instantané du champ d'onde de sa dérivée temporelle. Ainsi, considérons par exemple le type général de découplage suivant :

$$\forall \vec{r}, \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) \rightarrow \left( \phi(\vec{r}, t_0^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) \right) = \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right). \quad (2.11)$$

De nouveau, cette condition initiale se décompose naturellement en deux termes :

$$\left( \phi(\vec{r}, t_0^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) \right) = \frac{1 + \alpha}{2} \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) + \frac{1 - \alpha}{2} \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), -\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right), \quad (2.12)$$

ce qui conduit évidemment au champ d'onde :

$$\forall t > t_0, \phi(\vec{r}, t) = \frac{1 + \alpha}{2} \phi_{\text{non perturbé}}(\vec{r}, t) + \frac{1 - \alpha}{2} \phi_{\text{non perturbé}}(\vec{r}, 2t_0 - t). \quad (2.13)$$

Comme pour le refroidissement de Loschmidt (qui constitue le cas particulier  $\alpha = 0$ ), le champ d'onde obtenu après l'opération de découplage est donc la superposition d'un terme proportionnel à l'onde initiale et d'un terme proportionnel au retourné temporel de l'onde initiale. De même, nous pouvons envisager une opération directement sur le champ plutôt que sur sa dérivée temporelle :

$$\forall \vec{r}, \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) \rightarrow \left( \phi(\vec{r}, t_0^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) \right) = \left( \alpha \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right), \quad (2.14)$$

avec un résultat très similaire :

$$\forall t > t_0, \phi(\vec{r}, t) = \frac{1 + \alpha}{2} \phi_{\text{non perturbé}}(\vec{r}, t) + \frac{\alpha - 1}{2} \phi_{\text{non perturbé}}(\vec{r}, 2t_0 - t). \quad (2.15)$$

La manière dont nous avons choisi de découpler le champ et sa dérivée temporelle jusqu'ici, par un facteur d'amplification d'une des deux composantes de l'état initial, est très particulière, mais le théorème de superposition nous permet de nous y ramener. Une opération de découplage par remplacement de la dérivée temporelle par une fonction quelconque  $f(\vec{r})$  peut s'écrire de manière générale :

$$\forall \vec{r}, \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-) \right) \rightarrow \left( \phi(\vec{r}, t_0^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) \right) = \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), f(\vec{r}) \right). \quad (2.16)$$

Cet état peut toujours être décomposé sous la forme :

$$\left( \phi(\vec{r}, t_0^-), f(\vec{r}) \right) = \left( \phi(\vec{r}, t_0^-), 0 \right) + \left( 0, f(\vec{r}) \right). \quad (2.17)$$

Le premier terme correspond à un refroidissement de Loschmidt tel que nous venons de le définir tandis que le second, comme nous le détaillerons ultérieurement, correspond à l'effet d'un champ de sources instantanées  $s(\vec{r}, t) = \delta(t - t_0)f(\vec{r})/c^2$  (voir annexe A.2). Le champ émis par ces sources se superpose alors à la fois à l'onde non perturbée et à l'onde retournée. Si ces sources sont choisies arbitrairement, indépendamment du champ initial, celles-ci n'interfèrent pas destructivement en général avec le champ retourné, qui est donc obtenu par ce découplage quelconque. Remarquons d'ores et déjà que le cas de l'équation (2.11) formellement équivalent au cas particulier où la distribution de source est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'onde initiale :  $f(\vec{r}) = \alpha \partial \phi / \partial t(\vec{r}, t_0^-)$ . Dans tous les cas (sauf le cas particulier  $\alpha = 1$ ), le découplage implique l'émergence de la superposition de différents termes, dont l'un est un correspond au retourné temporel de l'onde initial.

Ce résultat est une propriété remarquable des ondes régies par l'équation de d'Alembert (nous verrons à la section 4.2.1 qu'il se généralise à un ensemble d'équations de structure similaire, caractérisées par une dérivée seconde en temps). Qualitativement, lors de la propagation normale d'une onde  $\phi(\vec{r}, t)$ , la dérivée temporelle du champ est de façon évidente liée au champ d'onde lui-même, par les propriétés caractéristiques de la propagation (notamment la célérité du milieu). À chaque instant  $t_0$ , il existe une solution retournée temporellement *autour de*  $t_0$ ,  $\phi(\vec{r}, 2t_0 - t)$ . Autrement dit deux sens d'évolution temporelle spontanée possibles sont naturellement associés au champ d'onde à chaque instant. Et le lien entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle définit celle des évolutions possibles qui correspond à la solution considérée. Pour une onde plane progressive harmonique (monochromatique)  $\phi_{\text{OPPH}}(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ , ce lien se manifeste de façon particulièrement évidente par un facteur de proportionnalité  $\partial \phi_{\text{OPPH}} / \partial t = i\omega \phi_{\text{OPPH}}$  (où  $\omega$  dépend de la célérité à travers la relation de dispersion). Détruire ce lien brise la sélection du sens d'évolution temporelle et permet de faire apparaître l'onde retournée temporellement, selon un schéma général analogue au refroidissement de Loschmidt.

L'analyse et la généralisation du démon de Loschmidt pour les ondes nous conduit donc à envisager une méthode de production, instantanée, d'une onde retournée temporellement, basée sur un découplage entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle. Mais est-il possible d'effectuer un tel découplage? Jusqu'à présent, nous avons décrits des expériences de pensée dans lesquelles les différentes composantes de l'état du système ondulatoire peuvent être modifiées, instantanément, à souhait. Pour pouvoir appliquer ce principe, un procédé physique équivalent doit permettre, en agissant de manière extérieure sur le milieu, de provoquer les mêmes modifications sur le champ d'onde. Cette action doit donc conduire à modifier "instantanément" (c'est-à-dire sur un temps très court devant les échelles de temps typique d'évolution de l'onde initiale considérée) la dérivée du champ, tout en laissant le champ inchangé. Tirant parti du fait que la célérité est un paramètre

du milieu qui détermine les temps caractéristiques d'évolution de l'onde et scelle par conséquent le lien entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle, nous verrons dans la section suivante que nous obtenons ce résultat de façon approchée en agissant sur la célérité du milieu.

## 2.2 Un miroir temporel instantané par disruption de la célérité

Les expériences de pensée évoquées à la section précédente mettent en jeu un "démon" omnipotent, capable de changer directement à souhait les caractéristiques du champ d'onde considéré sur tout l'espace. À notre connaissance, à ce jour, aucun moyen ne permet un tel contrôle direct du champ d'onde en tout point de l'espace, quelque soit le type d'ondes considéré (électromagnétiques, acoustiques, élastiques, etc.). Nous chercherons donc dans cette section une action sur le milieu, permettant d'induire un découplage *équivalent* à l'action du démon envisagé à la partie précédente. Puisque la célérité du milieu est un paramètre évident pour caractériser l'évolution temporelle d'une onde, il est naturel d'envisager pour cette action une modification de la célérité du milieu. Usuellement, le contrôle de la célérité du milieu (c'est-à-dire de l'indice de réfraction en optique) est réalisé par une structuration spatiale indépendante du temps, mais pour correspondre à l'action du démon, la modification de célérité que nous considérons doit s'effectuer au cours du temps en tout point de l'espace. Un tel contrôle temporel des propriétés de propagation du milieu est possible dans de nombreux systèmes [10, 11, 65, 66]. Afin de montrer, dans un deuxième temps, comment un contrôle temporel bien choisi de la célérité du milieu permet de réaliser l'opération de découplage recherchée, nous allons tout d'abord présenter quelques éléments de la théorie classique de la propagation des ondes.

### 2.2.1 Propagation d'une onde et frontières temporelles

L'analyse développée à la section précédente 2.1 repose sur l'application du théorème de Cauchy, qui nous assure (de l'existence et) de l'unicité, d'une solution de l'équation d'onde 1 vérifiant des conditions initiales, définissant la valeur du champ et de sa dérivée temporelle en tout point de l'espace. Cependant, ce théorème ne donne pas l'expression explicite de cette solution. Cette dernière est obtenue en théorie classique de la propagation des ondes en faisant appel aux fonctions de Green. Nous allons ici utiliser ces dernières pour calculer explicitement le champ d'onde obtenu, à partir d'une onde initiale quelconque, lorsque l'on varie (brutalement) la célérité du milieu.

#### Du théorème de Cauchy aux fonctions de Green

La fonction de Green [67] d'une équation différentielle linéaire, parfois également appelée propagateur, est définie comme une solution de l'équation avec une distribution delta de Dirac comme terme source (le terme de fonction est un abus de langage commun auquel nous souscrivons, les fonctions de Green sont des distributions). Dans le cas de l'équation de d'Alembert, une fonction de Green vérifie donc :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = -\delta(t - t') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.18)$$

Les dérivations s'entendent sur les variables de gauche de la fonction de Green. Plusieurs distributions peuvent être solution de cette équation. Nous suivons ici les conventions de Barton [68] pour définir la fonction de Green causale à l'aide des conditions :

$$\forall t < t', G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = 0 \quad (2.19)$$

Physiquement, la fonction de Green  $G(\vec{r}, t | \vec{r}', t')$  peut donc être vue comme le champ d'onde émis par une source instantanée (émettant à l'instant  $t'$ ) et ponctuelle (émettant depuis le point  $\vec{r}'$ ). À partir de cette distribution fondamentale, il est possible d'exprimer, en utilisant les produits de convolution, le champ émis par n'importe quelle distribution de sources [68]. En l'absence de sources, il est également possible de prédire, à l'aide des mêmes fonctions de Green, la propagation d'un champ à partir de conditions aux limites (spatiales et/ou temporelles). Comme nous le montrerons en détail à la section 4.1, ceci est étroitement lié au principe d'Huygens-Fresnel, qui permet de décrire la propagation d'une onde à l'aide de sources secondaires. La démonstration et le détail des formules exprimant un champ quelconque en fonction des conditions initiales, aux limites et des sources éventuellement présentes dans le milieu, est donné dans l'annexe A (voir la "règle d'or de la propagation des ondes"). Ici, nous considérons le cas particulier d'un champ d'onde dans un milieu infini (ou de façon équivalente, possédant des conditions aux limites nulles), solution de l'équation de d'Alembert homogène (sans sources). Il peut être exprimé en fonction de ses conditions initiales à un instant  $t_0$  à l'aide des formules suivantes :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \frac{\partial \phi}{\partial t'}(\vec{r}', t_0) - \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \phi(\vec{r}', t_0) \right]. \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) n'est utile qu'à condition de connaître une expression explicite de la fonction de Green. Celle-ci est obtenue en réalisant une transformation de Fourier (spatiotemporelle) de l'équation (2.18). On obtient une expression explicite différente en fonction du nombre de dimensions de l'espace correspondant au système ondulatoire considéré (voir l'annexe A).

### Continuités du champ à travers une frontière temporelle

Pour découpler le champ et sa dérivée, nous allons considérer des frontières temporelles. Cela correspond au changement brutal, sur l'ensemble de l'espace, de la célérité du milieu :

$$\begin{cases} \forall t < t_0, c = c_0 \\ \forall t > t_0, c = c_1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Le raccord entre la fonction d'onde avant et après le changement abrupte de célérité se fait en supposant la continuité du champ d'onde et de sa dérivée à la frontière temporelle :

$$\forall \vec{r}, \begin{cases} \phi(\vec{r}, t_0^+) = \phi(\vec{r}, t_0^-) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0^-). \end{cases} \quad (2.22)$$

Cette condition peut être vue comme une conséquence du fait que le champ considéré est supposé ici vérifier l'équation de d'Alembert à tout instant, y compris l'instant  $t_0$  du changement de célérité, ce qui implique que sa dérivée seconde ne peut diverger. Notons que nous avons jusqu'ici considéré un champ d'onde scalaire sans plus de précision sur son origine. Nous reviendrons sur cette condition de continuité pour l'exemple des ondes électromagnétiques à la section 4.1.2. Dans ce cas, les ondes sont décrites par des champs vectoriels couplés et les conditions de continuité qui doivent être respectées sont en fait légèrement différentes. Nous verrons cependant que cela ne change pas le résultat que nous présentons dans cette partie.

Pour  $t \geq t_0^+$ , le champ d'onde vérifie l'équation de d'Alembert de célérité  $c_1$  et peut donc être exprimé en fonction du champ avant la frontière temporelle à l'aide des fonctions de Green  $du$

milieu à célérité  $c_1$  :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{1}{c_1^2} \left[ G_1(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \frac{\partial \phi}{\partial t'}(\vec{r}', t_0) - \frac{\partial G_1}{\partial t'}(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \phi(\vec{r}', t_0) \right]. \quad (2.23)$$

### Décomposition explicite en ondes contrapropagatives dans le cas unidimensionnel

Pour illustrer plus concrètement le résultat donné par l'équation (2.23), considérons le cas plus concret et simple unidimensionnel. D'après l'expression explicite de la fonction de Green 1D donnée dans le tableau annexe A.1, l'équation (2.23) se réécrit :

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2c_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ H \left( (t - t_0) - \frac{|x - x'|}{c_1} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t'}(x', t_0) - \delta \left( (t - t_0) - \frac{|x - x'|}{c_1} \right) \phi(x', t_0) \right], \quad (2.24)$$

où comme précédemment,  $H$  désigne la fonction Heaviside et  $\delta$  la distribution de Dirac. Remarquons d'ores et déjà que la seule différence entre cette expression et celle qu'on obtiendrait lors d'une propagation normale (sans changement de célérité dans le temps), est la valeur de la célérité ( $c_1$  au lieu de  $c_0$ ) entrant dans l'expression. Ce changement de célérité implique cependant que la propagation ultérieure, telle que prédite par la formule (2.24), est quantitativement (et comme nous l'allons montrer également qualitativement) différente. Les fonctions de Heaviside et de Dirac simplifient grandement les intégrales obtenues :

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2c_1} \int_{x-c_1(t-t_0)}^{x+c_1(t-t_0)} \frac{\partial \phi}{\partial t'}(x', t_0) dx' + \frac{1}{2} [\phi(x + c_1(t - t_0), t_0) + \phi(x - c_1(t - t_0), t_0)]. \quad (2.25)$$

L'expression obtenue est très intéressante. Le deuxième et troisième terme correspondent à deux ondes contrapropagatives : le terme en  $x - c_1(t - t_0)$  correspond à une translation sans déformation du motif du champ d'onde initial, se déplaçant vers les  $x$  croissants et le terme en  $x + c_1(t - t_0)$  est l'équivalent se déplaçant vers les  $x$  décroissants. L'intégrale peut également se décomposer en deux termes contrapropagatifs  $(1/2c_1 \int_0^{x+c_1(t-t_0)} \partial \phi / \partial t'(x', t_0) dx)$  et  $(-1/2c_1 \int_0^{x-c_1(t-t_0)} \partial \phi / \partial t'(x', t_0) dx)$ . Il correspondent également chacun à un motif initial (ici une primitive spatiale de la dérivée temporelle du champ d'onde initial), qui se déplace sans se déformer (respectivement vers les  $x$  décroissants pour le premier terme et vers les  $x$  croissants pour le second). Lors de la propagation normale d'une onde progressive (sans changement de célérité au cours du temps), les deux termes émis vers l'arrière s'annulent tandis que les deux termes émis vers l'avant donnent l'onde se propageant dans le sens de propagation initial. Ici, le changement de célérité rompt cette superposition parfaite : les interférences ne sont plus parfaitement destructives vers l'arrière et constructives vers l'avant et nous obtenons donc une onde vers l'avant modifiée et également une onde contrapropagative non nulle. Nous reviendrons sur cet aspect ultérieurement et sur son interprétation à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel (à la section 4.1).

On en déduit également directement de l'équation (2.25) la dérivée temporelle du champ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x + c_1(t - t_0), t_0) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(x - c_1(t - t_0), t_0) \right] \\ &+ \frac{c_1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + c_1(t - t_0), t_0) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - c_1(t - t_0), t_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ici, la décomposition mentionnée précédemment en quatre termes, dont deux se propagent vers les  $x$  croissants, et deux se propagent vers les  $x$  décroissants, est évidente. À ce stade, nous avons obtenu que le changement temporel de la célérité du milieu engendre des composantes

rétropropagatives en général non nulles, mais celles-ci ne peuvent pas constituer une onde retournée temporellement, puisqu'elles se propagent à une célérité différente. Pour obtenir un retournement temporel, il faut faire revenir le milieu, après un court instant, à la célérité d'origine.

## 2.2.2 Découplage du champ et de sa dérivée par un choc bref et intense de célérité

Nous avons obtenu l'expression explicite du champ d'onde après une modification de la célérité, effectuée dans tout le milieu en un instant. Cela nous permet de considérer désormais deux modifications successives de la célérité du milieu. Nous allons montrer que dans la limite d'une augmentation intense de cette dernière, immédiatement suivie d'un retour à sa valeur initiale, un découplage entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle est obtenu, similaire à celui induit par le "refroidissement de Loschmidt".

### "Lame mince temporelle"

*Équivalent temporel d'une lame à faces parallèles :*

Nous considérons désormais la succession de deux frontières temporelles symétriques. Notons que le paramètre qui intervient dans l'équation des ondes (1) est la célérité du milieu au carré, c'est donc le paramètre pertinent pour décrire l'évolution temporelle du milieu. Ici, nous considérons le cas où le milieu, initialement caractérisé par une valeur initiale de la célérité au carré  $c_0^2$ , passe pendant une courte durée à la valeur  $c_1^2 > c_0^2$  puis revient à sa valeur initiale (voir figure 2.3) :

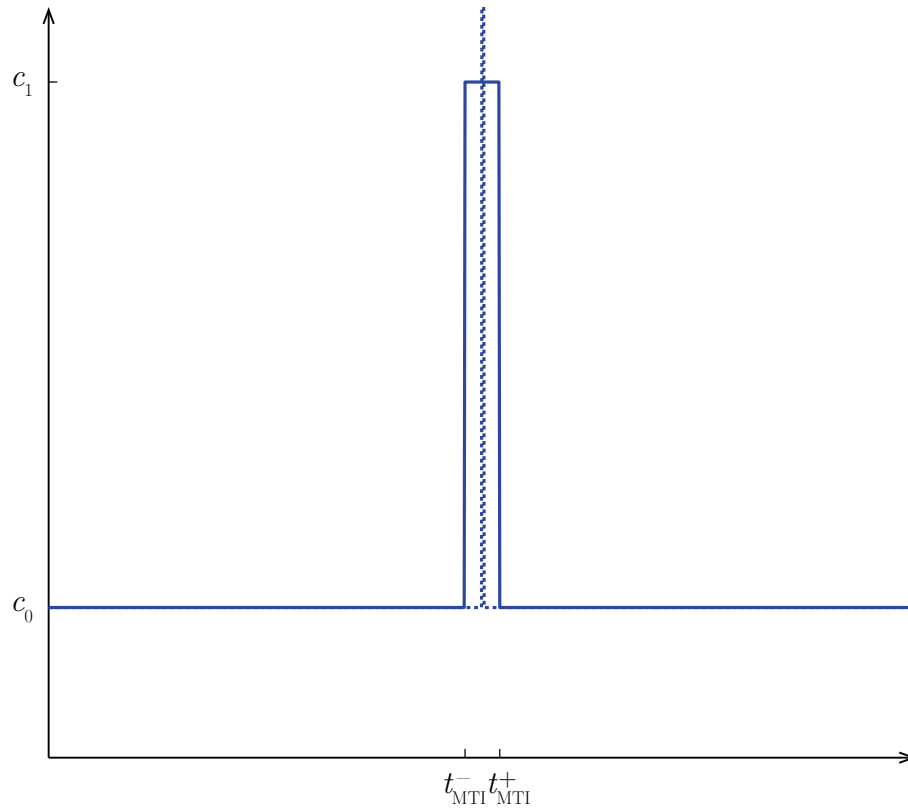
$$\begin{cases} \forall t < t_{\text{MTI}}^-, c^2 = c_0^2 \\ \forall t / t_{\text{MTI}}^- < t < t_{\text{MTI}}^+, c^2 = c_1^2 > c_0^2 \\ \forall t > t_{\text{MTI}}^+, c^2 = c_0^2. \end{cases} \quad (2.27)$$

Ceci constitue l'équivalent temporel d'une lame à faces parallèles en optique, au sein de laquelle l'indice du milieu est différent. Ici, nous supposons que la célérité est plus élevée au sein de la "lame temporelle". Que vaut une onde, se propageant initialement dans le milieu de célérité  $c_0$ , à l'issue de cette lame temporelle? Le résultat est donné par la valeur du champ d'onde et de sa dérivée temporelle à l'instant  $t_{\text{MTI}}^+$  de fin de l'épisode de célérité  $c_1$ . D'après les expressions données à la section précédente :

$$\begin{cases} \phi(x, t_{\text{MTI}}^+) = \frac{1}{2c_1} \int_{x-c_1\delta t}^{x+c_1\delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t'}(\vec{r}', t_{\text{MTI}}^-) dx + \frac{1}{2} [\phi(x + c_1\delta t, t_{\text{MTI}}^-) + \phi(x - c_1\delta t, t_{\text{MTI}}^-)] \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_{\text{MTI}}^+) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x + c_1\delta t, t_{\text{MTI}}^-) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(x - c_1\delta t, t_{\text{MTI}}^-) \right] \\ \quad + \frac{c_1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + c_1\delta t, t_{\text{MTI}}^-) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - c_1\delta t, t_{\text{MTI}}^-) \right], \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $\delta t = t_{\text{MTI}}^+ - t_{\text{MTI}}^-$ . Notons que si l'on fait simplement tendre  $\delta t$  vers zéro, le système (2.28) conduit trivialement à la continuité du champ et de sa dérivée temporelle. Pour induire un découplage de la dérivée du champ, il faut que la dérivée du champ soit notablement modifiée par son évolution au sein de la lame temporelle, sans que le champ lui-même n'ait eu le temps d'évoluer significativement. Pour ce faire, il faut que le changement de célérité soit très bref mais très important.





**Figure 2.3** – Allure de la variation temporelle de la célérité du milieu pour une "lame temporelle". Ligne continue : lame de taille finie. Ligne pointillée : cas limite de la lame infiniment mince, correspondant à une fonction delta de Dirac de même aire que la lame d'épaisseur non nulle.

*Lame mince de grande célérité :*

Nous considérons donc le cas limite où  $\delta t$  tend vers zéro en même temps que  $c_1^2$  tend vers l'infini, en laissant le produit des variations inchangé :

$$\delta t(c_1^2 - c_0^2) = c_0^2\tau, \quad (2.29)$$

où  $\tau$  est une constante. Dans cette limite,  $c_1$  est un infiniment grand mais  $c_1\delta t$  est un infiniment petit :

$$\begin{cases} c_1 = c_0\sqrt{1 + \frac{\tau}{\delta t}} \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} +\infty \\ c_1\delta t = c_0\sqrt{\delta t(\delta t + \tau)} \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Après avoir remplacé dans les expressions (2.28)  $c_1$  par sa valeur, nous obtenons à l'ordre zéro en  $\delta t/\tau$ , pour le champ d'onde et pour sa dérivée :

$$\begin{cases} \phi(x, t_{MTI}^+) = \phi(x, t_{MTI}^-) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_{MTI}^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_{MTI}^-) + c_0^2\tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, t_{MTI}^-), \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $t_{MTI}^-$  et  $t_{MTI}^+$  désignent désormais deux instants limites infiniment proches, de part et d'autre de l'instant  $t_{MTI}$  correspondant à la lame mince temporelle. Nous obtenons le résultat recherché : le champ d'onde au sortir de la lame temporelle est inchangé, mais sa dérivée temporelle a été découplée.

## Modélisation par une fonction delta de Dirac et dimension quelconque

La valeur de la célérité au cours du temps dans une lame temporelle de durée non nulle peut-être décrite par la fonction :

$$c(t)^2 = c_0^2 \left( 1 + \frac{\tau}{\delta t} H(t - t_{\text{MTI}}^-) H(t_{\text{MTI}}^+ - t) \right). \quad (2.32)$$

Le passage à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro donne directement l'expression :

$$c(t)^2 = c_0^2 (1 + \tau \delta(t - t_{\text{MTI}})). \quad (2.33)$$

Cette disruption instantanée et intense de la célérité, induit un découplage entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle (2.31). Si nous avons présenté ici ce résultat par un passage à la limite, pour bien faire apparaître les éléments constitutifs de cette disruption et notamment les échelles couplées de l'amplitude et de la durée de variation de la célérité, il est possible de retrouver le même résultat directement en calculant le champ solution de l'équation de d'Alembert avec une célérité variant temporellement selon une fonction delta de Dirac (2.33). Ceci permet d'étendre les calculs plus simplement au cas de la dimension quelconque (voir le détail des calculs à la section 4.1). Le résultat en dimension quelconque est bien-sûr strictement identique (la dérivée seconde à une dimension dans le terme de découplage est remplacée par le laplacien). Par ailleurs, puisque le champ d'onde est solution de l'équation de d'Alembert avec la célérité  $c_0$  pour tous les instants précédents  $t_{\text{MTI}}$ , le terme de découplage proportionnel au laplacien du champ peut se réécrire sous la forme d'une dérivée d'ordre deux en temps :

$$\left( \phi(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^+) \right) = \left( \phi(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-) + \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-) \right). \quad (2.34)$$

### 2.2.3 Émergence instantanée d'une onde retournée temporellement

#### Découplage et onde retournée

Comme dans la section 2.1, ce découplage entre le champ et la dérivée correspond à l'émergence de nouvelles ondes à partir du champ initial. Le couple de conditions initiales obtenu par le choc de célérité se décompose de manière similaire à celui obtenu après l'expérience de pensée du refroidissement de Loschmidt naturellement, en trois termes :

$$\begin{aligned} \left( \phi(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^+), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^+) \right) &= \left( \phi(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-), \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-) \right) \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-), \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-) \right) \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-), -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Le premier terme correspond au champ d'onde initial non perturbé. Le deuxième terme est l'état initial associé à un champ  $\psi$  proportionnel la dérivée du champ d'onde :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{\tau}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t). \quad (2.36)$$

En supposant que le champ d'onde solution initial est suffisamment régulier (continument dérivables trois fois), on peut dériver l'équation de d'Alembert une fois par rapport au temps pour

montrer que le champ  $\psi$  est également solution de l'équation de d'Alembert. Le troisième terme, pour lequel le signe de la dérivée a été changé par rapport au deuxième, correspond donc, comme à la section 2.1, à un champ d'onde retourné temporellement :

$$\psi_{\text{RT}}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, 2t_{\text{MTI}} - t). \quad (2.37)$$

Un choc, bref et intense, de modification de la célérité, permet donc de générer en plus d'un terme qui continue à se propager dans la direction de propagation initiale, un terme d'onde rétropropagée, retournée temporellement. Qualitativement la génération d'une onde retournée temporellement par la (double) frontière temporelle peut être interprétée comme l'analogie temporelle de la réflexion (partielle) d'une onde à une frontière spatiale. Cette analogie avec la réflexion spatiale, sur laquelle nous reviendrons en détail à la section 4.1, nous conduit à baptiser ce procédé le "Miroir temporel instantané" (MTI).

Notons d'ores et déjà la principale limitation du concept : le terme retourné généré est proportionnel au retourné temporel de la dérivée temporelle du champ d'onde initial et non directement à celui du champ d'onde initial. Cependant, pour bon nombre d'applications potentielles, ceci ne constitue pas une limitation majeure, car la dérivée temporelle du champ partage de nombreuses propriétés du champ lui-même (forme générale du motif, localisation spatiotemporelle, etc.). Notamment, pourvu que l'on considère un paquet d'onde initial de spectre suffisamment étroit, le paquet d'onde rétropropagé est aussi proportionnel au retourné temporel de l'onde initiale, comme nous l'observerons expérimentalement à la partie 3. De façon remarquable, cet ordre de dérivation supplémentaire est un défaut que l'on retrouve également dans les deux autres procédés existant pour effectuer du retournement temporel d'onde, et que nous avons présentés dans la partie 1 : la conjugaison de phase (le procédé étant sélectif à une fréquence donnée, l'ordre de dérivation y apparaît simplement comme un déphasage de  $\pi/2$ ) et les cavités à retournement temporel numérique [15] (le champ retourné créé est alors en valeur approchée égal au retourné temporel de la primitive du champ d'onde initial).

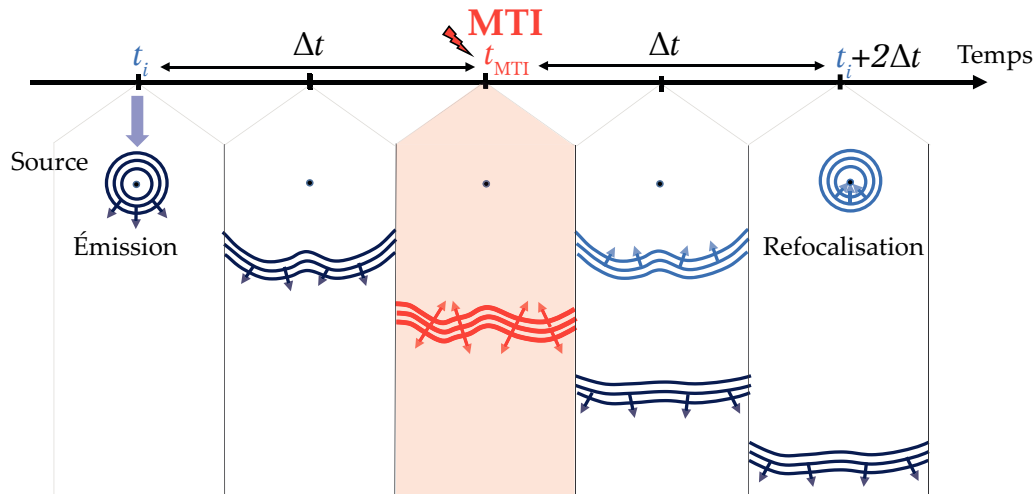
### Une nouvelle approche du retournement temporel : le Miroir temporel instantané

Le procédé de génération d'une onde retournée temporellement par miroir temporel instantané possède de nombreuses caractéristiques singulières. Contrairement au fonctionnement des cavités à retournement temporel numérique, qui repose sur une phase d'enregistrement, durant toute la propagation de l'onde initiale, par des émetteurs-récepteurs placés sur les bords du milieu, succédée ultérieurement d'une phase d'émission continue depuis les mêmes lieux, l'onde retournée par un MTI est générée **instantanément**, à l'instant du choc de célérité  $t_{\text{MTI}}$ . Après une durée  $\Delta t$ , le champ d'onde retourné est égal à (la dérivée temporelle) du champ d'onde initial  $\Delta t$  avant le choc de célérité :

$$\psi_{\text{RT}}(\vec{r}, t_{\text{MTI}} + \Delta t) = \psi(\vec{r}, t_{\text{MTI}} - \Delta t). \quad (2.38)$$

Le retournement temporel se fait donc instantanément autour de l'instant du choc  $t_{\text{MTI}}$ , qui peut être choisi arbitrairement, à n'importe quel instant de la propagation de l'onde initiale. Cette possibilité est également exclue dans le cas des cavités numériques dont le fonctionnement repose sur le fait que la propagation soit terminée (l'onde est sortie du milieu), pour pouvoir générer l'onde retournée.

La figure 2.4 représente le principe du MTI. Un paquet d'onde est émis par une source à l'instant initial  $t_i$ . Il se propage, éventuellement en étant déformé par des inhomogénéités dans le milieu. À l'instant  $t_{\text{MTI}} = t_i + \Delta t$ , un choc de célérité instantané est effectué. Cette disruption



**Figure 2.4** – Schema du concept du Miroir temporel instantané. Une onde, émise par exemple par une source à un instant  $t_i$ , se propage pendant une durée  $\Delta t$ , jusqu'à un instant  $t_{MTI}$ . À cet instant, un choc de célérité (2.33) est effectué. De façon analogue à l'expérience de pensée du refroidissement de Loschmidt décrite à la section précédente, l'onde se sépare alors en deux et une partie continue vers l'avant tandis que l'autre partie est rétropropagative. Cette dernière correspond à une composante retournée temporellement, qui se refocalise au point d'émission initial, au bout d'une même durée  $\Delta t$  après le choc.

s'accompagne d'une modification de l'état du système (découplage du champ et de sa dérivée), entraînant l'apparition de la superposition d'une onde continuant son chemin vers l'avant, et d'une onde rétropropagée. Cette dernière est une onde retournée temporellement, et reconverge donc vers le point d'émission après une nouvelle durée  $\Delta t$ .

Notons que l'onde est générée, sous l'action de la modification temporelle de la célérité du milieu, directement *dans tout le milieu* de propagation, sans utilisation d'émetteurs. La constante  $\tau$  qui détermine l'amplitude de l'onde retournée peut être modifiée en pratique en variant l'intensité ou la durée du choc de célérité (voir équation (2.29)) et le retournement temporel peut-être combiné à une amplification. Cependant, la durée pendant laquelle la forte variation de célérité est appliquée doit rester très courte devant le temps caractéristique d'évolution de l'onde pour que l'hypothèse d'instantanéité du choc soit vérifiée. Ainsi, en pratique, l'inverse de la durée (non strictement nulle) pendant laquelle a lieu l'élévation de célérité du milieu constitue une borne supérieure aux fréquences retournées par le dispositif de miroir temporel instantané.

### Quelle type d'ondes pour une preuve de concept ?

Nous avons présenté dans cette section un concept permettant, pour un champ d'onde classique, de réaliser, par une modification forte et brève de la célérité de l'ensemble du milieu de propagation, un retournement temporel instantané, équivalent à celui du démon imaginé par Loschmidt. Ce concept est universel : il s'applique à tous les champs classiques, régis par l'équation d'onde de d'Alembert. Tous ces champs peuvent donc être envisagés pour réaliser une démonstration expérimentale du concept et on trouve dans la littérature de nombreux systèmes ondulatoires pour lesquels la possibilité d'un contrôle temporel de la célérité du système a été démontrée. Citons ainsi les ondes électriques dans des lignes de transmissions agrémentées de diodes varicap [66] (pour lesquelles la célérité est modulée en faisant varier simultanément la capacité de l'ensemble des condensateurs le long de la ligne), les ondes lumineuses dans les plasmas en expansion rapide (dans lesquels l'indice de réfraction dépend de la densité du plasma) [33], ou encore les ondes acoustiques dans un milieu magnétoacoustique [10] (dont la célérité modulée par un champ magnétique).

Nous écartons d'emblée tous les systèmes unidimensionnels, n'offrant pas suffisamment de variations possibles de la configuration de l'expérience pour effectuer une étude approfondie et choisissons un système 2D offrant de nombreux avantages expérimentaux : les ondes à la surface d'un bain de liquide. Pour ces dernières, la célérité dépend de la gravité :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k}, \quad (2.39)$$

valable dans un régime de grande profondeur (devant la longueur d'onde), avec  $k$  le nombre d'onde,  $\gamma$  la tension de surface,  $\rho$  la densité du liquide et  $g$  le champ de gravité. Bien que cette propriété n'ait à notre connaissance jamais été utilisée pour cette raison, un contrôle temporel de la célérité des ondes de surface peut donc être réalisé en modulant temporellement la gravité, ce qui est obtenu simplement de manière effective en accélérant verticalement le bain de liquide. Des systèmes expérimentaux classiques [69, 70] permettent d'accélérer un petit bain de liquide (une cuve de l'ordre de la dizaine de centimètres de côté) à l'aide d'un pot vibrant à une dizaine de fois la gravité terrestre, induisant ainsi une variation relative notable de la célérité des ondes (de plusieurs unités). La lenteur des ondes de surface (typiquement de l'ordre de la dizaine de centimètres par seconde) permettent d'envisager la réalisation simple d'une action "instantanée" sur le milieu. Par ailleurs, cette lenteur, combinée à des longueurs d'onde typique de l'ordre du millimètre, permet d'observer la propagation à l'œil nu. L'évolution de l'ensemble du champ d'onde peut ainsi être suivie par une simple caméra et mesurée par des dispositifs simples [71]. Enfin, l'émission d'ondes de surface est également simple et contrôlable (il suffit de frapper la surface du liquide pour émettre des ondes, comme lorsqu'on jette un caillou dans l'eau).

D'un point de vue théorique, ces ondes ne sont régies par une équation de d'Alembert qu'en régime d'eau peu profonde et lorsque les effets de tension de surface sont négligeables (voir l'annexe B). Néanmoins, notre approche repose exclusivement sur l'utilisation du théorème de Cauchy-Kowalevski pour les équations d'ordre deux en temps et du théorème de superposition. Nous démontrerons à la section 4.2 qu'elle est donc également applicable aux ondes de surface en régime de forte profondeur (ainsi qu'à d'autres systèmes régis par des équations de structure similaire). Ainsi, malgré cette particularité, les ondes à la surface des liquides constituent un système idéal pour l'étude des variations temporelles de célérité et pour la validation expérimentale du concept du Miroir temporel instantané. La partie suivante sera consacrée au développement d'un montage expérimental permettant de réaliser cette preuve de concept.



---

Réalisation d'un Miroir temporel instantané pour les ondes de surfaces

---

**Table des matières**

3.1	Montage général : moduler la célérité des ondes de surface . . . . .	<b>49</b>
3.1.1	Moduler la célérité des ondes de surface . . . . .	49
	Moduler la gravité effective . . . . .	49
	Cuve et masse embarquée . . . . .	50
	Suivi du mouvement du bain . . . . .	50
3.1.2	Comment générer les ondes de surfaces ? . . . . .	50
	Émettre des ondes sur un bain en mouvement . . . . .	51
	Émission d'ondes complexes . . . . .	52
3.1.3	Visualisation et mesure des ondes de surface . . . . .	54
	Visualisation du champ d'onde . . . . .	54
	Mesures quantitatives reproductibles de l'élévation de la surface . . . . .	57
3.2	Choc de gravité : Observation d'une onde retournée temporellement . . . . .	<b>59</b>
3.2.1	Observation d'une onde contrapropagative . . . . .	59
3.2.2	Retournement temporel . . . . .	61
	Symétrie temporelle et compensation de la dispersion . . . . .	62
	Mesure du champ d'ondes et de l'onde retournée . . . . .	63
3.2.3	Caractérisation de l'onde retournée . . . . .	65
	Spectre de l'onde retournée : un retournement temporel large bande . . . . .	65
	Amplitude de l'onde retournée : effet de l'amplitude du choc . . . . .	67
3.3	Retournement temporel en situation de complexité . . . . .	<b>71</b>
3.3.1	Images de motifs complexes . . . . .	71
	Réapparition du motif initial à l'instant de reconvergence . . . . .	71
	Analyse de la fidélité . . . . .	73
3.3.2	Obstacle sous-marin . . . . .	75
3.3.3	Retournement temporel de sources temporellement étendues . . . . .	79

---





Cette partie présentera la réalisation expérimentale du retournement temporel instantané par choc de célérité, effectué sur des ondes à la surface d'un liquide. Tirant profit des avantages offerts par l'utilisation de ces ondes (lenteur de la propagation, facilité de visualisation et d'émission, facilité de la modulation de la célérité), nous présenterons un dispositif expérimental simple pour la mise en œuvre contrôlée du choc de célérité. Nous mettrons en évidence l'apparition d'une onde rétropropagée au moment du choc et montrerons son caractère d'onde retournée temporellement. Nous étudierons ensuite les caractéristiques de ce nouveau type de retournement temporel, en introduisant dans l'expérience différents éléments de complexité.

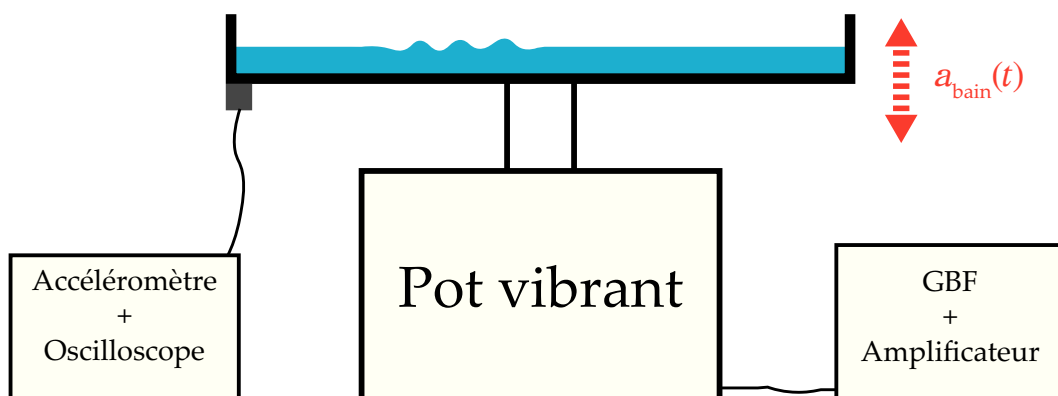
### 3.1 Montage général : moduler la célérité des ondes de surface

Grâce à la cuve à ondes, un outil pédagogique permettant leur visualisation par ombroscopie, les ondes de surface constituent un système très fréquemment utilisé pour présenter en cours de physique le concept d'une onde et les effets interférentiels. Par des techniques similaires, l'ensemble du champ d'onde peut être suivi quantitativement, sans induire de perturbation, au cours de la propagation. Par ailleurs, moduler la célérité des ondes de surface temporellement est particulièrement aisé : puisque celle-ci dépend du champ de pesanteur, il suffit de soumettre le récipient contenant le liquide à une accélération verticale contrôlée. Enfin, l'émission d'onde repose également sur un principe simple : appliquer une pression localement sur la surface à l'aide d'un objet solide ou d'un jet d'air. Cette section présentera un montage expérimental simple permettant de réaliser un contrôle temporel de la célérité des ondes ainsi que les techniques que nous utiliserons pour le suivi du champ d'onde. Nous décrirons également des dispositifs permettant de combiner ce suivi et cette modulation temporelle avec le contrôle de l'émission des ondes dans des situations.

#### 3.1.1 Moduler la célérité des ondes de surface

##### Moduler la gravité effective

Pour moduler temporellement la célérité des ondes à la surface d'un bain de liquide, notre dispositif doit permettre de contrôler le champ de pesanteur effectif au sein du liquide. Pour ce faire, la cuve contenant le liquide est placée sur un pot vibrant. Ce dernier est fixé à trois pieds réglables et l'horizontalité est réglée avec la cuve montée. La figure 3.1 représente le dispositif.



**Figure 3.1** – Schéma du dispositif expérimental. La cuve contenant le liquide est placée sur un pot vibrant permettant de l'accélérer verticalement. Le mouvement du pot vibrant est contrôlé par le signal d'un générateur basse fréquence et suivi par un accéléromètre.

La cuve est mise en mouvement verticalement par le pot vibrant. Ce mouvement est spécifié par le signal d'un générateur basse fréquence, et suivi à l'aide d'un accéléromètre (modèle Bruël & Kjør 4534-B). Les modèles de pots vibrants utilisés, le LDS V450 et le Bruël & Kjør 4808, permettent d'atteindre respectivement, avec une charge montée d'un kilogramme, 35 et 10  $g$  d'accélération maximale en régime sinusoïdal et environ 40 % de moins pour un mouvement quelconque. La célérité effective des ondes de surface est alors fonction de l'accélération de la cuve :

$$c(t) = \sqrt{\frac{g + a_{\text{bain}}(t)}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k}. \quad (3.1)$$

Pour la longueur d'onde typique de 5 mm des ondes dans l'eau dans nos expériences la variation relative maximale de célérité atteinte est ainsi d'environ 80 %.

### Cuve et masse embarquée

Les pots vibrants utilisés sont limités en force : l'accélération maximale atteignable diminue lorsque la charge embarquée augmente. Le poids de la cuve de liquide a donc été réduit au maximum pour pouvoir atteindre ces valeurs maximales. La hauteur d'eau a été choisie proche de la valeur minimale garantissant la validité du régime d'eau profonde, typiquement 5 mm dans nos expériences. En plus de l'impératif de légèreté, la cuve doit présenter une grande rigidité, pour assurer une accélération homogène du bain de liquide et ainsi une variation spatialement homogène de la célérité des ondes. Pour répondre à ces deux critères, la cuve a été construite à l'imprimante 3D (Makerbot Replicator Z18) et spécifiquement dessinée pour obtenir le meilleur compromis légèreté-rigidité. Ainsi, une cuve rigide de forme carrée de 30 cm de côté pesant 469 g a été réalisée. Le fond de la cuve possède une épaisseur de 8 mm, et est rempli d'une structure alvéolée "en nid d'abeilles". Ce dernier est renforcé par un ensemble de quatre nervures de 2 cm d'épaisseur, passant par le centre (deux selon les diagonales et deux parallèles aux côtés).

### Suivi du mouvement du bain

Deux méthodes ont été utilisées pour mesurer l'accélération imposée à la cuve de liquide dans nos expériences. Premièrement, un accéléromètre (modèle Bruël & Kjør 4534-B, taux de conversion 10 mV/ms<sup>-2</sup>) a été vissé à la cuve sur l'un de ses côtés. Il permet d'obtenir une mesure directe du signal d'accélération avec une précision de  $\pm 10\%$  sur l'amplitude et  $\pm 5^\circ$  sur la phase jusqu'à la dizaine de kilohertz. Le mouvement vertical imposé au bain a également directement été mesuré en suivant à la caméra rapide (500 images par seconde) et à l'aide d'un téléobjectif le déplacement d'un repère placé sur le côté de la cuve.

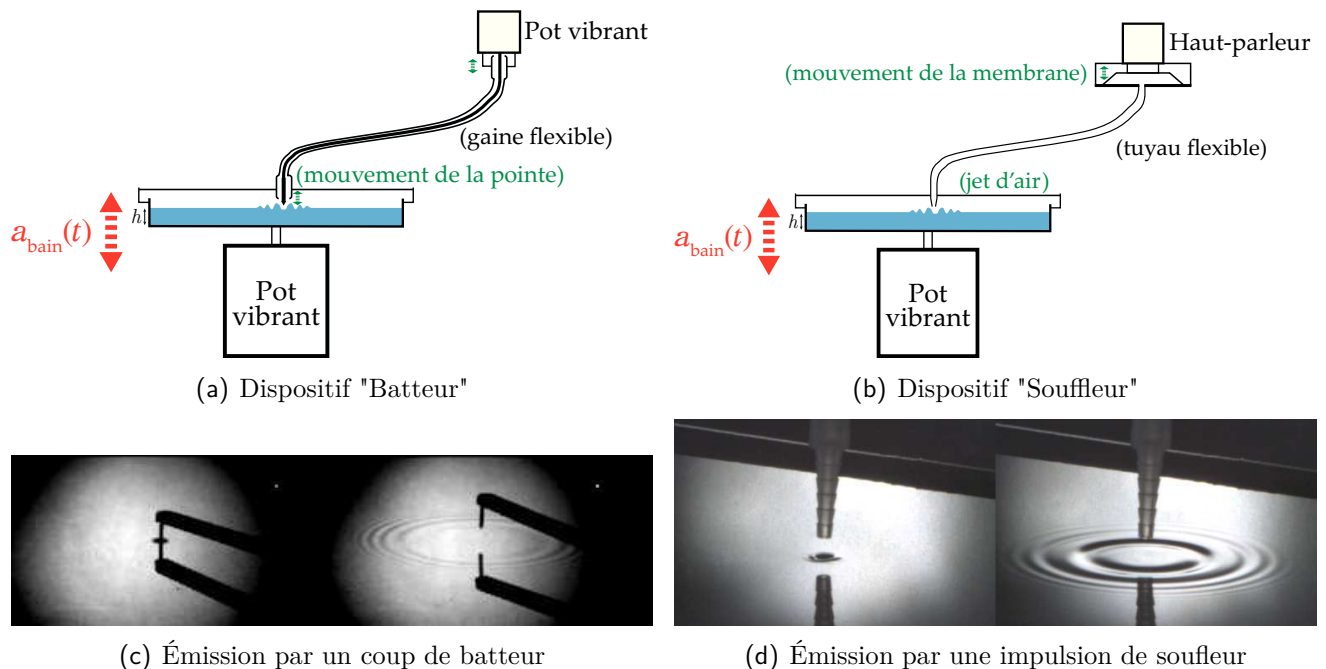
### 3.1.2 Comment générer les ondes de surfaces ?

Pour émettre des ondes de surface, il suffit d'imposer localement une déformation de la surface du liquide. Cela peut être réalisé en frappant la surface par un objet solide ou à l'aide d'un jet d'air induisant une pression sur la surface vers laquelle il est dirigé. Nous présentons dans cette section les différents dispositifs utilisés pour produire différents types de sources d'onde de surface tout en assurant la meilleure visualisation possible du champ d'onde. Les dispositifs ont été adaptés pour fonctionner y compris lorsque le bain est en mouvement.

## Émettre des ondes sur un bain en mouvement

*Un batteur dans le référentiel du bain en mouvement :*

Pour réaliser de manière contrôlée une source d'ondes de surface, un objet solide (typiquement une pointe, pour émettre des ondes circulaires), est relié à un (petit) pot vibrant (modèle Bruël & Kjør 4810), contrôlé par un générateur basse fréquence. Celui-ci impose le mouvement souhaité à la pointe qui vient frapper le bain (impact bref, impacts répétés, ...). Pour certaines expériences, il est essentiel de pouvoir émettre des ondes *dans le même temps* que le mouvement du bain. Puisque l'altitude de la surface du liquide à atteindre par la pointe dépend varie au cours du temps, il est nécessaire de pouvoir adapter le mouvement de la pointe à celui du bain : indépendamment du mouvement du bain, c'est le mouvement *relatif* de la pointe par rapport au bain qui doit être contrôlé. Par conséquent, le dispositif batteur doit être solidaire du référentiel de la cuve en mouvement. Puisque le pot vibrant asservissant le mouvement de la pointe est trop lourd pour être monté directement sur la cuve, un système de transmission flexible du mouvement du petit pot vibrant vers la pointe a été développé.



**Figure 3.2** – Schéma des dispositifs d'émission des ondes (a) Batteur. Le mouvement relatif imposé par la partie mobile du petit pot vibrant est transmis par un câble à travers une gaine flexible, il se traduit par un mouvement relatif de la pointe dans le référentiel de la cuve (en mouvement). (b) Souffleur. La sortie d'un haut-parleur est hermétiquement fermée. La surpression induite par le mouvement de la membrane se transmet à travers le tuyau flexible et induit une déformation de la surface du liquide, quelque soit le mouvement de la cuve. Le moment de l'émission par une impulsion et le paquet d'onde émis quelques dizaines de millisecondes plus tard sont présentés aux figures (c) et (d) respectivement pour le batteur et pour le souffleur. La pointe du batteur fait ici 1 mm de diamètre et le diamètre de l'embout de sortie du souffleur est de 4 mm.

Le montage est présenté figure 3.2 (a). Il comporte une gaine flexible contenant un câble de transmission de mouvement pouvant glisser à l'intérieur. Ce dispositif est commercial puisqu'il est encore utilisé par certains photographes pour déclencher à distance un appareil posé sur un trépied sans le faire bouger. Une extrémité de la gaine extérieure est fixée par un support à la cuve en mouvement, l'autre est fixée par un autre support à la partie mobile d'un petit pot vibrant (différent de celui utilisé pour la vibration du bain). Le câble de transmission intérieur est relié lui par une extrémité à une pointe qui affleure à la surface du bain liquide et par l'autre extrémité

à la partie mobile du petit pot vibrant. Ainsi, un mouvement relatif entre le câble intérieur et la gaine est imposé par le déplacement de la partie mobile du pot vibrant. Ce mouvement relatif ce transmet le long du dispositif flexible et impose donc un mouvement relatif de la pointe affleurant la surface du bain par rapport à l'extrémité de la gaine (solidaire de la cuve). Grâce à ce dispositif, nous pouvons contrôler directement la fréquence, l'amplitude et la phase des impacts de la pointe sur la surface du liquide, indépendamment du mouvement global du bain. Une fine pièce de plastique, en forme de "L" allongé, pointe vers le bas, a été fixée à la pointe pour certaines expériences (voir figure 3.2 (c)). Cela permet d'écartier vers le côté le point d'impact à la surface du liquide du point d'accroche du dispositif : on dégage ainsi le champ de vision autour du point d'impact, pour observer le champ d'onde depuis le dessus.

#### *Souffleur :*

Alternativement, un dispositif souffleur a été utilisé. Le dispositif est présenté à la figure 3.2 (b). Il est constitué d'un haut parleur dont la sortie est fermée hermétiquement par une plaque et un joint de silicone. Un trou est pratiqué dans cette plaque, sur lequel est fixé un tuyau flexible, dont l'autre extrémité peut être fixée par un support à la cuve de liquide en mouvement. Le mouvement de la membrane du haut-parleur induit une surpression qui se transmet à travers le tuyau pour émettre un jet d'air en sortie du tuyau. Comme précédemment, si l'extrémité est fixée à la cuve, le jet d'air est contrôlé dans le référentiel de la cuve, permettant une émission contrôlée d'ondes de surface quelque soit le mouvement de la cuve. Les résultats obtenus avec ce système sont très similaires à ceux obtenus par le batteur. Il présente le désavantage de masquer le champ d'onde sur une zone assez importante autour du point source, lorsque l'on visualise le champ d'onde par le dessus. Ce système permet cependant de s'affranchir des problèmes de mouillage et de formation de ménisque pouvant apparaître avec le batteur pour une émission de faible amplitude avec le batteur.

#### *Synchronisation :*

Le dispositif d'émission d'onde (batteur ou souffleur) est contrôlé par le signal d'un générateur basse fréquence. Les signaux envoyés à ce dispositif, au pot vibrant imposant le mouvement de la cuve, et à la caméra peuvent aisément être synchronisés. Cela permet de spécifier les intervalles de temps entre les différentes phases de l'expérience ainsi que de répéter l'expérience et sa visualisation dans des conditions strictement identiques.

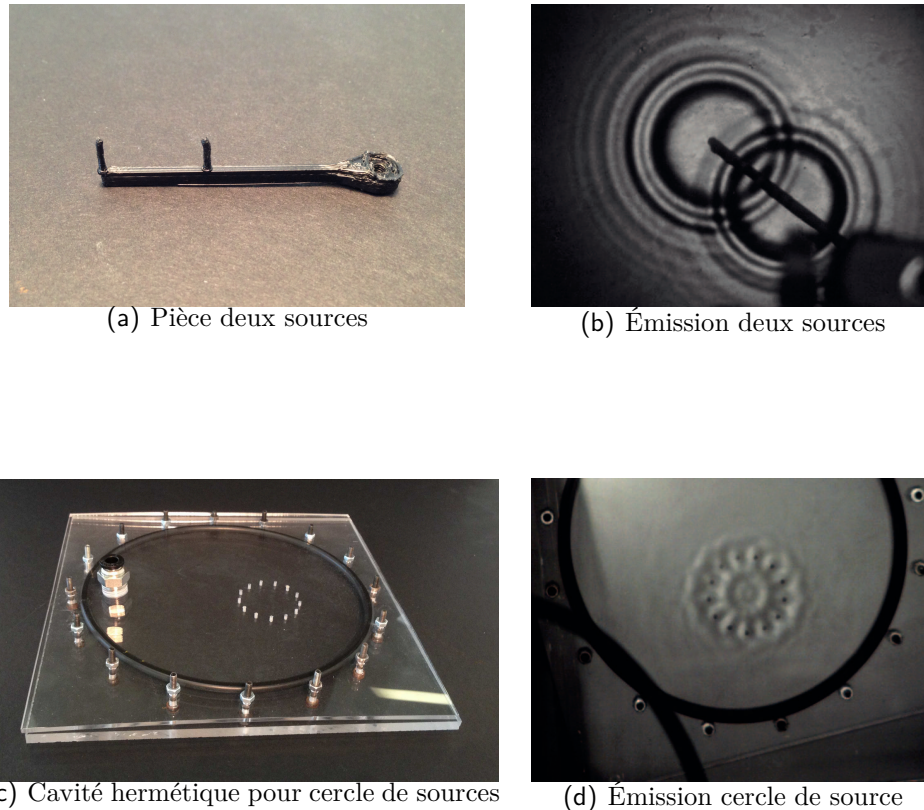
### **Émission d'ondes complexes**

La pointe du batteur ou le jet d'air à l'extrémité du tuyau du dispositif souffleur déforment ponctuellement la surface du liquide. Ils permettent de réaliser une source ponctuelle d'ondes de surface circulaires. Pour effectuer l'émission d'ondes de géométries plus complexes, ces dispositifs ont été aménagés.

#### *Batteurs complexes :*

Des pièces de formes particulières ont été dessinées puis imprimées à l'imprimante 3D en plastique (voir l'exemple de la figure 3.3 (a)). Un trou taraudé permet de les visser au bout de la pointe du batteur. Le mouvement vertical de l'ensemble de la pièce, ainsi rendue solidaire du batteur, est alors imposé par le petit pot vibrant. La partie inférieure de la pièce vient frapper la surface du liquide pour émettre des ondes possédant la géométrie de cette pièce. En précontraignant en torsion, avant une expérience, le câble de transmission du mouvement du dispositif du batteur, un couple peut être appliqué au bout du câble, qui permet de mettre en rotation la pièce une fois

un coup sur la surface effectué, pour libérer le champ de vision.



**Figure 3.3** – Émission de motifs d’ondes complexes. (a) Pièce plastique imprimée en 3D de 4 cm de long, comportant deux pointes pour réaliser deux points sources. (b) Champ d’onde (vu du dessus) émis par une impulsion du batteur muni de cette pièce à deux pointes. (c) Dispositif de cavité hermétique pour souffle d’un cercle de sources. Deux plaques de Plexiglas sont plaquées l’une contre l’autre, séparées uniquement par un joint silicone (noir) circulaire, et maintenues serrées par des vis. Un trou est pratiqué et taraudé sur la plaque du dessus pour visser un embout d’arrivée d’air (à gauche sur la photo). L’air poussé par le système souffleur entre par ce point. Il ne peut s’échapper latéralement grâce au joint silicone. Il ressort par de petits trous percés sur la plaque inférieure selon le motif désiré (ici un cercle de 3,4 cm de diamètre). (d) Champ d’onde (vu du dessus, à travers les plaques de Plexiglas) émis par une impulsion du dispositif souffleur avec cercle de sources.

Un exemple de pièce pour l’émission d’ondes plus complexes qu’une onde circulaire est montré à la figure 3.3 (a). Cette pièce légère en plastique, construite à l’imprimante 3D, fait 4 cm de long et comporte deux pointes qui permettent de réaliser deux sources ponctuelles simultanées. Un trou taraudé (à droite sur la photo) permet de visser l’ensemble sur le bas du câble de transmission du mouvement du dispositif batteur. Les pointes sont tournées vers le bas pour l’utilisation. Lorsque la pièce est déplacée vers le bas, les deux pointes frappent la surface du liquide simultanément. Le champ d’onde (vu du dessus) émis par un coup bref de cette pièce sur l’eau est montré figure 3.3 (b). Les deux ondes circulaires émises par les deux pointes sont bien visibles. Notons une limitation du système : ces points doivent être suffisamment éloignés (on observe qu’au moins deux millimètres d’écart sont nécessaires en pratique). Si l’on rapproche trop les points, ou *a fortiori* lorsqu’on les remplace par une ligne continue, du liquide est entraîné et une goutte est arrachée au bain qui, en retombant, vient brouiller le motif d’onde attendu. Ainsi, une ligne continue doit être remplacée par une ligne de points sources espacés de deux à trois millimètres pour éviter cet effet d’entraînement. Néanmoins, cette distance étant plus faible que la longueur d’onde typique émise par le dispositif (de l’ordre de 5 mm), le champ d’onde résultant de l’émission d’une ligne

de sources discrètes est proche de celui qui serait émis par une ligne de sources continue.

#### *Souffleurs complexes transparents :*

Le système du souffleur a également été adapté pour émettre des ondes de motifs complexes. Une cavité hermétique cylindrique de faible hauteur est construite en coinçant un joint circulaire entre deux plaques de Plexiglas transparent, voir figure 3.3 (c). Un ensemble de vis maintient les deux plaques en pression contre le joint. La plaque supérieure est percée et taraudée pour pouvoir y visser hermétiquement un embout d'entrée d'air, à gauche sur la photo 3.3 (c). Le tuyau du dispositif souffleur est relié à cette entrée. L'air émis par le dispositif souffleur entre alors par ce point. Il ne peut s'échapper latéralement grâce au joint silicone circulaire. Il sort par un ensemble de petit trous (de l'ordre de 0,8 mm de diamètre) percés dans la plaque inférieure, dessinant le motif désiré. La surpression imposée par le haut-parleur du dispositif souffleur induit donc, à la sortie de chaque trou de la plaque inférieure, un jet d'air vertical vers le bas. L'ensemble est placé (horizontalement) à quelques millimètres de la surface du liquide. Les jets d'airs déforment alors simultanément la surface du liquide pour obtenir un ensemble de sources. Le champ d'onde (vu du dessus, à travers les plaques de Plexiglas) obtenu par une impulsion de souffle est montré figure 3.3 (d) pour un motif en cercle (de 3,4 cm de diamètre). Comme pour le procédé d'émission de motifs complexes avec le dispositif batteur, le motif de sources doit nécessairement être composé d'un ensemble de points espacés au minimum de 2 à 3 millimètres. En effet, si deux points sont trop proches ou si l'on perce une ligne continue sur la plaque inférieure, l'air ne sort plus que par un seul point et le motif désiré n'est pas obtenu. Le grand avantage de cette technique est de permettre une visualisation complète par le dessus de l'ensemble du champ d'onde, grâce à la transparence du Plexiglas utilisé. Le dispositif utilisé pour obtenir les vues du champ d'onde présentées aux figures 3.3 (b) et (d) et pour la mesure du champ d'onde est décrit à la section suivante.

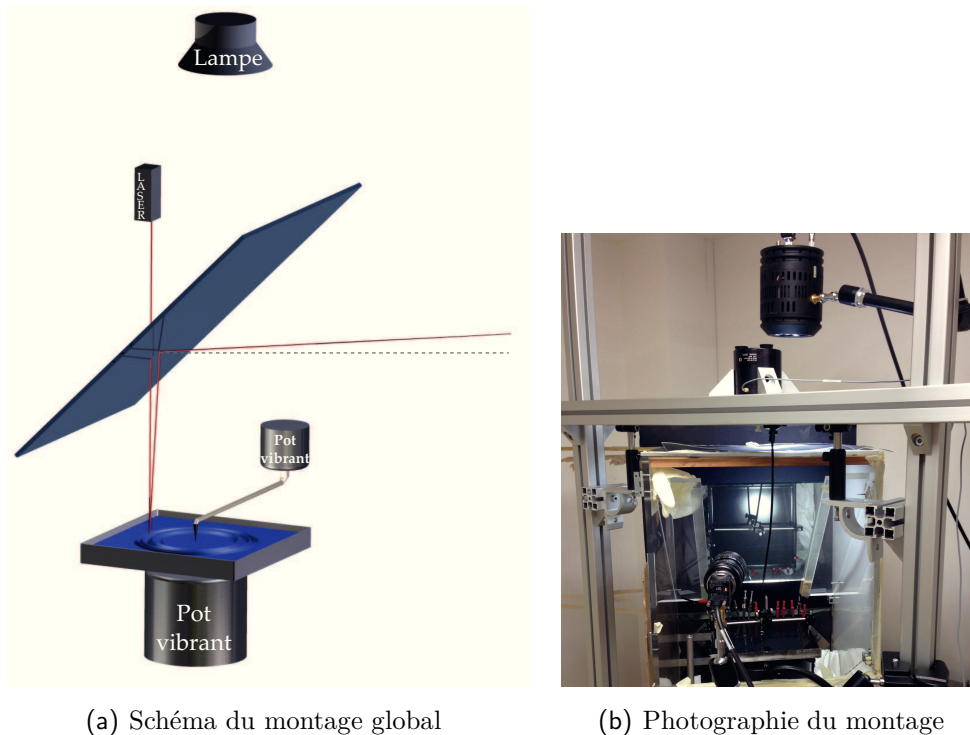
### 3.1.3 Visualisation et mesure des ondes de surface

L'un des grands avantages de l'étude expérimentale des ondes de surface en comparaison d'autres systèmes ondulatoires est l'extrême simplicité que représentent l'observation et la mesure du champ d'onde. En effet, une visualisation directe de la surface avec un éclairage adéquat constitue une mesure :

- de l'ensemble du champ d'onde bidimensionnel ;
- instantanée (le temps d'exposition utilisé, typiquement 500 microsecondes, est très inférieur aux périodes des ondes observées, de l'ordre de la dizaine de millisecondes au minimum) ;
- non perturbative (l'action de la lumière sur le système est négligeable).

#### Visualisation du champ d'onde

Dans la plupart des expériences, le champ d'onde est visualisé par le dessus, ce qui permet de s'affranchir du problème de la parallaxe. La visualisation et/ou la mesure des ondes par ombroscopie en transmission (correspondant au système de la cuve à ondes) est mal adaptée car il est difficile de placer du matériel entre le pot vibrant et la cuve. Nous utilisons donc un dispositif d'ombroscopie par réflexion. Une lampe éclaire la surface du liquide par le dessus. Pour pouvoir observer la surface du bain depuis la même perspective, une lame semi-réfléchissante est intercalée entre la lampe et le bain, en faisant un angle de 45 degrés avec l'horizontale (voir figure 3.4). La caméra est alors orientée horizontalement et enregistre la réflexion de l'image de la surface par la lame.



(a) Schéma du montage global

(b) Photographie du montage

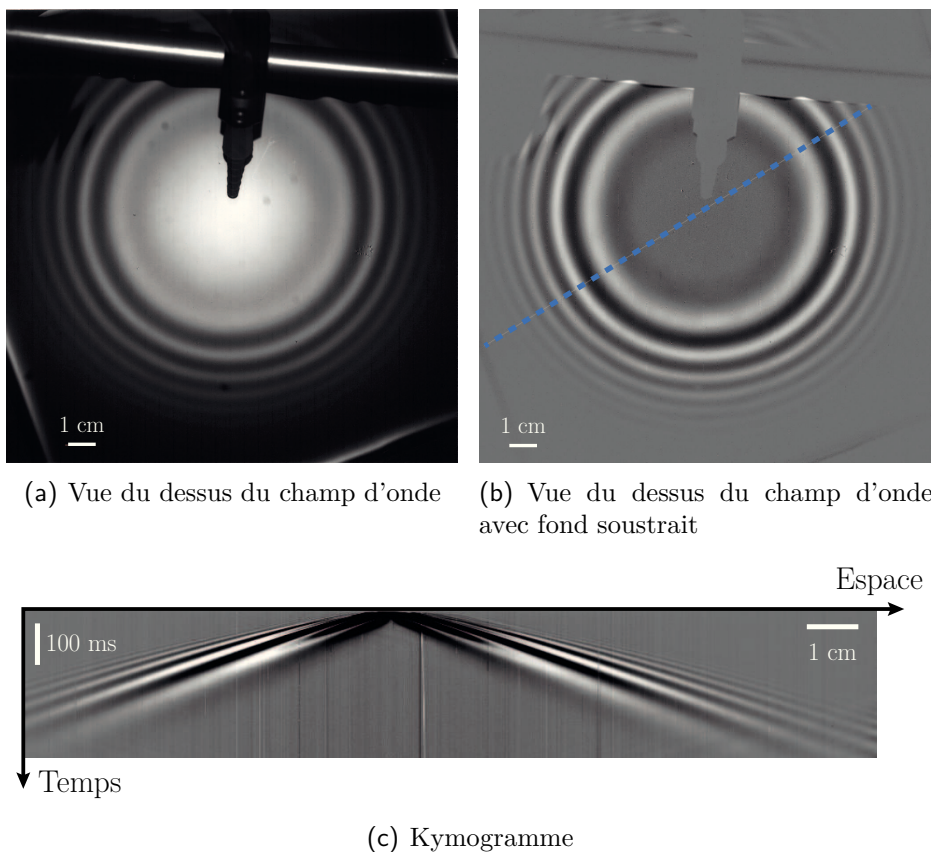
**Figure 3.4** – Dispositif expérimental : vue d'ensemble. (a) Schéma du dispositif. Une lampe éclaire du dessus la surface du bain liquide, monté sur un pot vibrant. Une caméra (non représentée) filme la surface grâce à une lame semi-réfléchissante placée au-dessus du bain à 45 degrés. Un dispositif batteur vient taper à la surface du liquide pour générer une onde de surface. Le champ d'onde est observé par ombroscopie en réflexion : la lumière envoyée par la lampe se réfléchit sur la surface du bain (puis sur la lame semi réfléchissante) avant d'arriver sur la caméra. Les zones du bain de forte pente renvoient l'essentiel des rayons hors champ et apparaissent sombres sur l'image. Le dispositif est donc sensible à la valeur absolue de la pente. Alternativement, un laser peut être positionné à la place de la lampe. Son rayon (représenté en rouge) se réfléchit sur la surface puis sur la lame semi-réfléchissante pour atteindre un écran situé à 2 m. La déflexion du spot laser est alors suivie par une caméra, ce qui permet de mesurer quantitativement la pente locale en un point au cours du temps. (b) Photographie du dispositif, du point de vue de la caméra utilisée pour l'observation durant les expériences. Celle-ci est visible au premier plan et pointe vers la lame semi-réfléchissante, sur laquelle la réflexion du bain sous-jacent de liquide est visible. La cuve est montée sur un pot vibrant non visible sur cette photographie. Le câble de transmission du mouvement pour le "batteur" émetteur d'onde est nettement visible.

La figure 3.4 (a) présente le schéma global du dispositif expérimental. Une cuve de liquide est montée sur un pot vibrant pouvant déplacer verticalement cette cuve. Un autre pot vibrant actionne le mouvement d'une pointe orientée vers la surface du liquide. Celle-ci peut frapper cette surface pour émettre des ondes de surface. La disposition de la lampe et de la lame semi-réfléchissante est également présentée sur la figure. La caméra (non représentée) permettant de visualiser le champ d'onde est orientée horizontalement, dans la direction du trait pointillé gris pour observer la surface, par réflexion sur la lame semi-réfléchissante. Dans certaines expériences, un diffuseur et/ou une lentille de Fresnel ont été intercalés entre la lampe et la lame semi-réfléchissante. Ils permettent d'homogénéiser l'éclairage : le premier par diffusion de la lumière dans toutes les directions, et le second en réalisant un faisceau collimaté. La figure 3.4 (b) est une photographie du montage, prise du point de vue de la caméra utilisée pour la visualisation dans une expérience. Cette dernière, muni de son objectif, est visible au premier plan et pointe vers la lame semi-réfléchissante à 45 degrés, sur laquelle la réflexion du bain de liquide est visible. Celui-ci, surmonté

de la pointe du "bateur" est situé juste en dessous. La cuve est fixée à un pot vibrant qui est masqué par la boîte permettant de tenir la lame semi réfléchissante. Une autre structure permet de suspendre le petit pot vibrant qui imprime un mouvement à la pointe du "bateur" émetteur d'onde à travers le câble de transmission du mouvement visible devant la lame. La lampe utilisée, visible en haut de l'image, permet d'éclairer depuis le dessus une zone assez large de la surface du bain.

#### *Kymogrammes :*

Une photographie typique du champ d'onde ainsi visualisé est présentée à la figure 3.5 (a). L'éclairage est centré sur la zone d'émission de l'onde et diminue radialement. La photographie est obtenue 186 ms après une impulsion réalisée par le dispositif souffleur. On observe que le paquet d'onde circulaire s'est élargi au cours de la propagation, traduisant la dispersivité des ondes de surfaces. En soustrayant une image prise en l'absence du champ d'onde, on retire l'arrière-plan et on atténue le défaut de visualisation lié à la variation radiale de l'éclairage. On obtient une meilleure visualisation du champ d'onde, voir figure 3.5 (b).



**Figure 3.5** – Visualisations du champ d'onde émis par une source ponctuelle. (a) Image du champ d'onde vu du dessus 186 ms après émission. (b) Visualisation du champ d'onde obtenue par soustraction d'une image de référence de la surface au repos à l'image (a). Elle permet de mieux faire apparaître les ondes loin du centre de la zone éclairée. La ligne pointillée bleue représente les points utilisés pour réaliser le kymogramme (c). (c) Kymogramme (diagramme spatiotemporel) de l'onde émise. Il est obtenu en empilant verticalement les images linéiques successives extraites du film de l'émission (auquel on a soustrait l'arrière plan pour une meilleure visualisation). Les lignes de chaque image du film sont extraites à la position indiquée par la ligne pointillée bleue sur la figure (b). Le film est réalisé à 500 images par seconde. L'élargissement des deux faisceaux de rayons issus du point d'émission montre la dispersion des ondes de surface.

L'évolution spatiotemporelle du paquet d'onde émis est représentée sur la figure 3.5 (c). Cette figure est obtenue à partir des signaux enregistrés aux différents instants du film de l'évolution de



l'onde, sur une ligne de pixels passant par le point d'émission, représentée en ligne pointillée bleu-gris sur la figure 3.5 (b). On juxtapose verticalement les lignes enregistrées aux différents instants pour obtenir un diagramme spatiotemporel de l'évolution. Nous adopterons tout au long de cet ouvrage l'appellation kymogramme (littéralement, "écriture de l'onde"), par analogie avec d'autres diagrammes spatiotemporels obtenus par des appareils de mesure d'ondes (kymographes), utilisés notamment en médecine [72]. Sur un diagramme, on visualise ainsi l'évolution temporelle du champ d'onde (en tirant ici partie de la symétrie circulaire du champ d'onde). Dans ce diagramme, on parcourt l'espace le long de la ligne considérée en se déplaçant horizontalement, et le temps en se déplaçant verticalement. On observe sur ce diagramme de chaque côté du point d'impact initial, un faisceau de rayons s'en éloignant. La vitesse de propagation de chaque longueur d'onde est directement donnée par (l'inverse de) la pente du rayon correspondant sur ce kymogramme. L'élargissement de ce faisceau vers les temps les plus élevés traduit la dispersion des ondes de surface : les longueurs d'onde les plus faibles se propagent plus rapidement que les longueurs d'onde les plus élevées.

### Mesures quantitatives reproductibles de l'élévation de la surface

Pour certaines expériences, la lampe a été remplacée par un faisceau laser, voir figure 3.4 (a). Le rayon (représenté en rouge) se réfléchit sur un point de la surface puis sur la lame semi réfléchissante pour être envoyé sur un écran vertical. La déflexion du spot laser, sous l'effet de la pente locale induite par le passage d'une onde en son point de réflexion peut alors être suivi en filmant l'écran. On obtient ainsi une mesure quantitative de la pente locale au cours du temps. Typiquement, on mesure dans nos expériences des pentes de l'ordre de 0,1, correspondant à des déplacements du spot de plusieurs centimètres sur l'écran. L'expérience est répétée en déplaçant le laser horizontalement entre deux répétitions d'un pas contrôlé à l'aide d'une translation motorisée. On obtient ainsi une mesure de l'évolution au cours du temps d'une portion rectiligne du champ d'onde (on mesure en fait le gradient du champ sur cette portion puisque la déflexion du laser est sensible à la pente locale de la surface).

Nous pouvons ainsi suivre qualitativement et quantitativement l'évolution du champ d'ondes de surface émis par le souffleur ou par le batteur, et ce y compris lorsque la cuve de liquide est mise en mouvement vertical et affecte ainsi le champ d'onde par une modulation effective de la gravité. La section suivante présentera les résultats obtenus pour une modulation brève de la célérité correspondant au concept du MTI. Elle est obtenue par une accélération brutale et brève de la cuve.



## 3.2 Choc de gravité : Observation d'une onde retournée temporellement

Cette section présente les résultats obtenus par l'application d'un simple choc d'accélération appliqué à un bain de liquide, à la surface duquel se propage une onde. Le champ d'onde initial est issu d'un impact ponctuel produit par le dispositif batteur ou souffleur présenté à la section précédente. Nous démontrons ici l'existence d'une onde rétropropagée et mettons en évidence la réalisation d'un retournement temporel.

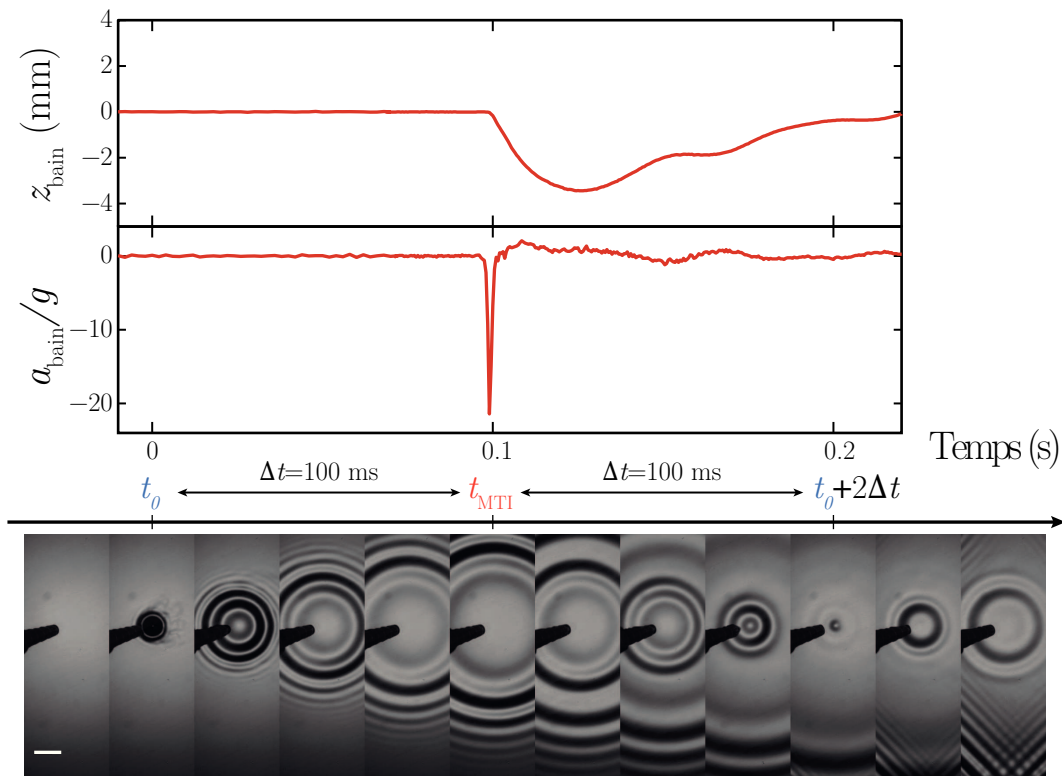
### 3.2.1 Observation d'une onde contrapropagative

Le déroulé d'une expérience typique de mise en œuvre du MTI est le suivant :

- à l'instant initial  $t_0 = 0$ , une onde circulaire est émise par l'impulsion d'un jet d'air bref par le dispositif souffleur, frappant localement la surface du liquide ;
- pendant une durée  $\Delta t$ , ajustable (typiquement de l'ordre de la centaine de millisecondes), cette onde de surface circulaire se propage librement ;
- à l'instant  $t_{\text{MTI}}$ , la cuve contenant le liquide est brutalement tirée vers le bas par le pot vibrant sur lequel elle est montée.

La figure 3.6 (haut) montre le mouvement typiquement imposé à la cuve par le pot vibrant pendant une expérience. Son altitude dans le référentiel du laboratoire  $z_{\text{bain}}(t)$  (courbe rouge du graphe supérieur) est constante jusqu'à l'instant  $t_{\text{MTI}} \approx 100$  ms, où elle commence à descendre avec une vitesse élevée. La descente dure quelques dizaines de millisecondes et s'arrête doucement, puis la cuve remonte lentement vers son altitude initiale. Les variations de l'altitude de la cuve sont douces tout au cours de l'expérience sauf à l'instant  $t_{\text{MTI}}$ , où la courbe présente un point anguleux. Ce point anguleux correspond à un pic intense de l'accélération de la cuve  $a_{\text{bain}} = d^2 z_{\text{bain}}/dt^2$  (courbe rouge du graphe inférieur). Ce pic d'accélération a une amplitude de  $-21 g$  et est large de 3 ms environ. L'accélération reste ensuite proche de zéro. Le pic fin et intense d'accélération du bain que nous obtenons est équivalent à un choc bref et intense de gravité dans le référentiel de la cuve, qui correspond lui-même à un choc de célérité (voir son expression à l'équation (3.1) de la section 3.1).

L'effet de ce choc de célérité sur les ondes de surface est visible sur la chronophotographie d'une expérience typique présentée à la figure 3.6 (bas). Un intervalle de temps de 24 ms sépare une photographie de la suivante. Sur chaque photographie le bout du souffleur utilisé est visible. Il est placée de façon légèrement oblique, de façon à pouvoir visualiser le champ d'onde au point d'émission initiale. L'acquisition de la caméra est synchronisée avec le signal contrôlant la génération de l'onde initiale et avec celui contrôlant la réalisation de la secousse. L'instant 0 du signal d'accélération correspond à la deuxième image de la chronophotographie. Sur cette image, on voit l'impact formé par l'impulsion d'air initiale. Cet impact génère l'onde circulaire (divergente) dont on observe la libre propagation sur les images suivantes. Les bords de la cuve sont très éloignés (à environ 15 cm) et les ondes ne rencontrent pas d'obstacle. Après une durée  $\Delta t = 100$  ms suivant l'émission de l'onde, à l'instant  $t = t_{\text{MTI}}$  correspondant approximativement à la sixième image de la chronophotographie, le choc de gravité est réalisé. Puisque le champ d'onde est imagé par le dessus, ce déplacement (de quelques millimètres) de la cuve vers le bas n'est pas perceptible sur les images. On observe la poursuite de la propagation normale d'une onde divergente après le choc, mais une onde convergente apparaît également à l'endroit atteint par l'onde initiale, au moment du choc. Cette onde circulaire rétropropagative converge sur le point d'impact initial, après que ce soit écoulée de nouveau une durée  $\Delta t$  suivant le choc (dixième image). Après être passée par le



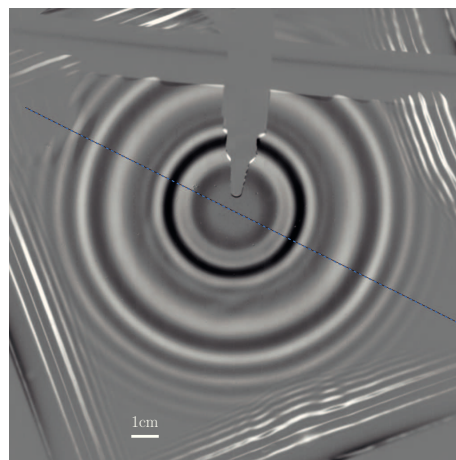
**Figure 3.6** – Choc de gravité et observation d'une onde rétropropagée. En haut : La courbe rouge du graphe supérieur donne l'évolution au cours du temps de la position verticale de la cuve de liquide. L'instant  $t_0 = 0$  correspond à l'émission d'une onde circulaire à la surface du bain par une impulsion du dispositif d'émission utilisé (ici le souffleur). La courbe rouge du graphe inférieur représente l'accélération verticale associée ( $a_{\text{bain}} = d^2z_{\text{bain}}/dt^2$ ). En bas : chronophotographie de l'évolution du champ d'onde vu du dessus. L'intervalle de temps entre deux images est 24 ms. La barre blanche sur la première photo de la séquence indique un centimètre.

centre, cette onde rediverge. Insistons une nouvelle fois sur le fait que le milieu de propagation est homogène spatialement : l'apparition de cette onde retournée n'est donc pas la conséquence d'une réflexion sur des bords ni sur aucune autre structure spatiale (les bords de la cuve sont à environ 15 cm du point d'impact, largement en dehors du champ de vision). Cette onde rétropropagée est bien la conséquence de l'accélération verticale de l'ensemble du bain liquide par le pot vibrant. Sur les dernières photos, des motifs d'ondes planes parasites sont observables : ils correspondent aux ondes émises par les bords de la cuve (carrée) au moment du choc. Insistons également sur le fait que l'on observe que l'onde convergente apparaît :

- à l'instant où le choc est réalisé ;
- sur le front d'onde initial (les deux ondes se superposent initialement à l'identique et sont indiscernables).

Ces résultats sont contenus dans le kymogramme de l'expérience. Un kymogramme typique est présenté à la figure 3.7 (b). Il est obtenu en superposant verticalement des lignes extraites des images du film de l'expérience. La ligne choisie passe par le point d'émission initiale, elle est représentée en pointillés bleu et noir sur la photographie du champ d'onde à la figure 3.7 (a). La résolution du kymogramme est donnée selon l'horizontale par la taille du capteur de la caméra utilisée (1000 pixels par 1000 pixels) et verticalement par la fréquence d'acquisition (500 images par seconde). Pour cette expérience,  $\Delta t = 140$  ms. Ce kymogramme est à comparer à celui de la figure 3.5 (c) obtenu pour une propagation libre, en l'absence de choc de gravité. Deux faisceaux de rayons partent du point d'émission en s'élargissant par dispersion. Seuls ces faisceaux étaient observés dans la propagation libre, sans choc. Ici, environ 140 ms après l'émission, deux autres

faisceaux de rayons apparaissent. Ces faisceaux partent tous d'une ligne horizontale correspondant à l'instant du choc. Ils se superposent aux faisceaux divergents et convergent vers un point qui correspond au point d'émission initiale. Ils correspondent à l'apparition de l'onde rétropropagée à cet instant. Cette onde converge vers le point initial d'émission puis rediverge (deux faisceaux divergeant apparaissent à partir du point de convergence). Dans toutes les expériences, l'onde retournée est générée à l'instant de la secousse ( $\Delta t$  après l'émission), depuis la position du paquet d'onde initial à cet instant. La convergence de l'onde rétropropagée au point d'émission initiale est toujours observée  $\Delta t$  après la secousse, et par conséquent  $2\Delta t$  après l'émission initiale. Remarquons que des faisceaux de pentes très différentes sont observés vers les coins bas gauche et droit du kymogramme : ces signaux parasites correspondent aux ondes émises par les bords du bain au moment du choc, que nous avons déjà remarquées sur les dernières images de la chronophotographie de la figure 3.6. Notons également que les faisceaux divergent initiaux se prolongent au-delà de l'instant du choc, traduisant la poursuite de la propagation de l'onde divergente initiale.



(a) Champ d'onde vu de dessus après le choc



(b) Kymogramme pour  $\Delta t = 140$  ms

**Figure 3.7** – Évolution temporelle du champ d'onde soumis à un choc de gravité. L'image (a) est obtenue par soustraction de l'arrière-plan à une photographie prise 58 ms après le choc de gravité, lui-même effectué 140 ms après l'émission. Les deux paquets d'onde, celui de grand rayon correspondant à l'onde divergente poursuivant sa propagation et celui de plus faible rayon généré au moment du choc sont visibles. La ligne pointillée bleue et noire représente les points choisis pour réaliser le kymogramme (b). (b) Kymogramme effectué à partir du film de l'expérience dont est tirée la photographie (a). Les deux faisceaux convergents vers le point d'émission initiale montrent l'existence d'une onde retournée après le choc.

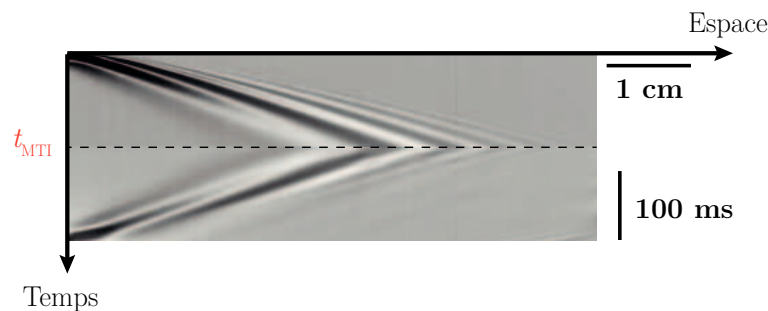
### 3.2.2 Retournement temporel

Montrons désormais que cette onde rétropropagée est en bonne approximation le retourné temporel de l'onde initiale, autour de l'instant de la secousse  $t_{MTI}$ . Par définition une telle onde prend

à un instant  $t$  (*i.e.*  $t - t_{\text{MTI}}$  après le choc) la forme qu'avait l'onde initiale à l'instant  $2t_{\text{MTI}} - t$  (*i.e.*  $t - t_{\text{MTI}}$  avant le choc).

### Symétrie temporelle et compensation de la dispersion

Plusieurs des observations que nous venons de faire indiquent que cette correspondance entre l'onde initiale et l'onde rétropropagée est obtenue dans nos expériences. Ainsi, la convergence de cette dernière est observée à l'instant  $t = t_{\text{MTI}} + \Delta t$ , qui correspond par symétrie temporelle autour de l'instant du choc à l'instant d'émission initiale  $t_0 = t_{\text{MTI}} - \Delta t = 2t_{\text{MTI}} - t$ . Plus généralement, le kymogramme de la figure 3.7 montre que le motif de l'onde rétropropagée générée par le choc correspond (jusqu'à l'instant de la reconvergence) à la réflexion de la partie supérieure du kymogramme autour de la ligne horizontale correspondant à l'instant  $t_{\text{MTI}}$  du choc. La figure 3.8 montre plus précisément cette symétrie dans le domaine temporel. Elle est obtenue à partir du kymogramme 3.7 (b) en effectuant un filtre de Fourier sur la partie après le choc. Ainsi, la partie basse du diagramme (délimitée par la ligne pointillée noire), sur laquelle est observée l'onde retournée, est soumise à un masque dans l'espace de Fourier annulant toutes les composantes se dirigeant vers le bas à droite. Les composantes du champ d'onde correspondant à une onde divergente sont ainsi supprimées et on visualise uniquement l'onde rétropropagée. La partie basse du diagramme obtenu est très similaire au symétrique de la partie haute par rapport à la ligne pointillée correspondant à l'instant du choc, ce qui montre que l'onde rétropropagée est en bonne approximation le retourné temporel de l'onde initiale. Notons d'ores et déjà que deux limites importantes de ce retournement temporel sont observées : les longueurs d'onde les plus courtes au sein du paquet d'onde initial semblent absentes de l'onde retournée ; et un élargissement semble s'opérer au moment exact de la convergence de cette onde. Nous reviendrons ultérieurement plus en détails sur les causes de ces deux observations.



**Figure 3.8** – Symétrie par réflexion dans le domaine temporel du kymogramme. La ligne en pointillée noire correspond à l'instant de la secousse. Au-dessus de cette ligne, le kymogramme est tiré de la figure 3.7 (b) et montre la propagation de l'onde initiale jusqu'au choc. En-dessous de cette ligne, la portion de kymogramme est filtrée dans l'espace de Fourier pour supprimer les composantes correspondant à des ondes divergentes. Seule l'onde convergente est ainsi visualisée. La symétrie autour de la ligne pointillée témoigne du caractère de retournement temporel de l'opération.

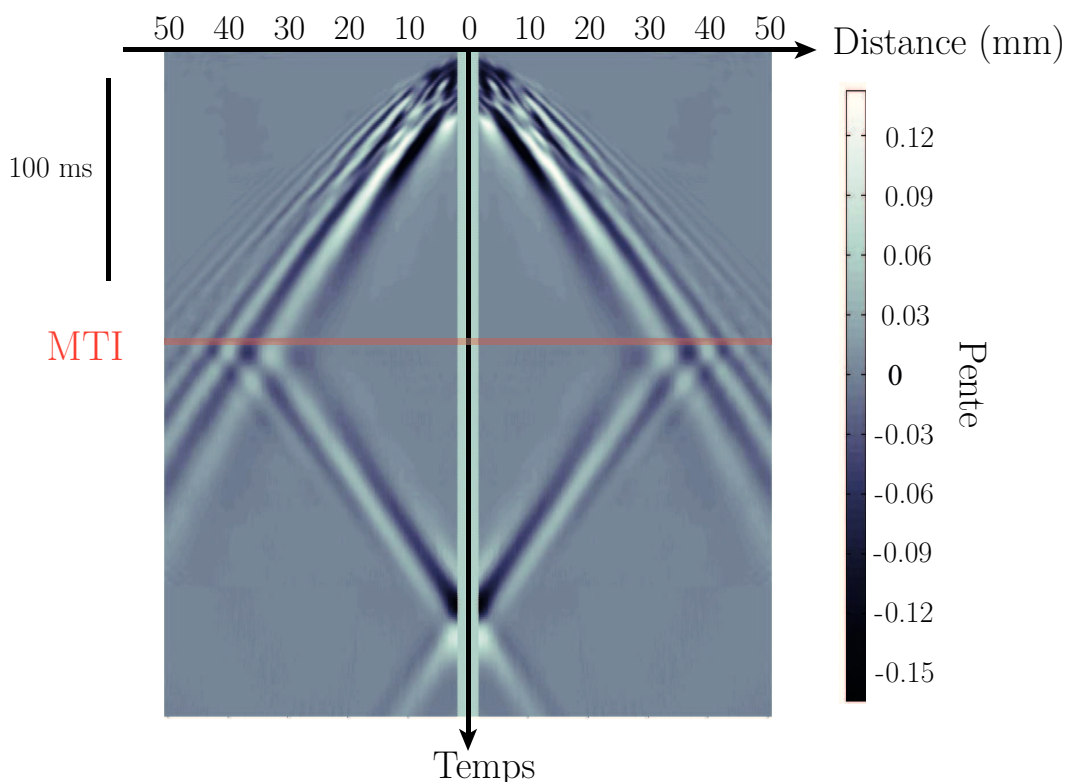
La figure 3.8 met également en évidence l'aspect particulièrement intéressant de la compensation de la dispersion. En effet, l'élargissement du paquet d'onde initial, observé du fait de la dispersion des ondes de surface est remplacé, pour le paquet d'onde retourné par un rétrécissement du paquet d'onde. Cet effet remarquable n'est pas observé lorsqu'une onde change de sens de propagation sous l'effet d'une simple réflexion sur une structure spatiale. Dans ce dernier cas, les composantes de longueurs d'onde plus courtes, étant plus rapides, atteignent également la structure plus tôt et sont réfléchies les premières. Au sein de l'onde réfléchie, ces ondes de longueurs d'onde plus

courtes apparaissent alors au devant des premières et l'élargissement du paquet d'onde se poursuit. Pour la "réflexion temporelle" que nous observons ici, toutes les composantes de l'onde réfléchie apparaissent au même instant, mais à différents endroits : l'onde retournée se confond initialement à l'onde initiale, dont les composantes de longueurs d'onde plus grandes sont les plus éloignées du point d'émission initiale. Le paquet d'onde retourné se propageant en direction de ce point initial, l'ordre "naturel" est par conséquent inversé au sein de cette onde : les composantes les plus lentes sont au devant (dans le sens de propagation) des ondes les plus rapides. Les dernières rattrapent les premières au cours de la propagation, ce qui donne lieu à un rétrécissement du paquet d'onde. Toutes les composantes convergent finalement au même instant au point d'émission initiale.

Pour caractériser plus précisément l'onde rétropropagée et sa nature d'onde retournée temporellement, nous avons effectué des mesures *quantitatives* du champ d'onde, sur un segment de points passant par le centre.

### Mesure du champ d'ondes et de l'onde retournée

Le champ d'onde est mesuré localement en un point par suivi de la déflexion d'un spot laser (voir descriptif 3.1.3). Par cette mesure, on obtient l'évolution au cours du temps de la pente locale de la surface au point de mesure. L'expérience est répétée dans les mêmes conditions en déplaçant le point de mesure entre deux répétitions.



**Figure 3.9** – Diagrammes des mesures de l'évolution de la pente de la surface au cours du temps. Les mesures sont effectuées sur une ligne de point passant par le point d'émission. Le délai entre l'émission et la secousse est de 140 ms. La bande rouge d'épaisseur 3 ms indique la période au sein de laquelle la secousse effectuant le miroir temporel instantané a lieu.

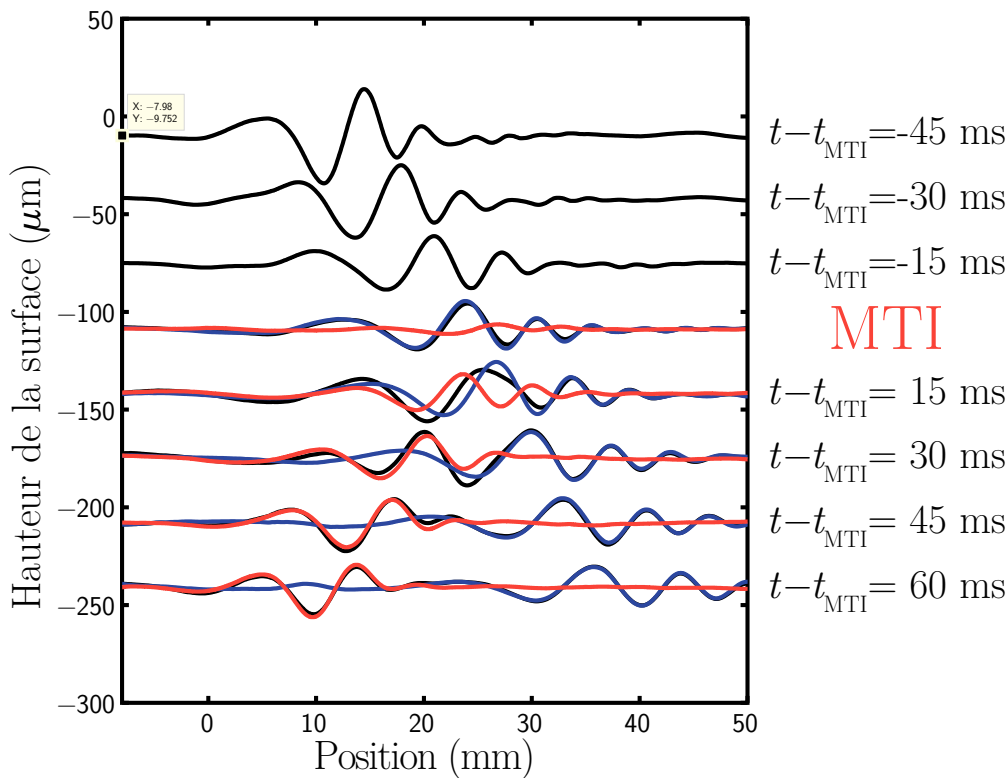
Les résultats de la mesure sont présentés à la figure 3.9 (a). Ce kymogramme quantitatif est obtenu après correction des défauts de visualisation par suppression dans le domaine de Fourier des très basses fréquences et des très hautes fréquences. Par souci de clarté, les ondes issues des bords, apparaissant aux coins bas du domaine spatiotemporel représenté, ont également été supprimées

et le diagramme a été symétrisé (autour du point d'émission). Le point de mesure est décalé de  $2,5 \mu\text{m}$  entre deux répétitions de l'expérience (ce qui donne la résolution spatiale de la figure), et la fréquence d'acquisition de la caméra utilisée est  $500 \text{ Hz}$  (ce qui donne la résolution temporelle). Le système d'émission d'ondes utilisé pour ces mesures est le batteur, muni d'une pointe fine. Il permet l'émission efficace d'un paquet d'onde d'une bonne circularité mais une zone de  $2 \text{ mm}$  au niveau du point d'impact est masquée par la pointe. La bande claire sur le diagramme correspond à la zone où la mesure du champ n'est pas possible. Ce diagramme de mesure quantitative a la même allure générale que les visualisations qualitatives de l'évolution du champ d'onde présentées aux figures 3.7(b) et 3.8 : à l'instant de la secousse ( $140 \text{ ms}$  après l'émission), un faisceau convergent apparaît *depuis le lieu du faisceau divergent initial* (il converge  $140 \text{ ms}$  après la secousse). On observe ici de nouveau la compensation de la dispersion et le rétrécissement du paquet d'onde au cours du trajet de l'onde retournée. Nous observons également que la focalisation du paquet d'onde se fait sur une zone de l'ordre de  $5 \text{ mm}$ , ce qui correspond à l'ordre de grandeur de la plus grande longueur d'onde du paquet d'onde et que la redivergence de l'onde s'accompagne d'un changement de signe de la pente (et donc du champ d'onde). Notons que ce changement de signe n'était pas détecté sur les kymogrammes qualitatifs 3.7(b) et 3.8 obtenus par la visualisation directe du champ vu du dessus car ce dispositif d'observation n'est sensible en son centre qu'à la valeur absolue de la pente. L'existence d'une tache large de l'ordre de la longueur d'onde, liée à la limite de diffraction, et le changement de signe de l'onde au point de reconvergence sont des propriétés bien connues des ondes focalisées, déjà observées dans des expériences de retournement temporel d'ondes circulaires [18]. Elles s'expliquent par le fait que l'action de la source émettrice n'est pas retournée temporellement dans notre expérience : le retourné temporel de l'émission par la source initiale correspondrait à l'action d'un puits, qui "absorberait" l'onde retournée à l'instant de convergence. Ce puits, qui empêcherait ainsi la redivergence et permettrait une focalisation parfaite sur une zone plus faible que la longueur d'onde (en-dessous de la limite de diffraction), est bien-sûr absent dans notre expérience.

Les mesures locales de la pente permettent également de remonter à la valeur de l'élévation locale de la surface. Pour ce faire, nous intégrons à chaque instant le signal de pente mesuré sur une ligne, entre deux points non atteints par les ondes, où l'élévation est nulle. Le résultat obtenu pour différents instants est présenté à la figure 3.10. L'élévation obtenue par intégration du signal de pente est corrigée d'une dérive linéaire dans la mesure au cours des différentes répétitions de l'expérience, induisant un artefact d'écart d'élévation entre les deux zones planes avant et après l'onde mesurée. À partir de l'instant de la secousse, les composantes divergentes et convergentes sont isolées par analyse de Fourier et représentées, respectivement en bleu et en rouge, en plus de la mesure du champ d'onde total (en noir). Sur cette figure, la correspondance de la forme de la composante du champ d'onde retournée, respectivement  $15$ ,  $30$  et  $45 \text{ ms}$  après la secousse, avec le champ initial, respectivement  $15$ ,  $30$  et  $45 \text{ ms}$  avant la secousse, montre que le champ convergent est en bonne approximation le retourné temporel de l'onde initiale. Nous observons cependant un léger retard de phase de l'onde rétropropagée, de l'ordre de  $\pi/2$ , dont l'origine est l'ordre de dérivation supplémentaire attendu pour l'onde retournée générée par Miroir temporel instantané (voir section 2.2.3). Notons également que l'amplification de l'onde divergente initiale, prédite par la production d'une composante copropagative attendue lors du choc de célérité (voir équation (2.36)), est observée.

Ainsi, la mesure du champ d'onde montre que la composante retournée générée par le choc de gravité correspond bien, en bonne approximation, au retourné temporel, symétrique de l'onde initiale autour de l'instant  $t_{\text{MTI}}$  de la secousse. Le choc de gravité induit donc bien un retournement temporel instantané, à la manière du démon de Loschmidt, tel qu'imaginé dans la partie précédente





**Figure 3.10** – Mesures de l'élévation de la surface à différents instants, mesurée sur une ligne passant pas le point d'émission. Elle est obtenue par intégration des mesures des pentes le long du domaine d'observation. À partir de l'instant de la secousse, les contributions divergente (en bleu) et rétropropagée (en rouge) sont isolées par analyse de Fourier et superposées séparément au champ d'onde total (en noir).

(partie 2). L'examen des résultats des mesures a également mis en évidence les limites attendues de cette opération de retournement (déphasage de l'onde retournée, existence d'une onde redivergente qui implique une largeur minimale de focalisation). Grâce à ce dispositif de mesures, nous allons désormais évaluer (qualitativement et quantitativement) les caractéristiques de l'onde retournée générée par ce processus ainsi que les paramètres qui la contrôlent.

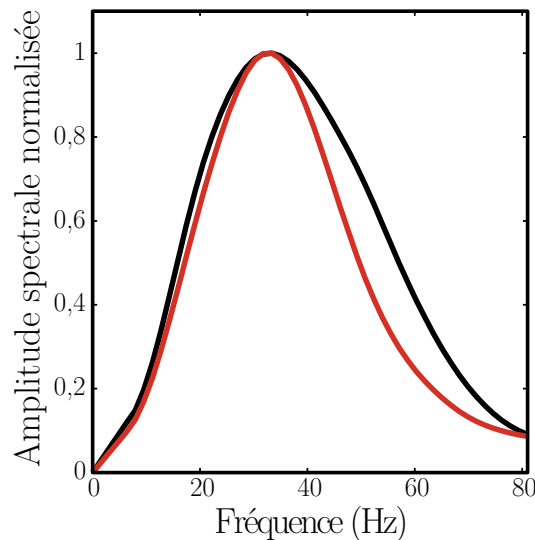
### 3.2.3 Caractérisation de l'onde retournée

#### Spectre de l'onde retournée : un retournement temporel large bande

Un premier critère essentiel pour évaluer l'efficacité du processus de retournement temporel est la bande passante du processus. En effet, les techniques déjà existantes de retournement temporel sont associées à des limitations plus ou moins fortes sur le spectre de l'onde considérée. Ainsi, les techniques de conjugaison de phase, reposant sur l'utilisation d'une non linéarité du milieu, en optique, ne sont adaptées qu'à des ondes monochromatique, elles ne fonctionnent que sur une bande de fréquence très étroite autour de la fréquence de fonctionnement. Les techniques de retournement temporel numérique, utilisées par exemple en acoustique, et reposant sur l'enregistrement, le retournement du signal par ordinateur, fonctionne sur une bande spectrale plus large, limitée par la bande passante des émetteurs-récepteurs utilisés pour l'enregistrement et l'émission (voir partie 1). Pour notre nouvelle technique, le MTI, les observations que nous avons déjà effectuées aux sections précédentes permettent déjà d'observer qualitativement que le processus est également relativement large bande. En effet, les kymogrammes de visualisation du champ (figures 3.7 (b) et 3.8) et de mesures du champ (3.9, 3.10) montrent qu'une large proportion des longueurs d'onde de

l'onde initiale est également présente dans l'onde retournée. Seules les longueurs d'onde les plus courtes semblent manquer en partie au motif de l'onde retournée. Cependant, ces plus courtes longueurs d'ondes correspondent également à celles dont l'atténuation par dissipation visqueuse est la plus importante. Leur atténuation s'explique donc en partie aussi, indépendamment du processus de retournement, par leur dissipation visqueuse au cours de la propagation. Elle s'atténue donc également, indépendamment du processus de retournement, au cours de la propagation.

Pour évaluer quantitativement le comportement spectral de la génération d'une onde retournée par le MTI, nous comparons, à la figure 3.11, le spectre de l'onde retournée à celui de l'onde initiale. Pour ce faire, un masque dans l'espace de Fourier annulant les composantes divergentes est appliquée sur le kymogramme de mesures des pentes 3.9 pour isoler l'onde retournée. Le spectre de cette dernière est ensuite évalué juste après le choc. Le spectre de l'onde initiale est évalué de la même manière juste avant le choc. Ce procédé permet d'évaluer de comparer les spectres au mêmes instants, et ainsi d'isoler l'effet du MTI de celui de la dissipation visqueuse au cours de la propagation, sur le spectre de l'onde retournée. Le spectre de l'onde émise par notre dispositif batteur (en noir) est non nul entre 0 et 80 Hz, avec un maximum d'amplitude proche de 35 Hz. Le spectre de l'onde retournée (en rouge) coïncide avec celui de l'onde initiale sur une large partie, ce qui confirme que le MTI est un processus de retournement temporel large bande. L'amplitude spectrale de l'onde retournée est légèrement plus faible que celle de l'onde initiale pour les hautes fréquences du spectre (à partir de 40 Hz). Le retournement temporel par MTI s'accompagne donc d'un filtrage passe-bas, faiblement perceptible pour la gamme de fréquences dans laquelle notre dispositif de génération d'onde est capable d'émettre.



**Figure 3.11** – Spectre de l'onde retournée (en rouge) comparé à celui de l'onde initiale (en noir).

Physiquement, le non retournement des hautes fréquences s'explique par la condition d'instantanéité du choc nécessaire à la réalisation du MTI. En effet, l'analyse théorique de la section 2.2 montre que l'onde retournée temporellement est obtenue rigoureusement dans le cas limite d'un choc infiniment bref. Qualitativement, le découplage nécessaire entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle n'est obtenu que si la modification de la célérité du milieu a lieu sur un temps  $\delta t$  très inférieur au temps caractéristique d'évolution de l'onde. La limite supérieure imposée au spectre d'une onde pouvant être retournée par MTI est donc donnée par :

$$f \ll \delta t^{-1}, \quad (3.2)$$

où  $f$  désigne la fréquence de l'onde considérée et  $\delta t$  représente la durée du choc. Dans nos expé-

riences,  $\delta t$  est de l'ordre de 3 ms. En choisissant comme critère que la fréquence de l'onde doit être au moins dix fois inférieure à la durée du choc pour vérifier la condition d'instantanéité (3.2), on obtient la fréquence maximale :

$$f_{\max} \approx 33\text{Hz}, \quad (3.3)$$

en accord avec les spectres expérimentaux.

### Amplitude de l'onde retournée : effet de l'amplitude du choc

#### Linéarité de l'amplitude :

Les techniques existantes de retournement temporel (conjugaison de phase, retournement numérique) peuvent s'accompagner d'une amplification. Qu'en est-il du MTI ? Les mesures du champ de la figure 3.10 montrent que l'onde retournée a dans notre expérience typique une amplitude légèrement inférieure à celle de l'onde initiale. Un paramètre évident pour contrôler l'amplitude de l'onde est l'amplitude maximale  $a_m$  de l'accélération du bain lors de la secousse effectuée. La figure 3.12 montre l'influence de ce paramètre. Une expérience de MTI est répétée dans les mêmes conditions ( $\Delta t = 110$  ms séparent l'émission de la secousse) en changeant l'amplitude du signal envoyé au pot vibrant commandant le mouvement du bain (suivi par accéléromètre). Une mesure du champ d'onde est réalisée au même point (distant de  $1,6 \pm 0,2$  cm du point d'émission) pour toutes les expériences. Les points bleus correspondent aux mesures de l'amplitude (maximale) de l'onde retournée divisée par celle de l'onde initiale, et la ligne pointillée noire est le résultat d'un ajustement linéaire. Les barres d'erreurs correspondent en chaque point à l'écart type obtenu par la répétition de 10 expériences identiques.

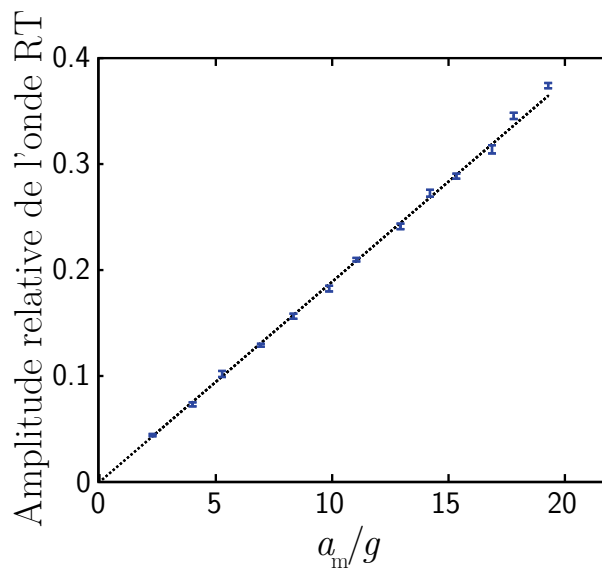


Figure 3.12 – Mesure du champ d'onde

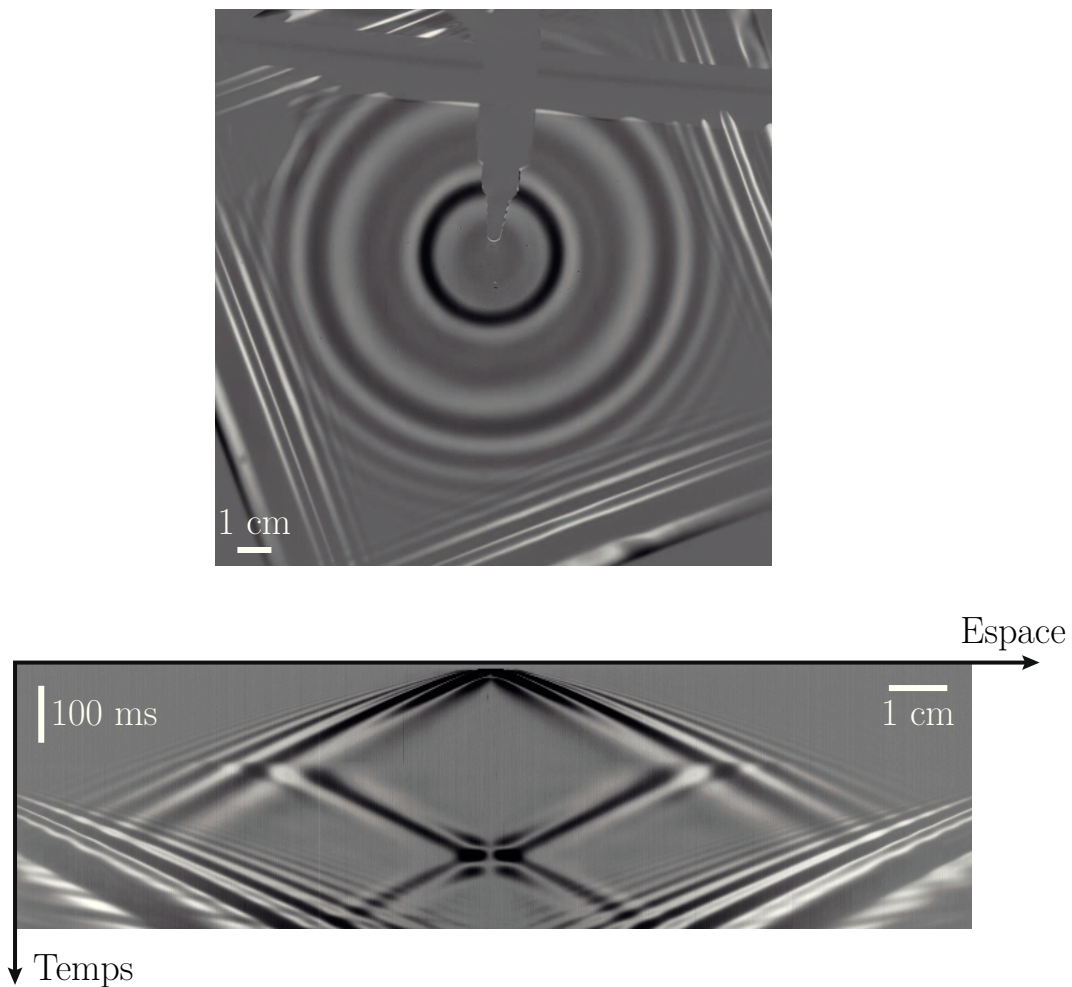
On observe que l'amplitude de l'onde retournée augmente linéairement avec l'amplitude du choc de gravité. Le maximum obtenu expérimentalement avec notre pot vibrant pour une accélération proche de  $20 g$ , correspond à une amplitude relative proche de 0,4. La théorie du MTI prévoit que l'amplitude de l'onde retournée est proportionnelle à celle de la variation du carré de la célérité, voir équations (2.33), (2.36) et (2.37). Pour les ondes de surface, la célérité au carré varie linéairement avec la gravité effective dans le référentiel en mouvement, voir équation (3.1). Ainsi, l'amplitude de l'onde retournée est bien attendue proportionnelle à celle du choc d'accélération, comme observé expérimentalement.

Du fait de la dissipation visqueuse, les mesures effectuées sous-estiment l'amplitude relative de l'onde retournée générée au moment du choc. En effet, l'onde initiale s'atténue au cours de la propagation entre le point de mesure et la position qu'elle atteint au moment du choc, puis l'onde retournée s'atténue également en se propageant depuis le lieu de sa génération jusqu'au point de mesure. Le coefficient d'atténuation visqueuse attendu pour une faible viscosité est donné par  $e^{-2\nu k^2 t}$  [73]. Sur la durée de l'aller-retour (180 ms environ), pour la viscosité de l'eau ( $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) et pour le vecteur d'onde central du paquet d'onde émis ( $k \approx 900 \text{ m}^{-1}$ ), on attend une atténuation par un facteur 0,75, uniquement liée à la dissipation visqueuse. En pratique, la dissipation des ondes à la surface de l'eau est encore plus importante que cette prédiction du fait de l'action de tensioactifs se déposant à sa surface. L'atténuation observée de l'onde retournée par rapport à l'onde initiale est donc en partie due à cette dissipation au cours de la propagation. Théoriquement, la dépendance linéaire entre l'amplitude de l'onde retournée et celle du choc permet de prédire qu'une amplification (linéaire en l'amplitude du choc) peut être réalisée par le MTI. Dans nos expériences, l'amplitude limitée du choc que nous pouvons effectuer (21  $g$  d'accélération au maximum) et la dissipation visqueuse, nous empêchent cependant d'observer cette amplification.

#### *Signe de la gravité effective :*

Dans toutes les expériences présentées jusqu'ici, l'accélération du bain lors de la secousse est effectuée vers le bas, ce qui signifie que la gravité effective dans le référentiel du bain en mouvement devient négative ( $g_{\text{eff}} \sim -20g$ ). Le sens qu'il faut donner à l'expression de la célérité effective des ondes de surface, qui dépend en racine carrée de la gravité (voir équation (3.1)), et qui devient alors imaginaire pure, n'est plus évident. La célérité reste en revanche réelle si la secousse est effectuée vers le haut. Cette différence pour l'expression de la célérité correspond-elle à un comportement physique différent dans les deux situations? L'inversion du signe de la gravité effective à une interface entre deux fluides est un problème hydrodynamique bien connu [74, 75]. Elle conduit (en régime permanent) à une instabilité de la surface plane, communément appelée instabilité de Rayleigh-Taylor. La génération de l'onde de surface observée dans nos expériences a-t-elle un lien avec la cause de cette instabilité? Pour évaluer l'influence du signe de la gravité pendant le choc, nous avons réalisé dans les mêmes conditions expérimentales deux secousses d'amplitudes similaires ( $|a_m| \approx 20g$ ) et de directions opposées.

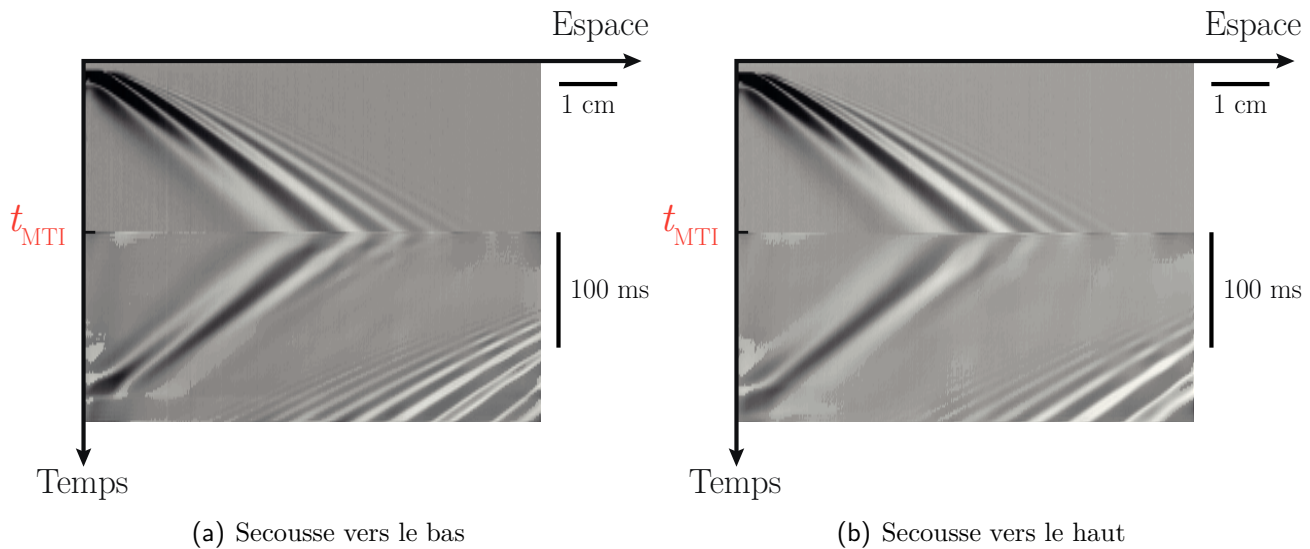
La figure 3.13 montre le résultat obtenu pour la secousse vers le haut. Elle est à comparer à la figure 3.7, montrant l'effet d'une secousse vers le bas. La photographie en haut montre une visualisation du champ d'onde (l'arrière-plan a été soustrait) 72 ms après le choc, sur laquelle on observe la superposition d'un paquet d'onde circulaire de grand rayon, correspondant à l'onde initiale divergente, et d'un paquet d'onde circulaire de plus petit rayon, correspondant à l'onde retournée, convergente. Le kymogramme (en bas) montre l'évolution spatiotemporelle du champ d'onde sur une ligne passant par le point d'émission initiale. Comme pour le cas d'une secousse vers le bas, un faisceau convergent, correspondant à une onde retournée temporellement, apparaît à l'instant du choc,  $\Delta t = 140$  ms après l'instant d'émission, et converge au point d'émission initiale,  $\Delta t$  après le choc. Le résultat obtenu pour la secousse vers le haut est donc qualitativement identique à celui de la secousse vers le bas. La secousse vers le haut, pour laquelle la gravité est à tout instant positive constitue donc également un MTI, qui réalise un retournement temporel instantané large bande. Ce résultat permet donc de montrer que l'origine du processus d'émission de l'onde retournée est distincte de celle de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, qui est déclenchée par une gravité effective négative. Pour obtenir le retournement instantané, le signe de la gravité pendant le choc n'a pas d'importance : seule l'existence d'une variation brève et de forte amplitude de la gravité conditionne l'apparition de l'onde retournée.



**Figure 3.13** – Retournement temporel instantané obtenu par une secousse effectuée vers le haut, d'accélération maximale  $a_m = 18,9 g$ ,  $\Delta t = 140$  ms après l'émission de l'onde initiale. En haut : visualisation du champ d'onde 72 ms après la secousse. En bas : kymogramme de l'expérience.

Cette propriété est prédite par la théorie que nous avons présentée à la partie 2 pour le MTI, le sens de la secousse dans un MTI pour ondes de surface n'a pas d'importance. La dépendance linéaire de l'amplitude de l'onde retournée à l'accélération de la secousse induit uniquement un changement de signe pour l'amplitude de l'onde retournée, si l'on passe d'un choc vers le haut à un choc vers le bas. C'est la valeur de la célérité *au carré* pendant le choc qui détermine l'amplitude de l'onde générée. Ainsi, le cas d'une célérité réelle pendant le choc (pour un choc vers le haut) donnant une célérité au carré réelle positive, ou celui d'une célérité imaginaire pure pendant le choc (pour un choc vers le bas), donnant une célérité au carré réelle négative, sont équivalents au signe près pour le processus du MTI.

L'examen attentif du motif du champ d'onde retournée par la secousse vers le haut révèle le changement de signe attendu entre l'onde retournée générée par un choc vers le haut et celle par un choc vers le bas. Cette différence apparaît nettement sur la figure 3.14, qui compare directement les ondes retournées obtenues pour une secousse vers le bas (a) et une secousse vers le haut (b). Dans chaque cas, un kymogramme est réalisé et sa partie basse (correspondant aux instants supérieurs ou égaux à  $t_{\text{MTI}}$ ) est filtrée par analyse de Fourier pour supprimer les ondes divergentes (les ondes parasites émises par les bords de la cuve au moment du choc restent visibles en bas à droite). Sur le kymogramme (a), on observe que le début du faisceau convergent est légèrement décalé vers la droite par rapport à la fin du faisceau divergent correspondant à l'onde initiale : l'onde retournée générée par une secousse vers le bas présente un retard de phase sur



**Figure 3.14** – Opposition de phase entre les ondes retournées générées par des chocs de signes opposés. Kymogrammes obtenus respectivement pour une secousse vers le bas (a) d'accélération maximale  $a_m = -20,9g$  et pour une secousse similaire vers le haut (b) d'accélération maximale  $a_m = 18,9g$ . La partie basse du diagramme (à partir de l'instant  $t_{MTI}$ ) est filtrée par analyse de Fourier pour ne montrer que les ondes convergentes (les ondes parasites émises par les bords de la cuve sont également visibles en bas à droite de chaque diagramme). L'onde retournée présente un retard de phase sur l'onde initiale pour une secousse vers le bas et une avance de phase pour une secousse vers le haut.

l'onde initiale. Ce retard, d'environ un quart de période, correspond au déphasage de  $\pi/2$  attendu par la théorie du MTI (il est induit par l'ordre de dérivation supplémentaire présenté par le champ retourné, voir équations (2.36) et (2.37)). Sur le kymogramme (b), le début du faisceau convergent est décalé vers la gauche : l'onde retournée générée par une secousse vers le haut est en avance de phase, d'environ un quart de période, sur l'onde initiale. Ici, le déphasage est donc d'environ  $-\pi/2 = \pi/2 - \pi$  par rapport à l'onde initiale. Il est induit à la fois par l'ordre de dérivation supplémentaire inhérent au processus du MTI (induisant  $\pi/2$ ) et par le changement de signe de l'amplitude de l'onde imposé par le changement de signe de la gravité pendant le choc (induisant  $-\pi$ ). Le déphasage de  $\pi$  observé entre les deux ondes retournées montre que le changement de direction de la secousse induit bien un changement de signe.

Dans cette section, le concept du MTI a été validé expérimentalement en mettant en évidence la génération instantanée d'une onde de surface retournée temporellement par une secousse brève et de forte amplitude appliquée au bain de liquide. Les propriétés caractéristiques de ce processus de génération d'une onde retournée ont été établies. Nous avons ainsi mis en évidence le caractère large bande du retournement temporel effectué (limité par la durée du choc), l'existence d'un déphasage de l'onde retournée (associé à l'opération de dérivation accompagnant le retournement) ainsi que la dépendance linéaire de l'amplitude de l'onde retournée avec la valeur du carré de la célérité atteinte pendant le choc, qui peut, dans cette expérience, être indifféremment positive ou négative. Afin de mettre mieux en évidence la nature de retournement temporel de l'opération effectuée, et d'en évaluer l'efficacité dans un contexte plus général, nous allons considérer à la section suivante des configurations plus complexes, mettant en jeu des géométries différentes de celle de l'onde circulaire, des milieux inhomogènes et des sources spatiotemporelles étendues.

### 3.3 Retournement temporel en situation de complexité

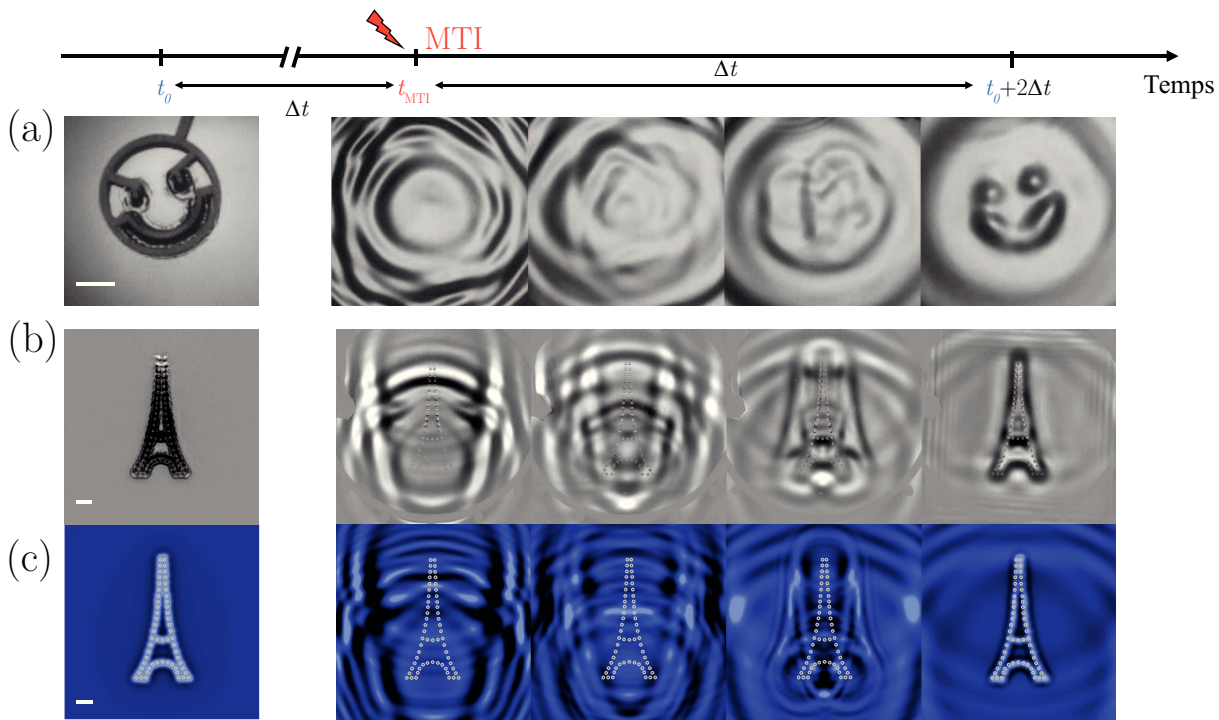
Cette section étudiera la réalisation expérimentale du Miroir temporel instantané au-delà de la géométrie circulaire, dans des configurations plus complexes permettant de mieux mettre en évidence la nature du retournement temporel mis en œuvre et d'en évaluer certaines propriétés. Nous étudierons en premier lieu l'émission d'un motif spatialement étendu de sources initiales, associée à la formation de champs d'onde de formes plus complexes. Nous considérerons ensuite la réalisation d'un MTI dans un milieu non homogène spatialement, constituant une première approche simple du problème du retournement temporel instantané en milieu complexe. Enfin, nous évoquerons le cas du retournement temporel de sources non simultanées.

#### 3.3.1 Images de motifs complexes

Du fait de l'invariance par rotation, la description de la propagation des ondes circulaires émises par une source ponctuelle peut se ramener à celle de l'évolution du champ d'onde sur un ligne passant par le centre (c'est le sens de l'utilisation des kymogrammes). Par conséquent, l'étude expérimentale du MTI réalisée à la section précédent porte sur un système ondulatoire quasi-unidimensionnel. Afin de réaliser un miroir temporel instantané sur un champ d'onde de surface véritablement bidimensionnel, nous utilisons des dispositifs d'émission réalisant des motifs étendus. Ces dispositifs sont adaptés à partir des dispositifs batteur et souffleur ponctuels, pour émettre en plusieurs points simultanément (voir les détails du dispositif section 3.1.2). Ainsi, un motif initial (bidimensionnel) est imprimé à la surface du bain au moment de l'impact (du souffleur ou du batteur), à partir duquel se propage un champ d'onde de géométrie complexe.

#### Réapparition du motif initial à l'instant de reconvergence

Deux réalisations de MTI pour des ondes de surfaces de motif complexe sont présentées à la figure 3.15. La première image montre le processus d'émission. En (a), l'émission est réalisée à l'instant initial  $t_0$  par l'impact simultané de pointes sur la surface de l'eau, formant un "smiley". En (b), l'émission est obtenue par les jets d'air simultanés sortant des trous disposés en forme de tour Eiffel d'une plaque de Plexiglas formant le dessous d'une cavité hermétique transparente. L'arrière-plan est soustrait dans le cas de la tour Eiffel pour une meilleure visualisation du champ d'onde. Les barres blanches sur les premières images représentent un centimètre. Dans chaque cas, la propagation des ondes fait disparaître le motif initial quelques dizaines de millisecondes après l'émission (voir la deuxième image) : contrairement au cas de la source ponctuelle, le champ d'onde ne possède alors plus la même allure qu'initialement. À cet instant la secousse est appliquée au bain. Les images suivantes montrent la convergence de l'onde retournée temporellement générée par le choc (tandis que l'onde initiale continue de diverger). Le motif initial se reforme à l'instant  $t_0 + 2\Delta t$  (en (a),  $\Delta t = 80$  ms, en (b),  $\Delta t = 200$  ms) : le retournement temporel instantané induit par la secousse est bien observé pour les deux champs d'onde. Dans les conditions expérimentales des deux expériences présentées ici, le champ retourné n'est pas observé seul : il est entouré par le champ d'onde initial divergent qui a continué sa propagation, et dont une partie est encore proche de la zone d'émission initiale. Après l'instant de refocalisation ( $t_0 + 2\Delta t$ ), l'onde retournée rediverge et le motif disparaît de nouveau. La figure 3.15(c) est une simulation numérique validant la théorie du MTI. Elle est réalisée à partir des équations des ondes de surface et en utilisant le profil d'accélération expérimental de la cuve. Les points blancs indiquent les positions des sources initiales, disposées pareillement aux trous de la plaque de Plexiglas dans le dispositif souffleur de l'expérience de la figure 3.15(b). Les mêmes allures de champ d'onde (et la même refocalisation



**Figure 3.15** – Chronophotographies du MTI appliqué à des motifs complexes. Pour chaque série, la première image correspond à l'instant  $t_0$  d'émission d'une impulsion d'un motif complexe, le MTI est réalisé à l'instant  $t_{MTI} = t_0 + \Delta t$ , correspondant à la deuxième image, et les images suivantes montrent la convergence de l'onde retournée jusqu'à l'instant  $t_0 + 2\Delta t$ . Les barres blanches indiquent 1 cm. (a) Émission et retournement d'un motif de "smiley" obtenu par l'impact simultané de multiples pointes sur la surface de l'eau. (b) Émission et retournement d'un motif, obtenu par une impulsion de souffle dans une cavité d'air hermétique entre deux plaques de Plexiglas, dont l'une possède des trous disposés en tour Eiffel, placés un centimètre au dessus de la surface. L'arrière-plan a été soustrait dans cette série pour une meilleure visualisation du champ d'onde. (c) Simulation numérique à partir des équations des ondes de surface et du profil d'accélération expérimental, (voir le modèle section 4.2.1). Les positions des sources initiales (indiquées par des points blanc) forment une tour Eiffel. L'intervalle de temps entre deux images est 26 ms pour (a) et 66 ms pour (b) et (c).

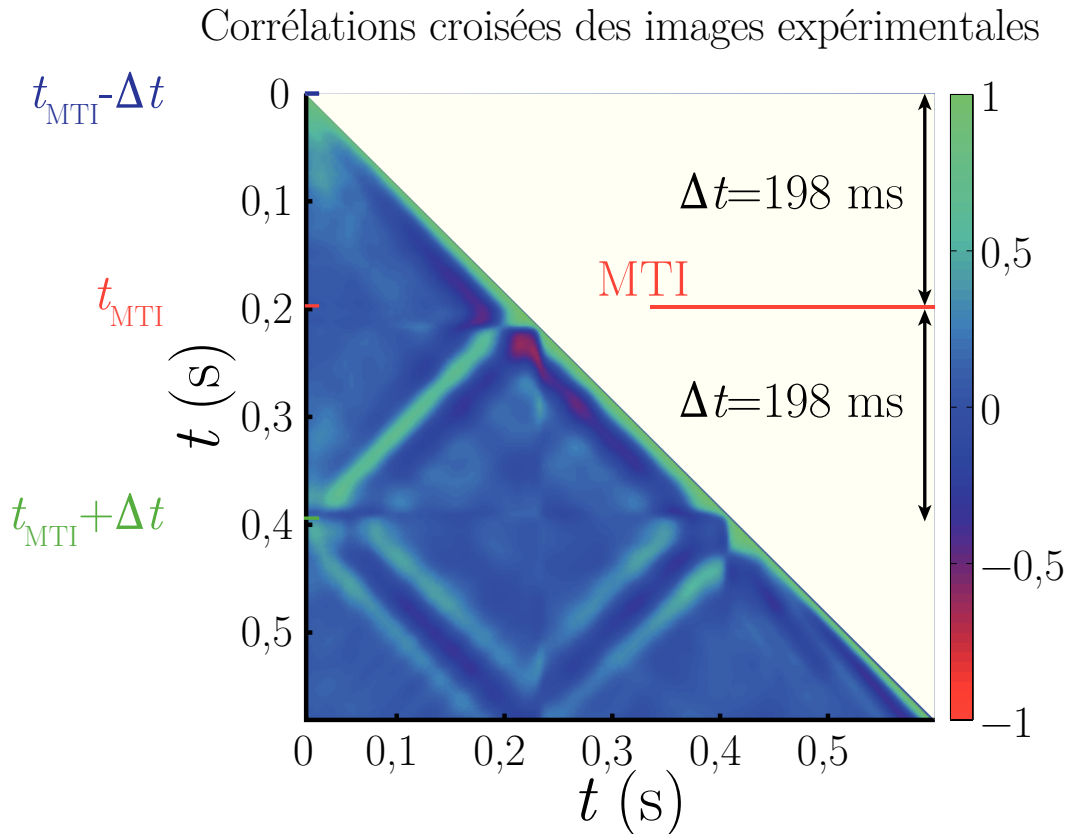
en  $t_0 + 2\Delta t$ ) que celles de l'expérience (b) sont retrouvées. Nous donnerons les détails de cette simulation dans la partie suivante.

Le MTI est donc également obtenu pour des géométries véritablement bidimensionnelles, quelque soit la forme de la source initiale. Qualitativement, cette propriété s'explique par le fait que l'action exercée sur le champ d'onde par la secousse est *spatialement homogène* (l'ensemble de la cuve rigide est déplacé à la même vitesse et la gravité effective varie ainsi temporellement mais non spatialement). Par conséquent, la géométrie de l'onde générée par cette action ne peut être déterminée que par celle de l'onde initiale. L'invariance par retournement temporel de la propagation assure que l'onde convergente, générée avec la géométrie de l'onde initiale, parcourt exactement le trajet inverse de l'onde initiale pour reconverger à l'instant de refocalisation. Notons par ailleurs que, malgré la disparition du motif initial par propagation depuis les points sources, l'information associée à ce motif est encore stockée dans le champ d'onde à chaque instant de sa propagation : elle est utilisée par le processus de miroir temporel instantané à l'instant  $t_{MTI} = t_0 + \Delta t$  pour faire réapparaître le motif à l'instant  $t_0 + 2\Delta t$ .



### Analyse de la fidélité

La réalisation du MTI pour des motifs complexes nous permet d'étudier la qualité du retournement temporel effectué. Pour obtenir une mesure quantitative de la fidélité de l'onde retournée à l'onde initiale, nous mesurons les corrélations croisées des images prises à différents instants de l'expérience de la figure 3.15 (b).

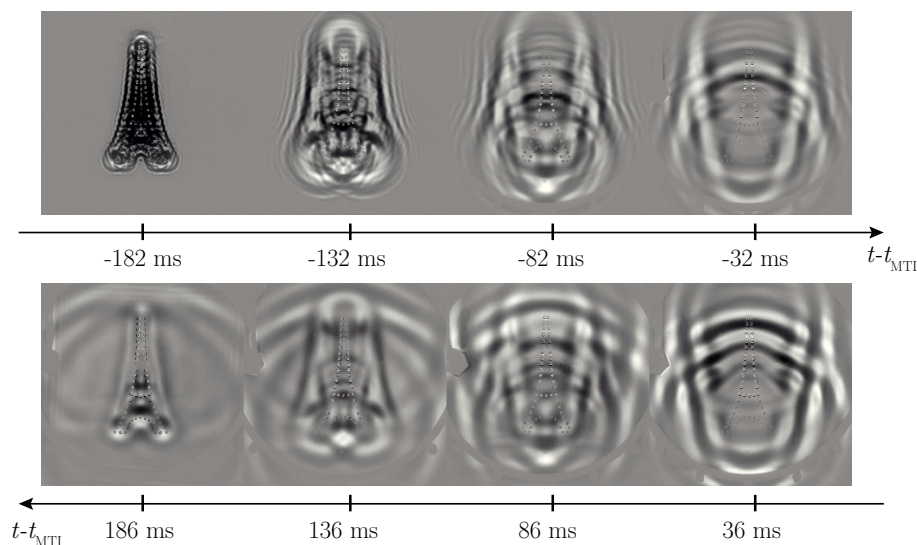


**Figure 3.16** – Corrélations croisées expérimentales. Le diagramme est obtenu à partir des images du film de l'expérience de la figure 3.15 (b). La corrélation entre deux images est obtenue en soustrayant à chaque image sa valeur moyenne puis en sommant tous les produits des coefficients correspondants des deux images. Un indice de corrélation entre -1 et 1 est obtenu en normalisant par la moyenne géométrique des autocorrélations des deux images. Le triangle supérieur droit, redondant du fait de la symétrie de l'opération, a été supprimé.

La corrélation croisée entre deux images est une opération symétrique. Le triangle supérieur droit du diagramme est donc redondant et a été supprimé par souci de clarté. La ligne de corrélation maximale observée sur la diagonale correspond à l'auto-corrélation normalisée de chaque image, qui, par construction, vaut un. Du fait de la taille caractéristique non nulle du paquet d'onde, chaque image est également corrélée à celles qui précèdent ou suivent immédiatement (ce qui donne l'épaisseur de la bande de corrélation autour de la diagonale). Nous décrivons dans un premier temps la partie supérieure du diagramme correspondant aux instants compris entre l'émission à  $t_{MTI} - \Delta t = 0$  et la refocalisation à  $t_{MTI} + \Delta t$ . À partir de l'instant de la secousse  $t_{MTI} = 198$  ms, une ligne de forte corrélation est observée dans une direction antidiagonale. Elle traduit la similarité de l'onde rétropropagée à un instant donné  $t$  compris entre  $t_{MTI}$  et  $t_{MTI} + \Delta t$  avec l'onde initiale à l'instant symétrique par rapport au choc  $2t_{MTI} - t$ . Ce diagramme permet de quantifier la fidélité de l'onde retournée à l'onde initiale : sur la ligne de corrélation maximale dans la direction antidiagonale, la moyenne de la corrélation croisée vaut 0,61. Remarquons que cette valeur est sous-estimée car la présence résiduelle de l'onde divergente diminue fortement la

corrélation croisée mesurée. Cette valeur prend par ailleurs en compte l'effet filtrant passe bas de la dissipation visqueuse au cours de la propagation, indépendante de l'opération de retournement temporel (nous reviendrons en détails sur l'effet de la viscosité dans nos expériences à la section 4.2.2). Enfin, cette valeur témoigne également de la (légère) déformation du motif induite par le fait que l'onde retournée générée par MTI est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'onde initiale (voir équations (2.36) et (2.37)).

L'effet principal de cette dérivation est d'introduire un léger retard, associé à un déphasage moyen de  $\pi/2$  à la fréquence centrale du paquet d'onde. Sur la figure 3.16, ce déphasage se traduit par le fait que le maximum de corrélation associé à l'onde retournée est obtenu en moyenne sur une ligne antidiagonale coupant la diagonale à l'instant  $202\text{ms} = t_{\text{MTI}} + 4\text{ms}$ . Ce retard mesuré de 4 ms est bien, à l'incertitude de 2 ms près avec laquelle est estimée l'instant du choc, de l'ordre du quart de la période centrale du paquet d'onde, estimé à 6 ms environ. Notons par ailleurs qu'une légère diminution de l'écart observé par rapport à l'écart attendu peut être due à l'effet intégrateur de la durée non nulle de la secousse (environ 3 ms) : une partie du processus de génération de l'onde est déjà réalisée avant l'instant  $t_{\text{MTI}}$  auquel est estimé le choc.



**Figure 3.17** – Instants correspondants

La figure 3.17 illustre les propriétés que nous venons d'évoquer. Elle montre quatre images de la propagation de l'onde l'onde initiale (respectivement 182, 132, 82 et 32 ms avant le choc) et les quatre images après le choc aux instants correspondant maximalelement corrélés (en retard de 4 ms, respectivement 186, 136, 86 et 36 ms après le choc). Le motif de l'onde initiale est bien reconnaissable sur chaque image correspondante après le choc, superposé celui de l'onde divergente qui continue sa propagation. Les plus petites longueurs d'ondes présentes dans les motifs de l'onde initiale manquent cependant dans l'onde retournée dont les contours semblent plus doux : ces très hautes fréquences ont été filtrées par la durée non nulle du choc et/ou dissipée par la viscosité lors de la propagation (voir section 3.2.3).

Un examen attentif du diagramme de corrélation 3.16 révélerait des propriétés importantes du champ d'onde lors de la réalisation d'un MTI. Remarquons ainsi que les zones de forte corrélation sur la diagonale du diagramme ainsi que sur la ligne antidiagonale correspondant à la convergence de l'onde retournée sont toutes deux entourées de bandes d'anticorrélation (légère). Ces bandes d'anticorrélation adjacentes trouvent leur origine dans l'anticorrélation entre le champ d'onde à un instant donné et celui obtenu après que le paquet d'onde a parcouru une demie longueur d'onde à sa fréquence centrale. Des effets interférentiels du même type, entre l'onde initiale divergente et

l'onde retournée, expliquent également l'allure particulière du diagramme de corrélation proche de la secousse. En effet, immédiatement après le choc, l'onde retournée, qui apparaît en avant de l'onde initiale (du fait du déphasage d'un quart de période) mais se propage dans la direction opposée, rejoint l'onde initiale. Le champ résultant semble alors s'amplifier en restant sur place. Ce sur-place apparent explique la large tache de corrélation autour de l'instant du choc. Notons que cet effet est également directement observable sur les kymogrammes 3.7, 3.9 et 3.13. Immédiatement après, les deux ondes contrapropagatives se sont traversées et se retrouvent décalées d'une demie longueur d'onde en moyenne : elles interfèrent alors destructivement et le champ résultant devient quasi nul : il en résulte une ligne horizontale de corrélation quasi nulle sur le diagramme, observée environ 20 ms après le choc. Là encore, cette interférence destructive est également observée sur les kymogrammes de la section précédente. Remarquons que le diagramme de corrélation présente une autre ligne horizontale de corrélation nulle proche de l'instant de refocalisation  $t_{\text{MTI}} + \Delta t$  : elle est cette fois l'effet de l'interférence destructive entre l'onde retournée convergente et l'onde redivergente qui en est issue.

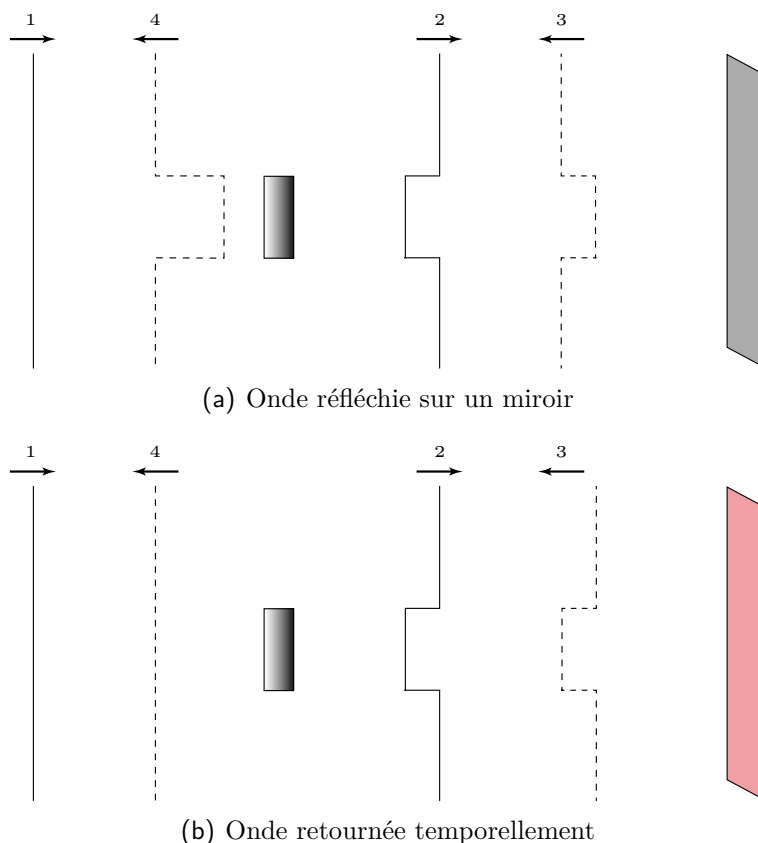
Après, la refocalisation, le diagramme de corrélations est marqué par deux triples bandes corrélation-anticorrélation-corrélations, arrangées chacune selon une ligne respectivement parallèle à la diagonale ou à l'antidiagonale. Ces triple bandes correspondent toutes deux à l'onde redivergente : celle-ci apparaît à deux endroits du diagramme car elle est corrélée à la fois à l'onde divergente initiale avant le choc et à l'onde retournée convergente entre le choc et la refocalisation. Sur chacune des deux lignes, la bande d'anticorrélation centrale (dont la valeur moyenne est proche de -0,3 sur une large portion) montre que l'onde redivergente est de signe opposé à l'onde convergente. Nous avons déjà évoqué l'origine ce signe moins à la section précédente (voir section 3.2.2), qui a déjà été observé dans d'autres expériences de retournement temporel [18] et qui est attendu lors de tout processus de retournement temporel d'un champ d'onde. Les bandes adjacentes de corrélation opposée (ici positive) qui accompagnent la bande d'anticorrélation correspondent de nouveau aux images décalées d'une demie longueur d'onde à la fréquence centrale du paquet d'onde.

Dans nos expériences, le MTI génère donc une onde retournée temporellement fidèle, corrélée à au moins 60%, à l'onde initiale de motif complexe, mais cette onde retournée est légèrement retardée par l'effet de la dérivation qui accompagne le retournement. Sa propagation s'accompagne d'effets interférentiels subtils, qui donnent successivement l'apparence d'un arrêt de la propagation du champ d'onde au moment du choc, puis le font disparaître immédiatement après le choc ainsi que juste avant la refocalisation. Lorsque l'onde rediverge, elle donne une onde similaire à l'opposé de l'onde initiale aux instants correspondants. La qualité du retournement temporel est obtenue malgré la complexité du motif de source initiale. Cependant, à ce stade, elle n'a été vérifiée que dans un milieu de propagation parfaitement homogène. Afin de généraliser encore le concept, nous allons désormais étudier l'effet d'un élément de complexité issu du milieu de propagation lui-même.

### 3.3.2 **Obstacle sous-marin**

La génération d'une onde retournée temporellement présente un intérêt évident pour la focalisation d'ondes en milieux inhomogènes [20]. La refocalisation d'une onde ayant traversé des inhomogénéités par retournement temporel constitue un test standard de robustesse et de caractérisation du retournement temporel. Ainsi, pour la conjugaison de phase en optique, le passage à travers un déphaseur, illustré à la figure 3.18, permet de mettre en évidence la différence entre une réflexion standard et une réflexion par un miroir à retournement temporel. Dans chaque cas, les traits continus indiquent les fronts d'onde à l'aller et les traits pointillés ceux lors du trajet retour,

l'ensemble étant numéroté chronologiquement. Pour une réflexion standard sur un miroir en (a), la partie du front retardée par l'aberrateur présente toujours un retard sur le reste du front d'onde après la réflexion. Ce retard augmente encore lorsque l'onde réfléchie repasse par l'aberrateur. En revanche, pour un retournement temporel en (b), le retard induit par l'aberrateur sur une portion de l'onde initiale correspond à une avance pour l'onde retournée, car celle-ci garde la même forme spatiale malgré le changement de direction de propagation. Le retard induit par l'aberrateur au retour compense cette avance, et le front d'onde plan initial est finalement retrouvé.



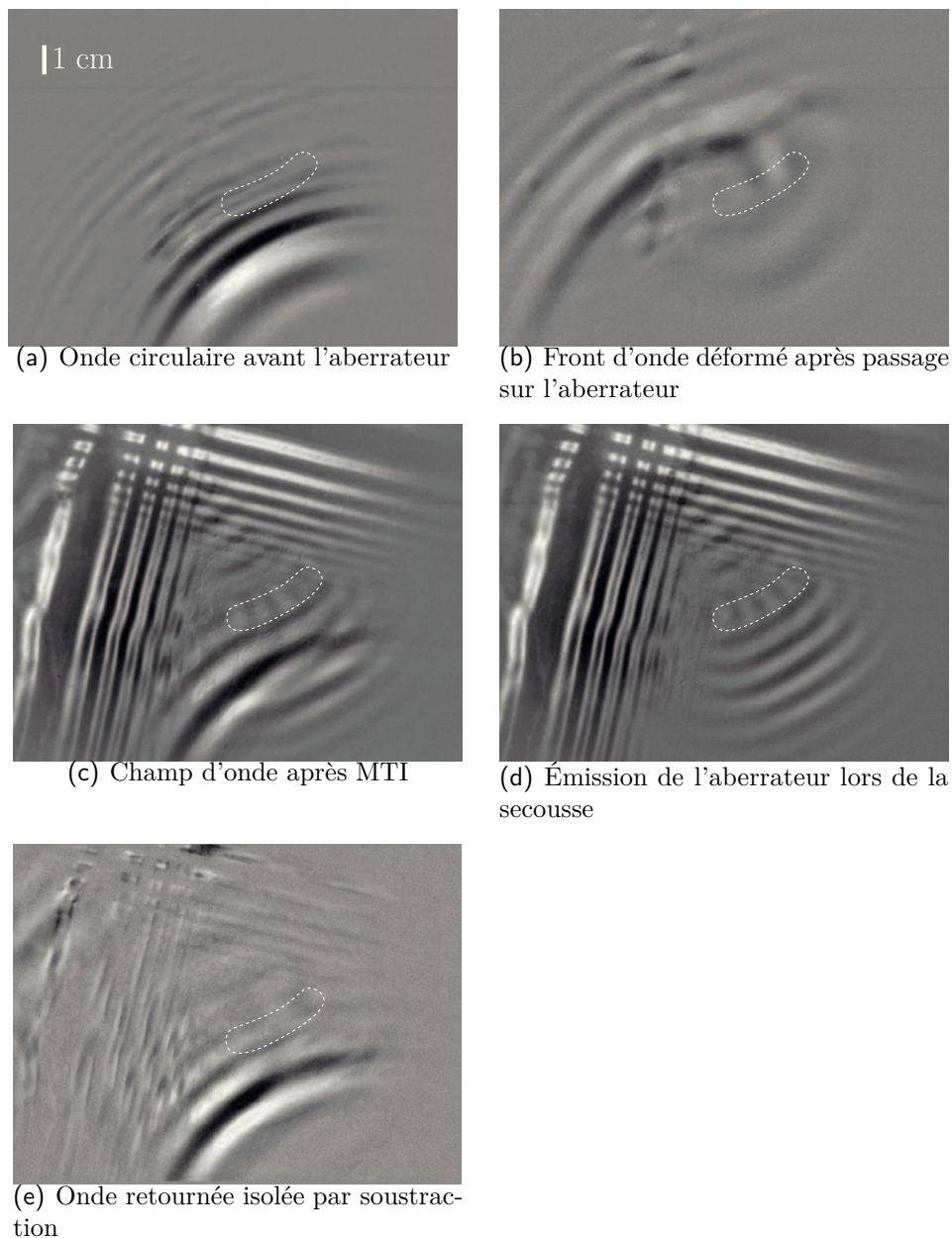
**Figure 3.18** – Effets comparés d'un défaut déphasant sur une onde réfléchie et sur une onde retournée temporellement. Les lignes continues symbolisent les fronts d'onde au cours du trajet aller, les lignes pointillées ceux du trajet retour. Les numéros indiquent la chronologie. (a) Réflexion standard sur un front d'onde déformé par un aberrateur : la partie du front d'onde passant par l'aberrateur est doublement retardée (une fois à l'aller et une fois au retour). (b) Retournement temporel d'un front d'onde déformé par un aberrateur : la déformation induite au trajet aller est compensée au trajet retour.

Ici nous présentons une première approche du problème du MTI en présence d'inhomogénéités spatiales en introduisant un obstacle sous-marin dans le milieu de propagation, jouant un rôle similaire à celui du défaut du schéma 3.18. Nous tirons parti du fait que la relation de dispersion des ondes de surface dépend en général de la profondeur de liquide :

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k\right) \text{th}(hk)}, \quad (3.4)$$

où  $h$  est la profondeur de liquide. Nos expériences, pour lesquelles la profondeur d'eau est de l'ordre de 5 mm, sont réalisées dans un régime de forte profondeur :  $\text{th}(hk) \approx 1$ . Nous ajoutons un obstacle placé au fond de l'eau et qui possède une hauteur tout juste inférieure à la hauteur d'eau. Ainsi, la profondeur de liquide au niveau de l'obstacle est localement très faible. Ceci a

pour effet de diminuer notablement la célérité des ondes de surface sur la zone correspondant à l'obstacle sous-marin. Ce dernier a donc un double effet diffusant et aberrant : la portion d'onde transmise à travers cette zone est retardée par rapport à la propagation dans le reste du milieu et une partie de l'onde est également réfléchie localement par cette frontière spatiale. Il a également un troisième effet atténuant, car un effet de dissipation visqueuse sur le fond apparaît dans cette zone de faible profondeur [25]. Ces effets sont visibles sur les images du passage d'un champ d'onde circulaire sur l'obstacle sous-marin à la figure 3.19 (a) et (b).



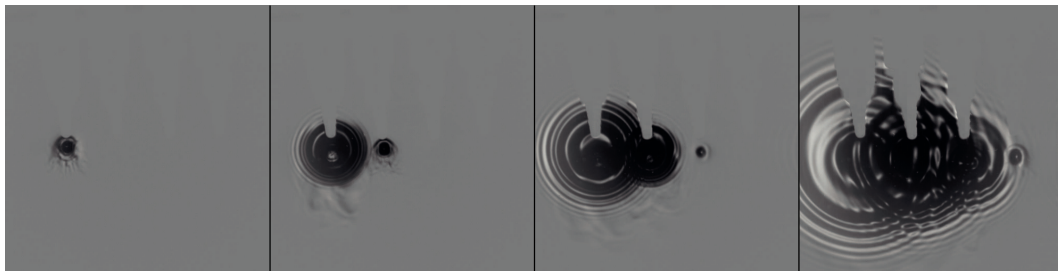
**Figure 3.19** – Retournement temporel d'un front d'onde circulaire déformé par un obstacle sous-marin (symbolisé par la ligne pointillée blanche). La source, ponctuelle est hors champ. (a) Onde circulaire initiale, avant son passage au-dessus de l'obstacle, 530 ms après l'émission. (b) Front d'onde déformé après son passage au-dessus de l'obstacle sous-marin, 224 ms après l'image. (c) Champ d'onde 228 ms après le MTI. L'onde retournée est visible mais brouillée par l'émission parasite issue de l'obstacle lors du choc. (d) Champ d'onde au même instant que (c) prise pour une répétition de l'expérience dans laquelle on n'a pas émis d'onde initiale. L'onde émise par l'obstacle sous-marin lors du choc y est clairement visible. (e) Onde retournée isolée obtenue en soustrayant à l'image (c) une image de l'émission parasite au cours du choc.

Dans cette expérience, le champ d'onde est généré par une impulsion de souffle en un point hors du champ de vision. L'aberrateur est constitué par une bande d'épaisseur 4 mm et de dimensions 3,3 cm par 5 mm (très légèrement courbé dans le sens inverse de l'onde incidente). Puisqu'il est situé sous la surface du liquide, il est invisible avec l'éclairage utilisé pour visualiser le champ d'onde. La position et la forme approximatives de l'aberrateur sont indiquées par un trait pointillé blanc. L'image (a) montre une portion du champ d'onde circulaire juste avant son passage sur l'aberrateur, 530 ms après l'émission. Le front d'onde à la longueur d'onde principale du paquet d'onde, qui est proche de la taille de l'obstacle, est fortement déformé après son passage par dessus, comme le montre l'image (b), prise 224 ms après l'image (a). L'onde réfléchie sur l'obstacle est également visible. Un MTI est réalisé à cet instant. Il génère comme précédemment une onde retournée à la position de l'onde initiale. Celle-ci repasse au dessus de l'obstacle sous-marin. Le champ d'onde observé 228 ms après le choc (l'instant symétrique de celui de l'image de la figure 3.19 (a)) est présenté à la figure 3.19(c). L'onde retournée y est visible à la position attendue (la même position que l'onde initiale sur l'image 3.19 (a)). Notons que l'onde réfléchie par l'obstacle est également retournée par le choc et contribue (après une seconde réflexion sur l'obstacle) à l'onde retournée observée. Cette dernière semble cependant déformée par un champ d'onde supplémentaire (de courbure opposée) visible notamment en bas à droite de l'onde retournée. En effet, la génération d'une onde retournée n'est pas le seul effet du choc : il entraîne également une émission d'onde depuis l'aberrateur. C'est cette onde issue de l'aberrateur qui se superpose à l'onde retournée et en masque la forme précise. Les ondes émises par les bords au moment du choc sont également visibles à l'image, mais elles n'ont pas encore atteint la zone où se situe l'onde retournée et ne brouillent pas l'onde retournée. Afin d'isoler l'émission parasite de l'aberrateur, l'expérience a été répétée en omettant l'émission d'onde initiale, et en réalisant uniquement une secousse du bain. L'image 3.19(d) montre le champ d'onde obtenu dans ce cas au même instant, c'est-à-dire 228 ms après le choc. Les portions d'ondes planes issues de l'aberrateur, y sont nettement visibles. Notons qu'ici, c'est la variation temporelle de la célérité de part et d'autre d'une frontière spatiale qui entraîne l'émission d'ondes à cette frontière. Nous pouvons faire réapparaître la contribution de l'onde retournée seule en soustrayant l'image (d) (correspondant à l'onde émise par l'aberrateur) à l'image (c) (pour laquelle le champ d'onde correspond à la superposition de l'onde émise par l'aberrateur et de l'onde retournée temporellement). On obtient alors une visualisation du champ retourné seul. Du fait de la légère variabilité de l'éclairage et de l'émission d'une expérience à l'autre, ce procédé n'est pas efficace s'il est appliqué directement aux images (c) et (d). L'effet de la variabilité est atténué en répétant chaque expérience dix fois et en moyennant les films obtenus. Les films moyens sont alors soustraits pour supprimer l'onde émise par l'aberrateur : le résultat est présenté à la figure 3.19(e). Les contributions des ondes émises par les bords de la cuve sont fortement atténuées, ce qui valide le procédé et celles de l'émission par l'aberrateur ont également quasiment disparu. L'onde observée correspond à l'onde retournée, qui a bien retrouvé comme attendu une forme circulaire après passage sur l'aberrateur. Outre le filtrage des hautes fréquences, la principale cause de l'imperfection résiduelle observée dans l'onde retournée est l'effet dissipatif de l'aberrateur utilisé, qui implique une atténuation de la portion de l'onde passant par dessus.

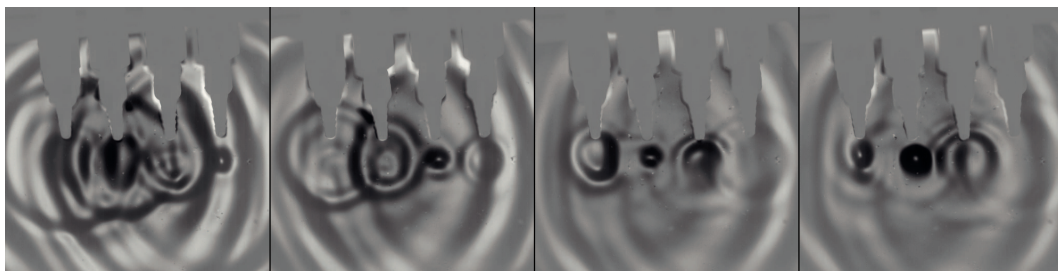
Ainsi, l'onde retournée générée par un miroir temporel instantané est bien robuste à l'effet d'une inhomogénéité déphasante et diffusante du milieu. Néanmoins, l'effet radiatif du choc de célérité en milieu inhomogène rajoute nécessairement un champ parasite au champ retourné, qui peut brouiller le signal de l'onde retournée.

### 3.3.3 Retournement temporel de sources temporellement étendues

Au cours de cette section, nous avons introduit et étudié tour à tour deux éléments de complexité spatiale à la propagation- l'un concernant le motif des sources du champ d'onde initial, l'autre concernant le milieu de propagation - et leur effet sur le miroir temporel instantané. Évoquons ici brièvement, sur un exemple modèle simple, le comportement du MTI en présence d'un élément de complexité *temporelle*. Nous étudions ici le retournement temporel instantané d'ondes générées par quatre sources ponctuelles *non simultanées*. On dispose celles-ci selon une ligne et les sources émettent chacune une impulsion à intervalle de temps régulier (de la gauche vers la droite sur la figure 3.20(a)).



(a) Émission par quatre sources successives



(b) Champ retourné

**Figure 3.20** – Émission (a) et retournement temporel (b) d'un champ émis par quatre sources successives. Dans les deux séries d'images, le temps s'écoule de la gauche vers la droite et l'arrière-plan a été soustrait. Les images sont prises, respectivement 166 ms, 148 ms, 130 ms et 86 ms avant le choc pour la série (a) et 80 ms, 114 ms, 146 ms et 164 ms après le choc pour la série (b). L'échelle est donnée approximativement par l'embouchure d'un souffleur, de diamètre 4 mm.

La figure 3.20(a) présente le champ d'onde aux instants d'émissions des sources successives. Le dispositif d'émission est une série de quatre souffleurs émettant chacun une impulsion à des intervalles de temps contrôlés. Un MTI est réalisé 86 ms après la dernière émission (dernière image de la série (a)). La figure (b) représente le champ d'onde à des instants proche des convergences successives associées à chacune des sources. Les images montrent successivement la refocalisation de chaque onde retournée, ainsi que la redivergence des ondes retournées ayant déjà précédemment convergé. Le retournement temporel effectué inverse *l'ordre de convergence* par rapport à celui de l'émission (la dernière onde émise est la première à reconverger après le MTI). Le motif obtenu à la première image de la figure 3.20(b), correspondant à l'instant de convergence de l'onde retournée associée à la quatrième source (située à droite), est, comme dans les expériences précédentes, très similaire au motif de l'onde initiale à l'instant symétrique temporellement par rapport au choc, correspondant à la dernière image de la figure 3.20(a). Cependant, les images suivantes ne correspondent plus à l'onde initiale, car une partie des ondes retournées ont redivergé. On observe que la dernière image de la figure 3.20(b), correspondant à l'instant du début de la redivergence de l'onde retournée associée à la source de gauche, est similaire au retourné *spatial*

de la dernière image de la figure 3.20(a). Tout se passe comme si les ondes redivergentes étaient issues de l'émission des quatre sources initiales, dont on aurait inversé l'ordre d'émission. Notons de plus que nous avons observé précédemment (voir section 3.2.2) que le champ d'onde change de signe lorsqu'il rediverge. Ces observations combinées permettent donc de mettre en évidence la nature des ondes redivergentes apparaissant suite à une opération de retournement temporel : elles peuvent être décrites comme l'émission d'"antisources" équivalentes, d'amplitudes opposées et d'évolutions temporelles inversées.

Cette section a permis d'étudier expérimentalement le processus de retournement temporel par MTI, à travers l'introduction d'éléments de complexité (dans la forme de la source, son évolution temporelle, et dans la forme du milieu). Nous avons montré et quantifié la fidélité de l'onde retournée générée par rapport à une onde initiale de forme quelconque, malgré un léger retard moyen d'un quart de période. La nature d'antisource retournée des sources équivalentes correspondant à l'onde redivergente observée après refocalisation des ondes retournées a pu être mis en évidence à travers nos différentes expériences. La robustesse du retournement temporel par MTI à la présence d'inhomogénéités dans le milieu de propagation a également été montrée, pour lesquels des émissions parasites issues des diffuseurs lors de la secousse ont été révélées. Dans la partie suivante, nous utiliserons ces résultats pour réaliser une analyse théorique des propriétés de ce procédé et de la portée du concept, qui approfondira et généralisera la description que nous en avons donnée jusqu'à présent.



## Théorie du miroir temporel instantané

## Table des matières

4.1	Un miroir temporel instantané . . . . .	<b>85</b>
4.1.1	Origine de l'onde retournée : le principe d'Huygens-Fresnel revisité . .	85
	Le principe d'Huygens-Fresnel . . . . .	85
	Sources secondaires "réelles" du MTI . . . . .	88
4.1.2	Lien avec la réfraction temporelle en électromagnétisme : une double frontière temporelle . . . . .	89
4.1.3	Symétries spatiotemporelles . . . . .	93
	L'équivalent temporel d'un miroir . . . . .	93
	De l'autre côté du miroir temporel . . . . .	93
4.1.4	Une nouvelle approche du retournement temporel . . . . .	95
	Avantages comparés de l'approche MTI et des cavités à retournement temporel numérique . . . . .	96
	Similarités des deux approches : utilisation de l'information contenue dans une hypersurface . . . . .	99
4.2	Généralisation à d'autres types d'ondes . . . . .	<b>103</b>
4.2.1	Généralisation du MTI à d'autres ondes classiques . . . . .	103
	Motivation . . . . .	103
	Généralisation à une catégorie d'ondes " $\mathcal{H}$ " . . . . .	104
	Le MTI par choc de gravité pour les ondes de surface en eau profonde	106
4.2.2	Influence de la dissipation . . . . .	108
	Équations d'ondes avec un terme de dissipation et MTI . . . . .	108
	Filtre passe-bas imposé par la viscosité pour les ondes de surface . . .	111
4.2.3	Perspectives : limites d'applicabilités du concept ? . . . . .	111
	Ondes non linéaires ? . . . . .	111
	Un MTI d'ondes de matière ? . . . . .	112
4.3	Perspectives : au-delà du simple choc de célérité . . . . .	<b>117</b>
4.3.1	Couplage instantané à une autre onde : Choc de pression de radiation	117
	Établissement des équations des ondes de surface en présence d'un choc de pression de radiation. . . . .	117

	Ordres de grandeur . . . . .	118
	Premiers résultats expérimentaux . . . . .	119
4.3.2	Choc de dissipation . . . . .	121
	Retournement temporel du champ sans ordre de dérivation supplémentaire	121
	Dissipation maximale et refroidissement de Loschmidt . . . . .	122

---





Le concept de Miroir temporel instantané, présenté à la partie 2 et inspiré du démon de Loschmidt, nous a donné une nouvelle procédure permettant de générer une onde retournée temporellement. Nous avons validé expérimentalement ce nouveau concept de retournement temporel et en avons mis en évidence ses caractéristiques essentielles à la partie 3. Dans cette partie, nous montrerons les implications de ces résultats, essaierons de les généraliser et d'en déterminer la portée. Dans un premier temps, nous analyserons l'origine de la production d'une onde retournée, établirons les liens entre le concept du MTI et d'autres concepts liés au retournement temporel, et montrerons les spécificités du MTI. Nous généraliserons ensuite les résultats obtenus pour des ondes régies par l'équation de d'Alembert à d'autres systèmes ondulatoires, et en particulier aux ondes de surface utilisées pour nos expériences. Nous aborderons enfin d'autres utilisations du concept, pour aller plus loin que le MTI et ouvrir de nouvelles perspectives sur le contrôle d'ondes par manipulations temporelles du milieu.

## 4.1 Un miroir temporel instantané

Les parties précédentes ont permis d'établir précisément les conditions et les propriétés de l'émergence d'une onde retournée lors de la réalisation d'un choc de célérité. Cette section sera consacrée à l'étude de l'origine physique et de la nature de cette nouvelle approche de retournement temporel. Les spécificités de cette opération de retournement apparaîtront également plus clairement à la lumière de sa mise en perspective, en établissant les liens qu'elle présente avec d'autres concepts fondamentaux reliés à la réversibilité temporelle et à la propagation des ondes, et que le concept de MTI nous permettra de revisiter. Nous commencerons, dans cette démarche, par considérer les principes fondamentaux de la propagation des ondes et le principe d'Huygens-Fresnel avant d'aborder le point de vue de la théorie de la réfraction temporelle. Les symétries spatiotemporelles du MTI seront ensuite analysées et nous le comparerons enfin aux techniques existantes de retournement temporel.

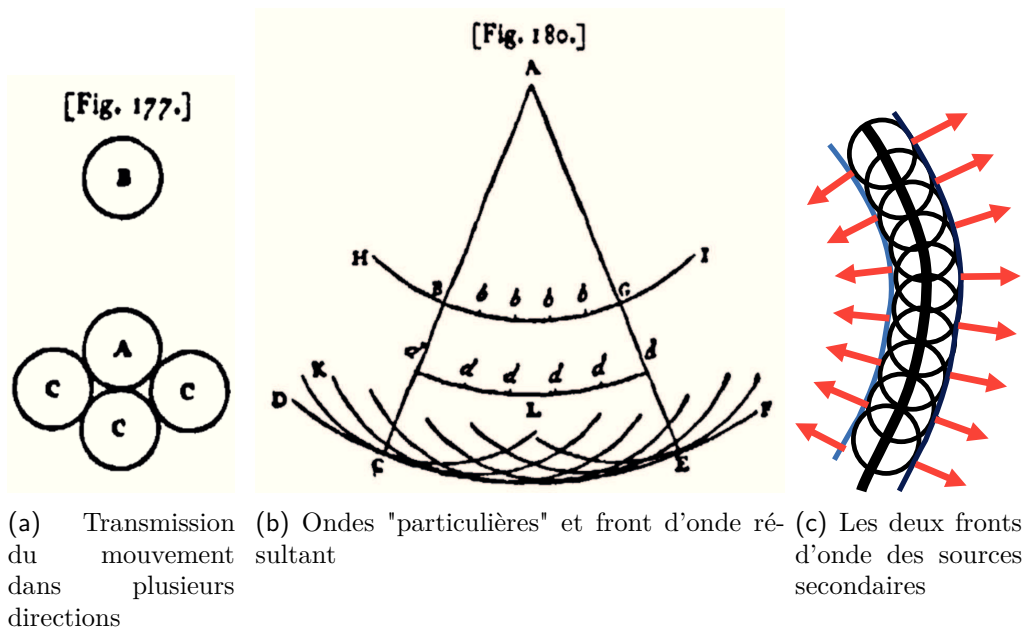
### 4.1.1 Origine de l'onde retournée : le principe d'Huygens-Fresnel revisité

#### Le principe d'Huygens-Fresnel

*Les sources secondaires d'Huygens et Fresnel :*

L'émission du champ retourné dans une expérience de MTI permet d'apporter un éclairage sur un principe fondamental de la propagation des ondes : le principe d'Huygens-Fresnel. Celui-ci stipule que la suite de la propagation d'une onde incidente peut être décrite comme l'émission par des sources secondaires, dont l'amplitude et la phase sont déterminées par celles de l'onde incidente. Dans son approche initiale [76], Huygens, qui imaginait la lumière comme une onde mécanique, transmise entre les particules d'un milieu matériel ("l'éther"), à la manière du son dans l'air, remarqua que chaque particule mise en mouvement par l'arrivée d'une onde mécanique, doit à son tour transmettre sa quantité de mouvement à toutes les particules avec lesquelles elle est en contact (par choc élastique). L'image utilisée par Huygens est celle de boules dures analogues à des boules de billard (voir figure 4.1 (a)). La particule incidente B, mise en mouvement sous l'effet d'une onde incidente, vient frapper la particule A (supposée identique). Celle-ci acquiert la quantité de mouvement de B pour la transmettre immédiatement aux particules identiques C en contact. Par ce mécanisme, le mouvement initial est donc transmis ainsi dans toutes les directions, à la manière du premier coup du jeu de billard américain, où une boule incidente vient

frapper un ensemble compact de boules pour induire un éclatement de l'ensemble avec projections de boules dans toutes les directions. Ce faisant, une particule incidente mise en mouvement par l'onde incidente émet une "onde particulière" et se comporte donc de la même façon qu'une source d'onde sphérique (voir schéma 4.1 (b)). Toutes les ondes particulières (sphériques) émises depuis un front d'onde en arc de cercle "se renforcent" (en langage moderne, interfèrent constructivement) à un instant ultérieur sur leur tangente commune (en arc de cercle) et constituent ainsi le front d'onde transmis. Dans cette approche, la propagation d'une onde peut donc être décrite comme une succession d'émissions d'ondes particulières, par les particules atteintes par le front d'onde incident, qui se comportent ainsi comme des sources (secondaires). Ce concept de sources secondaires lui permet de donner une origine physique aux lois de la réfraction et de la réflexion.



**Figure 4.1** – Les sources secondaires d'Huygens. (a) Transmission du mouvement des particules d'éther dans plusieurs directions (figure issue de [76]). La quantité de mouvement de la particule B qui vient frapper A est répartie par collisions élastiques entre les particules C, qui partent dans plusieurs directions. A se comporte ainsi comme le centre d'une source de mouvement. (b) Reconstruction du front d'onde attendu par les ondes "particulières" (figure issue de [76]). Le front d'onde issu de A excite les particules sur l'arc BC. Chaque particule émet une onde particulière centrée sur sa position. Toutes ces ondes particulières se "renforcent" sur leur arc tangent commun CE pour former le front d'onde ultérieur. (c) Schéma complet de l'émission de sources secondaires isotropes telles qu'évoquées par Huygens : un front d'onde doit être formé vers l'arrière en plus du front d'onde vers l'avant.

Dès l'époque de sa parution, la théorie d'Huygens dut se soumettre à une critique évidente : celle-ci ne décrit pas comment l'émission d'une onde particulière par une source secondaire peut être d'amplitude différente dans les différentes directions d'espace, se bornant à parler d'ondes "centrées" sur la position de la particule considérée. En effet, si l'émission de chaque onde secondaire est isotrope, les ondes secondaires forment à un instant ultérieur le front d'onde attendu en avant du front d'onde incident mais également un front d'onde en arrière du front d'onde incident, voir schéma 4.1(c). C'est Fresnel, qui, dans son premier mémoire sur la diffraction de la lumière [77], introduit la nécessaire dépendance angulaire dans l'amplitude et la phase de l'onde émise par les sources secondaires. Son adaptation du principe d'Huygens lui permit d'obtenir l'onde attendue physiquement vers l'avant (seule) et de décrire, à l'aide de sa théorie sur les interférences, la propagation en espace libre et la diffraction de la lumière. Ce principe ne permet pas seulement

de décrire la propagation de la lumière mais est applicable à toute onde. Plus tard, Kirchhoff [78] parvint à déduire la formule de Fresnel de l'équation de d'Alembert, donnant ainsi un fondement mathématique à cette adaptation introduite par Fresnel arbitrairement, pour rendre compte des résultats expérimentaux. Les fonctions de Green que nous avons introduites à la section 2.2 pour décrire la propagation des ondes permettent une reformulation générale du principe d'Huygens-Fresnel, dans une version instantanée. Rappelons l'expression d'une onde dans un espace libre en fonction des conditions initiales de Cauchy :<sup>1</sup>

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{1}{c^2} G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \frac{\partial \phi}{\partial t'}(\vec{r}', t_0) - \int_V dV \frac{1}{c^2} \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \phi(\vec{r}', t_0). \quad (4.1)$$

Explicitons ici chacune des deux contributions au champ d'onde dans un espace libre.

*Sources d'Huygens-Fresnel de premier type :*

Dans le premier terme de cette expression, nous reconnaissons l'équivalence formelle à l'expression du champ émis par une source  $s_1(\vec{r}, t)$ , donnée par (voir la démonstration à l'annexe A) :

$$s_1(\vec{r}, t) = -\delta(t - t_0) \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0). \quad (4.2)$$

Ces sources équivalentes sont instantanées et proportionnelles à la dérivée temporelle du champ. Nous avons donc identifié des sources secondaires équivalentes qui ont bien les caractéristiques de celles imaginées par Huygens et Fresnel : leur amplitude et leur phase sont données par celle de l'onde incidente. Elles ne fournissent cependant qu'une contribution au champ d'onde. Cela ne peut être autrement car elles possèdent le même défaut que les ondes imaginées par Huygens originellement : leur superposition conduit donc également à une onde rétropropagée, en plus de l'onde attendue (voir figure 4.1(c)). En effet, le champ  $\phi_1$  émis par ces sources est celui qui vérifie les conditions initiales  $(\phi_1(\vec{r}, t_0), \partial \phi_1 / \partial t(\vec{r}, t_0)) = (0, \partial \phi / \partial t(\vec{r}, t_0))$ , ce qui donne directement (voir équation (2.14)) :

$$\phi_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{2} \phi(\vec{r}, 2t_0 - t) \quad (4.3)$$

Les sources  $s_1(\vec{r}, t)$  reforment donc bien le front d'onde attendu vers l'avant (à un facteur d'amplitude près), mais elles émettent également un champ rétropropagé, qui est en fait le retourné temporel de l'onde attendue.<sup>2</sup> La seconde contribution (second terme de l'équation (4.1)) corrige ce défaut.

*Sources d'Huygens-Fresnel de second type :*

Dans ce terme, le propagateur usuel  $G$  a été remplacé par le propagateur  $\partial G / \partial t$ . Ce propagateur est associé à une émission non isotrope, similaire à l'émission d'un dipôle. Cependant, à ce changement de propagateur près, elles peuvent être associées comme précédemment à des sources, dont l'amplitude et la phase dépendent de celle de l'onde incidente. En ce sens, ces sources sont également telles qu'imaginées par Fresnel. Remarquons que ce terme de champ, que nous notons

1. Notons que si l'espace considéré est fini et si le champ est non nul aux frontières de cet espace, d'autres termes d'intégrales en temps et sur la frontière du domaine s'ajoutent (voir annexe A), qui permettent une autre approche (spatiale et non instantanée) du principe d'Huygens-Fresnel.

2. Le lecteur aura peut-être immédiatement remarqué le lien entre les sources d'Huygens-Fresnel que nous sommes en train de présenter et le concept du MTI mais il lui est demandé de bien vouloir patienter un peu avant de le voir établi complètement.

$\phi_2$ , peut se réécrire :

$$\phi_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V dV G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \phi(\vec{r}', t_0) \right] \quad (4.4)$$

C'est la dérivée temporelle du champ émis par des sources qui sont cette fois directement proportionnelles au champ d'onde à l'instant  $t_0$ . Comme précédemment, en remarquant que, d'après l'équation (4.1), le champ  $\phi_2$  est associé aux conditions initiales  $(\phi(\vec{r}, t_0), 0)$ , on obtient :

$$\phi_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \phi(\vec{r}, 2t_0 - t) \quad (4.5)$$

Ces sources induisent donc également deux ondes : l'une se propageant vers la direction attendue et l'autre, rétropropagée, étant en fait le retourné temporel de la première.

*Interférences destructives des ondes retournées temporellement :*

Ainsi, nous avons identifié les sources secondaires instantanées d'Huygens et Fresnel, qui se décomposent en deux types de sources. Tous deux ont bien les propriétés principales imaginées par Huygens et Fresnel : ce sont des sources ponctuelles dont l'amplitude et la phase sont données par celles de l'onde incidente au point considéré. Les premières sources sont isotropes et leur superposition génère la somme d'un champ d'onde se propageant dans la direction attendue et d'un champ rétropropagé. Les secondes sources sont anisotropes. Leur superposition génère également la somme d'un champ d'onde vers l'avant et d'un champ d'onde rétropropagé, mais de signe opposé par rapport à celui émis par les premières sources. La somme des champs émis par ces deux types de sources permet de retrouver le champ attendu ( $\phi_1 + \phi_2 = \phi$ ). Les champs issus des deux types de sources d'Huygens-Fresnel interfèrent constructivement vers l'avant pour donner l'onde attendue par propagation et destructivement vers l'arrière, ne laissant apparaître aucun champ rétropropagé. C'est par le lien entre ces deux types de sources qui se superposent (l'un isotrope et l'autre anisotrope) que se résout le problème de l'existence d'une onde contrapropagative dans la description de la propagation des ondes par l'émission de sources secondaires d'Huygens.

### Sources secondaires "réelles" du MTI

Il est difficile, dans le cas général de la propagation d'une onde régie par une équation de d'Alembert que nous considérons ici, de déterminer par notre raisonnement si ces sources sont "virtuelles" ou réelles, c'est-à-dire si la perturbation du milieu induite localement par le champ d'onde est physiquement de même nature qu'une (double) source de ce champ, ou s'il s'agit plutôt uniquement d'une équivalence formelle que l'on retrouve pour toute propagation d'onde. Néanmoins, remarquons que les expressions des champs émis par chacun des deux types de sources d'Huygens-Fresnel (4.3),(4.5), prises séparément, sont très similaires à celle de l'émission "réelle" observée lors d'un MTI. La similarité entre les deux émissions apparaît encore plus nettement en reformulant le champ généré par un MTI. En effet, l'évolution temporelle de la célérité (choc), donnée à l'équation (2.33), permet de réécrire l'équation de propagation vérifiée par le champ d'onde lorsqu'un MTI est réalisé selon :

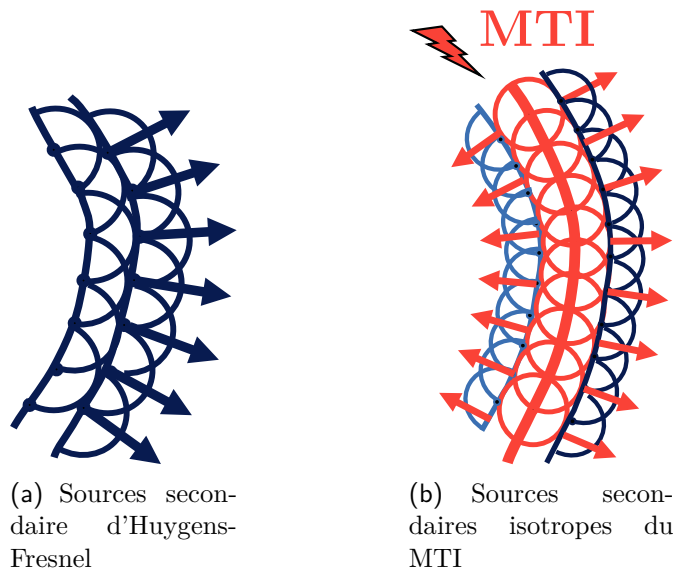
$$\Delta \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = -\tau \delta(t - t_{\text{MTI}}) \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(r, t_{\text{MTI}}), \quad (4.6)$$

où l'on a utilisé le fait que le laplacien du champ juste avant le choc est donné par un terme en dérivée seconde temporel. Le terme de droite de l'équation est un terme source. L'effet du miroir



temporel instantané est donc formellement équivalent à l'émission par le champ de source :

$$s(\vec{r}, t) = \tau \delta(t - t_{\text{MTI}}) \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(r, t_{\text{MTI}}). \quad (4.7)$$



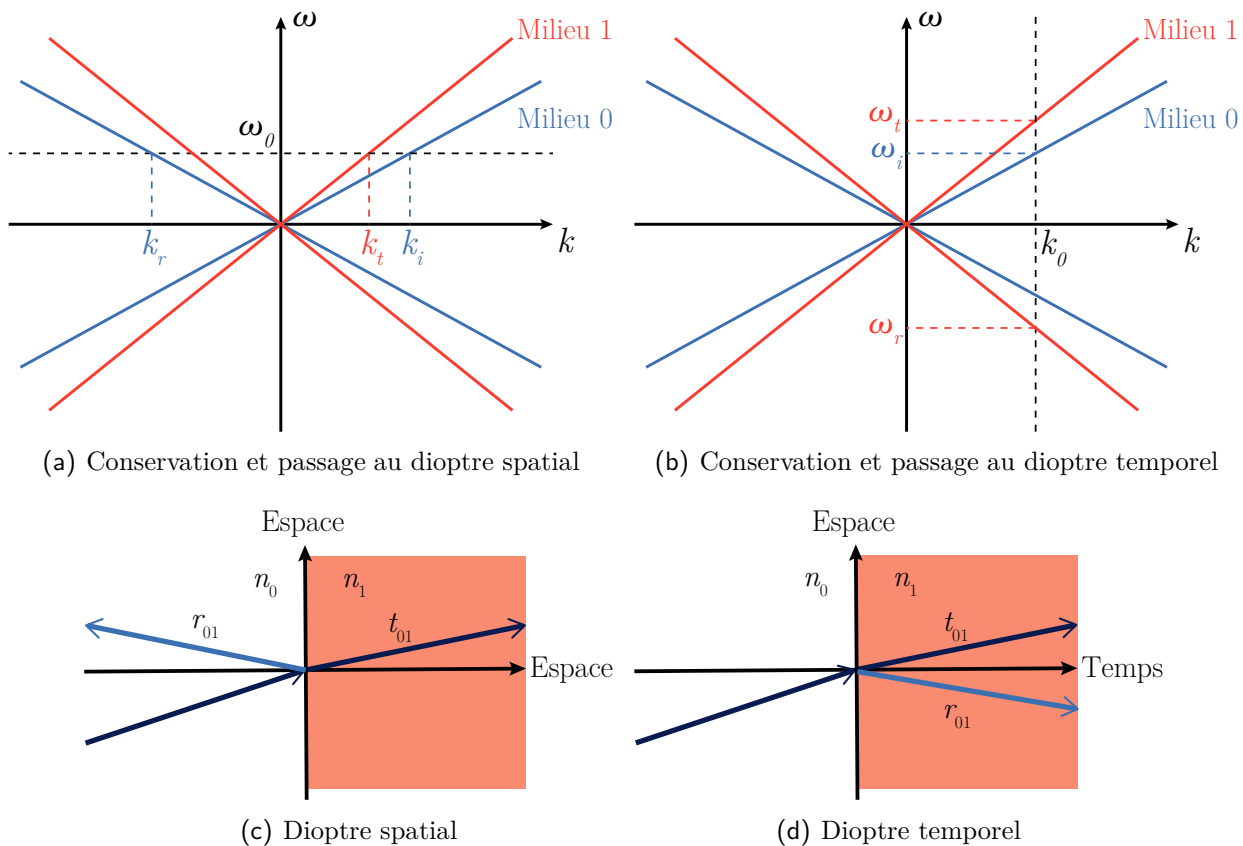
**Figure 4.2** – Comparaison entre les sources secondaires équivalentes du MTI (b) et celles d'Huygens et Fresnel. Comme pour les sources d'Huygens-Fresnel de premier type, l'émission isotrope par chaque source induit l'émergence d'un front retourné et d'un front vers l'avant. La propagation ultérieure de chaque front d'onde est elle donnée par des sources (doubles) d'Huygens-Fresnel, n'émettant que vers l'avant.

Ces sources possèdent toutes les propriétés des sources d'Huygens-Fresnel de premier type. En particulier, elles sont ponctuelles, instantanées, et leur amplitude et leur phase sont données par celles de l'onde initiale. La seule différence consiste en l'ordre de dérivation supplémentaire présent dans l'expression (4.7) par rapport à l'expression (4.2). L'effet du choc de célérité peut donc être interprété comme une production, supplémentaire, de réelles sources de Huygens-Fresnel de premier type, associées au champ dérivé  $\psi = \partial\phi/\partial t$ . Puisque seules les sources secondaires de premier type sont créées par le choc, l'émission de ces sources entraîne l'émergence, en plus de l'onde vers l'avant, d'une onde retournée, qui est l'onde retournée temporellement observée dans nos expériences (voir figure 4.2). Ainsi, la disruption de célérité lors d'un MTI modifie l'interaction classique entre les sources de Fresnel isotropes et anisotropes pour faire émerger un champ retourné temporellement.

### 4.1.2 Lien avec la réfraction temporelle en électromagnétisme : une double frontière temporelle

Le modèle du Dirac de célérité nous a permis à la section précédente de revisiter le principe d'Huygens-Fresnel en interprétant l'émission de l'onde retournée comme celles de sources secondaires d'Huygens-Fresnel isotropes. Alternativement, comme nous l'avons vu à la section 2.2, ce modèle peut être construit par passage à la limite à partir d'une variation de la célérité décrite par une fonction porte ("lame temporelle"). Le MTI est donc associé à deux changements, infiniment rapprochés, de la célérité au cours du temps : à l'instant  $t_{\text{MTI}}^-$ , la célérité passe de sa valeur initiale  $c_0$  à une valeur élevée pendant le choc  $c_1$ , puis à la fin du choc, à l'instant  $t_{\text{MTI}}^+$ , elle repasse à sa

valeur initiale. À une interface temporelle correspondant à une discontinuité temporelle (spatialement homogène) de la célérité, l'invariance par translation implique la conservation des vecteurs d'onde. Les fréquences, en revanche, ne sont pas conservées. Cette situation est inverse par rapport à une interface usuelle, spatiale (voir la figure 4.3 comparant les deux situations).



**Figure 4.3** – Comparaison entre la réfraction spatiale (a et c) et la réfraction temporelle (b et d). (a) Relations de dispersion, conservation de la fréquence et relations de passage pour les vecteurs d'onde à une frontière spatiale entre un milieu 0 et un milieu 1 d'indices différents. (b) Relations de dispersion, conservation du vecteur d'onde et relations de passage pour les fréquences à une frontière temporelle entre un milieu 0 et un milieu 1 d'indices différents. (c) Réfraction et réflexion à une frontière spatiale entre un milieu d'indice  $n_0$  et un milieu d'indice  $n_1$ . Les amplitudes des ondes transmise et réfléchie sont données par les coefficients de Fresnel  $t_{01}$  et  $r_{01}$ . (d) Réfraction et réflexion à une frontière temporelle entre un milieu d'indice  $n_0$  et un milieu d'indice  $n_1$ . Les amplitudes des ondes "transmise" et "réfléchie" sont données par les coefficients de Fresnel temporels  $t_{01}$  et  $r_{01}$ . Notons que l'onde "réfléchie" se propage alors dans le second milieu et sa fréquence est l'opposée de celle de l'onde transmise.

Ces changements peuvent être décrits comme une réfraction temporelle [34, 79], caractérisée, par analogie avec les coefficients de Fresnel à une frontière entre deux milieux d'indices optiques différents, par des coefficients de réflexions et de transmissions décrivant les changements subis par une onde électromagnétique incidente à l'interface temporelle. Notons que l'onde "réfléchie" temporellement ne l'est pas dans la direction des temps décroissants, ce qui n'aurait pas de sens dans le cadre de notre description causale de la propagation des ondes. La fréquence négative de cette onde réfléchie (voir 4.3 (b)) correspond à une propagation en sens opposé à celui de l'onde incidente (voir 4.3 (d)).

Afin d'établir ces coefficients, nous considérons ici une onde plane monochromatique  $\phi_p(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$  (par souci de simplicité, nous restreignons l'espace à une dimension pour nos calculs). À la section 2.2.1, nous avons présenté les continuités du champ à une frontière temporelle et obtenu

l'expression (2.24) du champ d'onde en fonction des conditions initiales à l'aide des fonctions de Green. Ces résultats conduisent pour notre onde plane, après la première frontière temporelle à l'instant  $t_{\text{MTI}}^-$ , à l'expression :

$$\phi_p(x, t) = A \frac{1+n_1}{2} \exp\left(kx - \frac{\omega}{n_1}t + \omega\left(\frac{1}{n_1} - 1\right)t_{\text{MTI}}^-\right) + A \frac{1-n_1}{2} \exp\left(kx + \frac{\omega}{n_1}t + \omega\left(\frac{1}{n_1} + 1\right)t_{\text{MTI}}^-\right). \quad (4.8)$$

où l'on a défini l'indice de réfraction  $n_1$  équivalent par  $c_1 = c_0/n_1$ . Elle définit les coefficients de Fresnel temporels à la première frontière temporelle :

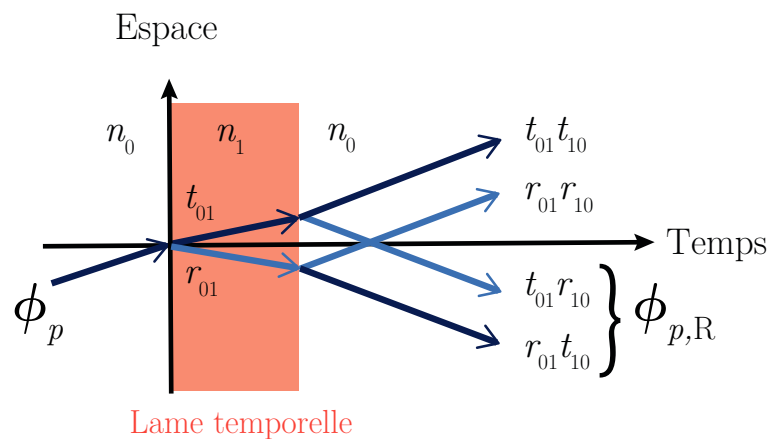
$$\begin{cases} t_{01} = \frac{1+n_1}{2} \\ r_{01} = \frac{1-n_1}{2} \end{cases}. \quad (4.9)$$

Après la seconde frontière temporelle, nous obtenons, par les mêmes calculs (appliqués à chacune des deux composantes du champ issu de(4.8)), l'expression :

$$\begin{aligned} \phi_p(x, t) = & At_{01}r_{10} \exp\left(i\left(kx + \omega(t - t_{\text{MTI}}^+) - \frac{\omega}{n_1}t_{\text{MTI}}^+ + \omega\left(\frac{1}{n_1} - 1\right)t_{\text{MTI}}^-\right)\right) \\ & + At_{01}t_{10} \exp\left(i\left(kx - \omega(t - t_{\text{MTI}}^+) - \frac{\omega}{n_1}t_{\text{MTI}}^+ + \omega\left(\frac{1}{n_1} - 1\right)t_{\text{MTI}}^-\right)\right) \\ & + Ar_{01}t_{10} \exp\left(i\left(kx + \omega(t - t_{\text{MTI}}^+) + \frac{\omega}{n_1}t_{\text{MTI}}^+ - \omega\left(\frac{1}{n_1} + 1\right)t_{\text{MTI}}^-\right)\right) \\ & + r_{01}r_{10} \exp\left(i\left(kx - \omega(t - t_{\text{MTI}}^+) + \frac{\omega}{n_1}t_{\text{MTI}}^+ - \omega\left(\frac{1}{n_1} + 1\right)t_{\text{MTI}}^-\right)\right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

où  $t_{10}$  et  $r_{10}$  représentent les coefficients de Fresnel temporels à la deuxième interface temporelle, définis par :

$$\begin{cases} t_{10} = \frac{1+n_1}{2n_1} \\ r_{10} = \frac{n_1-1}{2n_1} \end{cases} \quad (4.11)$$



**Figure 4.4** – Le MTI comme double interface temporelle. Chaque onde parvenant à une interface temporelle est associée à une onde transmise et une onde réfléchi (dans la direction spatiale opposée). Deux composantes forment en sortie l'onde rétropropagée  $\phi_{p,R}$ .

L'onde rétropropagée générée par une "lame temporelle" peut donc être interprétée comme la superposition de deux termes, issus respectivement des "réflexions" à chacune des interfaces temporelles : le terme en  $r_{01}t_{10}$  correspond à l'onde réfléchi à la première interface (et transmise à la seconde) et le terme en  $t_{01}r_{10}$  correspond à l'onde transmise à la première interface puis

réfléchi à la seconde. En remarquant que  $r_{01}t_{10} = -t_{01}r_{10}$ , on obtient la composante rétropropagée résultante :

$$\phi_{p,R}(x, t) = At_{01}r_{10}e^{i(kx+\omega t-\omega(t_{\text{MTI}}^++t_{\text{MTI}}^-))} \begin{bmatrix} e^{-i\omega\frac{\delta t}{n_1}} & e^{i\omega\frac{\delta t}{n_1}} \\ - & - \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

où  $\delta t = t_{\text{MTI}}^+ - t_{\text{MTI}}^-$ . Comme précédemment à la section 2.2, en prenant la limite correspondant à la fonction de Dirac pour le carré de la célérité, pour laquelle  $\delta t/n_1$  tend vers 0, on obtient :

$$\phi_{p,R}(x, t) = i\omega\frac{\tau}{2}Ae^{i(kx+\omega t-2\omega t_{\text{MTI}})} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial\phi_p}{\partial t}(x, 2t_{\text{MTI}} - t), \quad (4.13)$$

où  $\tau = \delta t/n_1^2$  (constante). C'est donc l'interférence des deux ondes réfléchies respectivement sur chacune des deux interfaces temporelles qui, dans la limite du choc de célérité infiniment bref, se traduit par un ordre de dérivation supplémentaire sur le terme de champ retourné résultant. Notons que le même résultat est obtenu pour la composante générée vers l'avant. Celle-ci se redécompose en trois termes :

$$\phi_{p,A}(x, t) = Ae^{i\left(kx-\omega t+\omega\delta t\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\right)} + A\frac{(1+n_1)^2}{4n_1}e^{i(kx-\omega(t-\delta t))} \begin{bmatrix} e^{-i\omega\frac{\delta t}{n_1}} & e^{i\omega\frac{\delta t}{n_1}} \\ - & - \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

qui redonnent bien, au passage à la limite, l'expression de l'équation (2.36) :  $\phi_{p,A} = \phi + (\tau/2)\partial\phi/\partial t$ . Remarquons que selon Mendonça *et al.* [34, 79], dans le cas d'une onde plane électromagnétique polarisée rectilignement, la continuité du champ magnétique  $\vec{B}$  et de l'induction électrique  $\vec{D}$  doivent être invoquées (en lieu et place de la continuité de  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial t$  pour le champ scalaire que nous avons considéré), ce qui conduit à des expressions différentes pour les coefficients de Fresnel temporels (voir les travaux de Xiao *et al.* [80] et leur commentaire pour une discussion intéressante de ces continuités). Cependant, les expressions obtenues pour les produits  $t_{01}r_{10}$ ,  $r_{01}t_{10}$ ,  $t_{01}t_{10}$  et  $r_{01}r_{10}$  sont identiques et les résultats obtenus sont inchangés.

Ainsi, la présence de *deux* interfaces temporelles lors d'un MTI est responsable de l'ordre supplémentaire de dérivation induit dans le champ généré. Insistons cependant sur le fait que c'est l'existence d'une deuxième frontière temporelle qui permet le retournement temporel. En effet, après une frontière temporelle, une onde rétropropagée, de fréquence négative, est bien observée (voir figure 4.3), mais les fréquences sont modifiées par le passage à un milieu de célérité différente. Ainsi, la déformation du contenu spectral de l'onde réfléchi par rapport à celui de l'onde initiale empêche d'obtenir le retourné temporel de l'onde initiale. Cet effet est particulièrement important pour des champs d'onde de larges spectres et pour les milieux dispersifs. C'est la *deuxième* frontière temporelle et le retour de la célérité à sa valeur initiale qui permettent de retrouver les mêmes fréquences que celles de l'onde initiale et ainsi rendent ainsi possible le retournement temporel. De plus, pour qu'il n'y ait pas de déformation du paquet d'onde, il faut que la propagation dans le milieu de célérité plus élevée soit négligeable, ce qui correspond à la condition d'instantanéité déjà évoquée pour le MTI : la durée entre les deux interfaces temporelles doit être très inférieure à toutes les périodes de son spectre.

### 4.1.3 Symétries spatiotemporelles

#### L'équivalent temporel d'un miroir

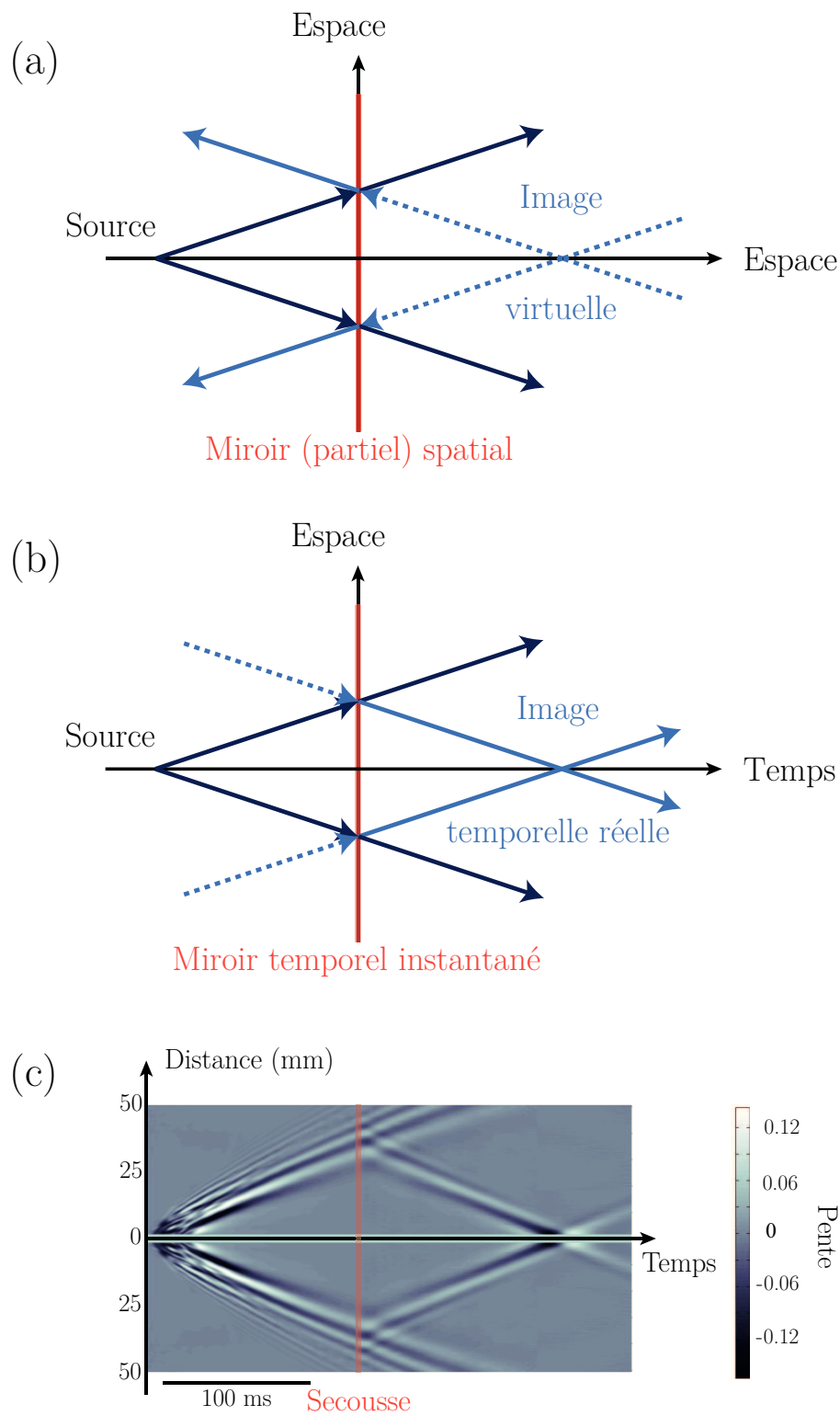
L'étude d'une onde plane monochromatique nous a permis d'analyser le MTI dans le cadre de la théorie de la réfraction temporelle utilisée en optique. Nous avons ainsi pu établir que des ondes de fréquences opposées aux ondes initiales (et donc retournées temporellement) sont obtenues, comme somme des ondes obtenues par réflexion-transmission et par transmission-réflexion aux deux interfaces successives, infiniment proches, correspondant à la double frontière temporelle équivalente au MTI. Les outils de la description en ondes planes (vecteur d'onde, pulsation) nous permettent également de décrire les symétries spatiotemporelles du MTI.

En dimension  $d$ , la propagation d'une telle onde est caractérisée par le " $(d + 1)$ -uplet"  $(\omega, \vec{k})$ . Comparons les symétries du MTI à celle d'un miroir spatial. Un miroir spatial réalise la transformation :  $(\omega, k_{\perp}, \vec{k}_{//}) \rightarrow (\omega, -k_{\perp}, \vec{k}_{//})$ , où  $k_{\perp}$  désigne la composante du vecteur d'onde perpendiculaire au miroir (plan) et  $\vec{k}_{//}$  désigne celle qui est dans le plan du miroir. Un miroir placé en  $x_m$  transforme ainsi une onde incidente  $\phi(x, \dots, t)$  en onde retournée spatialement autour de  $x_m$  (à une phase près)  $\phi(2x_m - x, \dots, t)$ . Pour un émetteur ponctuel, l'onde réfléchie apparaît être émise depuis un point image virtuel, situé symétriquement de l'autre côté du miroir (voir figure 4.5 (a)). Un MTI réalise l'opération  $(\omega, \vec{k}) \rightarrow (-\omega, \vec{k})$ . Un MTI réalisé à l'instant  $t_{\text{MTI}}$  transforme ainsi une onde incidente  $\phi(x, \dots, t)$  en onde retournée temporellement autour de  $t_{\text{MTI}}$  (à une phase près)  $\phi(x, \dots, 2t_{\text{MTI}} - t)$ . Puisque la direction de propagation d'une onde plane est donnée par son terme de phase  $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , elle dépend du signe relatif entre le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et la pulsation  $\omega$ . Dès lors, en termes de symétries, l'opération du MTI est équivalente à :  $(\omega, \vec{k}) \rightarrow (\omega, -\vec{k})$ .<sup>3</sup> Ce renversement de toutes les composantes du vecteur d'onde signifie que l'onde est rétropropagative. Pour un émetteur ponctuel, dans le schéma spatiotemporel du MTI, les ondes retournées se refocalisent à leur point d'émission initiale, à un instant ultérieur, situé symétriquement de l'autre côté du miroir temporel instantané dans le domaine temporel (voir figure 4.5 (b)). Ce résultat peut être observé directement sur le kymogramme des mesures du champ d'onde dans nos expériences (voir 4.5 (c)). Ici, par comparaison avec le cas du miroir spatial, l'image, située également de l'autre côté du miroir (mais dans le domaine temporel) est réelle. L'analogie entre le retournement spatial effectué par un miroir et le retournement temporel effectué par un MTI justifie *a posteriori* le qualificatif de Miroir temporel instantané.

#### De l'autre côté du miroir temporel

Analysons les différences entre les schémas du miroir spatial et du miroir temporel instantané. La première différence est la direction des flèches de l'onde retournée. Dans un diagramme de rayons, tel que celui de la figure 4.5 (a), le trait indique le parcours suivi par la perpendiculaire à une surface isophasé au cours de la propagation. Le sens de la flèche indique dans quel sens ce trajet est parcouru au cours du temps. Elle permet donc de donner une indication sur l'évolution temporelle de l'onde sur un diagramme spatial, sur lequel le temps n'apparaît pas *a priori*. Dans le diagramme spatiotemporel 4.5 (b), ces flèches, que nous avons indiquées afin de garder les mêmes conventions que dans le cas spatial, par souci de clarté pour le lecteur, sont en réalité superflues (elles pointent nécessairement toutes vers la droite), car l'évolution temporelle est déjà donnée par

3. L'étude de ces symétries fait par ailleurs apparaître le lien étroit entre le retournement temporel et la réfraction négative. Cette dernière est associée à la transformation  $(\omega, k_{\perp}, \vec{k}_{//}) \rightarrow (\omega, k_{\perp}, -\vec{k}_{//})$ , où  $k_{\perp}$  désigne la composante du vecteur d'onde perpendiculaire à l'interface milieu standard - milieu d'indice négatif [81]. Son action est donc équivalente à la combinaison de celle d'un miroir spatial et de celle d'un miroir temporel, ce qui ouvre la possibilité d'une nouvelle approche de la réfraction négative.



**Figure 4.5** – L'équivalent temporel d'un miroir. (a) Schéma de l'effet d'un miroir partiel sur les rayons d'une onde émise par une source ponctuelle. (b) Schéma spatiotemporel de l'effet d'un MTI sur les ondes émises par une source. Une image se forme comme en (a) au point symétrique de la source de l'autre côté du miroir, ici dans le domaine temporel. Cette image est réelle : la convergence de l'onde retournée est observée après le MTI. (c) Diagramme spatiotemporel des mesures du champ d'onde de surface dans une expérience de MTI.

l'axe des abscisses. Cependant, cette différence des sens des flèches entre les schémas du miroir spatial et du miroir temporel instantané résulte d'un choix de convention pour la représentation

(les flèches indiquent par convention le sens d'augmentation du temps).<sup>4</sup> Elle ne constitue pas une différence essentielle entre les deux types de miroirs. En revanche, le fait que l'image du MTI dans le domaine temporel soit réelle tandis que celle du miroir dans le domaine spatial est virtuelle, constitue une différence fondamentale. Cela traduit le fait que l'onde retournée spatialement par le miroir n'est présente que du côté du miroir où est située la source, tandis que l'onde retournée temporellement par le MTI n'est présente que de l'autre côté du MTI par rapport à la source, dans le domaine temporel. Notons que dans les deux cas, cette réalité est imposée par un principe de causalité. Celle-ci impose de manière évidente que l'onde générée par un MTI n'existe qu'après l'instant du MTI. Dans le cas du miroir spatial, ce dernier et l'onde incidente, sont également cause de l'onde retournée générée : cette dernière ne peut donc exister que du côté du miroir vers lequel elle se propage depuis ce miroir (et donc du même côté du miroir que la source).

L'étude des symétries spatio-temporelles du MTI nous a permis d'établir l'analogie forte entre les rôles joués par une dimension d'espace dans un miroir et par le temps dans le MTI. Une différence importante réside néanmoins dans le fait que l'onde retournée temporellement se situe de l'autre côté du MTI (dans le domaine temporel), ce qui nous permet de l'obtenir dans les expériences. Les analyses de l'origine de l'onde retournée générée par MTI en terme de sources d'Huygens-Fresnel équivalentes, du point de vue de la réfraction temporelle, et des symétries spatio-temporelles, que nous venons d'effectuer successivement, sont propres au concept du MTI et ont permis d'en établir les caractéristiques essentielles. Il apparaît désormais important de les comparer à celles des cavités à retournement temporel numérique, utilisées usuellement pour réaliser un retournement temporel large bande.

#### 4.1.4 Une nouvelle approche du retournement temporel

Afin de caractériser complètement le processus du MTI, il est nécessaire de le comparer aux méthodes standard de retournement temporel, que nous avons présentées à la partie 1. Nous étudierons en détail à la partie 5 les liens entre le MTI et la conjugaison de phase, et nous nous concentrerons ici sur la comparaison du MTI au procédé usuel de retournement temporel large bande. Ce procédé a été baptisé "Miroirs à retournement temporel" par ses inventeurs, mais nous leur préférons ici le qualificatif de "cavités à retournement temporel numérique", à la fois pour éviter toute confusion avec le MTI et parce qu'il en décrit plus explicitement le fonctionnement. Rappelons que ces cavités reposent sur l'utilisation d'émetteurs-récepteurs disposés à la frontière d'un volume donné, qui, dans une première phase, enregistrent le champ d'onde issu de l'onde initiale que l'onde souhaite retourner temporellement. Chaque signal temporel enregistré est (numérisé puis) retourné sur ordinateur. Les séquences en ordre inverse sont alors renvoyées vers les émetteurs-récepteurs qui les émettent simultanément. Le champ d'onde résultant obtenu est alors en bonne approximation le retourné temporel de l'onde initiale. Notons que l'étape clef de ce procédé est le retournement de la séquence enregistrée par ordinateur. En ce sens, il peut être qualifié de retournement temporel numérique, au contraire du MTI, où le retournement se fait

---

4. Notons qu'un autre choix eut été possible. Par analogie au cas spatial, en échangeant strictement les rôles joués par une dimension de l'espace et le temps dans le miroir spatial, nous aurions pu signifier par le sens des flèches le sens d'évolution *spatial* de l'onde dans une autre dimension d'espace, non représentée. Dans le cas spatial de la figure 4.5 (a), la flèche indique le sens de parcours associée à une croissance de la variable temporelle. Ici, la convention analogue est donc d'indiquer le sens de parcours associé à une augmentation de la variable spatiale d'une dimension d'espace non représentée. Pour l'onde retournée, la distance au point source diminue au cours du temps, donc le sens d'augmentation de cette distance est associée à celle des temps décroissants : nous aurions donc pu obtenir avec une telle convention un diagramme avec des flèches de l'onde retournée pointant vers la gauche. Certains auteurs utilisent ce type convention [82], malgré le fait qu'il est généralement contre-intuitif de traiter le temps de la même manière que l'espace.

Miroir temporel instantané	Cavité à retournement temporel numérique
Génération par conditions initiales $\forall \vec{r} \in V, \left( \phi(\vec{r}, t_{\text{MTI}}), -\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}) \right)$	Génération par conditions aux limites $\forall \vec{r} \in S = \partial V, \forall t, \left( \phi(\vec{r}, -t), \frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{r}, -t) \right)$
<b>d dimensions de l'espace</b>	<b>d-1 dimensions de l'espace + le temps</b>
Génération par modification du milieu	Émission par un dispositif d'émetteurs-récepteurs
$\phi_{\text{RT}} \propto \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, -t)$	$\phi_{\text{RT}} \propto \int dt \phi(\vec{r}, -t)$
"analogique"	"numérique"
instantané	continu
à n'importe quel instant de la propagation immédiat	après enregistrement complet de l'onde incidente répétions possibles à n'importe quel instant ultérieur
Limitations principales : Durée et homogénéité spatiale du choc	Limitations principales : Nombre et bande passante des émetteurs-récepteurs, durée de l'enregistrement, effets de forme

**Table 4.1** – Comparaison du retournement temporel par MTI et par cavité à retournement temporel numérique.

dans le milieu par variation d'une grandeur physique, qui peut donc être qualifié, par opposition, d'"analogique".

### Avantages comparés de l'approche MTI et des cavités à retournement temporel numérique

Le tableau 4.1 compare les propriétés essentielles respectives du MTI et des cavités à retournement temporel numérique.

#### Dispositifs d'émission :

Les concepts de retournements temporels par MTI et par cavités à retournement temporel numériques sont caractérisés par des modes de génération de l'onde retournée différents. Pour le MTI, c'est une modification d'une propriété du milieu qui engendre l'onde retournée alors que celle-ci est émise par le dispositif d'émetteurs-récepteurs dans le cas des cavités à retournement. Le MTI permet donc de supprimer tous les problèmes liés à l'utilisation de ces dispositifs. Ainsi, ces derniers constituent des éléments intrusifs et potentiellement perturbatifs introduits dans le milieu. Ils doivent de plus être utilisés en nombre suffisant pour pouvoir être espacés au plus d'une distance fixée par le théorème d'échantillonnage [83] à une fraction de la longueur d'onde la plus courte du paquet d'onde à retourner, tout en entourant complètement le milieu [16] (notons que dans certains cas particuliers, on peut s'affranchir de ces problèmes [22]). Enfin, leurs bandes passantes de fonctionnement imposent des limites aux fréquences accessibles pour l'onde retournée. Ainsi, en optique, les dispositifs récepteurs existants sont trop lents pour enregistrer la phase des ondes aux fréquences visibles et le procédé de cavités à retournement temporel numérique ne peut être utilisé. En contrepartie, le procédé du MTI repose sur un dispositif de modification de la célérité du milieu qui est associé à d'autres limitations pratiques. Le changement de la célérité



du milieu doit ainsi pouvoir être réalisé de manière homogène sur toute la zone de l'espace où se situe l'onde (dans nos expériences sur les ondes de surface, cela impose l'utilisation d'une cuve suffisamment rigide pour supprimer des inhomogénéités spatiales de l'accélération dues à la flexion de la cuve). Ce critère est *a priori* très fortement limitant pour les ondes électromagnétiques dans un milieu 3D, pour lesquelles il est difficile de réaliser une action s'exerçant sur l'ensemble du milieu dans des temps courts devant ceux de la propagation de l'onde électromagnétique considérée à travers le milieu. Cependant, notons que dans des configurations 1D ou 2D, il est possible de tirer parti de la troisième dimension pour induire, à l'aide d'une non linéarité [84], un changement de célérité instantané sur tout le milieu. En toute généralité, la durée caractéristique du choc de célérité, non nulle, permise par le dispositif utilisé pour le réaliser, doit être inférieure aux temps caractéristiques d'évolution du champ d'onde à retourner, ce qui impose une limite supérieure aux fréquences accessibles pour l'onde retournée.

#### *Instantanéité du MTI :*

Le fonctionnement du MTI se distingue également des cavités à retournement temporel numérique par son caractère instantané. Ces dernières mettent en jeu une phase d'enregistrement *complet* de l'onde initiale. Le retournement temporel du champ d'onde n'est assuré que si l'enregistrement peut être effectué sur une période portant depuis un instant initial où le champ d'onde est nul jusqu'à un instant final où le champ d'onde redevient nul [16]. Ce fonctionnement exclut donc le retournement temporel de champs d'ondes complexes, pour lesquels ces instants initial et/ou final sont inenvisageables ou inaccessibles. Si un retournement temporel sur un intervalle de temps reste possible, les instants de début et de fin de l'enregistrement définissent par construction *deux limites* temporelles à l'onde retournée. A contrario, le MTI renverse instantanément l'évolution du champ d'onde pour l'onde retournée. Il impose ainsi *une seule limite* (causale) au domaine temporel du retournement temporel (le MTI ne peut pas retourner temporellement la propagation d'une onde postérieure à sa réalisation). Il peut donc être envisagé y compris dans les situations où un instant initial n'est pas définissable et permet d'accéder à des temps arbitrairement éloignés dans le passé de l'onde initiale. Le MTI peut par ailleurs être effectué efficacement à n'importe quel moment de la propagation. Enfin, l'opération fait émerger *immédiatement*, dans tout l'espace, l'onde retournée alors que l'émission de l'onde retournée est nécessairement différée pour une cavité à retournement temporel numérique (elle ne peut commencer qu'une fois la phase d'enregistrement terminée). Néanmoins l'enregistrement et la numérisation permettent pour ces cavités de choisir l'instant de début de rémission (alors que le MTI est immédiat) et de répéter à souhait cette émission ultérieurement, ce qui peut s'avérer utile pour les applications [85]. Ils permettent également d'effectuer des opérations utiles sur le signal enregistré (amplification, filtrage, ...) alors que seule une amplification (ou une atténuation) est possible avec le MTI.

#### *Milieux complexes et cavité :*

Par construction, le retournement temporel est réalisé au sein du milieu pour le MTI et à l'extérieur du milieu considéré (à ses frontières) pour les cavités à retournement temporel numérique. Comme nous l'avons vu à la section 3.3.2, l'effet du choc de célérité sur des inhomogénéités dans le milieu peut conduire à une radiation parasite, qui peut compliquer l'utilisation du MTI en milieux complexes. À l'opposé, les émetteurs-récepteurs des cavités de retournement numérique peuvent être situés aux frontières du milieu complexe considéré et leur fonctionnement n'est pas altéré (la présence du milieu complexe peut même permettre de diminuer le nombre d'émetteurs-récepteurs utilisés [20]). Dans certains cas, il est envisageable de contourner le problème pour le MTI, en attendant par exemple qu'un paquet d'onde à retourner soit sorti complètement du milieu complexe

pour effectuer un choc de célérité sur un milieu homogène entourant le milieu complexe. Ce scénario restreint l'utilisation du MTI à la même condition d'existence d'un instant final (pour lequel le champ est nul dans le milieu complexe) que les cavités à retournement temporel numériques.

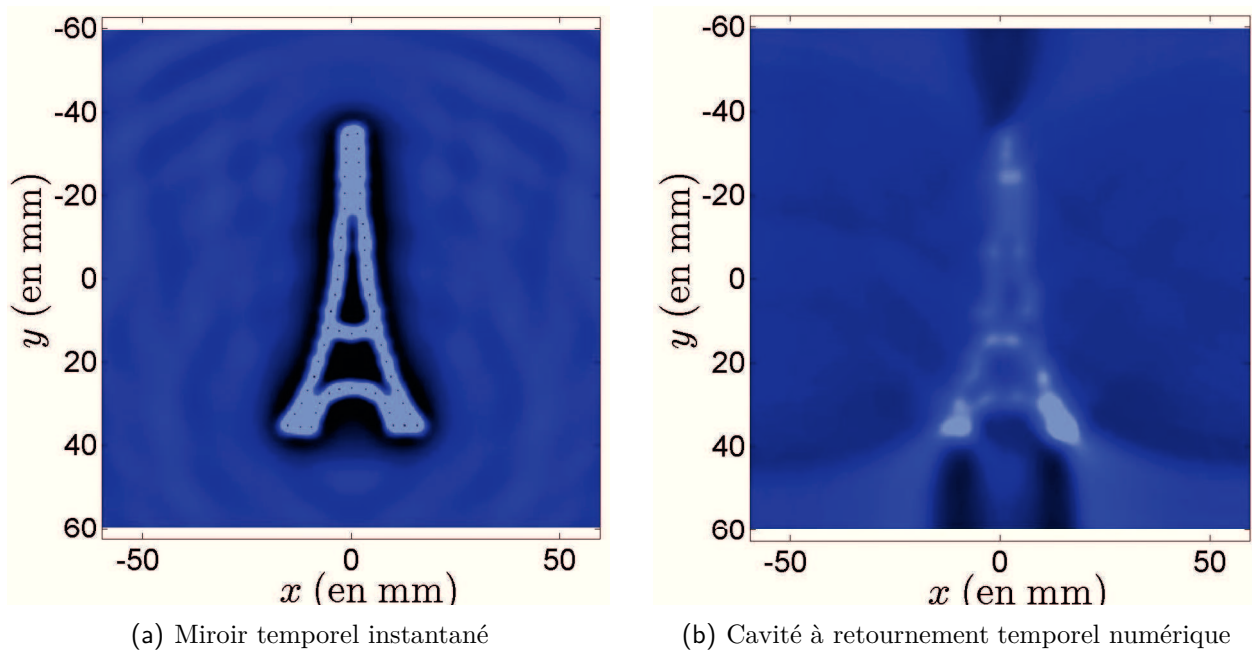
Dans une cavité sans perte, l'absence d'un instant final et les réflexions multiples sur un émetteur-récepteur limitent l'efficacité du retournement temporel numérique [22]. Néanmoins, si la cavité est chaotique, la propriété d'ergodicité permet de refocaliser efficacement une impulsion initiale à l'aide d'un seul émetteur-récepteur. Pour le MTI, dans une cavité, l'onde non retournée, qui est superposée à l'onde retournée après le MTI, continue de se propager dans la cavité et constitue un signal parasite qui limite potentiellement l'efficacité du procédé.

*Fidélité de l'onde retournée :*

**Déphasages de  $\pi/2$  :** Comme nous l'avons vu précédemment, l'onde retournée générée par un Miroir temporel instantané est proportionnelle au retourné temporel de la dérivée du champ d'onde initial. Pour les cavités à retournement temporel numérique, le champ émis par les émetteurs-récepteurs est en bonne approximation proportionnel au retourné temporel d'une primitive du champ initial [15]. Dans le cas de paquets d'onde relativement étroit spectralement, cela se traduit respectivement comme un retard (observé dans nos expériences, voir partie 3) ou une avance de phase de  $\pi/2$  du champ retourné. Notons que ce déphasage de plus ou moins  $\pi/2$  est une propriété partagée par tous les types de retournement temporel, puisqu'il est aussi observé pour la conjugaison de phase (voir section 5.1). Ce déphasage a cependant peu d'importance dans la plupart des applications du retournement temporel et n'affecte pas la refocalisation du paquet d'onde.

**Effets de forme :** La qualité de l'onde retournée dépend de critères différents pour le MTI (instantanéité, homogénéité du choc) et pour les cavités à retournement temporel numérique (nombre, positions, durée d'utilisation et qualité des émetteurs-récepteurs), que nous venons de détailler et qui ne peuvent pas être directement comparés dans le cas général. Cependant, le MTI possède qualitativement un avantage inhérent à son principe de fonctionnement pour la reconstitution d'un motif initial : les défauts de l'onde retournée ont la géométrie de l'onde initiale. En comparaison, les défauts du retournement temporel numérique ont la géométrie du maillage d'émetteurs-récepteurs utilisé. Cet effet est visible à la figure 4.6, présentant des simulations des deux types de retournement temporel.

Les simulations sont effectuées à partir des équations des ondes de surface (voir le détail en annexe C). Pour le MTI (figure (a)), un terme de gravité supplémentaire évoluant dans le temps, donné par le profil de l'accélération du bain pendant la secousse d'une expérience, a été ajouté aux équations usuelles des ondes de surface. Pour le retournement temporel numérique (figure (b)), les équations libres ont été utilisées dans une première phase pour calculer le champ au cours du temps sur 116 points équirépartis sur le bord (carré) de la zone représentée (30 sur chaque bord, les coins n'étant comptés qu'une fois). Ces signaux ont ensuite été inversés et introduits comme termes sources dans l'équation des ondes pour une nouvelle simulation (phase d'émission). Le nombre d'émetteurs-récepteurs simulés est choisi à la limite du domaine de validité du critère de Shannon [83] : ils correspondent à un émetteur toutes les demies longueurs d'onde de la fréquence centrale du paquet d'onde (le critère Shannon n'est donc par rempli pour les fréquences élevées du paquet d'onde). Des défauts sont donc nettement visibles à la reconvergence. Pour le MTI, des défauts sont également observés, liés à la durée non nulle du choc. On obtient bien dans les deux cas le motif initial (tour Eiffel) à l'instant de reconvergence et dans les deux cas la reconvergence n'est



**Figure 4.6** – Comparaison du MTI et de la cavité à retournement temporel numérique à l'aide de simulations. (a) Simulation du MTI à partir des équations des ondes de surface, à partir du profil d'accélération expérimental de la cuve (voir détails de la simulation à l'annexe C). Les défauts ont la géométrie du motif initial. (b) Simulation du retournement temporel numérique à partir des équations des ondes de surface, avec une phase d'enregistrement du champ et une phase d'émission du signal retourné par 116 émetteurs-récepteurs (non perturbatifs). Ces derniers sont équirépartis sur les bords de la zone représentée (soit environ un toute les demies longueurs d'onde moyenne du paquet d'onde initial). Les défauts ont la géométrie du réseau d'émetteurs-récepteurs

pas parfaite. Néanmoins, on observe la différence qualitative attendue : pour le MTI, la forme globale du champ d'onde reste, malgré les défauts, imposée uniquement par le champ d'onde initial et possède sa géométrie. Pour la cavité à retournement temporel numérique en revanche, des défauts en arcs de cercles centrés sur les bords latéraux sont observés. Leur géométrie est imposée par la disposition (en carré) des émetteurs-récepteurs.

### Similarités des deux approches : utilisation de l'information contenue dans une hypersurface

Au-delà des avantages respectifs des deux concepts pour la génération d'une onde retournée temporellement, le MTI et les cavités à retournement temporel numérique reposent sur des principes fondamentaux similaires qu'il convient ici de mettre en parallèle.

*"Complémentarité" des deux approches, les conditions initiales et les conditions aux limites :*

Le fonctionnement des deux concepts peut être justifié par un même théorème d'unicité 4.2, alliant conditions initiales et conditions aux limites [16].

Lorsque nous avons décrit le MTI à la partie 2, nous avons utilisé le théorème de Cauchy portant uniquement sur les conditions initiales, en supposant implicitement que l'espace  $V$  était infini et que le champ devait s'annuler à l'infini. Dans nos expériences, cela correspond au fait que les frontières sont très éloignées de la zone considérée. Alternativement, on peut supposer que le champ vérifie des conditions aux limites nulles aux frontières. Pour les expériences de cavités à retournement temporel numérique, l'hypothèse de fonctionnement est celle de conditions initiales nulles, au début de la phase d'émission, et l'unicité portant uniquement sur les conditions aux

Soient  $V$  un volume borné de l'espace, de frontière  $\partial V = S$  régulière. Il existe un unique champ d'onde  $\phi(\vec{r}, t)$  solution de l'équation de d'Alembert (1) et satisfaisant à la fois aux conditions :

- aux limites :

$$\forall \vec{r} \in S, \forall t \in ]0, T[, \phi(\vec{r}, t) = f(t)$$

- initiales :

$$\forall \vec{r} \in V \begin{cases} \phi(\vec{r}, 0) = h(\vec{r}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, 0) = i(\vec{r}) \end{cases}$$

où  $f$ ,  $h$  et  $i$  sont des fonctions régulières quelconques (respectivement définies sur  $]0, T[$  et  $V$ ).

**Table 4.2** – Théorème d'unicité.

limites est utilisée. Ainsi, le MTI correspond à une approche "orthogonale", complémentaire à celle des cavités à retournement numérique, au sens où elle utilise les conditions initiales en excluant d'imposer des conditions aux limites, tandis que l'approche des cavités utilise une spécification des conditions aux limites en excluant d'imposer des conditions initiales (on les suppose nulles). Explicitement, à l'aide des fonctions de Green (voir le détail de l'expression complète à l'annexe A), cela se traduit par l'expression :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \frac{\partial \phi}{\partial t'}(\vec{r}', t_0) - \frac{\partial G}{\partial t'}(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \phi(\vec{r}', t_0) \right], \quad (4.15)$$

en fonction des conditions initiales, valable en l'absence de frontières ou pour des conditions aux limites nulles (cas correspondant au MTI) et par l'expression :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{t_0}^{t^+} dt' \int_S dS \left[ G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') \frac{\partial \phi}{\partial n'}(\vec{r}', t') - \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r}, t | \vec{r}', t') \phi(\vec{r}', t') \right], \quad (4.16)$$

(où  $t^+$  correspond à la limite de  $t + \epsilon$  avec  $\epsilon$  tendant vers  $0^+$ ) valable pour des conditions initiales nulles et des conditions aux limites imposées par les bords (cas correspondant aux cavités à retournement temporel numérique).

Pour les cavités à retournement temporel numérique, l'information contenue dans le champ d'onde initial est donc enregistrée sur les récepteurs situés à la frontière pendant tout le temps de la propagation. Pour un espace de propagation à  $d$  dimensions, cette information est ainsi stockée sur  $d - 1$  dimensions et le temps, et est réutilisée ultérieurement pour générer l'onde retournée. Dans le cas du MTI, l'information utilisée par le procédé est celle contenue, en un instant unique, dans le champ d'onde, sur les  $d$  dimensions de l'espace. Ainsi, dans les deux cas, toute l'information du champ d'onde initial vérifiant l'équation de d'Alembert, défini sur un espace-temps à  $d + 1$  dimensions ( $d$  pour l'espace et le temps), est récupérée à partir de l'information contenue sur  $d$  dimensions d'espace-temps, c'est-à-dire sur une hypersurface d'espace-temps, et utilisée pour générer l'onde retournée temporellement (voir tableau 4.1).

*Utilisation de l'information contenue sur une hypersurface, formulation générale :*

Ainsi, le MTI et les cavités à retournement temporel numérique utilisent tous deux le fait qu'un champ d'onde solution de l'équation de d'Alembert peut être calculé grâce aux fonctions de Green par intégration sur un domaine d'espace-temps qui s'étend sur  $d$  dimensions de l'espace-temps à  $d + 1$  dimensions. Seul le domaine spatiotemporel considéré (un volume à un instant donné pour le MTI, une surface dans un intervalle de temps pour les cavités à retournement temporel numérique) diffère d'une approche à l'autre. Cette similarité de principe entre les deux approches peut être

explicitée en donnant une formulation générale commune des expressions 4.15 et 4.16 utilisées respectivement dans chacun des deux cas. En effet, ces expressions sont obtenues comme des cas particuliers de la formule générale exprimant un champ solution de l'équation de d'Alembert (voir annexe A) :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}', t') = & \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV \phi(\vec{r}, t) \left( \Delta G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \right) \\ & - \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \left( \Delta \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cette équation se réécrit naturellement, pour faire apparaître les rôles similaires joués par les dimensions spatiales et le temps, à l'aide des conventions d'Einstein (utilisées en relativité) :

$$\phi(\vec{r}', t') = \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV \left[ G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t) \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 G}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \right], \quad (4.18)$$

où  $\eta$  représente la métrique de Minkowski, naturellement adaptée à l'expression de l'opérateur de d'Alembert (on choisit ici la convention usuelle où la première dimension d'espace-temps  $x^0 = ct$  correspond au temps et la signature de métrique est  $(+, -, -, -)$ ). Puisque cette métrique est diagonale, l'expression peut être condensée :

$$\phi(\vec{r}', t') = \int_{HV} d^4x \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t) \frac{\partial G}{\partial x^\mu}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \right), \quad (4.19)$$

où nous avons simplifié l'écriture en désignant par  $HV$  l'hypervolume d'espace temps :  $HV = [ct_0, ct'^+] \times V$ . L'expression (4.19) est la somme de quatre termes, correspondant aux dérivations selon les quatre directions de l'espace temps. Chaque terme peut être intégré selon une direction pour obtenir une expression ne faisant plus intervenir que des dérivées d'ordre 1. Notons qu'ils permettent bien de retrouver directement les expressions du champ en fonction des conditions initiales ou aux limites. Ainsi, le premier terme, correspondant à la dérivée par rapport aux temps, donne directement le terme (4.15) utilisé pour le MTI (les autres étant alors supposés nuls, grâce à des conditions aux limites spatiales de champ nul). Les trois autres termes peuvent se réarranger en utilisant le théorème de Stokes pour redonner le terme (4.16) (voir annexe A), utilisé pour les cavités à retournement temporel numérique (le terme temporel étant alors supposé nul, grâce aux conditions initiales nulles et à la nullité du propagateur de Green causal pour les temps décroissants). Cependant, il est également possible d'obtenir une expression générale englobant les deux cas précédents en utilisant la généralisation de la formule de Stokes pour l'espace pseudo-euclidien de Minkowski à quatre dimensions :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}', t') &= \int_{HV} d^4x \operatorname{div} (G(\vec{r}', t' | x) \operatorname{grad}(\phi(x)) - \phi(x) \operatorname{grad}(G)(\vec{r}', t' | x)) \\ &= \int_{HS} d^3x (G(\vec{r}', t' | x) \operatorname{grad}(\phi)(x) - \phi(x) \operatorname{grad}(G)(\vec{r}', t' | x)), \end{aligned} \quad (4.20)$$

où  $HS = \partial HV$  est la frontière fermée de l'hypervolume  $HV$ ,  $\operatorname{div}$  est la quadridivergence, généralisant la divergence à un quadrivecteur de l'espace de Minkowski, et  $\operatorname{grad}$  est de même le quadrigradient, généralisation du gradient pour une fonction scalaire dans cet espace-temps. Ainsi, en général, il est possible de calculer n'importe quel champ solution de l'équation de d'Alembert homogène à l'aide des fonctions de Green, à partir de l'information contenue sur une hypersurface d'espace-temps. En principe, une hypersurface quelconque peut ainsi être envisagée pour recons-

truire le champ ou son retourné temporel. Le MTI tire parti du cas particulier où l'hypersurface considérée est un volume d'espace et les cavités à retournement temporel numérique tirent parti du cas où l'hypersurface est une surface d'espace prise au cours d'un intervalle de temps.

L'étude des propriétés comparées des Miroirs temporels instantanés et des cavités à retournement temporel numérique a montré que le MTI constitue une nouvelle approche du retournement temporel, dont les propriétés singulières, liées à sa génération "analogique" et à son instantanéité, peuvent fournir des avantages complémentaires de ceux des cavités de retournement. Cette complémentarité a été plus profondément mise en évidence en inscrivant les deux méthodes dans un cadre théorique plus général, montrant que la connaissance du champ d'onde sur trois dimensions d'espace temps était l'ingrédient essentiel pour produire, dans tout un domaine spatiotemporel à quatre dimensions, une onde retournée temporellement.

Au cours de cette section, les propriétés essentielles du MTI ont été analysées. Nous avons tout d'abord revisité le principe d'Huygens-Fresnel, en interprétant l'effet du choc de célérité comme la génération de sources secondaires supplémentaires. Puis nous avons établi les liens entre le MTI et le concept de réfraction temporelle, en réutilisant dans ce contexte la description en lame mince temporelle, pour montrer que le MTI était constitué d'une double frontière temporelle, nécessaire à l'obtention de l'onde retournée mais également à l'origine de son ordre de dérivation supplémentaire. Nous avons ensuite étudié les symétries spatiotemporelles du MTI, pour établir l'analogie entre la réflexion spatiale d'une onde sur un miroir et la réflexion temporelle d'une onde sur MTI, mettant en évidence le rôle de la causalité dans la différence entre les deux phénomènes. Enfin, nous avons établi les différences et les liens entre ce nouveau concept de retournement temporel et le procédé standard de retournement temporel, et inscrit les deux procédés dans une description plus générale. Toutes ces propriétés ont été établies à partir de l'équation des ondes de d'Alembert, qui est l'équation d'ondes la plus répandue à travers les différents domaines de la physique. Néanmoins, il est clair que le concept s'applique également à d'autres types d'onde similaires, notamment les ondes de surface utilisées dans nos expériences. Nous allons donc par la suite étudier les généralisations possibles du concept en déterminer les limites.

## 4.2 Généralisation à d'autres types d'ondes

Le concept du Miroir temporel instantané a été présenté et étudié, expérimentalement puis théoriquement, dans les parties et chapitres précédents. Sa description théorique, analysée en détails à la section précédente, repose sur les propriétés de l'équation de d'Alembert (1). Dans cette section, nous allons généraliser ces résultats à une catégorie plus générale d'ondes, et étudier les effets de l'inclusion dans les équations de la dynamique de termes supplémentaires, associés à la dissipation et à la non-linéarité. Nous considérerons en particulier le cas des ondes de surface, utilisées dans les expériences de la partie 3. Nous évoquerons également à travers l'étude de ce concept, le problème des limites du caractère ondulatoire des ondes de matière.

### 4.2.1 Généralisation du MTI à d'autres ondes classiques

#### Motivation

Aux cours des chapitres précédents, nous avons développé et décrit le concept du MTI en considérant un champ d'onde quelconque, gouverné par l'équation de d'Alembert (1). Notons que nos notations suggèrent implicitement que nous avons supposé le champ scalaire, mais la nature scalaire du champ n'intervient dans aucun des résultats présentés, qui sont donc également applicables à des champs vectoriels, pourvus qu'ils satisfassent aux mêmes conditions de continuités du champ et de sa dérivée temporelle à une (simple) frontière temporelle (ou même seulement à des conditions similaires comme pour les ondes électromagnétiques, voir section 4.1.2). Le choix concret de l'équation de d'Alembert a été guidé par les très nombreuses occurrences de cette équation à travers les différents domaines de la physique. Cependant, d'autres systèmes ondulatoires aux propriétés similaires existent, pour lesquels nous allons montrer que le MTI reste applicable. Notre démarche de généralisation n'a pas l'ambition d'aborder de manière exhaustive l'ensemble des systèmes ondulatoires en physique, et encore moins, d'un point de vue mathématique, d'en faire de même avec l'ensemble des équations aux dérivées partielles pour lesquelles un équivalent du MTI pourrait être défini. La reformulation, relativement générale, des équations du MTI que nous présentons ici, remplira néanmoins un double objectif. D'une part, d'un point de vue "pratique", elle nous permettra de donner une description théorique des expériences présentées à la partie 3, en étendant le concept aux ondes à la surface d'un liquide, qui sont gouvernées par des équations en général différentes de l'équation de d'Alembert (voir l'annexe B). D'autre part, elle nous permettra de mettre en évidence certains ingrédients essentiels, au niveau de la structure de l'équation des ondes et de la nature de l'opération effectuée, qui rendent possible le retournement temporel instantané. Ces ingrédients essentiels peuvent être anticipés :

Puisque le choc de célérité est homogène spatialement, l'action du MTI peut être qualifiée de purement temporelle. Le théorème de Cauchy que nous avons utilisé pour développer le concept, fait intervenir, à travers les conditions initiales, uniquement la dépendance temporelle de l'équation de d'Alembert. Ainsi, nous verrons que le MTI peut être étendu aux champs d'onde gouvernés par des équations pour lesquelles le temps intervient par le même terme dérivé d'ordre deux.

Puisque le MTI conduit à la superposition d'une onde retournée temporellement et d'une onde de même sens d'évolution temporelle que l'onde initiale, le principe de superposition doit s'appliquer au système considéré, qui doit par conséquent être gouverné par une équation linéaire.

### Généralisation à une catégorie d'ondes " $\mathcal{H}$ "

Conformément aux aspects que nous venons d'évoquer, nous définissons la catégorie des équations d'ondes "similaires" à l'équation de d'Alembert, que, par souci de simplicité, nous noterons  $\mathcal{H}$ , comme l'ensemble des équations pouvant s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) + \mathcal{L}[\phi](\vec{r}, t) = 0, \quad (4.21)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel linéaire portant sur la partie spatiale du champ de forme générale :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \sum_{k=0}^{n_z} \alpha_{i,j,k} \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}. \quad (4.22)$$

Une équation de ce type est une équation différentielle linéaire et fait intervenir, comme seul terme différentiel temporel, une dérivée d'ordre deux, comme l'équation de d'Alembert, qui en est un cas particulier évident. Considérons un champ d'onde  $\phi$  solution d'une équation de  $\mathcal{H}$ . L'outil naturel pour isoler la partie temporelle de l'équation d'onde est la transformée de Fourier *spatiale* :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\vec{r} \phi(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (4.23)$$

où  $d$  est la dimension de l'espace sur lequel se propage l'onde considérée. Dans l'espace de Fourier *spatial*, une équation de  $\mathcal{H}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + \omega_0^2(\vec{k}) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0, \quad (4.24)$$

où :

$$\omega_0^2(\vec{k}) = \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{l=0}^{n_y} \sum_{m=0}^{n_z} \alpha_{j,l,m} (ik_x)^j (ik_y)^l (ik_z)^m \quad (4.25)$$

est la relation de dispersion de l'équation d'ondes considérée. Une équation de  $\mathcal{H}$  est donc une équation, qui, dans l'espace de Fourier spatial, donne une équation d'oscillateur harmonique (elle correspond également à la version unidimensionnelle de l'équation de Helmholtz). Notons que pour que l'équation (4.24) corresponde bien à celle d'un oscillateur harmonique, il est nécessaire de faire l'hypothèse supplémentaire que  $\omega_0^2(\vec{k})$  est un réel positif. Nous restreignons donc  $\mathcal{H}$  aux équations vérifiant également cette propriété, ce qui permet de s'assurer que  $\tilde{\phi}$  a un comportement oscillant, associé à la propagation d'une onde. Pour un système ondulatoire régi par une telle équation, le MTI est obtenu par un choc temporel d'un ou plusieurs des paramètres de la relation de dispersion au cours du temps, décrit par une fonction de Dirac. L'équation dans l'espace de Fourier spatial s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + \omega_0^2(\vec{k}) (1 + \tau(\vec{k}) \delta(t - t_{\text{MTI}})) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0. \quad (4.26)$$

Tous les résultats qui suivent découlent de l'équation (4.26).  $\mathcal{H}$  peut donc *a priori* être étendu aux équations associées à une équation du type (4.26), avec une forme quelconque de la relation de dispersion (mais l'équation d'onde ne peut alors plus, en général, s'écrire d'une façon simple dans l'espace réel). Notons que dans cette équation modifiée,  $\omega_0(\vec{k})$  ne définit plus une relation de dispersion : les solutions ne peuvent plus être décomposées en composantes de Fourier *temporelles*, du fait de la présence du terme proportionnel à une fonction de Dirac. Naturellement, comme pour le cas particulier des ondes de d'Alembert, ce choc temporel peut être interprété comme un choc de célérité au carré ( $c^2(\vec{k}) = \omega_0^2(\vec{k})/|\vec{k}|^2$ ). De plus, comme précédemment, le terme de choc,



proportionnel à la fonction delta de Dirac, peut être interprété comme un terme de champ de sources instantanées  $s$  proportionnel au champ d'onde :

$$s(\vec{k}, t) = -\omega_0^2(\vec{k})\tau(\vec{k})\delta(t - t_{\text{MTI}})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) \quad (4.27)$$

L'équation (4.26) est proche de l'équation d'un oscillateur harmonique avec une fonction de Dirac comme terme source, qui définit la fonction de Green de l'oscillateur harmonique. La seule différence est due à la multiplication par la fonction  $\tilde{\phi}$ . Il est cependant possible de montrer (voir annexe A.4) que le résultat est identique à celui obtenu lorsque la fonction de Dirac est multipliée par une constante. La solution générale peut ainsi être formellement décomposée en la somme de deux termes :

- un terme solution de l'équation homogène :

$$\tilde{\phi}_i(\vec{k}, t) = Ae^{i\omega_0(\vec{k})t} + Be^{-i\omega_0(\vec{k})t}, \quad (4.28)$$

- un terme de source :

$$\tilde{\phi}_s(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_H(\vec{k}, t - t')s(\vec{k}, t')dt', \quad (4.29)$$

où  $G_H$  est la fonction de Green retardée (causale) de l'oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0(\vec{k})$ .

Cette dernière est donnée par (voir annexe A.4) :

$$G_H(\vec{k}, t) = H(t)\frac{\sin(\omega_0(\vec{k})t)}{\omega_0(\vec{k})}, \quad (4.30)$$

où  $H$  désigne la fonction de Heaviside. L'intégrale de l'équation (4.29) est simplifiée par le fait que la source est donnée par une fonction de Dirac (4.27) :

$$\tilde{\phi}_s(\vec{k}, t) = -\tau(\vec{k})\omega_0(\vec{k})H(t - t_{\text{MTI}})\tilde{\phi}(\vec{k}, t_{\text{MTI}})\sin(\omega_0(\vec{k})(t - t_{\text{MTI}})). \quad (4.31)$$

Notons que l'annulation du sinus en  $t_{\text{MTI}}$  garantit la continuité du champ et  $\tilde{\phi}(\vec{k}, t_{\text{MTI}}) = \tilde{\phi}_i(\vec{k}, t_{\text{MTI}})$ . À l'aide de la forme générale de la solution homogène (4.28), le terme de source se réécrit explicitement et se décompose en deux contributions pouvant être exprimées en fonction de la solution homogène :

$$\tilde{\phi}_s(\vec{k}, t) = \tilde{\phi}_{\text{co}}(\vec{k}, t) + \tilde{\phi}_{\text{rétro}}(\vec{k}, t), \quad (4.32)$$

avec un terme proportionnel à la dérivée temporelle de la solution homogène :

$$\tilde{\phi}_{\text{co}}(\vec{k}, t) = \frac{i\tau(\vec{k})\omega_0(\vec{k})}{2} \left( Ae^{i\omega_0(\vec{k})t} - Be^{-i\omega_0(\vec{k})t} \right) = \frac{\tau(\vec{k})}{2} \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial t}(\vec{k}, t), \quad (4.33)$$

et un terme proportionnel à son retourné temporel :

$$\tilde{\phi}_{\text{rétro}}(\vec{k}, t) = -\frac{i\tau(\vec{k})\omega_0(\vec{k})}{2} \left( Ae^{i\omega_0(\vec{k})(2t_{\text{MTI}}-t)} - Be^{-i\omega_0(\vec{k})(2t_{\text{MTI}}-t)} \right) = -\frac{\tau(\vec{k})}{2} \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial t}(\vec{k}, 2t_{\text{MTI}} - t). \quad (4.34)$$

La solution dans l'espace de Fourier, fait donc apparaître, de façon analogue au résultat de l'équation (2.35) obtenue pour des solutions de l'équation de d'Alembert, trois termes :

- un terme correspondant à la solution initiale non perturbée, qui serait seule obtenue en l'absence de MTI ( $\tau(\vec{k}) = 0$ ),

- un terme  $\tilde{\phi}_{\text{co}}$  correspondant à une onde copropagative, proportionnelle dans l'espace de Fourier à la dérivée du champ initial,
- un terme  $\tilde{\phi}_{\text{rétro}}$  correspondant à une onde rétropropagative, proportionnelle dans l'espace de Fourier au retourné temporel de la dérivée du champ initial.

Si l'amplitude du choc est indépendante du vecteur d'onde ( $\tau(\vec{k}) = \tau$ ), on retrouve exactement, dans l'espace réel, l'expression (2.35) obtenue pour les ondes de d'Alembert :

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_i(\vec{r}, t) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\vec{r}, t) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\vec{r}, 2t_{\text{MTI}} - t), \quad (4.35)$$

où  $\phi_i$  est l'onde initiale, définie comme la transformée de Fourier inverse de la solution homogène  $\tilde{\phi}_i$ . Si le paramètre utilisé pour réaliser le MTI est tel que  $\tau(\vec{k})$  dépend de  $\vec{k}$ , l'expression n'est plus obtenue qu'en valeur approchée, pour des paquets d'ondes peu larges spectralement :

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \phi_i(\vec{r}, t) + \frac{\tau(\vec{k}_0)}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\vec{r}, t) - \frac{\tau(\vec{k}_0)}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\vec{r}, 2t_{\text{MTI}} - t), \quad (4.36)$$

où  $\vec{k}_0$  est le vecteur d'onde central du paquet d'onde.

### Le MTI par choc de gravité pour les ondes de surface en eau profonde

Les ondes de surface utilisées dans nos expériences ne sont (en général) pas régies par une équation de d'Alembert. Cependant, dans le régime utilisé expérimentalement de l'eau profonde, où la hauteur de liquide est très supérieure à la longueur d'onde, elles sont gouvernées par une équation du type  $\mathcal{H}$  que nous venons de définir. En effet, pour un liquide non visqueux (l'eau dans nos expériences), de densité  $\rho$  et de tension de surface dans l'air  $\gamma$ , le champ d'élévation de la surface  $\zeta$  est gouverné, dans l'espace de Fourier spatial, par une équation d'oscillateur harmonique (voir annexe B) :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2}(k_x, k_y, t) + \omega_0^2(k) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = 0, \quad (4.37)$$

où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et  $\omega_0(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3 / \rho}$  définit la relation de dispersion des ondes de surface (dans un bain libre). Pour décrire les expériences de la partie 3, nous supposons que l'ensemble du bain de liquide considéré est soumis à une accélération verticale  $a(t)$  (comptée par convention positive vers le haut). Dans le référentiel de la cuve en mouvement, cela se traduit par une accélération d'inertie d'entraînement qui résulte en une augmentation effective de la gravité :  $g_{\text{eff}}(t) = g + a(t)$ . L'équation d'évolution des ondes de surface s'écrit alors dans l'espace de Fourier :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2}(k_x, k_y, t) + \omega_0^2(k) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = -a(t) k \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t), \quad (4.38)$$

Dans nos expériences, le bain est soumis à un choc brutal d'accélération (voir figure 3.6), que nous pouvons modéliser en première approximation par une fonction delta de Dirac :

$$a(t) = V \delta(t - t_{\text{MTI}}), \quad (4.39)$$

où  $V$  est une constante ayant la dimension d'une vitesse. Cette dernière dépend de l'amplitude d'accélération  $a_m$  et de la durée  $\delta t$  du choc réel selon :

$$V \sim a_m \delta t. \quad (4.40)$$

Dans nos expériences,  $V \approx 0,6 \text{ ms}^{-1}$ . Notons qu'après ce pic d'accélération, la cuve décélère doucement jusqu'à l'arrêt puis remonte à faible vitesse pour retrouver sa position initiale. Cependant, l'accélération reste faible pendant toute cette phase du mouvement et nous la négligerons devant la gravité. Ainsi, le modèle (idéal) du MTI pour les ondes de surface, associé à une fonction de Dirac d'accélération, conduit, à partir du résultat du MTI généralisé à  $\mathcal{H}$ , directement à :

$$\zeta(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \tilde{\zeta}_i(k_x, k_y, t) e^{i(k_x x + k_y y)} - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{Vk}{2\omega_0^2(k)} \left( \frac{\partial \tilde{\zeta}_i}{\partial t}(k_x, k_y, t) - \frac{\partial \tilde{\zeta}_i}{\partial t}(k_x, k_y, 2t_{\text{MTI}} - t) \right) e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (4.41)$$

où  $\tilde{\zeta}_i$  est la transformée de Fourier spatiale du champ  $\zeta_i$ , correspondant à l'onde initiale non perturbée, qui est seule observée en l'absence de MTI ( $V = 0$ ). Si le paquet d'onde initial vérifie :

$$\frac{k}{\omega_0^2(k)} \approx \text{constante}, \quad (4.42)$$

sur toute la largeur de son spectre, ce qui correspond à un un spectre suffisamment étroit, l'expression (4.41) peut comme précédemment se simplifier en :

$$\zeta(\vec{r}, t) \approx \zeta_i(\vec{r}, t) - \frac{Vk_0}{\omega_0^2(k_0)} \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}(\vec{r}, t) - \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}(\vec{r}, 2t_{\text{MTI}} - t) \right), \quad (4.43)$$

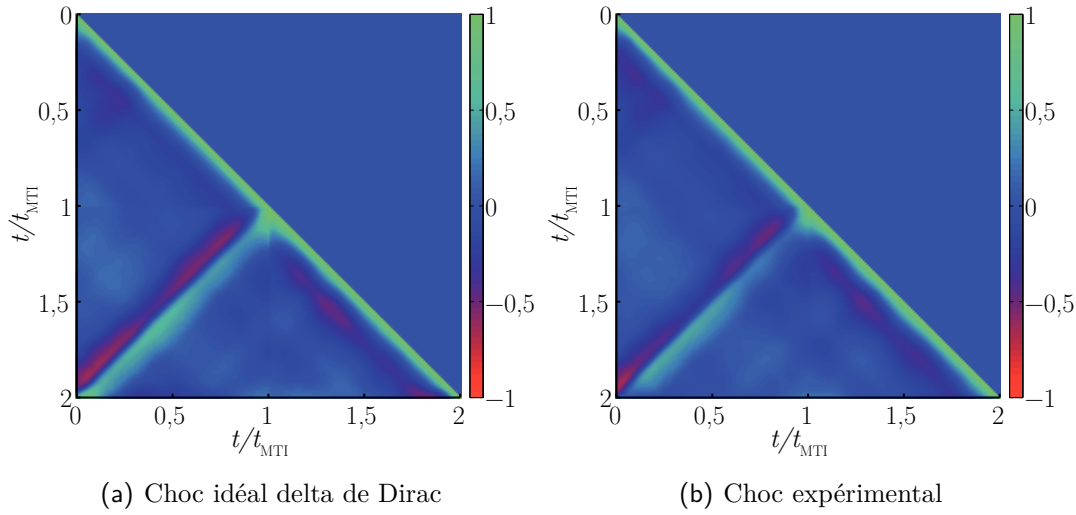
où  $k_0$  est le vecteur d'onde central du paquet d'onde. Ainsi, comme précédemment, le champ d'onde obtenu après MTI se décompose donc en trois termes : un terme d'onde non perturbée, un terme copropagatif (approximativement) proportionnel à la dérivée du champ initial et un terme rétropropagatif, (approximativement) proportionnel au retourné temporel de la dérivée temporelle du champ initial. Notons que dans le cas d'ondes gravitaires ( $gk \gg \gamma k^3/\rho$ ), le terme d'amplitude de l'onde retournée devient indépendant de  $k$  :

$$\frac{Vk}{\omega_0^2(k)} \approx \frac{V}{g}, \quad (4.44)$$

qui est une constante (homogène à un temps). La relation (4.43) est alors vérifiée pour tout  $k$ . Dans nos expériences, ce régime gravitaire ne peut être atteint car il correspond à des longueurs d'onde trop grandes (supérieures au centimètre) en comparaison de l'espace disponible dans la cuve (de l'ordre de la dizaine de centimètres). Une légère déformation du spectre accompagne donc le retournement temporel.

Ces résultats fournissent le modèle idéal du MTI pour les ondes de surface, valable pour des secousses de durées très faibles devant la période caractéristique de l'onde (ce qui est une bonne approximation dans nos expériences, voir partie 3.2.3). Pour prendre en compte l'effet de la durée et de la forme du choc, nous pouvons effectuer une simulation numérique à partir de l'équation (4.38), en prenant pour donnée le signal  $a(t)$  de l'accélération du bain dans nos expériences (voir une séquence d'images de simulation du champ d'onde figure 3.15 (c)). Les détails de la simulation sont fournis en annexe C.

La figure 4.7 présente les diagrammes de corrélations obtenus pour une simulation en utilisant le modèle analytique du choc de gravité en fonction delta de Dirac d'un côté (figure (a)), et la résolution numérique de l'équation (4.38) avec le profil d'accélération du bain mesuré dans les expériences (voir la figure 3.6 au chapitre 3.2) de l'autre (figure (b)). Les résultats sont très semblables, les diagrammes de corrélation montrent que l'onde retournée par un choc en delta



**Figure 4.7** – Comparaison entre les simulations obtenues à l’aide du modèle analytique du MTI (idéal) pour les ondes de surface (a) et celles réalisées avec le profil d’accélération du bain (voir la figure 3.6 au chapitre 3.2) enregistré dans l’expérience (b).

de Dirac est légèrement plus fidèle à l’onde initiale (corrélacion normalisée de l’ordre de 0,55 sur la ligne de corrélacion maximale) que celle obtenue par le choc expérimental de durée non nulle (corrélacion normalisée de l’ordre de 0,45). Ceci est dû au léger filtrage des hautes fréquences induit par la durée non nulle du choc (voir section 3.2.3).

## 4.2.2 Influence de la dissipation

### Équations d’ondes avec un terme de dissipation et MTI

Dans de nombreux systèmes ondulatoires (ondes acoustiques, ondes de surface, etc.), l’équation de l’oscillateur harmonique dans l’espace de Fourier spatial, définissant la catégorie  $\mathcal{H}$ , n’est obtenue que dans le cas limite où les effets de dissipation sont négligeables. Dans de nombreux cas, une correction au modèle non dissipatif est obtenue par l’ajout d’un faible terme dissipatif, dérivé d’ordre un en temps, à l’équation, qui est alors appelée équation de l’oscillateur harmonique amorti. Ce terme dérivé d’ordre un implique que l’équation des ondes n’est plus réversible. Néanmoins, nous allons montrer ici que le fonctionnement du MTI n’est essentiellement pas altéré dans ce contexte, et que le retournement temporel est bien obtenu à un facteur d’atténuation près. Nous évoquerons en particulier le cas concret des ondes à la surface d’un liquide faiblement visqueux. Nous faisons donc ici l’hypothèse d’un système ondulatoire régi, dans l’espace de Fourier spatial, par une équation de forme générale :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + \alpha(\vec{k}) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \omega^2(\vec{k}) \tilde{\phi} = 0. \quad (4.45)$$

$\alpha(\vec{k})$  est le coefficient de relaxation au vecteur d’onde  $\vec{k}$ . Le cas non amorti de l’équation (4.24) est retrouvé en prenant la limite  $\alpha(\vec{k}) = 0$  et  $\omega(\vec{k}) = \omega_0(\vec{k})$ . Notons que la prise en compte des effets de dissipation peut s’accompagner pour certains systèmes d’un changement de la pulsation :  $\omega(\vec{k}) \neq \omega_0(\vec{k})$ . C’est le cas pour les ondes à la surface d’un liquide faiblement visqueux, pour

lesquelles (voir annexe B.4) :

$$\begin{cases} \omega^2(k) = gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3 + 4\nu^2k^4, \\ \alpha(k) = 4\nu k^2. \end{cases} \quad (4.46)$$

Pour que l'équation de l'oscillateur harmonique amorti obtenue dans l'espace de Fourier spatial corresponde bien à un système ondulatoire (dissipatif), il faut faire l'hypothèse supplémentaire qu'elle soit associée à un régime d'oscillation pseudo-périodique (car les régimes critiques et a-périodiques sont non oscillants), ce qui est donné par la négativité du déterminant caractéristique de l'équation (4.45) :

$$\Delta = \alpha^2(\vec{k}) - 4\omega^2(\vec{k}) < 0, \quad (4.47)$$

Notons que c'est bien le cas pour les ondes à la surface d'un liquide peu visqueux :

$$\Delta = 16\nu^2k^4 - 4\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) - 16\nu^2k^4 = -4\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) < 0. \quad (4.48)$$

Le MTI est obtenu, comme dans le cas non dissipatif, par la variation temporelle d'un paramètre du système conduisant à une équation du type :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + \alpha(\vec{k})\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \omega^2(\vec{k})\left(1 + \tau(\vec{k})\delta(t - t_{\text{MTI}})\right)\tilde{\phi} = 0, \quad (4.49)$$

où, pour les ondes de surface,  $\tau(k) = Vk/\omega^2(k)$ , avec  $V$  la vitesse moyenne du bain pendant la secousse. Pour tout instant différent de  $t_{\text{MTI}}$ , le champ est solution de l'équation homogène (4.45), qui donne les solutions générales :

$$\begin{cases} \tilde{\phi} = Ae^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t - i\omega_0(\vec{k})t} + Be^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t + i\omega_0(\vec{k})t}, & \text{pour } t < t_{\text{MTI}} \\ \tilde{\phi} = A'e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t - i\omega_0(\vec{k})t} + B'e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t + i\omega_0(\vec{k})t}, & \text{pour } t > t_{\text{MTI}} \\ \text{avec } \omega_0(\vec{k}) = \frac{\sqrt{4\omega^2(\vec{k}) - \alpha^2(\vec{k})}}{2}. \end{cases} \quad (4.50)$$

Nous notons ici la pulsation d'oscillation du système dissipatif  $\omega_0(\vec{k})$  par analogie à la pulsation du système non dissipatif, en remarquant que dans le cas des ondes de surface, ces deux expressions sont identiques ( $\omega_0(k)$  n'est autre que la relation de dispersion des ondes sans viscosité).

Grâce à la continuité de  $\tilde{\phi}$ , en intégrant entre  $t_{\text{MTI}}^-$  et  $t_{\text{MTI}}^+$  la relation (4.90), on obtient, de même que pour le cas non dissipatif, la condition de raccord pour la dérivée :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_{\text{MTI}}^+) - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_{\text{MTI}}^-) = -\tau(\vec{k})\omega^2(\vec{k})\tilde{\phi}(\vec{k}, t_{\text{MTI}}). \quad (4.51)$$

On obtient donc  $A'$  et  $B'$  en fonction de  $A$  et  $B$  :

$$\begin{cases} Ae^{-i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} + Be^{+i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} = A'e^{-i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} + B'e^{+i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} \\ -\tau(\vec{k})\omega^2(\vec{k}) \left( Ae^{-i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} + Be^{+i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} \right) = \\ \left( -\frac{\alpha(\vec{k})}{2} - i\omega_0(\vec{k}) \right) (A' - A)e^{-i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}} + \left( -\frac{\alpha(\vec{k})}{2} + i\omega_0(\vec{k}) \right) (B' - B)e^{+i\omega_0(\vec{k})t_{\text{MTI}}}. \end{cases} \quad (4.52)$$

En introduisant l'onde initiale  $\tilde{\phi}_i(\vec{k}, t) = Ae^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t - i\omega_0(\vec{k})t} + Be^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t + i\omega_0(\vec{k})t}$ , on obtient :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\phi}_i(\vec{k}, t) - \frac{\omega^2(\vec{k})\tau(\vec{k})}{\omega_0(\vec{k})} \tilde{\phi}_i(\vec{k}, t_{\text{MTI}}) \theta(t - t_{\text{MTI}}) e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}(t - t_{\text{MTI}})} \sin(\omega_0(\vec{k})(t - t_{\text{MTI}})). \quad (4.53)$$

Cette expression est très similaire à celle obtenue dans le cas non dissipatif. Pour décomposer comme précédemment le terme supplémentaire en une onde copropagative et une onde rétropropagative nous introduisons la notation :

$$\tilde{\phi}_i(\vec{k}, t) = e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t} \tilde{\phi}_{i,\text{ND}}(\vec{k}, t) = e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t} \left( Ae^{-i\omega_0(\vec{k})t} + Be^{i\omega_0(\vec{k})t} \right). \quad (4.54)$$

$\tilde{\phi}_{i,\text{ND}}$  correspond à la "partie non dissipative" de l'onde initiale. Après le choc ( $t > t_{\text{MTI}}$ ), le champ d'onde peut donc se réécrire comme une somme de trois termes :

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_i(\vec{r}, t) + \phi_{\text{co}}(\vec{r}, t) + \phi_{\text{rétro}}(\vec{r}, t), \quad (4.55)$$

où  $\phi_i$  est définie comme la transformée de Fourier inverse de  $\tilde{\phi}_i$  et correspond au champ d'onde initial avant le choc,  $\phi_{\text{co}}$  est un terme copropagatif :

$$\phi_{\text{co}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi^2} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\omega^2(\vec{k})\tau(\vec{k})}{\omega_0^2(\vec{k})} e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t} \frac{\partial \tilde{\phi}_{i,\text{ND}}(\vec{k}, t)}{\partial t}, \quad (4.56)$$

et un terme rétropropagatif donné par

$$\phi_{\text{rétro}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\omega^2(\vec{k})\tau(\vec{k})}{\omega_0^2(\vec{k})} e^{-\frac{\alpha(\vec{k})}{2}t} \frac{\partial \tilde{\phi}_{i,\text{ND}}(\vec{k}, 2t_{\text{MTI}} - t)}{\partial t}. \quad (4.57)$$

Comme attendu, la dissipation induit une irréversibilité : le facteur d'atténuation exponentiel  $e^{-\alpha(\vec{k})t/2}$  n'est pas retourné temporellement. Néanmoins, si le coefficient de relaxation  $\alpha(\vec{k})$  est suffisamment faible, le paquet d'onde rétropropagé reste proche du retourné temporel de (la dérivée temporelle de) l'onde initiale. Comme précédemment, les déformations du spectre dans l'onde retournée sont introduits par la dépendance de  $\tau(\vec{k})$  au vecteur d'onde et par l'ordre de dérivation temporel supplémentaire. À ces déformations s'ajoutent celles associées aux préfacteurs  $\omega^2/\omega_0^2$  et  $e^{-\alpha(\vec{k})t}$ , qui augmentent respectivement quadratiquement et linéairement avec  $\alpha$ , à l'ordre le plus

bas. Pour un paquet d'onde étroit centré sur  $\vec{k}_0$ , on obtient l'expression approchée :

$$\phi_{\text{rétro}}(\vec{r}', t) \approx -\frac{\omega^2(\vec{k}_0)\tau(\vec{k}_0)}{2\omega_0^2(\vec{k}_0)} e^{-\frac{\alpha(\vec{k}_0)}{2}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\frac{\alpha(\vec{k}_0)}{2}t} \phi_i \right) (\vec{r}', 2t_{\text{MTI}} - t). \quad (4.58)$$

### Filtre passe-bas imposé par la viscosité pour les ondes de surface

Dans le cas des ondes de surface, l'expression 4.57 devient explicitement :

$$\zeta_{\text{rétro}}(\vec{r}', t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \frac{Vk}{2\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right)} e^{-2\nu k^2 t} \frac{\partial \tilde{\zeta}_{i,\text{ND}}(\vec{k}, 2t_{\text{MTI}} - t)}{\partial t}, \quad (4.59)$$

où comme précédemment,  $\tilde{\zeta}_{i,\text{ND}} = e^{2\nu k^2 t} \tilde{\zeta}_i$  désigne l'onde initiale corrigée de son facteur d'atténuation visqueuse. Le terme quadratique en la viscosité a ici été négligé. Ainsi, la seule différence pour ces ondes introduite par une (faible) viscosité du liquide, par rapport au cas non visqueux de l'équation (4.41) est un facteur d'atténuation de l'amplitude  $e^{-2\nu k^2 t}$ . La dépendance quadratique en  $k$  du coefficient de relaxation correspondant implique que l'effet de la viscosité est essentiellement celui d'un filtre passe bas fréquentiel au cours de la propagation. Ce filtre s'applique pareillement à l'onde initiale et à l'onde retournée. Dans les expériences, l'effet de filtrage passe-bas induit par la durée non nulle du choc (présenté à la section 3.2.3) s'ajoute à cet effet de filtrage passe-bas visqueux. C'est ce dernier type de filtrage qui domine aux temps longs et qui explique que les plus courtes longueurs d'onde mesurées dans l'onde initiale avant le choc ne soient pas présentes dans l'onde retournée quelques temps après le choc (voir figure 3.10).

Nous avons ainsi montré que la prise en compte d'un effet dissipatif dans la propagation d'ondes, qui est une entrave naturelle au retournement temporel puisqu'elle est source d'irréversibilité, ne se traduisait néanmoins pour le MTI que par un facteur d'atténuation dans l'espace de Fourier sur l'onde retournée. Ce dernier peut toutefois être associé à une déformation du spectre de l'onde (un filtrage passe-bas dans le cas des ondes à la surface d'un liquide visqueux).

### 4.2.3 Perspectives : limites d'applicabilités du concept ?

Nous sondons dans cette section les limites du MTI, en considérant des ondes classiques non linéaires et des ondes de matière.

#### Ondes non linéaires ?

Une autre correction usuelle aux modèles idéaux de type d'Alembert pour la propagation des ondes est la prise en compte d'un effet de rétroaction de l'onde sur elle-même grâce à l'ajout d'un terme non linéaire dans l'équation d'onde. Ces effets non linéaires apparaissent généralement aux fortes amplitudes d'onde [26, 28, 86] (pour les ondes acoustiques, les ondes de surface, etc.) et décrivent également la propagation d'ondes électromagnétiques dans certains milieux [5]. Comment l'action du MTI est-elle modifiée en présence d'une non linéarité ? L'approche générale adoptée à la section 4.2.1, reposant sur un passage dans l'espace de Fourier spatial, ne convient plus à ce cas de figure, car la transformation de Fourier n'est pas adaptée aux opérateurs non linéaires.

Considérons le cas d'une onde régie par une équation de d'Alembert avec un terme non linéaire :

$$c^2 \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mathcal{N} \mathcal{L} \left[ \phi, \dots, \frac{\partial^k \phi}{\partial t^{k_0} \partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}}, \dots \right] = 0 \quad (4.60)$$

$(k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = k),$

où  $\mathcal{N} \mathcal{L}$  est une fonction non linéaire de  $\phi$  et de ses dérivées. Pour un Dirac de célérité  $c^2 = c_0^2(1 + \tau \delta(t - t_{\text{MTI}}))$ , si la fonction non linéaire  $\mathcal{N} \mathcal{L}$  est suffisamment régulière, si elle ne met pas en jeu de dérivées temporelles d'ordres supérieurs à un, la continuité du champ et de ses dérivées conduit comme précédemment (voir équation (4.51)), par intégration de l'équation d'onde entre  $t_{\text{MTI}}^-$  et  $t_{\text{MTI}}^+$ , à la relation de passage pour la dérivée du champ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_{\text{MTI}}^-) + c_0^2 \tau \Delta \phi(\vec{r}, t_{\text{MTI}}). \quad (4.61)$$

Ainsi, l'action du MTI en terme de disruption des conditions initiales est, dans certains cas, inchangée en régime non linéaire. Cependant, comme nous l'avons présenté aux chapitres précédents, l'obtention d'une onde retournée par MTI repose sur le principe de superposition, qui n'est plus valable pour une équation différentielle non linéaire (en champ). Ainsi la décomposition (2.35) du chapitre 2.2 n'est plus valable et une onde retournée temporellement n'est pas obtenue dans le cas général. Une autre façon de le voir est de considérer que le champ retourné est obtenu comme la superposition linéaire des champs émis par les sources de Fresnel isotropes instantanées (voir section 4.1.1). Cette superposition linéaire ne conduit bien au retourné temporel du champ initial qu'en régime linéaire.

Notons cependant que le concept du MTI pourrait malgré tout être utilisé pour retourner certaines ondes non linéaires, pour lesquelles il a été montré que le retournement temporel est possible, comme des solitons [28] ou des vagues scélérates [26]. En effet, les effets non linéaires ne se manifestent que lorsque l'amplitude de l'onde de surface est élevée. Dans l'exemple des vagues scélérates, cela ne se produit qu'au moment de la compression, tandis que, le reste du temps, l'amplitude beaucoup plus faible et atteint le régime linéaire dans lequel le MTI peut être effectué. Si le choc du MTI est choisi de manière adéquate pour obtenir une onde retournée de même amplitude que l'onde initiale, alors, puisque les équations des ondes de surface sont réversibles dans le régime non linéaire (décrit dans certaines conditions par une équation de Schrödinger non linéaire [26]) comme dans le régime linéaire, l'onde rétropropagée générée par MTI doit conduire au retourné temporel d'une vague scélérate. Remarquons que cette procédure a déjà été mise en œuvre expérimentalement avec une technique de cavité à retournement temporel numérique (avec émetteurs-récepteurs) [26]. Ainsi, si le MTI n'est en général pas réalisable directement pour les ondes en régime non linéaire, il est malgré tout envisageable de l'utiliser en régime linéaire pour régénérer des ondes focalisées atteignant ultérieurement un régime non linéaire.

### Un MTI d'ondes de matière ?

Cette section nous a permis de montrer que la possibilité (théorique) de générer une onde retournée temporellement par MTI est une propriété fondamentale des systèmes ondulatoires usuels, gouvernés par des équations réversibles, similaires à l'équation de d'Alembert (appartenant à la catégorie  $\mathcal{H}$ ). Cette observation nous amène à envisager l'extension du concept à d'autres systèmes ondulatoires et en particulier au cas particulièrement intéressant de la matière. Comme nous l'avons vu à la section 2.1, les particules (classiques) ne permettent pas l'utilisation du concept du MTI pour réaliser un retournement temporel, dû au fait qu'elles ne satisfont pas au principe de



superposition. Cependant, à l'échelle quantique, la matière comporte un caractère ondulatoire [87]. Elle est soumise au principe de superposition, et met en jeu des phénomènes comme la diffraction [88] et les interférences [89]. Dès lors, il est légitime de se demander si le caractère ondulatoire de la matière à cette échelle ne permet pas de contourner l'inaptitude classique des particules de matière au retournement temporel, en réalisant un MTI sur la fonction d'onde décrivant la particule.

*Retournement temporel et équation de Schrödinger :*

La description la plus simple du caractère ondulatoire de la matière est donnée en mécanique quantique par l'équation de Schrödinger, décrivant la dynamique d'une particule massive non relativiste, et utilisée par exemple pour décrire les condensats de Bose-Einstein dilués [90] :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t), \quad (4.62)$$

où  $\psi$  est la fonction d'onde (complexe), dont le module carré correspond à la probabilité de mesure de la particule, et  $H$  est l'opérateur hamiltonien, valant pour une particule libre :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta. \quad (4.63)$$

Avant d'évaluer si la procédure du MTI peut être appliquée à un tel système, il est nécessaire de vérifier qu'il est bien réversible.

- Réversibilité des ondes de Schrödinger : L'équation de Schrödinger est une équation différentielle d'ordre un en temps et n'est pas rigoureusement symétrique par renversement du temps. Néanmoins le facteur  $i$  devant le terme dérivé temporellement implique que l'équation est invariante par la transformation :  $\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi^*(\vec{r}, -t)$ . Ainsi, la dynamique de la particule, qui est déterminée par le module de la fonction d'onde, est bien réversible temporellement.

- Démon de Loschmidt pour les ondes de matière : Il existe une expérience de pensée analogue à celle du démon de Loschmidt, permettant de faire apparaître cette fonction d'onde retournée temporellement. Pour les ondes régies par l'équation de Schrödinger, d'ordre un en temps, le problème de Cauchy est donné uniquement par la valeur du champ d'onde en tout point de l'espace. Si à un instant donné  $t_0$ , "un démon" transforme instantanément le champ d'onde selon :

$$\forall \vec{r}, \psi(\vec{r}, t_0^-) \rightarrow \psi(\vec{r}, t_0^+) = \psi^*(\vec{r}, t_0^-), \quad (4.64)$$

alors la fonction d'onde vérifie la même condition initiale que le champ retourné et est égal à ce dernier par unicité de la solution au problème de Cauchy :

$$\forall t > t_0, \psi(\vec{r}, t) = \psi_i^*(\vec{r}, 2t_0 - t), \quad (4.65)$$

où  $\psi_i$  est le champ d'onde initial, existant avant l'action du démon. Le champ d'onde est alors transformé en son retourné temporel. Notons par exemple que la densité de courant de probabilité  $\vec{j} = -i\hbar/2m [\psi^* \overrightarrow{\text{grad}}\psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}}\psi^*]$  est retourné par le démon :

$$\vec{j}(\vec{r}, t_0^+) = -\vec{j}(\vec{r}, t_0^-) \quad (4.66)$$

- Inapplicabilité du MTI : Néanmoins, il est clair que le concept du MTI ne peut pas être appliqué directement pour un tel champ d'onde pour plusieurs raisons simples :

- L'analyse reposant sur l'équation de l'oscillateur harmonique n'est pas applicable car l'équation de Schrödinger fait intervenir une dérivée d'ordre un en temps au lieu d'une dérivée d'ordre deux.
- De ce fait, les conditions initiales caractérisant la fonction d'onde sont données uniquement par la valeur du champ en tout point (et non par le champ et sa dérivée temporelle). Le principe d'un découplage instantané entre le champ et sa dérivée, qui permet de faire apparaître la superposition d'un champ copropagatif et d'un champ rétropropagatif pour les ondes classiques, n'a donc plus de sens pour cette équation d'onde.

*Effet d'un choc de potentiel :*

Pour modifier les propriétés de propagation de l'onde de matière à la manière du MTI pour les ondes classiques, le procédé le plus simple consiste à réaliser un choc de potentiel extérieur. Le hamiltonien du système peut alors être décrit par :

$$H(\vec{r}, t) = H_s(\vec{r}) + \tau\delta(t - t_c)V_c(\vec{r}), \quad (4.67)$$

où  $H_s$  est l'opérateur hamiltonien statique décrivant l'évolution normale du système et  $V_c$  est un potentiel extérieur supplémentaire allumé pendant un temps très court. Notons que ce type de procédé a déjà été utilisé dans la littérature : le potentiel extérieur est réalisé à l'aide d'un piège optique pour les atomes, qui peut être allumé très rapidement et pour un temps très court [58,64] ou par une impulsion de gradient de champ magnétique contrôlé par des bobines [91]. Un tel choc de potentiel, utilisé de façon répétée, est même l'ingrédient principal du "delta kicked rotor", qui a déjà été associé à un autre type de retournement temporel (voir section 2.1.1). La fonction d'onde est alors gouvernée par l'équation :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = H_s\psi(\vec{r}, t) + \tau\delta(t - t_c)V_c(\vec{r})\psi(\vec{r}, t), \quad (4.68)$$

qui est similaire à l'équation du MTI (4.6). Notons que le terme de source obtenu est, à l'instar des sources réelles d'Huygens-Fresnel du MTI, directement proportionnel au champ d'onde, car l'action d'un potentiel extérieur est décrit en mécanique quantique par un opérateur multiplicatif. Remarquons par ailleurs que cette équation n'est pas bien définie mathématiquement, car la fonction delta de Dirac induit une discontinuité temporelle de la fonction d'onde en  $t_c$ , ce qui implique en retour que l'équation fait intervenir le produit d'une distribution de Dirac et d'une fonction discontinue, qui est mal défini (voir annexe D). Cependant, il est possible de montrer, par intégration de l'équation (4.68) entre  $t_c^-$  et  $t_c^+$ , en négligeant le hamiltonien statique pendant la durée du choc, que ce dernier conduit à la relation de passage :

$$\psi(\vec{r}, t_c^+) = \psi(\vec{r}, t_c^-)e^{-i\frac{\tau V_c(\vec{r})}{\hbar}}. \quad (4.69)$$

On remarque que la norme de  $\psi$ , qui gouverne la mesure de la position de la particule, est continue à l'instant du choc.

Obtient-on comme pour les ondes classiques un retournement temporel ? L'action d'un choc de

potentiel réalise un retournement temporel instantané si :

$$\psi(\vec{r}, t_c^-) e^{-i \frac{\tau V_c(\vec{r})}{\hbar}} = \psi(\vec{r}, t_c^+) = \psi^*(\vec{r}, t_c^-), \quad (4.70)$$

ce qui est obtenu (si  $\psi$  est non nul) pour :

$$V_c(\vec{r}) = \frac{2\hbar}{\tau} \arg(\psi(\vec{r}, t_c^-)). \quad (4.71)$$

Ceci montre qu'un retournement temporel parfait par choc de potentiel est en général invisable, puisque le potentiel à appliquer suppose la connaissance a priori de la phase de la fonction d'onde à l'instant du choc (qui n'est pas mesurable). Notons néanmoins qu'un choc de potentiel est associé pour une particule libre, en supposant que le gradient du potentiel est constant à l'échelle de l'extension de la particule, à une variation instantanée de quantité de mouvement :

$$\psi(\vec{r}, t_c^+) = \psi(\vec{r}, t_c^-) e^{i\delta \vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (4.72)$$

avec  $\hbar \delta \vec{k} = -\overrightarrow{\tau \text{grad} V_c}$ . Ainsi, une conjugaison de phase est réalisable par ce procédé pour des particules monochromatiques  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i \frac{\hbar |\vec{k}|^2}{2m} t}$ . En choisissant le potentiel linéaire :

$$V_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{2\vec{k} \cdot \vec{r}}{\tau}, \quad (4.73)$$

on obtient :

$$\psi(\vec{r}, t_c^+) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} - i \frac{\hbar |\vec{k}|^2}{2m} t_c} = e^{i \frac{\hbar |\vec{k}|^2}{m} t_c} \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}, t_c^-). \quad (4.74)$$

Le coefficient multiplicatif est une constante, on obtient donc aux instants ultérieurs la fonction d'onde :

$$\forall t > t_c, \psi(\vec{r}, t) = e^{-i \frac{\hbar |\vec{k}|^2}{m} t_c} \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}, 2t_c - t), \quad (4.75)$$

qui correspond au retournement temporel instantané :  $|\psi(\vec{r}, t)| = |\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, 2t_c - t)|$ . D'autres configurations supposant une connaissance *a priori* de la fonction d'onde sont également envisageables pour obtenir un retournement temporel, comme la configuration du "refroidissement par coup delta" [64], dans laquelle les particules sont initialement confinées sur une région étroite de l'espace. Le piège est alors supprimé, conduisant à un vol libre des particules amenant les particules à se situer d'autant plus loin de leur point de départ qu'elles ont une vitesse élevée. Un choc de potentiel harmonique est alors effectué pour induire pour chaque particule une diminution de sa quantité de mouvement égale à sa quantité de mouvement avant le choc. Aux défauts inhérents à la réalisation d'un tel procédé près, chaque particule acquiert alors une vitesse nulle. Dans ce procédé, si l'on double l'intensité du potentiel utilisé, chaque particule passe instantanément d'une vitesse  $\vec{v}$  à une vitesse  $\vec{v} - 2\vec{v} = -\vec{v}$ , et on réalise alors l'opération de retournement temporel du démon de Loschmidt.

Ainsi, pour des champs d'ondes de matière, régies par l'équation de Schrödinger, une disruption instantanée des propriétés de propagation du milieu peut être obtenue dans des conditions très similaires à celles du MTI pour les ondes classiques mais avec des conséquences très différentes.

L'allumage pendant un instant très court d'un potentiel extérieur intense, modélisable par une fonction delta de Dirac, peut-être interprété comme un terme source instantané proportionnel au champ initial, ajouté à l'équation de Schrödinger, de façon tout à fait similaire aux sources secondaires réelles pour les ondes classiques soumises à un MTI. Cependant, il ne conduit pas en général à un retournement temporel instantané, ce qui est dû à la structure de l'équation de Schrödinger (d'ordre un en temps). Le retournement temporel par MTI constitue donc un phénomène ondulatoire caractéristique qui n'est pas obtenu pour des fonctions d'onde de particules régies par l'équation de Schrödinger, et met ainsi en évidence une certaine limite au caractère ondulatoire de ces particules quantiques. Dans certains cas particuliers, comme celui de paquets d'ondes libres étroits spectralement, un retournement temporel monochromatique (conjugaison de phase) peut néanmoins être obtenu grâce à un choc de potentiel bien adapté.

Cette section a permis d'explorer le champ d'application du concept du MTI pour les ondes. Nous avons tout d'abord introduit une catégorie d'équations, caractérisées par une écriture commune sous forme d'équation de l'oscillateur harmonique dans l'espace de Fourier spatial, pour laquelle le concept du MTI s'applique de la même manière que pour les ondes gouvernées par l'équation de d'Alembert. Le cas particulier des ondes de surface, utilisées dans nos expériences, a été explicité et permet de retrouver nos résultats expérimentaux. Nous avons ensuite montré qu'une faible dose de dissipation n'affectait que peu le mécanisme du MTI, mais introduisait un facteur d'atténuation d'amplitude pouvant dépendre du vecteur d'onde et déformer le spectre de l'onde retournée au cours de sa rétropropagation. Ainsi, pour les ondes de surface, la dissipation se traduit dans une expérience de MTI, comme pour une propagation libre, par un filtrage des hautes fréquences. En revanche, la présence d'une non linéarité prohibe l'utilisation du concept du MTI, qui repose sur le principe de superposition. Un choc de potentiel ne conduit pas non plus à un retournement temporel instantané pour une fonction d'onde gouvernée par une équation de Schrödinger, montrant ainsi une nouvelle limite du caractère ondulatoire de ces particules quantiques. Dans la suite de cette partie nous étudierons d'autres développements théoriques pouvant être déduits du concept du MTI, dans le cadre général du retournement temporel.

### 4.3 Perspectives : au-delà du simple choc de célérité

Est-il possible d'aller plus loin que le miroir temporel instantané avec les outils introduits pour le développer ? Dans cette section, nous présentons des développements théoriques associés à des améliorations ou des extensions du concept du MTI, en tirant parti des résultats présentés dans les sections précédentes. Nous présenterons une variante du MTI où un choc est réalisé par couplage à une autre onde plutôt que par une modulation de la célérité, puis une autre variante, associée à un "choc de dissipation".

#### 4.3.1 Couplage instantané à une autre onde : Choc de pression de radiation

Pour les ondes de surface, la réalisation du MTI nécessite l'utilisation d'un pot vibrant puissant pour accélérer fortement le bain de liquide (à plus de dix fois l'accélération de pesanteur). Cependant, comme nous l'avons montré aux sections précédentes, le fonctionnement du MTI n'est pas nécessairement associé à un phénomène gravitaire et d'autres types de disruption des propriétés du milieu peuvent être envisagés. Nous présentons ici un tel choc alternatif, provoqué par allumage puis extinction rapide d'une force de pression de radiation ultrasonore. Une force de pression de radiation peut être aisément obtenue en pratique à l'aide d'un transducteur ultrasonore placé au fond d'un bain d'eau [92], elle s'exerce alors sur la surface eau-air, entièrement réfléchissante pour les ultrasons. Ici, le transducteur utilisé doit être plan et de grande taille pour induire un choc de pression de radiation *homogène* sur toute la portion de la surface du bain dans laquelle se situe le champ d'onde à retourner.

#### Établissement des équations des ondes de surface en présence d'un choc de pression de radiation.

On suppose le liquide non visqueux et incompressible. Cette dernière hypothèse, peut paraître absurde, puisque des ondes acoustiques de compression s'y propagent. Mais on suppose ici que tous les effets acoustiques liés à la compressibilité ont lieu sur des échelles de temps beaucoup plus petites que les ondes de surface. Ils sont modélisés et pris en compte par la pression de radiation exercée à l'interface eau-air. L'équilibre des contraintes normales à l'interface eau-air (B.4) est alors modifiée en :

$$p(x, y, \zeta(x, y, t), t) + \gamma \operatorname{div} \left( \overrightarrow{n(x, y, t)} \right) + P_{rad}(\zeta(x, y, t), t) = P_0, \quad (4.76)$$

où  $P_{rad}$  est la pression de radiation. Dans nos expériences, l'amplitude typique d'une onde est la dizaine de micromètres, très faible devant la longueur d'onde acoustique (de l'ordre du centimètre pour des transducteurs usuels fonctionnant à la centaine de kilohertz). La pression de radiation peut donc être approximée par un développement limité à l'ordre un en l'élévation de surface par rapport au repos :

$$P_{rad}(x, y, z = \zeta(x, y, t), t) \approx P_{rad}(x, y, z = 0, t) + \zeta(x, y, t) \frac{\partial P_{rad}}{\partial z}(x, y, z = 0, t). \quad (4.77)$$

Pour un choc homogène de pression de radiation, on suppose que  $P_{rad}$  peut être modélisé par une fonction delta de Dirac :

$$P_{rad}(x, y, z = \zeta(x, y, t), t) = \tau \delta(t - t_{MTI}) P_m(z = \zeta(x, y, t)), \quad (4.78)$$

En exprimant la loi de Bernoulli, la condition de conservation du volume (voir annexe B), et en utilisant l'équilibre des contraintes normales (4.76), on obtient en régime de forte profondeur :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + \frac{k P_m(0) \tau \delta(t - t_{\text{MTI}}) \delta(\vec{k})}{\rho} + \left[ \left( gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) + \frac{k}{\rho} \frac{dP_m}{dz}(0) \tau \delta(t - t_{\text{MTI}}) \right] \tilde{\zeta}(\vec{k}, t) = 0. \quad (4.79)$$

Ainsi, exactement comme pour un MTI induit par choc de gravité, l'effet du MTI induit par pression de radiation peut être modélisé par un terme de source instantanée :

$$s(k_x, k_y, t) = -\frac{k\tau}{\rho} \delta(t - t_{\text{MTI}}) \left( \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) \frac{dP_m}{dz}(0) + P_m(0) \delta(\vec{k}) \right). \quad (4.80)$$

Cette source instantanée se décompose en deux termes : l'un est un terme proportionnel au champ similaire à la source obtenue pour un choc de gravité, l'autre en revanche, est un terme indépendant du champ. Le système étant linéaire, la solution s'écrit comme une superposition des solutions des équations prises avec chacune des deux composantes du terme source séparément.

À l'aide de la fonction de Green de l'oscillateur harmonique (voir annexe A.4), on peut comme précédemment calculer dans l'espace de Fourier spatial les composantes du champ d'onde généré par ces termes sources. Le terme de source indépendant du champ conduit ainsi à la composante  $\tilde{\zeta}_{i,s}$  du champ d'onde donnée par :

$$\tilde{\zeta}_{i,s} = \frac{k\tau P_m(0)}{\rho\omega(k)} \delta(\vec{k}) \theta(t - t_{\text{MTI}}) \sin(\omega(k)(t - t_{\text{MTI}})), \quad (4.81)$$

qui donne par transformée de Fourier inverse dans l'espace réel :  $\zeta_{i,s} = 0$ . Le terme de source instantanée indépendante du champ n'a donc pas d'influence sur les ondes de surfaces. Le terme source proportionnel au champ est quant à lui exactement analogue au terme source obtenu par choc de gravité, avec la correspondance :

$$Vk \leftrightarrow \frac{k\tau}{\rho} \frac{dP_m}{dz}(0), \quad (4.82)$$

L'expression du champ d'onde est donc identique à celle du choc de gravité en appliquant cette correspondance. Ainsi, dans le régime où  $k/\omega_0^2(k)$  est constant, on obtient donc directement, en remplaçant  $V$  par  $(\tau/\rho)dP_m/dz$  dans les équations du MTI gravitaire (4.41) et (4.43), l'expression dans l'espace réel :

$$\zeta(\vec{r}', t) \approx \zeta_i(\vec{r}', t) - \frac{\tau k}{\rho\omega_0^2(k)} \frac{dP_m}{dz} \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}(\vec{r}', t) - \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}(\vec{r}', 2t_{\text{MTI}} - t) \right). \quad (4.83)$$

### Ordres de grandeur

Donnons quelques ordres de grandeur sur la réalisation d'un choc de pression de radiation. La fréquence de l'onde ultrasonore pour des transducteurs commerciaux usuels (typiquement 100 kHz - 1 MHz) est très supérieure à celles des ondes de surface. Il est donc possible d'imposer une durée  $\delta t$  de l'émission vérifiant :

$$T_{ac} \ll \delta t \ll T_s, \quad (4.84)$$

où  $T_{ac}$  est la période de l'onde acoustique générée depuis le transducteur et  $T_s$  est la période caractéristique des ondes à la surface du liquide. Dans ces conditions, si la profondeur d'eau

au-dessus du transducteur est de l'ordre de la longueur d'onde acoustique (centimétrique) ou inférieure, une onde acoustique stationnaire s'établit entre la surface de l'eau (réfléchissante aux ondes acoustiques) et celle du transducteur, issue des multiples réflexions des ondes sonores émises à ces deux interfaces :

$$p_i(z, t) = p_{i,0} \cos(\omega_{ac}t) \sin(k_{ac}z + \phi_0). \quad (4.85)$$

L'élévation de surface typique d'une expérience de MTI (de l'ordre de la dizaine de microns) est bien inférieure à la longueur d'onde acoustique d'un transducteur ultrasonore (de l'ordre du millimètre au centimètre), ce qui justifie de négliger l'influence des ondes de surface sur les réflexions de l'onde acoustique. On peut donc supposer que l'onde acoustique reste plane indépendamment des ondes de surfaces, au-dessus du transducteur. Notons que ce terme de pression acoustique n'apparaît pas directement dans les équations des ondes de surface. En effet, il gouverne la dynamique aux échelles de temps très courtes devant celles des ondes de surface et intervient sous la forme d'une force de pression moyenne, donnée par la pression de radiation, d'expression [92] :

$$P_m(z) = \frac{2 \langle p_i^2 \rangle (z)}{\rho c^2} = \frac{p_{i,0}^2 \sin^2(k_{ac}z + \phi_0)}{\rho c^2}. \quad (4.86)$$

Un ordre de grandeur de la pression acoustique obtenue par un transducteur commercial vaut  $p \sim 5 \cdot 10^5$  Pa [92], ce qui donne un ordre de grandeur pour la pression de radiation :

$$P_m \sim \frac{p^2}{\rho c^2} \sim \frac{(5 \cdot 10^5)^2}{10^3 \cdot (1,5 \cdot 10^3)^2} Pa \sim 10^2 Pa. \quad (4.87)$$

On obtient ainsi un ordre de grandeur du choc d'accélération de la cuve équivalent, atteignable par le système de pression de radiation :

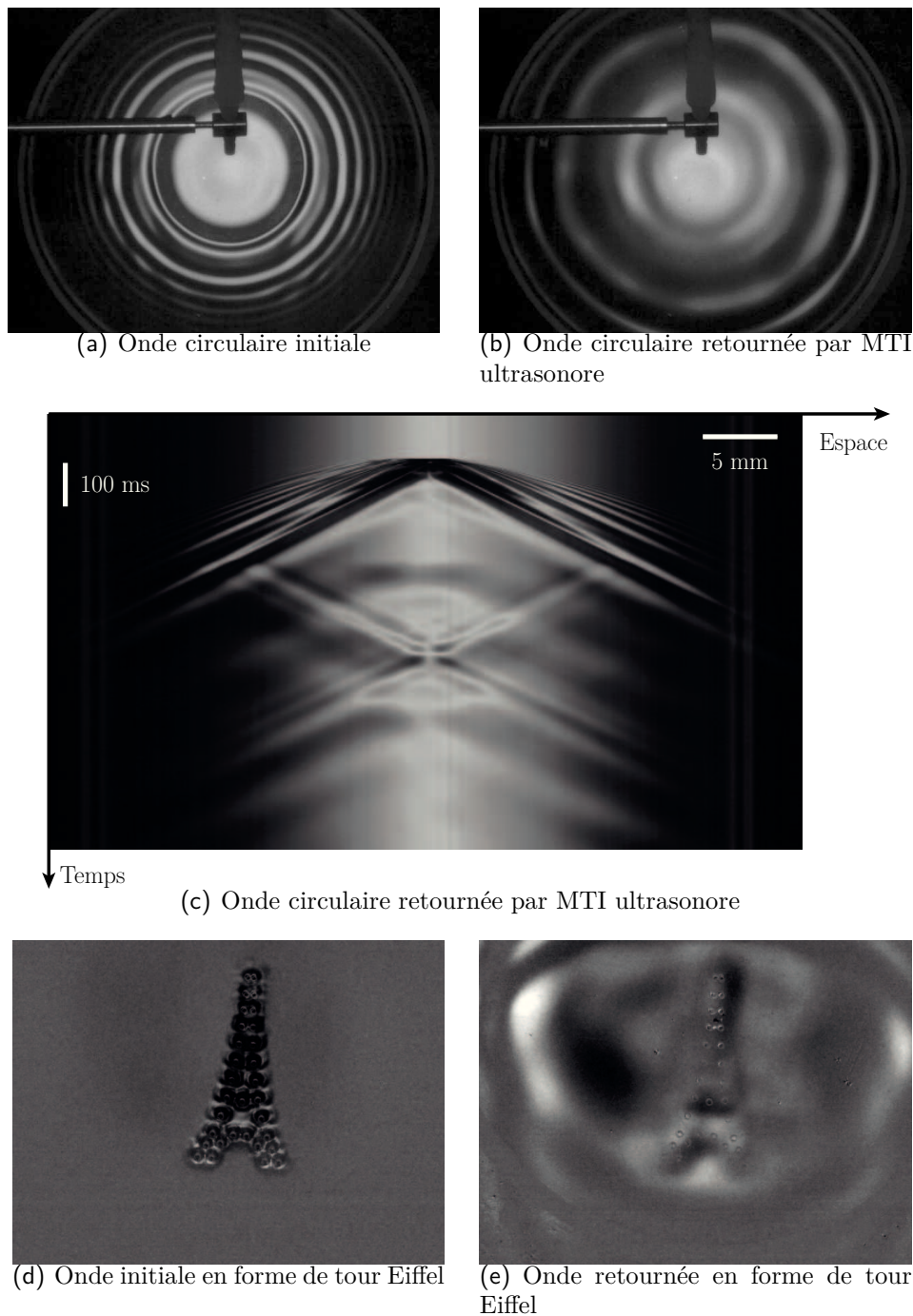
$$a_m \sim \frac{P_m}{\rho \lambda_{ac}} \sim \frac{10^2}{10^3 10^{-2}} \text{ m.s}^{-2} \sim g \quad (4.88)$$

Ainsi, on obtient bien un choc de gravité équivalent de l'ordre de  $g$ , à partir duquel les effets du MTI sont perceptibles. Un ordre de grandeur peut de plus être gagné en réduisant la longueur d'onde acoustique à autres paramètres constants.

### Premiers résultats expérimentaux

Nous utilisons un transducteur plan de 4,5 cm de diamètre, constitué de 7 éléments piézoélectriques sous-jacents. Il est soumis, pendant 15 ms, à un signal d'entrée d'amplitude environ 1000 V et de 40 kHz. L'effet du choc acoustique obtenu est montré à la figure 4.8.

La photographie montre 4.8(a) une onde circulaire initiale, de forte amplitude, émise par une impulsion du dispositif souffleur. Le cercle extérieur visible sur l'image correspond à la frontière du transducteur ultrasonore, placé au fond de l'eau. Pour une meilleure visualisation, l'impulsion du souffleur est forte, ce qui permet de générer une onde de forte amplitude. Cela génère cependant des défauts par rapport au paquet d'onde impulsionnel circulaire utilisé dans les expériences de la partie 3 : le paquet d'onde est complexifié et élargi par le fait que le jet d'air dure ici pendant environ 30 ms et son orientation de biais, utilisée pour pouvoir observer du dessus le point d'émission, induit de légers défauts à la circularité visibles sur cette image du champ d'onde, prise environ 79 ms avant le début du choc de pression de radiation. La photographie 4.8(b) montre le champ d'onde environ 79 ms après le choc. Une onde divergente et une onde convergente, de plus petit rayon y sont visibles. Les courtes longueurs d'onde ont disparu de l'onde retournée, ce qui peut



**Figure 4.8** – MTI par choc de couplage à une onde acoustique.

être expliqué par la durée du choc (15 ms), plus longue que pour le choc de gravité, et qui a été choisie pour maximiser l'amplitude de l'onde retournée. Des déformations parasites de la surface de l'eau sont également visibles, qui correspondent aux ondes émises aux frontières des 7 éléments du transducteur. Ces dernières sont également visibles, à partir de l'instant du début du choc de pression de radiation, sur le kymogramme 4.8(b) de l'expérience. Les deux faisceaux convergents (puis redivergents), correspondant à l'onde retournée y sont malgré tout clairement visibles. Comme pour le choc de gravité, l'expérience a été répétée avec un dispositif souffleur émettant un motif en forme de tour Eiffel (voir l'image 4.8(d) du champ d'onde, pour laquelle l'arrière-plan a été soustrait). La figure 4.8(e) montre le motif reformé par l'onde retournée obtenue, à l'instant de refocalisation. La qualité du retournement temporel que nous avons obtenue avec ce dispositif est moindre que pour celle que nous avons obtenue avec un choc de gravité (du fait des émissions



parasites, de la faiblesse de l'amplitude de l'onde retournée et du filtrage des hautes fréquences). Néanmoins, ces expériences valident le concept du choc de pression de radiation, utilisé de façon alternative au choc de gravité pour réaliser un MTI.

Ainsi, le choc de gravité utilisé dans nos expériences peut être remplacé par un choc de pression de radiation homogène. Ce procédé repose sur le couplage entre une onde acoustique (stationnaire) et des ondes de surface beaucoup plus lentes. Il illustre le fait que le mécanisme du MTI n'est pas lié à un effet purement gravitaire, mais repose plutôt sur le fait d'induire un choc intense et bref à l'origine d'une disruption des propriétés de propagation du milieu, quelque soit sa nature exacte. Évoquons par ailleurs le fait que l'utilisation d'un choc de pression de radiation ouvre de nombreuses nouvelles perspectives d'études. En effet, à l'aide d'un transducteur multiéléments commercial, il est envisageable de façonner non seulement temporellement mais également spatialement l'onde de pression acoustique émise et donc la pression de radiation, permettant ainsi d'ouvrir l'étude de "miroirs spatio-temporels" pour lesquels les sources secondaires équivalentes ne seraient pas nécessairement toutes simultanées.

### 4.3.2 Choc de dissipation

Le choc de pression de radiation constitue donc une alternative équivalente au choc de gravité pour réaliser un MTI. De ce fait, il en partage les caractéristiques principales. Comme nous l'avons vu à la section 4.1, la principale limitation au retournement temporel est induite par l'ordre de dérivation supplémentaire de l'onde retournée. Évoquons ici un schéma théorique général permettant de corriger ce défaut, en remplaçant le choc du MTI par un choc de dissipation. Nous montrerons dans un premier temps l'intérêt du concept avant de discuter ensuite de sa faisabilité pour différents systèmes.

#### Retournement temporel du champ sans ordre de dérivation supplémentaire

Considérons un champ d'onde  $\phi$  régi par une équation de la classe  $\mathcal{H}$  lors de sa propagation libre et supposons que l'on puisse contrôler temporellement un paramètre de dissipation. Dans l'espace de Fourier spatial :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + f(t)\alpha(\vec{k})\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t) + \omega^2(\vec{k})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0, \quad (4.89)$$

où  $f(t)$  gouverne l'amplitude du coefficient de dissipation au cours du temps. Un choc de dissipation, modélisable par une fonction delta de Dirac  $f(t) = \tau\delta(t - t_{\text{MTI}})$ , conduit à une équation similaire à celle du MTI :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + \omega^2(\vec{k})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = -\tau\delta(t - t_{\text{MTI}})\alpha(\vec{k})\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t). \quad (4.90)$$

Comme pour le choc de potentiel pour des ondes de matière gouvernées par l'équation de Schrödinger, cette écriture pose un problème de définition car elle fait intervenir le produit d'une distribution de Dirac par une fonction discontinue (voir annexe D). Pour lever l'ambiguïté, on néglige le terme proportionnel à  $\tilde{\phi}$  sur un intervalle de temps correspondant à la durée du choc, pour obtenir la relation approchée :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_{\text{MTI}}^+) \approx \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_{\text{MTI}}^-)e^{-\tau\alpha(\vec{k})}. \quad (4.91)$$

Cette relation de passage, combinée à la continuité du champ, conduit directement, pour  $t > t_{\text{MTI}}$ , à :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \frac{1 + e^{-\alpha(\vec{k})\tau}}{2} \tilde{\phi}_i(\vec{k}, t) + \frac{1 - e^{-\alpha(\vec{k})\tau}}{2} \tilde{\phi}_i(\vec{k}, 2t_{\text{MTI}} - t). \quad (4.92)$$

À la déformation introduite par la dépendance en  $\vec{k}$  du coefficient de dissipation près, on obtient la même relation dans l'espace réel, et donc un champ retourné temporellement, sans ordre de dérivation supplémentaire. Notons que  $\tau$  peut-être assimilé à la durée du choc. De façon conforme à l'intuition, l'effet est d'autant plus marqué que la durée du choc  $\tau$  est grande, devant le temps de dissipation  $\alpha(\vec{k})^{-1}$ . Notons qu'un milieu amplificateur associé à une dissipation négative contrôlable permettrait, d'après l'équation (4.92), d'obtenir également la superposition d'une onde initiale et d'une onde retournée, toutes deux amplifiées. Indépendamment du signe du coefficient de dissipation, le calcul général présenté ici ne reste cependant valable que pour un choc instantané, vérifiant :

$$\tau \ll \omega_0(\vec{k})^{-1} \quad (4.93)$$

### Dissipation maximale et refroidissement de Loschmidt

L'amplitude de l'onde retournée attendue croît avec l'amplitude de dissipation pendant le choc. Ainsi, la réalisation optimale est obtenue dans une limite de très forte dissipation  $\alpha(\vec{k})\tau \rightarrow +\infty$ , pour laquelle on obtient :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_i(\vec{k}, t) + \frac{1}{2} \tilde{\phi}_i(\vec{k}, 2t_{\text{MTI}} - t). \quad (4.94)$$

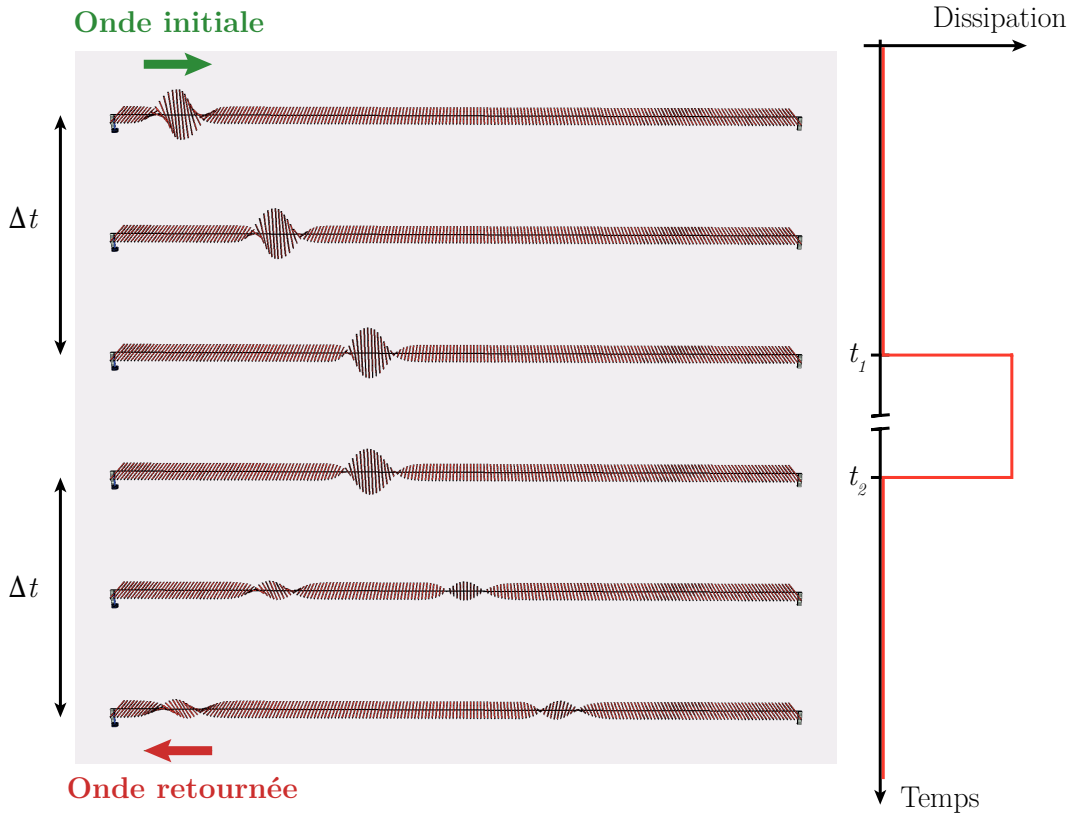
Si la condition est vérifiée pour tous les vecteurs d'onde de l'onde initiale, on obtient le même résultat directement dans l'espace réel :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \phi_i(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \phi_i(\vec{r}, 2t_{\text{MTI}} - t), \quad (4.95)$$

Ce résultat limite est obtenu si le temps de dissipation est très court devant la durée du choc  $\alpha(\vec{k})^{-1} \ll \tau$ . Notons qu'on peut montrer (voir l'annexe E), que, dans ce cas, la condition d'instantanéité du choc n'est plus nécessaire ( $\tau$  peut être arbitrairement grand devant  $\omega_0(\vec{k})^{-1}$ ), pourvu que le temps de dissipation soit également très court devant la période de l'onde considérée :  $\alpha(\vec{k})^{-1} \ll \omega_0(\vec{k})^{-1}$ . La dissipation très forte pendant le choc ne détruit pas l'onde initiale, car celle-ci ne se propage plus sous son effet, mais uniquement sa dérivée temporelle.

Pour illustrer ce résultat, nous présentons ici une simulation sur un système modèle simple : la chaîne de pendules couplés ("échelle de perroquet"). Elle est constituée de barres massives placées le long d'un axe de rotation horizontal, voir figure 4.9. La rotation est supposée libre et (initialement) sans frottement, mais un couple de rappel relie chaque barre à la suivante. Le champ d'onde, unidimensionnel, considéré ici correspond donc, en chaque point, à l'angle (algébrique) que fait la barre située en ce point avec l'horizontale. Nous utilisons une simulation simple développée pour l'enseignement [93].

La procédure est la suivante : un mouvement est imposé au pendule à une extrémité pour générer une impulsion. Cette dernière se propage librement, jusqu'à un instant  $t_1$  où, instantanément, le coefficient de dissipation est porté de 0 à une valeur très élevée. On observe alors que le champ d'onde ne se propage plus mais qu'il décroît en amplitude légèrement avec le temps. À l'instant  $t_1$  ultérieur, on repasse le coefficient de dissipation à 0. La durée pendant laquelle le système est soumis à une forte dissipation n'a pas besoin d'être courte. Dans la figure 4.9,  $t_1 - t_2 = 3,9\Delta t$ .



**Figure 4.9** – Évolution d'une onde impulsionnelle sur une échelle de perroquet, soumise à une forte dissipation entre  $t_1$  et  $t_2$ .

À partir de l'instant  $t_1$ , on observe que le champ d'onde se sépare en deux impulsions identiques mais contrapropagatives et d'amplitudes égales à la moitié de l'amplitude initiale : on a réalisé par le contrôle de la dissipation un refroidissement de Loschmidt. Le champ obtenu vérifie :

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2}\phi_i(x, t) + \frac{1}{2}\phi_i(x, t_1 + t_2 - t), \quad (4.96)$$

où  $\phi_i$  est l'onde initiale non perturbée.

Cette procédure pourrait être envisagée sur les ondes de surface. En effet, il est bien connu que les propriétés rhéologiques d'un liquide peuvent être modifiées par l'introduction de petites particules solides en suspension [94], sensibles au champ électrique [95, 96] ou magnétique [97]. Le modèle présenté ici n'est pas applicable pour un tel système, car les ondes de surface dans un liquide fortement dissipatif ne sont plus décrites par une équation du type oscillateur harmonique amorti, *a fortiori* dans un liquide magnétorhéologique ou électrorhéologique, en général non newtonien. Toutefois, si l'action effectuée est équivalente à une solidification instantanée du liquide, le résultat du refroidissement de Loschmidt reste attendu. Le choc de dissipation constitue donc un développement théorique intéressant dans le contexte du MTI car il permet de supprimer sa principale limitation, l'ordre de dérivation supplémentaire. Il réalise une opération très similaire à l'expérience de pensée du refroidissement de Loschmidt. Comme pour le MTI par choc de célérité, il est applicable *a priori* à tout type d'onde classique, à condition d'être capable de moduler temporellement la dissipation sur l'ensemble du milieu.

Dans cette section, nous avons présenté des extensions du principe du MTI pour les ondes de surface et pour d'autres types d'ondes. Le choc de pression de radiation montre que le MTI peut être réalisé par un couplage sur un temps très court avec une autre onde (ici une onde acoustique

stationnaire). Le choc de dissipation constitue une approche théorique permettant d'obtenir un terme retourné sans dérivation supplémentaire.

Au cours de cette partie, nous avons développé le concept du MTI, en en caractérisant les ingrédients essentiels, pour tout d'abord le généraliser à d'autres systèmes que ceux régis par l'équation de d'Alembert, puis pour en tirer des approches similaires (choc de couplage à une autre onde, choc de dissipation) particulièrement intéressantes. Le principe du couplage à une autre onde participe déjà au fonctionnement d'un autre type de retournement temporel, la conjugaison de phase, utilisée pour réaliser un retournement temporel monochromatique en optique. Dans la partie suivante, nous allons étudier les similitudes entre les modifications instantanées des propriétés du milieu dans le MTI et une modulation du milieu continue et périodique, équivalente à la conjugaison de phase, pour établir des liens entre cette dernière et une version monofréquentielle du MTI.

---

Le MTI monofréquentiel : un miroir à conjugaison de phase de Faraday

---

**Table des matières**

---

5.1	La conjugaison de phase en optique . . . . .	<b>129</b>
5.1.1	Le miroir à conjugaison de phase : un retournement temporel monofréquentiel . . . . .	129
5.1.2	Le mélange à quatre ondes dégénérées comme miroir à conjugaison de phase . . . . .	130
	Couplage d'une onde signal à une onde retournée grâce aux ondes de pompe et à la non linéarité du milieu . . . . .	130
	Équivalence à une modulation périodique de l'indice de réfraction du milieu . . . . .	132
	Obtention d'un miroir à conjugaison de phase . . . . .	132
5.1.3	Un équivalent hydrodynamique : la modulation par la vibration du bain ?	133
5.2	Mise en évidence expérimentale de la conjugaison de phase d'ondes de surface	<b>137</b>
5.2.1	Réalisation d'un miroir à conjugaison de phase hydrodynamique . . . .	137
	Une zone de faible profondeur "non modulée" . . . . .	137
	Schéma expérimental du dispositif de conjugaison de phase hydrodynamique . . . . .	138
5.2.2	Observation d'une onde conjuguée en phase dans le petit bain . . . . .	140
	Observation du champ d'onde à l'intérieur du miroir à conjugaison de phase . . . . .	143
5.2.3	Construction d'une frontière temporelle plutôt que spatiale : un miroir temporel à conjugaison de phase . . . . .	144
	Schéma de l'expérience . . . . .	144
	Retournement et stationnarisation d'un paquet d'onde . . . . .	144
	Sélection fréquentielle de l'onde retournée . . . . .	146
5.3	Théorie du miroir à conjugaison de phase hydrodynamique . . . . .	<b>149</b>
5.3.1	Théorie standard des bains vibrés et de l'instabilité de Faraday . . . .	149
	L'instabilité de Faraday dans les bains vibrés . . . . .	149
	Équation de Mathieu . . . . .	149
	Langues d'instabilité . . . . .	150

---

	Couplage entre les fréquences, pour un vecteur d'onde donné . . . . .	152
5.3.2	Conjugaison de phase hydrodynamique dans l'approximation de faible vibration . . . . .	152
	Régime de faible vibration du bain . . . . .	152
	Méthode de l'expansion à deux variables . . . . .	153
	Génération de l'onde retournée . . . . .	155
5.3.3	Équivalence à l'approximation d'enveloppe temporelle lentement variable	156
5.3.4	Équivalence à l'approximation d'enveloppe spatiale lentement variable dans le cas de l'eau peu profonde . . . . .	158
5.4	Conjugaison de phase hydrodynamique, instabilité de Faraday et MTI . . . . .	<b>163</b>
5.4.1	Effet de la dissipation visqueuse : un seuil d'amplification . . . . .	163
	Une atténuation temporelle . . . . .	163
	"Stationnarisation" des ondes et seuil effectif d'amplification à la fréquence de Faraday . . . . .	164
	Comparaison avec l'expérience . . . . .	165
5.4.2	Miroir à conjugaison de phase hydrodynamique et instabilité de Faraday	167
	Conjugaison de phase et émergence d'une onde stationnaire . . . . .	168
	Seuil d'amplification, seuil d'instabilité . . . . .	168
	Le ralentissement critique et la mémoire des gouttes rebondissantes . .	169
5.4.3	Liens entre le miroir à conjugaison de phase de Faraday et le MTI . . .	171
	La conjugaison de phase hydrodynamique : un MTI monochromatique interférentiel . . . . .	171
	L'instabilité de Faraday comme une suite périodique de MTI . . . . .	173

---







Nous venons de développer avec le MTI une approche nouvelle pour générer le retourné temporel d'une onde, avec une large bande passante. Dans certains domaines de la physique des ondes, les ondes utilisées sont essentiellement monochromatiques. C'est le cas par exemple dans de nombreuses applications en optique. Le MTI reste bien-sûr applicable à ce type d'ondes. Cette partie montrera, cependant, que pour les ondes monochromatiques, il est également possible d'en appliquer une variante monofréquentielle. Ce MTI monofréquentiel, obtenu par une modulation temporelle périodique de la célérité du milieu, est étroitement lié à deux concepts bien connus de la physique des ondes, mais découverts dans des domaines séparés : la conjugaison de phase en optique et l'instabilité de Faraday en hydrodynamique. Nous commencerons dans une première section par présenter le principe de la conjugaison de phase et montrerons l'analogie avec une modulation temporelle périodique de la célérité du milieu, pouvant être réalisée, pour les ondes de surface, par vibration sinusoïdale du bain de liquide. Nous réaliserons expérimentalement cet équivalent hydrodynamique de la conjugaison de phase et en étudierons les caractéristiques dans la deuxième section. Dans la troisième section, nous donnerons une description théorique des phénomènes de conjugaison de phase hydrodynamique observés. La relation entre ces derniers et l'instabilité de Faraday, nom donné à la déstabilisation spontanée de la surface libre des bains vibrés, apparaîtra clairement au cours de cette étude. La quatrième section expliquera les liens entre le MTI, la conjugaison de phase en optique et en hydrodynamique et l'instabilité de Faraday.

## 5.1 La conjugaison de phase en optique

Dans cette section, nous présentons le fonctionnement des miroirs à conjugaison de phase utilisés en optique et détaillons en particulier le mécanisme de la technique de mélange à quatre ondes. Cela nous permettra de mettre en évidence le rôle des ondes de pompes et l'équivalence à une modulation temporelle de l'indice optique. Cette équivalence montrera la généralisation possible de cette approche à n'importe quel type d'onde et nous en déduirons un schéma de principe pour réaliser un miroir à conjugaison de phase hydrodynamique.

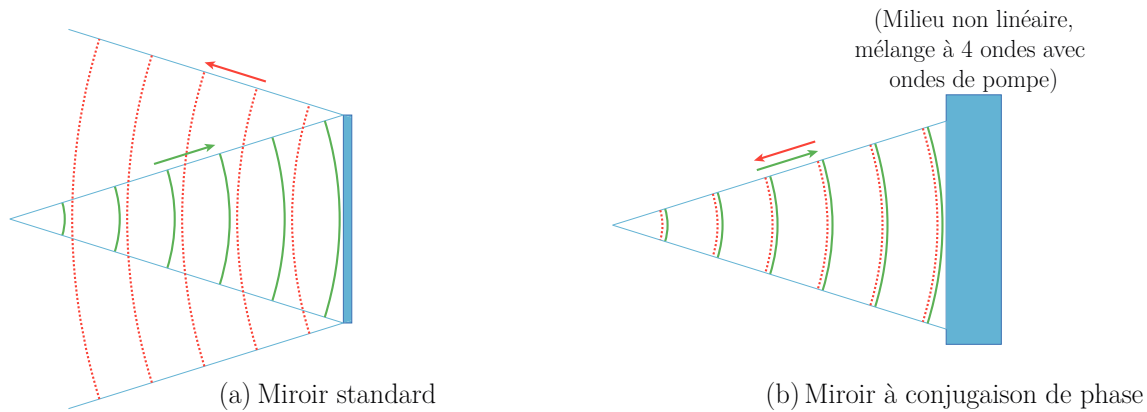
### 5.1.1 Le miroir à conjugaison de phase : un retournement temporel monofréquentiel

Pour une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ , le retournement temporel est de façon évidente équivalent à une transformation de  $\omega$  en  $-\omega$ . Rappelons qu'il est également équivalent à une "conjugaison de la phase" spatiale de l'onde. En effet, une onde monochromatique quelconque, s'écrit  $\phi(\vec{r}, t) = \text{Re} [A(\vec{r})e^{i\omega t}]$  et son retourné temporel est donné par :

$$\phi(\vec{r}, -t) = \text{Re} [A(\vec{r})e^{-i\omega t}] = \text{Re} [A(\vec{r})^*e^{i\omega t}]. \quad (5.1)$$

Dans le cas particulier d'une onde plane progressive,  $a\text{Re} [e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}]$ , le retournement temporel est donc équivalent à une transformation de  $\vec{k}$  en  $-\vec{k}$  et de  $\phi$  en  $-\phi$ . À la phase près, pour une telle onde, le retournement temporel peut être obtenu de façon triviale puisqu'il est identique à un retournement spatial, qui peut être obtenu par un miroir placé dans un plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ . Cependant, en dehors de cette configuration extrêmement simple (onde plane monochromatique et miroir perpendiculaire à son vecteur d'onde), une onde réfléchi sur un miroir standard et une onde conjuguée en phase sont très différentes. C'est le cas par exemple si le plan d'onde comporte un défaut de phase introduit par un aberrateur, qui est annulé au trajet retour pour une onde

conjuguée en phase tandis dès qu'il est amplifié pour une onde réfléchie sur un miroir (voir figure 3.19). C'est également le cas pour une onde circulaire telle que présentée à la figure 5.1. En optique, le retournement temporel est obtenu par un miroir à conjugaison de phase, qui est constitué par un milieu présentant un comportement non linéaire, rendu actif par l'envoi d'ondes de pompe. Le mélange de l'onde incidente avec une ou plusieurs ondes de pompe permet de générer dans ce milieu l'onde conjugquée en phase.



**Figure 5.1** – Schéma du miroir à conjugaison de phase. (a) Miroir standard, une onde divergente est réfléchie en une onde divergente de courbure opposée. (b) Miroir à conjugaison de phase, une onde monochromatique divergente est réfléchie en une onde convergente de même courbure, retournée temporelle de l'onde initiale.

La figure 5.1 (a) montre la réflexion sur un miroir standard : une onde initialement divergente est réfléchie en une onde divergente dont les courbes isophases ont au niveau du miroir une courbure opposée. La figure 5.1 (b) montre le schéma du miroir à conjugaison de phase. Une onde divergente pénètre dans le milieu actif, dans lequel une onde conjugquée en phase est générée. Celle-ci sort du milieu actif en étant convergente et de même courbure que l'onde initiale : c'est son retourné temporel. Il existe plusieurs procédés, reposant sur divers types de mélanges d'onde, pour réaliser un miroir à conjugaison de phase en optique [98–100], mais aussi en acoustique [10, 11, 101]. Dans la section suivante, nous détaillerons, dans le cas particulier de la technique de mélange à quatre ondes, l'obtention de l'onde conjugquée en phase, ce qui nous permettra de mettre en évidence un premier lien entre cette opération de retournement temporel et le MTI.

### 5.1.2 Le mélange à quatre ondes dégénérées comme miroir à conjugaison de phase

**Couplage d'une onde signal à une onde retournée grâce aux ondes de pompe et à la non linéarité du milieu**

Pour réaliser la conjugaison de phase par mélange à quatre ondes dégénérées, les opticiens tirent parti de milieux à polarisation non linéaire [98, 102]. Considérons ainsi un milieu que l'on peut décrire par une polarisation non linéaire d'ordre 3. Dans un tel milieu, l'équation de propagation du champ électrique  $\vec{E}$  s'écrit [100] :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (5.2)$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide,  $c_0$  est la célérité de la lumière dans le vide et  $\vec{P}$  est la polarisation non linéaire d'ordre 3 décrivant le milieu. Celle-ci est donnée par  $\vec{P} = 4\chi^{(3)} \vec{E}^3$ , où  $\chi^{(3)}$

est la susceptibilité d'ordre trois. On envoie dans le milieu deux ondes planes contrapropagatives  $\vec{E}_{p1}$  et  $\vec{E}_{p2}$  de même forte amplitude, dites ondes de pompes, on les note :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_{p1} = \vec{A}_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{p2} = \vec{A}_2 e^{i(\omega t + \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}, \end{cases} \quad (5.3)$$

avec  $\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = \vec{A}$ . On envoie également dans le milieu une onde plane "signal", de même fréquence que les ondes de pompe, mais de vecteur d'onde différent :

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_s = \vec{A}_s e^{i(\omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r})}. \quad (5.4)$$

Enfin, le processus non linéaire décrit par l'équation (5.2) va faire émerger un quatrième terme de champ électrique  $\vec{E}_c$ , dont nous allons montrer qu'il est le conjugué de phase de l'onde signal :

$$\vec{E}_4 = \vec{E}_c = \vec{A}_c e^{i(\omega_c t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})}. \quad (5.5)$$

Les ondes de pompe sont choisies d'amplitude élevée devant l'onde signal et l'onde conjuguée :  $|\vec{A}_3| \ll |\vec{A}|$  et  $|\vec{A}_4| \ll |\vec{A}|$ . Le champ électrique total est la somme de ces quatre ondes planes. Notons que ceci est nécessairement une approximation, sans quoi le champ total serait solution de l'équation de d'Alembert homogène et non de l'équation (5.2). Nous négligerons simplement ici toutes les autres composantes et décrirons les ondes signal et conjuguée à l'aide d'enveloppes spatiales lentement variables ( $\vec{A}_s(\vec{r})$ ,  $\vec{A}_c(\vec{r})$ ). Le terme de polarisation non linéaire s'écrit donc :

$$\vec{P} = 4\chi^{(3)} \vec{E}^3 = \frac{1}{2} \mu_0 \chi^{(3)} \sum_{(p,q,r) \in ([-4,4] \setminus \{0\})^3} \vec{A}_p \vec{A}_q \vec{A}_r e^{i(\omega_p + \omega_q + \omega_r)t + i(\vec{k}_p + \vec{k}_q + \vec{k}_r) \cdot \vec{r}}, \quad (5.6)$$

où on a utilisé les notations :  $\vec{A}_{-p} = \vec{A}_p$ ,  $\omega_{-p} = -\omega_p$  et  $\vec{k}_{-p} = -\vec{k}_p$ . En remplaçant l'expression de  $\vec{P}$  dans l'équation (5.2) et en utilisant le fait que les exponentielles forment une famille libre des fonctions, on obtient, pour chaque composante à un vecteur d'onde et une fréquence donnés, une équation propre. Ainsi, en négligeant les contenus spectraux introduits par les évolutions spatiales des amplitudes  $\vec{A}_s$  et  $\vec{A}_c$ , on obtient pour  $\vec{E}_c$ , que les composantes de la polarisation qui contribuent à son évolution vérifient la condition dite d'accord de phase suivante :

$$(p, q, r) \in ([-4, 4] \setminus \{0\})^3 \text{ tels que } \begin{cases} \omega_p + \omega_q + \omega_r = \omega_c \\ \vec{k}_p + \vec{k}_q + \vec{k}_r = \vec{k}_c. \end{cases} \quad (5.7)$$

Ici les ondes de pompe et signal sont supposées de même pulsation  $\omega$ . En supposant que c'est également le cas pour  $\vec{E}_c$ , on obtient bien, à partir de l'équation (5.2), une onde conjuguée en phase de vecteur d'onde  $\vec{k}_c = -\vec{k}_s$  gouvernée par l'équation :

$$\Delta \vec{E}_c - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_c}{\partial t^2} = -3\mu_0 \omega^2 \chi^{(3)} \left[ 2\vec{A}^2 \vec{A}_s^* + (2|\vec{A}|^2 + |\vec{A}_s|^2 + |\vec{A}_c|^2) \vec{A}_c \right] e^{i(\omega t + \vec{k}_s \cdot \vec{r})}, \quad (5.8)$$

Le même procédé peut être appliqué à la composante de vecteur d'onde  $k_s$  pour la composante  $\vec{E}_s$ . On aboutit ainsi aux équations couplées :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}_c - \frac{n_0^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_c}{\partial t^2} = -6\mu_0\omega^2\chi^{(3)} \vec{A}^2 e^{2i\omega t} \vec{E}_s^* \\ \Delta \vec{E}_s - \frac{n_0^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_s}{\partial t^2} = -6\mu_0\omega^2\chi^{(3)} \vec{A}^2 e^{2i\omega t} \vec{E}_c^* \end{cases} \quad (5.9)$$

où l'on a introduit un indice effectif  $n_0 = \sqrt{1 + 6\mu_0\chi^{(3)}|\vec{A}|^2}$ , pour lequel on a négligé les intensités des ondes signal et conjuguées devant celles des ondes de pompe.

### Équivalence à une modulation périodique de l'indice de réfraction du milieu

L'effet des ondes de pompe contrapropagatives et de la non linéarité du milieu est donc de coupler une onde signal de même fréquence à son conjugué en phase. Notons que dans ces équations couplées, les ondes de pompe n'interviennent plus que sous la forme d'un paramètre effectif de modulation du milieu, de sorte qu'un milieu linéaire sans ondes de pompes mais d'indice modulé temporellement, qui serait gouverné (pour le champ électrique total) par l'équation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_{\text{eff}}(t)^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.10)$$

où  $n_{\text{eff}}^2(t) = 1 + 6\mu_0\chi^{(3)}|\vec{A}|^2 - 12\mu_0\chi^{(3)}\vec{A}^2 \cos(2\omega t)$ , conduirait, en isolant comme précédemment les composantes de pulsation  $\omega$  et de vecteurs d'ondes respectifs  $\vec{k}_c$  et  $-\vec{k}_c$ , aux mêmes équations couplées (5.9). Ainsi, le couplage entre onde signal et onde conjuguée induit par les ondes de pompe et la linéarité d'ordre 3 du milieu est équivalent à celui qui serait obtenu par une modulation temporelle sinusoïdale de l'indice de réfraction. Nous avons détaillé ici le cas de la technique de conjugaison de phase par mélange à quatre ondes de même fréquence. Remarquons qu'une telle modulation effective du milieu est également retrouvée pour les autres techniques classiques de conjugaison de phase en optique [99, 100] ou en acoustique [10, 11, 101, 103].

C'est ce couplage qui permet la génération de l'onde retournée temporellement. Le champ  $\vec{E}_s$  se comporte comme un terme source pour le champ  $\vec{E}_c$  (et réciproquement). Si l'on envoie initialement dans le milieu l'onde  $\vec{E}_s$ , l'onde  $\vec{E}_c$  va ainsi être générée à travers ce couplage, et l'opération de conjugaison de phase est ainsi réalisée.

$$n^2(t) = 1 + 6\mu_0\chi^{(3)}|\vec{A}|^2 - 6\mu_0\chi^{(3)}\vec{A}^2 e^{2i\omega t}. \quad (5.11)$$

### Obtention d'un miroir à conjugaison de phase

Pour simplifier l'écriture, on choisit la coordonnée  $z$  dans la direction de la propagation de l'onde de sonde, qu'on suppose plane en entrée du milieu non linéaire. Ici intervient une deuxième hypothèse simplificatrice importante : on suppose qu'on peut décrire l'onde de sonde et l'onde créée par des ondes planes modulées par des amplitudes lentement variables  $\vec{A}_s(z)$  et  $\vec{A}_c(z)$  :

$$i \in \{3, 4\}, \quad \left| \frac{\partial^2 \vec{A}_i}{\partial z^2} \right| \ll \left| \vec{k}_s \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial z} \right|. \quad (5.12)$$

Moyennant ces hypothèses, les équations (5.9) conduisent aux équations d'amplitudes couplées suivantes :

$$\begin{cases} 2ik_s \frac{\partial \vec{A}_c}{\partial z} = -6\mu_0\omega^2 \chi^{(3)} \vec{A}^2 \vec{A}_s^* \\ 2ik_s \frac{\partial \vec{A}_s}{\partial z} = 6\mu_0\omega^2 \chi^{(3)} \vec{A}^2 \vec{A}_c^* \end{cases} \quad (5.13)$$

En pratique, le dispositif du miroir à conjugaison de phase est celui schématisé par la figure 5.1 (b) : l'onde de sonde envoyée en entrée du milieu non linéaire interagit avec les ondes de pompes pour créer l'onde conjuguée au cours de sa propagation. Cette dernière se propage en sens inverse. À la sortie du milieu non linéaire (fini), il n'y a plus de création de l'onde conjuguée, donc l'amplitude de cette dernière y tombe à zéro (en régime permanent). On suppose donc les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \vec{A}_s(0) = \vec{A}_0 \\ \vec{A}_c(L) = \vec{0} \end{cases} \quad (5.14)$$

où  $z = 0$  désigne l'entrée du milieu non linéaire dans lequel l'onde de sonde est envoyé et  $z = L$  désigne son autre extrémité (sortie). Dans ces conditions, on obtient explicitement les solutions sinusoidales du système (5.13) :

$$\begin{cases} \vec{A}_s(z) = \frac{\vec{A}_0 \cos(K(z-L))}{\cos(KL)} \\ \vec{A}_c(z) = i \frac{\vec{A}_0^* \sin(K(z-L))}{\cos(KL)} \\ K = \frac{3\mu_0\omega^2 \chi^{(3)} \vec{A}^2}{k_s} \end{cases} \quad (5.15)$$

Notamment, en  $z=0$ , il ressort du milieu non linéaire une onde conjuguée en phase donnée par :

$$\vec{E}_c = -i \vec{A}_0^* \tan(KL) e^{i(\omega t + k_s z)}. \quad (5.16)$$

Cette onde est bien proportionnelle au conjugué de phase de l'onde de sonde. Le coefficient de proportionnalité est imaginaire pur : l'onde (monochromatique) retournée temporellement par conjugaison de phase est donc déphasée de  $\pi/2$  par rapport à l'onde initiale (sonde). Notons ici l'analogie avec le déphasage de  $\pi/2$  attendu par retournement temporel instantané par MTI.

Nous venons de détailler le mécanisme de la conjugaison de phase par mélange à quatre ondes en optique non linéaire. Ce formalisme nous servira de modèle pour développer un concept général de conjugaison de phase par modulation temporelle périodique du milieu et en particulier une approche de conjugaison de phase pour les ondes à la surface d'un liquide.

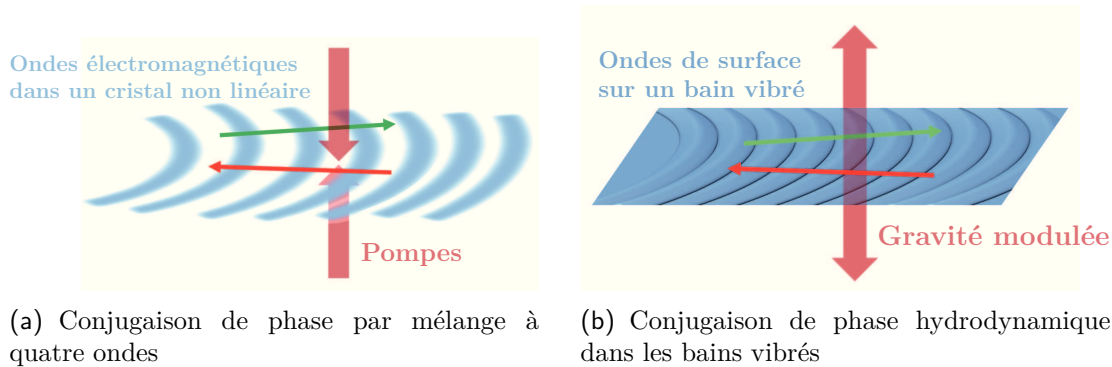
### 5.1.3 Un équivalent hydrodynamique : la modulation par la vibration du bain ?

Existe-t-il un équivalent pour la conjugaison de phase d'ondes à la surface d'un liquide ? Pour ce type d'ondes, une manière simple de moduler le milieu est de mettre en vibration l'ensemble du bain de liquide à l'aide d'un pot vibrant (c.f. montage figure 3.1). Dans le référentiel du bain (en mouvement vertical oscillant), la force d'inertie d'entraînement s'ajoute à la gravité. La situation est donc équivalente à des ondes de surface dans un champ de gravité effectif oscillant :

$g_{\text{eff}}(t) = g + a_0 \cos(2\Omega t)$ . Rappelons que la célérité des ondes de surface est proportionnelle à la racine carrée de la gravité, on obtient donc une modulation temporelle de la célérité effective des ondes de surface :

$$c(k, t)^2 = \frac{g_{\text{eff}}(t)}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k. \quad (5.17)$$

Cette modulation du milieu est analogue à l'action équivalente des ondes de pompe en optique sur l'indice de réfraction, que nous avons mise en avant à la section 5.1.2, à partir de la description théorique du mélange à quatre ondes. Un schéma de principe de l'analogie est présenté à la figure 5.2.



**Figure 5.2** – Schéma de concept de la conjugaison de phase. (a) En optique, une onde divergente (flèche fine verte) soumise à une modulation du milieu par deux ondes de pompes intenses (flèches marron larges). Par un mécanisme de mélange à quatre ondes, une onde convergente, conjuguée en phase, est générée (flèche fine rouge). (b) Équivalent hydrodynamique : Une onde de surface (flèche fine verte) est soumise à une modulation du milieu (oscillation de la gravité effective, symbolisée par la double-flèche large marron, dans le référentiel du bain en vibration). Comme en optique, l'effet attendu de cette modulation est la génération d'une onde contrapropagative, conjuguée en phase (flèche fine rouge).

La figure 5.2 (a) présente le principe de la conjugaison de phase (par mélange à quatre ondes) en optique. Une onde signal  $\vec{E}_s$  (divergente) à la pulsation  $\omega$  (flèche fine verte) est envoyée dans un milieu non linéaire. En même temps sont envoyées dans le milieu deux ondes de pompes intenses  $\vec{E}_{p1}$  et  $\vec{E}_{p2}$ , contrapropagatives, de même pulsation  $\omega$  (flèches larges marron), dont l'action peut-être décrite comme celle d'une modulation du milieu à la pulsation double  $2\omega$  (voir la section précédente). Sous l'effet de cette modulation, une onde rétropropagative, convergente et de même courbure,  $\vec{E}_c$  (flèche fine rouge), conjuguée en phase de  $\vec{E}_s$ , est générée à partir  $\vec{E}_s$ . La figure 5.2 (b) présente la situation analogue attendue dans le cas des ondes de surfaces en hydrodynamique. Une onde signal  $\zeta_s$  divergente, à la pulsation  $\omega$  (flèche fine verte) est envoyée sur un bain vibré, où la gravité effective est modulée temporellement, à la pulsation double  $2\omega$  (double flèche large marron). Comme dans le cas optique, on attend la génération d'une onde contrapropagative, convergente et de même courbure,  $\zeta_c$  (flèche fine rouge), conjuguée en phase de  $\zeta_s$ . Notons que cette situation correspond à remplacer le choc bref et intense de gravité modélisé par une fonction de Dirac dans l'expérience du MTI par une modulation sinusoïdale de la gravité. Nous reviendrons à la fin de cette partie sur les liens entre les deux modulations temporelles du milieu.

Nous allons montrer tout au long de cette partie qu'on observe bien la génération d'une onde monochromatique conjuguée de phase d'une onde incidente, à la surface d'un bain vibré à la fréquence double. Après une étude expérimentale du phénomène, nous en donnerons une description théorique détaillée. Le nouveau formalisme simple que nous développerons a l'avantage d'être généralisable à tout type d'ondes (il pourrait notamment être aussi utilisé en optique) et permet

---

ainsi de mettre en valeur les ingrédients essentiels suffisants pour réaliser de la conjugaison de phase dans des contextes physiques éventuellement très différents (en fonction du type d'onde considéré), ainsi que les propriétés qui en découlent. Nous montrerons aussi les liens étroits entre ce phénomène, découvert en optique, et une instabilité bien connue de la communauté des hydrodynamiciens : l'instabilité de Faraday [59]. Nous verrons notamment que le développement lors de cette instabilité d'ondes stationnaires, superposition d'ondes propagatives et contrapropagatives, est une manifestation de ce phénomène de conjugaison de phase.





## 5.2 Mise en évidence expérimentale de la conjugaison de phase d'ondes de surface

Cette section présentera la réalisation expérimentale de la conjugaison de phase hydrodynamique pour les ondes de surface. La section précédente ayant montré qu'un mécanisme analogue à la conjugaison de phase optique pouvait être envisagé pour les ondes à la surface d'un bain de liquide. L'équivalent du mélange d'onde dans un cristal non linéaire doit alors être obtenu par une vibration verticale sinusoïdale du bain. Afin d'observer une onde conjuguée en phase dans une configuration analogue à celle du miroir à conjugaison de phase optique, il faut réaliser deux zones spatiales séparées : une zone de propagation libre d'où l'onde initiale vient (et vers laquelle l'onde conjuguée en phase est rétropropagée et une zone de célérité modulée temporellement où a lieu le processus de génération de cette onde, voir figure 5.1. Nous montrerons comment obtenir une configuration équivalente pour un bain vibré à l'aide de zones de profondeur différente. Enfin, nous présenterons une configuration alternative pour laquelle, plutôt que de séparer l'émission spatialement du domaine sur lequel la célérité est modulée, nous séparons temporellement la phase d'émission du paquet d'onde avec la phase de modulation du milieu.

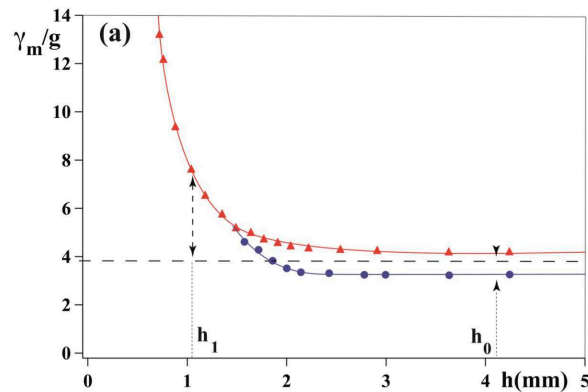
### 5.2.1 Réalisation d'un miroir à conjugaison de phase hydrodynamique

En optique, l'onde signal (et les ondes de pompes) sont envoyées dans un milieu non linéaire de taille finie. On mesure alors l'onde contrapropagative hors du milieu non linéaire duquel elle ressort. Le lieu d'émission de l'onde incidente et de mesure de l'onde retournée se situe donc dans une partie de l'espace distincte de la partie de l'espace modulée temporellement à l'aide du milieu non linéaire et des ondes de pompes, et au sein de laquelle le processus de génération l'onde conjuguée en phase se produit. Pour obtenir une configuration équivalente pour les ondes à la surface d'un bain vibré, il faut réaliser une zone non affectée par la vibration du bain.

#### Une zone de faible profondeur "non modulée"

Cette séparation spatiale du lieu de génération du lieu d'émission et d'observation n'est pas triviale pour les ondes à la surface d'un liquide. En effet, il est difficilement envisageable de faire vibrer une partie du bain de liquide tout en laissant une autre au repos. Notre méthode de modulation du milieu réalisée en accélérant verticalement de manière sinusoïdale le récipient suppose nécessairement que l'ensemble de la surface du liquide soit soumise à cette accélération. Cependant, il est possible d'obtenir des comportements fortement différents pour deux zones du bain en leur donnant deux profondeurs différentes. En effet, comme nous le montrerons ultérieurement plus en détails, l'action effective de la vibration sur une portion de bain de liquide est moins forte si la profondeur du bain est moins élevée. Une mesure de cette action est fournie expérimentalement par l'instabilité de Faraday [59] : au-delà d'un certain seuil d'accélération, la surface d'un bain en mouvement vertical oscillant se déstabilise spontanément pour laisser apparaître des ondes stationnaires. Le seuil de déclenchement de cette instabilité augmente fortement lorsque la profondeur de liquide descend en-dessous d'une valeur critique (*c.f.* figure 5.3). Pour une huile silicone de 20 cSt vibrée à 80 Hz, cette valeur critique est par exemple de 1,5 mm. Or, nous le démontrerons plus tard, ce seuil d'instabilité de Faraday est très étroitement lié à la valeur typique de l'accélération à partir de laquelle les effets de la modulation se font ressentir pour les ondes de surface. Ainsi, dans un bain de profondeur inférieure à un millimètre, si le bain oscille à 80

Hz à une amplitude d'accélération de 4 g environ, notablement inférieure au seuil de l'instabilité de Faraday, tout se passe comme si le bain n'était pas en mouvement oscillant. Dans les mêmes conditions mais pour une profondeur plus élevée, de quelques millimètres, l'effet de la vibration est très important puisque le seuil de l'instabilité est dépassé et des ondes stationnaires se forment spontanément à la surface. Le même comportement est qualitativement observé pour d'autres liquides comme l'eau.



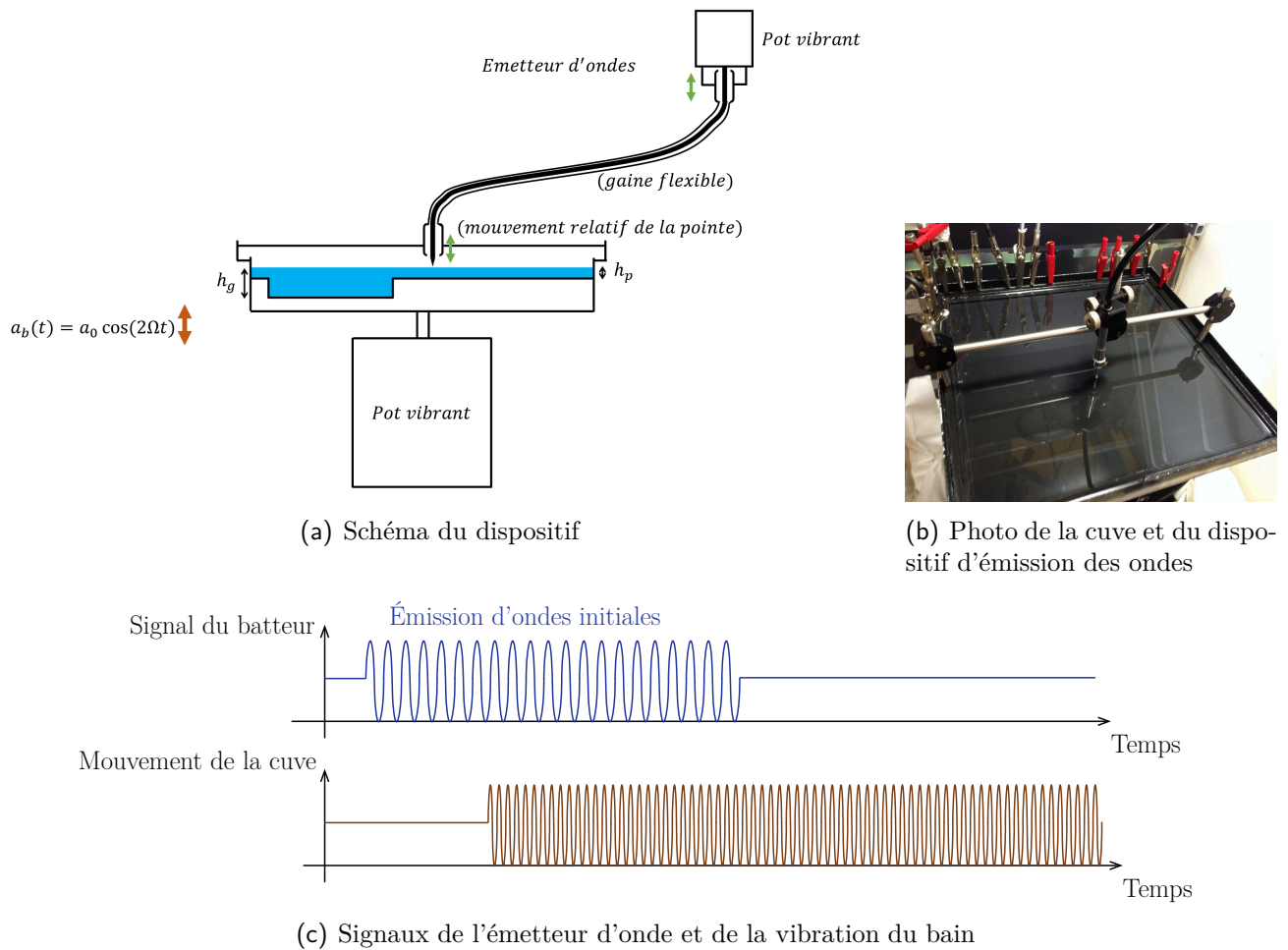
**Figure 5.3** – Dépendance du seuil d'accélération (noté ici  $\gamma_m$ ) de l'instabilité de Faraday à la profondeur du liquide ( $h$ ) pour une huile silicone de viscosité 20 cSt et vibrée à la fréquence 80 Hz (triangles rouges). Figure issue de [104]. La courbe bleue décrit le comportement de gouttes rebondissantes, et peut être ignorée ici.

Une réduction importante de la profondeur du liquide a donc le même effet qu'une diminution importante de l'accélération du bain. On construit donc un récipient constitué de deux zones de profondeurs différentes : l'une où la profondeur de liquide est environ d'un millimètre, l'autre où elle est d'environ cinq millimètres (*c.f.* figure 5.4 (a)). Lorsque le récipient est mis en vibration, les ondes se propagent librement dans la première zone comme en l'absence de vibration tandis qu'elles sont notablement affectées par la modulation temporelle du milieu dans la seconde zone, qui constitue l'équivalent du cristal non linéaire constituant le miroir à conjugaison de phase en optique, voir figure 5.1.

### Schéma expérimental du dispositif de conjugaison de phase hydrodynamique

L'objectif de notre montage est de réaliser un miroir à conjugaison de phase pour ondes de surface, suivant les schémas de principes présentés aux figures 5.1 et 5.2. Le schéma du dispositif est présenté à la figure 5.4 (a).

Une cuve de liquide (huile silicone 20 cSt) est vibrée verticalement (typiquement à 60 Hz, et à une accélération de l'ordre de la dizaine de mètres par secondes carrées). Cette cuve contient deux zones de profondeurs différentes ( $h_p = 1$  mm et  $h_g = 5$  mm). Le dispositif d'émission des ondes est placé dans la zone de faible profondeur. Il s'agit ici du batteur permettant d'émettre des ondes à la surface du bain liquide, indépendamment du mouvement de la cuve (voir la description à la partie 3.1). Il émet à la fréquence 30 Hz, choisie pour être la fréquence moitié de la fréquence de vibration du bain. L'onde émise par ce dispositif se propage alors librement à travers la zone de faible profondeur jusqu'à la zone de forte profondeur, où la vibration du bain joue un rôle important. Notons qu'une faible réfraction est observée au passage d'une onde d'une zone à l'autre (on n'observe pas de réflexion notable en revanche). Ceci s'explique par la dépendance de la relation



**Figure 5.4** – Schéma (a) et photo (b) du dispositif expérimental pour la conjugaison de phase hydrodynamique. Un récipient de liquide est vibré. Il contient un bain profond (hauteur de liquide  $h_g \approx 5$  mm) et un bain peu profond (hauteur de liquide  $h_p \approx 1$  mm). L'ensemble du récipient est vibré à l'accélération  $a_0$  et à la pulsation  $2\Omega$ . Un dispositif réglable, solidaire du récipient vibré, peut appuyer périodiquement à la surface pour émettre des ondes. Ces ondes sont émises à la pulsation  $\Omega$  pendant une durée de l'ordre de quelques dizaines de périodes puis l'émission est arrêtée. La cuve est mise en vibration peu de temps après le début de la phase d'émission est la vibration et maintenue tout au long de l'expérience

de dispersion des ondes de surface à la profondeur [73] :

$$\omega_0(k) = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \text{th}(hk)}, \quad (5.18)$$

où  $h$  est la profondeur de liquide,  $\rho$  sa densité,  $\gamma$  sa tension de surface avec l'air. Pour la gamme de fréquence utilisée, les longueurs d'ondes observées respectivement pour les ondes dans les zones de 1 et 5 mm de profondeur sont sensiblement les mêmes. Notons également une limite du dispositif : une plus forte atténuation des ondes est observée dans la zone de faible profondeur. La figure 5.4 (b) est une photo du dispositif. On y voit la cuve montée sur le pot vibrant et surmontée d'une extrémité du dispositif d'émission des ondes, accrochée par une structure rigide à la cuve.

Récapitulons les conditions nécessaires pour la réalisation d'un miroir à conjugaison et qui sont remplies par notre montage. Il s'agit d'un dispositif :

- capable d'émettre des ondes de surface monochromatiques, possédant une géométrie différente

de celle de la cuve, permettant de distinguer leur retourné temporel obtenu par un miroir à conjugaison de phase d'une réflexion spatiale par les bords de notre cuve, ceci est simplement réalisé grâce au dispositif de souffleur (ou de batteur) qui agit comme une source ponctuelle et émet des ondes circulaires dans un bain constitué de deux zones (de profondeurs différentes) dont chacune est rectangulaire.

- *capable de réaliser une modulation temporelle du milieu*, ceci est réalisé par la vibration verticale de l'ensemble de la cuve, qui est équivalente à une oscillation de la gravité effective dans le référentiel de la cuve en mouvement,
- *permettant de séparer temporellement l'émission de l'onde incidente et l'observation de l'onde retournée* pour bien visualiser l'onde retournée (seule), ceci est réalisé par une émission d'un train d'ondes par le souffleur, une fois le souffleur arrêté, seules des ondes retournées peuvent être observées dans la zone de faible profondeur,
- *possédant une zone modulée de taille finie* pour pouvoir y envoyer une onde propagative en entrée et en voir sortir l'onde conjuguée en phase, ceci est réalisé en construisant deux zones de profondeurs différentes (dans la zone profonde l'effet de la modulation est importante, dans la zone peu profonde, l'effet de cette modulation est très faible),
- *capable d'émettre les ondes en même temps que de moduler le milieu*, ceci est idéalement réalisé par le dispositif de transmission de mouvement vertical au sein du dispositif d'émission d'ondes (souffleur ou batteur), présenté en détails à la figure 3.2.

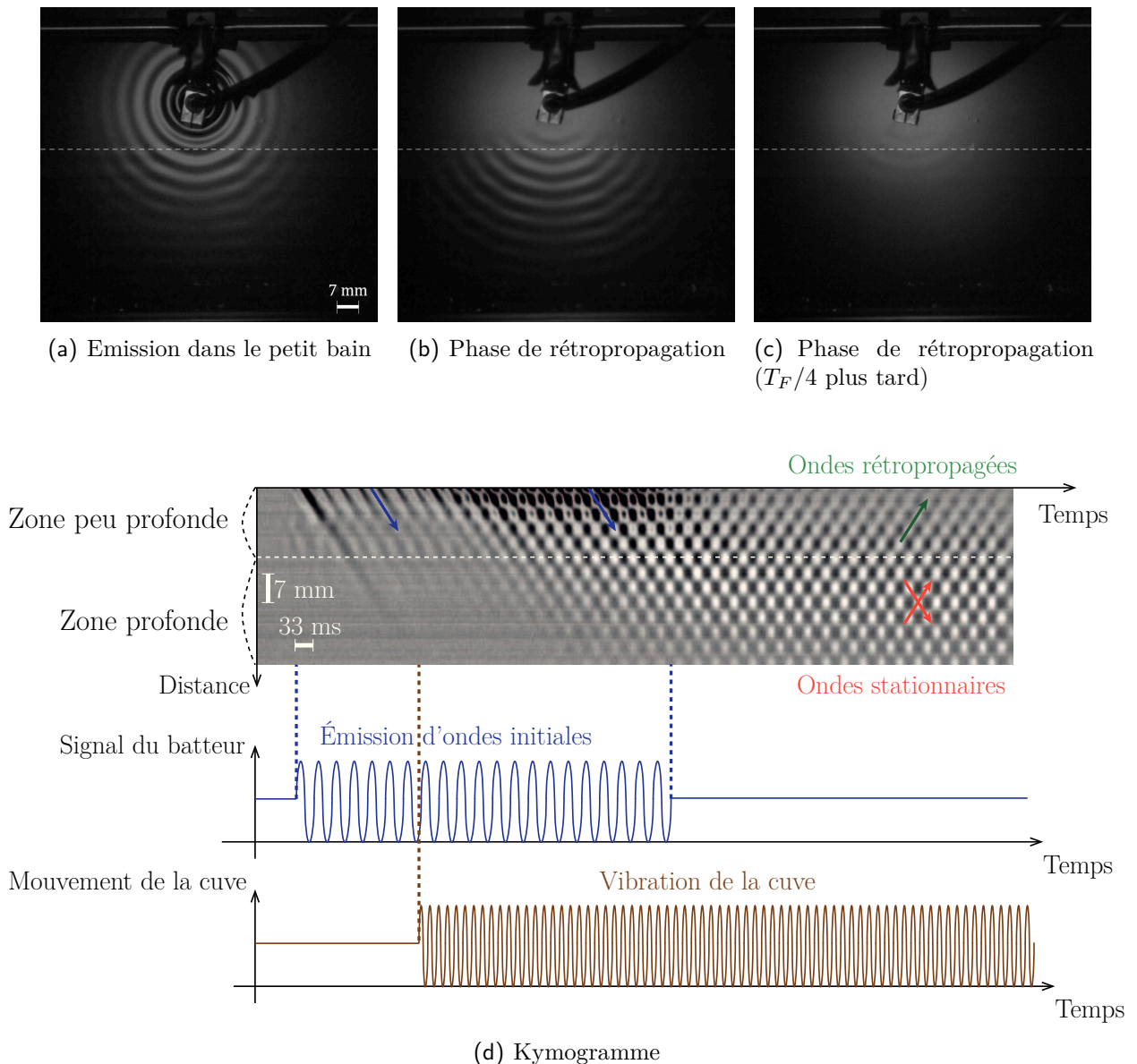
Par soucis de clarté, récapitulons également le déroulé de l'expérience, voir figure 5.4 (c) :

- au début d'une expérience, le batteur est allumé et émet des ondes à la fréquence 30 Hz. On vérifie alors que les ondes émises se propagent initialement librement depuis le bain peu profond vers le bain profond ;
- au milieu de la phase d'émission du batteur, la vibration de la cuve est mise en route, à 60 Hz. Elle est ensuite maintenue pendant tout le reste de l'expérience. Le bain est vibré très légèrement au-dessus du seuil de Faraday ( $a_0/a_{0,\text{seuil}} \approx 1,06$ ). Cependant, pour cette valeur de l'accélération très proche du seuil, le déclenchement de l'instabilité est long devant la durée de l'expérience et l'instabilité n'est jamais observée. C'est la raison pour laquelle la vibration de la cuve doit être démarrée à peu près en même temps que l'émission du batteur : la cuve ne doit pas avoir été en vibration depuis longtemps au début de l'expérience, sans quoi l'instabilité s'y serait déjà déclenchée et entraînerait l'émergence d'ondes stationnaires parasites ;
- après avoir émis un paquet d'onde d'un certain nombre de périodes  $d$  (typiquement de l'ordre de la dizaine), le batteur est éteint. On peut alors observer les ondes revenant vers le point d'émission.

### 5.2.2 Observation d'une onde conjuguée en phase dans le petit bain

Lors d'une première phase de l'expérience, le batteur est allumé et peu de temps après la cuve est mise en vibration à la fréquence 60 Hz. Le batteur émet des ondes propagatives circulaires divergentes à la fréquence 30 Hz. Une photographie vue du dessus prise durant cette phase d'émission montre leur motif à la figure 5.5 (a). Leur longueur d'onde est d'environ 6 mm. Le trait pointillé blanc sur la photo indique la frontière entre les zones de faible profondeur ( $h_d \approx 2,5$  mm, en haut sur l'image) et de forte profondeur ( $h_g \approx 6,5$  mm, en bas sur l'image). On observe que les ondes se propagent dans toutes les directions. La longueur d'onde dans la zone profonde est très proche de celle dans la zone peu profonde. Dans la zone peu profonde, une propagation usuelle (accompagnée d'une dissipation visqueuse) est observée. Dans la zone profonde où l'effet de la modulation de la

gravité effective est notable, en revanche, un phénomène particulier est observé : les ondes dans cette zone sont stationnaires, voir kymogramme figure 5.5.



**Figure 5.5** – Évolution du champ d'onde au cours d'une expérience de conjugaison de phase hydrodynamique. (a) Photographie du champ d'onde vu de dessus pendant la phase d'émission. (b) et (c) idem pendant la phase de rétropropagation. Le trait pointillé blanc indique la frontière entre les deux zones de profondeurs différentes (la zone de faible profondeur  $h_d \approx 2,5$  mm est en haut sur l'image, en bas  $h_g \approx 6,5$  mm). Les ondes propagatives émises pendant la phase d'émission (a) sont circulaires. Lorsqu'elles arrivent dans le bain profond, la modulation notable de la gravité les transforme en ondes stationnaires (de même motif). Ces ondes stationnaires restent présentes dans le bain profond après la fin de la phase d'émission, voir photo (b), prise à l'instant où l'onde stationnaire est d'amplitude maximale. La photo (c) est prise 8 ms (soit environ un quart de période de Faraday plus tard) plus tard. À cet instant, l'amplitude du champ d'onde stationnaire dans le grand bain est nulle. Des ondes sont malgré tout visibles dans et proche de la zone de faible profondeur : elles correspondent à la partie contrapropagative du champ d'onde, ré-émission vers le point d'émission.

Dans une deuxième phase de l'expérience, le batteur est arrêté (la vibration du bain, elle, est maintenue). Le batteur ne touche plus le bain et plus aucune onde n'est émise dans la zone de faible profondeur. Au bout d'une dizaine de périodes, toute trace du motif circulaire observé pendant la phase d'émission dans la zone de faible profondeur a disparu. Le motif observé est l'ensemble d'arcs

de cercles de la figure 5.5 (b). Le champ d'onde observé est essentiellement stationnaire dans la zone de forte profondeur et cette photographie est prise à un instant où l'amplitude est maximale. Comme toute onde stationnaire, la composante stationnaire du champ d'onde, observée dans le bain profond, s'annule un quart de période plus tard, voir la photographie 5.5 (c) prise 8 ms après la photographie 5.5 (b). En revanche, au sein et à proximité de la zone de faible profondeur, le champ d'onde est essentiellement propagatif et ne passe donc pas par une valeur nulle : ce champ est seul visible sur la photographie 5.5 (c). On observe que cette onde propagative dans le bain peu profond a la même forme circulaire que l'onde incidente initiale et que le motif stationnaire dans le bain profond. Elle se propage cependant *en sens inverse* de l'onde initiale (voir figure 5.5 (d) et vient refocaliser au point d'émission : cette onde est donc le retourné temporel (ou conjugué de phase) de l'onde incidente. Notons que la forte dissipation dans la zone de faible profondeur ainsi que la présence du batteur dans le champ de vision nous empêche de voir une éventuelle redivergence de l'onde convergente après passage par le point de focalisation.

La figure 5.5 (d) montre un kymogramme de l'expérience. Comme précédemment, celui-ci est construit en reportant sur des colonnes juxtaposées le motif observé aux différents instants de l'expérience sur une ligne passant par le point d'émission initiale. Pour une meilleure visualisation, l'arrière plan a été soustrait pour obtenir ce kymogramme. En dessous du kymogramme, les signaux d'émission du batteur et du mouvement de la cuve ont été représentés aux instants correspondants pour mettre en évidence les différentes phases de l'expérience. Au début de l'expérience, le batteur est mis en route et les motifs obliques descendant vers la droite (indiqués par les flèches bleues) montrent les ondes émises. L'atténuation visqueuse fait que ces ondes sont peu visibles dans la zone de forte profondeur (en bas). La vibration de la cuve est mise en route après sept périodes d'émission du batteur environ. L'onde stationnaire, correspondant à un motif en damier sur le kymogramme, se développe dans la zone dans et proche de la zone de forte profondeur, voir les flèches rouges. À la fin de la phase d'émission, les ondes stationnaires persistent dans le bain profond tandis qu'on observe dans le bain peu profond des ondes essentiellement rétropropagatives (motifs montant vers la droite, indiqués par une flèche verte). Cette onde est l'onde conjuguée en phase de l'onde émise initialement, rétropropagée depuis la zone de forte profondeur, qui est donc équivalente à un miroir à conjugaison de phase.<sup>1</sup> Insistons ici sur les rôles respectifs de la modulation du milieu et de l'émission par le batteur. Si le bain n'est pas mis en vibration et seul le batteur est mis en route pour émettre un paquet d'onde, le kymogramme conserve tout au long de l'émission l'aspect qu'il présente dans la première partie (vers la première flèche bleue) de celui de la figure 5.5 (d) : seules des ondes propagatives s'éloignant du batteur sont visibles. Si au contraire seul le bain est mis en vibration et le batteur n'est jamais allumé, le kymogramme reste plat : aucune onde n'est visible.

---

1. Notons que les bandes de la partie supérieure droite du kymogramme, correspondant à l'onde rétropropagée, est légèrement déformée : cela témoigne de la présence résiduelle d'une composante stationnaire dans la zone de faible profondeur, qui peut s'expliquer par le fait que l'effet de la modulation temporelle de la gravité effective n'est pas totalement nul dans cette zone. Ainsi, un faible effet de génération d'onde stationnaire (de faible amplitude) est également observé dans le bain peu profond. En choisissant une profondeur d'huile plus faible pour la zone de faible profondeur, on peut diminuer encore l'effet de la modulation temporelle et donc la proportion d'ondes stationnaires dans cette zone. Cependant, la dissipation de l'onde retournée est alors également plus importante, ce qui rend sa visualisation plus difficile. Le choix de hauteur de liquide pour la zone de faible profondeur de 2,5 mm correspond à un compromis entre élimination de l'effet de la modulation temporelle et maintien d'un niveau de dissipation des ondes relativement faible dans cette zone.

## Observation du champ d'onde à l'intérieur du miroir à conjugaison de phase

Ainsi, nous avons montré que l'on peut construire pour les ondes de surface, en modulant temporellement le milieu de propagation sur une zone de taille finie, un dispositif qui génère une onde rétropropagée. À partir d'une onde incidente circulaire divergente monochromatique, on obtient, comme dans le schéma 5.1, l'onde circulaire convergente de même fréquence et de même centre, qui se refocalise au point d'émission de l'onde incidente. Le dispositif réalisé génère donc le conjugué en phase de l'onde incidente et agit par conséquent comme un miroir à conjugaison de phase hydrodynamique. Comme pour son équivalent optique [5], le processus de génération de l'onde conjuguée en phase est également associé à un processus d'amplification de la composante du champ se propageant dans le sens de l'onde initiale, visible à la figure 5.5 (d), nous y reviendrons à la section 5.4.1. À la différence du cas de l'optique, le champ d'onde peut ici être mesuré de façon non perturbative directement dans le milieu modulé où ces processus se déroulent. Grâce à cette possibilité unique d'observation, nous avons mis en évidence le phénomène de "stationnarisation" de l'onde incidente dans le milieu modulé temporellement. Les ondes propagatives et contrapropagatives générées au cours de ce processus sont de même amplitude (qui s'avère ici être plus élevée que celle de l'onde incidente). Elles forment ainsi l'hologramme dynamique de l'onde incidente, qui est maintenu dans le milieu par la modulation et qui émet en continu vers l'extérieur du milieu (si celui-ci est de taille finie) une onde proportionnelle à l'onde incidente dans la direction de propagation de cette dernière et une onde proportionnelle à la conjuguée en phase de l'onde incidente dans la direction opposée.

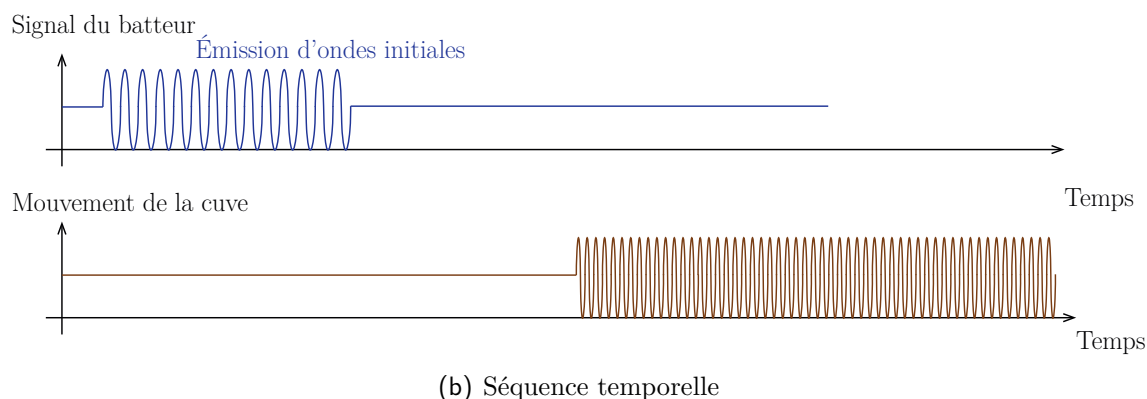
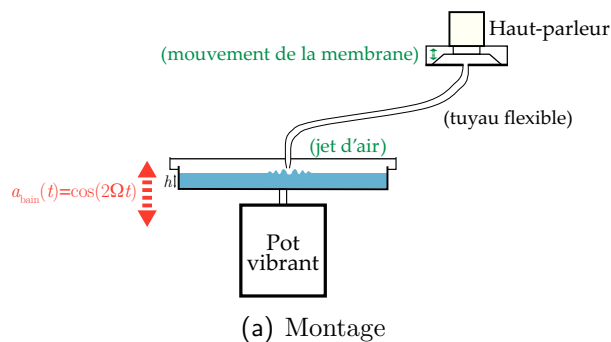
Notons que l'émission de l'onde rétropropagée à la frontière du milieu modulé peut ainsi être vue comme une conséquence de l'asymétrie introduite par cette frontière. En effet, comme toute onde stationnaire, l'onde stationnaire générée sous l'effet de la modulation dans la zone modulée temporellement peut être interprétée comme la somme de deux ondes contrapropagatives. À la frontière de la zone modulée, la composante se propageant dans le sens de l'onde initiale se propage en s'éloignant de cette frontière, vers l'intérieur de la zone modulée, tandis que la composante rétropropagative se propage vers la zone non modulée. Ainsi, seule l'onde rétropropagative atteint la zone non modulée et y est observée.

Grâce à une séparation (spatiale) entre une zone modulée temporellement et une zone de propagation libre, nous avons révélé l'onde retournée temporellement ce qui nous a permis de mettre en évidence le phénomène de conjugaison de phase hydrodynamique, dans une configuration de type miroir à conjugaison de phase, analogue à son utilisation en optique. Cependant, notre système hydrodynamique, dans lequel le milieu modulé est entièrement accessible (à l'observation et à l'introduction d'un dispositif émetteur), constitue un système unique permettant d'étudier le processus de conjugaison de phase dans des configurations différentes. Tirant parti de ces nouvelles possibilités, nous présentons dans la section suivante une expérience de conjugaison de phase dans laquelle l'onde conjuguée en phase est isolée temporellement, plutôt que spatialement, du domaine dans lequel une onde stationnaire est observée. Cette configuration, plus proche de celle du MTI, nous permettra de mettre en évidence certains liens entre les deux opérations de retournement temporel, ainsi que certaines propriétés particulières du processus général de conjugaison de phase associé à une modulation temporelle périodique du milieu de propagation.

### 5.2.3 Construction d'une frontière temporelle plutôt que spatiale : un miroir temporel à conjugaison de phase

#### Schéma de l'expérience

Dans cette expérience, nous utilisons de nouveau une cuve plate de profondeur homogène, ne possédant qu'une seule zone utile. La profondeur de liquide dans le bain est élevée : l'effet d'une vibration de la cuve est donc important partout. Le schéma et le déroulé de l'expérience sont synthétisés sur la figure 5.6.



**Figure 5.6** – Montage et déroulé de l'expérience pour le miroir temporel à conjugaison de phase. (a) Montage souffleur sur bain vibré. (b) Signaux du souffleur émettant le paquet d'onde initial et signal de la vibration du bain. L'émetteur émet initialement un train d'onde sur un bain au repos. Le bain est mis en vibration quelques instants plus tard.

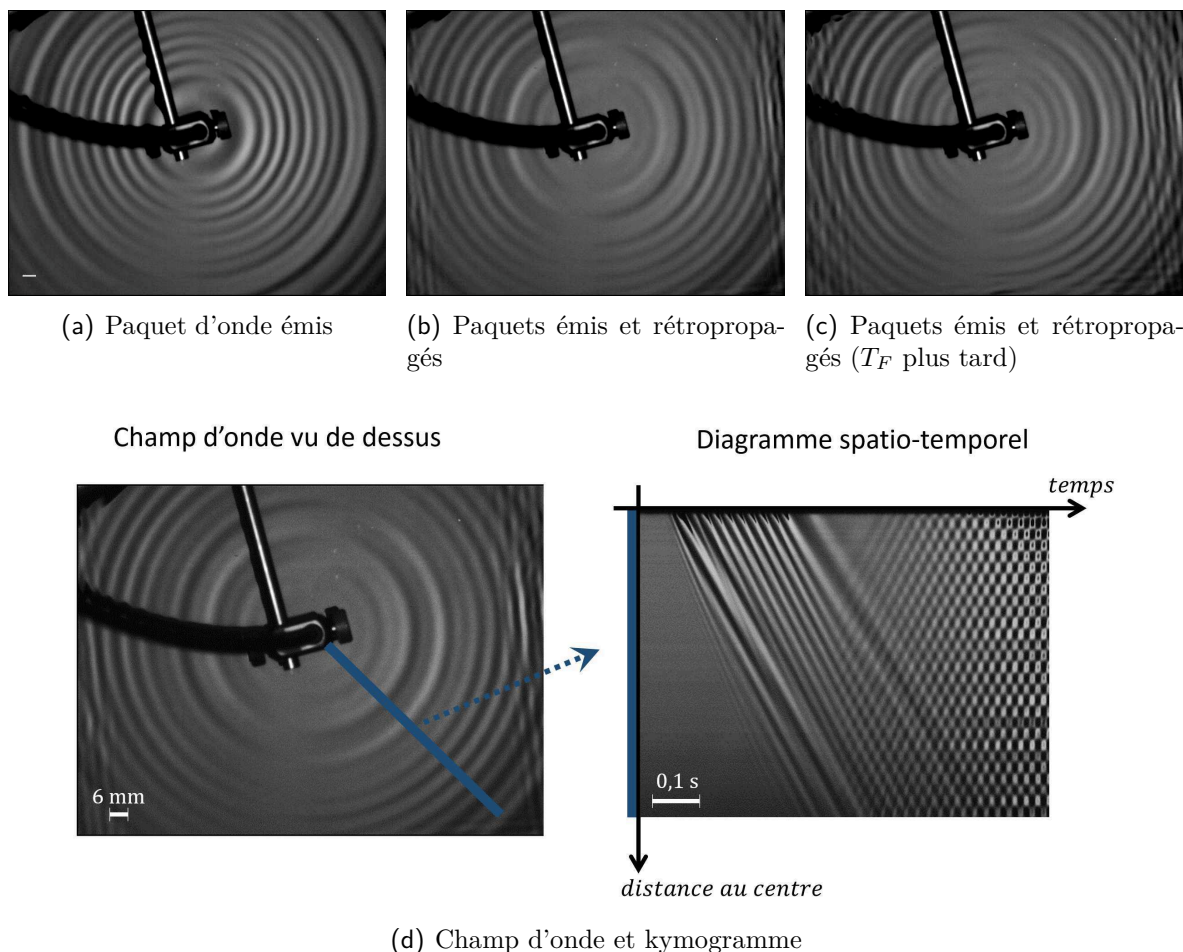
Un paquet d'onde (typiquement de dix cycles) est émis par un dispositif souffleur. Il se propage librement sur la surface pendant un certain temps avant que le bain ne soit mis en vibration.

#### Retournement et stationnarisation d'un paquet d'onde

Cette expérience est réalisée avec de l'eau. Un paquet d'ondes de 10 cycles à 30 Hz est émis par le souffleur. Une photographie du paquet d'onde émis est présentée à la figure 5.7 (a). Notons que des défauts de monochromaticité sont visibles (notamment un bourrelet de grande longueur d'onde en queue du paquet d'onde). 37 ms (1,1 cycles) après la fin de l'émission, le bain est mis en vibration à 60 Hz et à deux fois le seuil de Faraday ( $a_0/a_{0,\text{seuil}} = 2$ ). Ici encore, notons que, bien que le bain soit vibré à une accélération nettement supérieure au seuil de l'instabilité de Faraday, celle-ci n'est pas observée car son temps de déclenchement est supérieur à la durée de l'expérience. Une onde rétropropagée convergente à la longueur d'onde du paquet d'onde initial apparaît alors.

La photographie de la figure 5.7 (b) est prise 60 ms après le début de la mise en vibration du bain. Le front intérieur du motif circulaire correspond à l'onde rétropropagée. Sur la photographie





**Figure 5.7** – Évolution du champ d'onde pour un paquet d'onde quasi-monochromatique soumis à un miroir temporel à conjugaison de phase. (a) Vue du paquet d'onde initial de 10 cycles à 30 Hz peu après son émission. (b) Vue du champ d'onde 60 ms après le début de la vibration. Le champ rétropropagé à la longueur d'onde de Faraday est visible au centre, puis vient une zone de transition, à l'extérieur de laquelle le paquet d'onde initial est toujours visible. (c) Vue du champ d'onde une période de Faraday après la photo (b). Le champ d'onde rétropropagé a avancé d'une longueur d'onde vers le centre. Le trait blanc sur la première photo indique 6 mm. (d) Champ d'onde vu du dessus pendant la phase de rétropropagation et diagramme spatiotemporel (kymogramme). Le paquet d'onde divergent initial de 10 cycles correspond aux bandes descendant vers la droite sur le diagramme spatiotemporel. Lorsque la vibration du bain est mise en route, des ondes rétropropagées apparaissent *depuis le paquet d'onde initial*. De ces ondes convergentes générées repartent également des ondes divergentes. Le champ résultant entre les deux fronts constitués par le paquet d'onde initial d'une part et la première onde rétropropagée d'autre part est globalement stationnaire (motif en damier sur le kymogramme).

5.7 (c), prise 32 ms (environ une période de l'onde) plus tard, le front d'onde intérieur a reculé d'une longueur d'onde par rapport à la photographie 5.7 (b), ce qui montre la rétropropagation. L'onde circulaire rétropropagée a la même longueur d'onde que l'onde initiale (environ 6 mm) et reconverge au point d'émission. Remarquons que des ondes parasites, planes, émises par les bords de la cuve carrées lors de la vibration, sont visibles sur les bords des image 5.7 (b) et (c). La figure 5.7 (d) montre l'évolution spatiotemporelle du champ d'ondes. À gauche, une photo extraite du film de l'expérience montre le champ d'onde vu du dessus quelques instants après le début de la vibration du bain. Le trait épais bleu indique les points du film de l'expérience utilisés pour réaliser le kymogramme présenté à droite. Les premières bandes descendant vers la droite correspondent au paquet d'onde initial. On distingue nettement huit des dix cycles du paquet d'onde.

Les deux premiers sont masqués par des ondes parasites générées par le dispositif lors du début de l'émission.<sup>2</sup> À partir d'un certain instant, correspondant au début de la vibration du bain, des bandes montant vers la droite apparaissent sur le kymogramme, traduisant l'émergence d'ondes rétropropagées. Le caractère de retournement temporel de la conjugaison de phase hydrodynamique apparaît clairement sur ce kymogramme : l'émergence de ces bandes correspondant aux ondes rétropropagées, à partir d'un instant donné (celui de la mise en vibration du bain) est très similaire à celle des ondes rétropropagées obtenues dans l'expérience de retournement temporel instantané (voir figure 3.7). Contrairement au cas du MTI, un motif en damier se forme entre le front d'onde initial et le front d'onde rétropropagé, indiquant la formation d'ondes stationnaires. Lorsque le front d'onde rétropropagé atteint le point d'émission initiale, il rediverge et contribue à l'onde stationnaire circulaire observée ensuite sur l'ensemble du champ. Une augmentation du contraste du motif en damier sur la droite du kymogramme indique l'augmentation de l'amplitude de cette onde stationnaire au cours du temps.

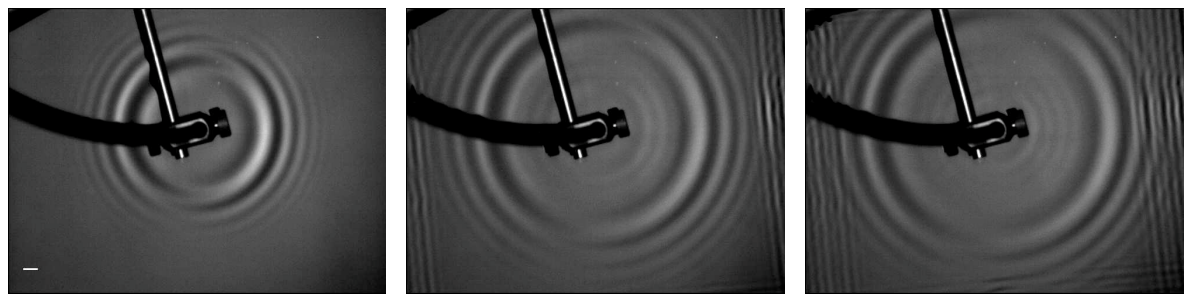
Cette expérience montre qu'un paquet d'onde quasi-monochromatique initial (circulaire divergent) est retourné temporellement et stationnarisé lorsqu'on met en vibration le bain à la fréquence double de celle du paquet d'onde. Notons que les défauts de monochromaticité présents dans le paquet d'onde initial sont absents de la composante retournée et de l'onde stationnaire formée à temps longs. Le processus de conjugaison de phase hydrodynamique sélectionne donc la composante du champ d'onde initial à la fréquence moitié de la fréquence de modulation du bain.

### Sélection fréquentielle de l'onde retournée

Afin de mettre en évidence ce processus de sélection fréquentielle, le paquet d'onde initial de 10 cycles à 30 Hz a été remplacé par un paquet d'onde de spectre large, émis par un impact bref du souffle sur la surface. Une photo de ce paquet d'onde initial quelques instants après son émission est présentée à la figure 5.8 (a). Ce paquet d'ondes initial est très similaire à celui déjà utilisé dans l'expérience du miroir temporel instantané présenté à la partie 3 et dont le spectre est donné à la figure 3.11 de cette partie. On retrouve la dispersion usuelle des ondes de surface : les petites longueurs d'ondes, plus rapides, se trouvent plus loin du point d'émission que les grandes longueurs d'ondes.

La photographie 5.8 (b) montre le champ d'onde environ 50 ms après le début de la vibration. Le paquet d'onde initial est visible et s'est propagé en divergeant depuis l'instant de la photographie 5.8 (a). Au centre, à l'intérieur de la plus grande longueur d'onde du paquet initial, un motif à la longueur d'onde de Faraday, environ 6 mm, est observé. Sur la photographie 5.8 (c), prise 32 ms (environ une période de Faraday  $T_F = 33$  ms) plus tard, le front d'onde du motif à la longueur d'onde de Faraday s'est rapproché d'une longueur d'onde du centre. Le paquet d'onde initial a quant à lui poursuivi sa propagation divergente, laissant apparaître un champ d'onde à la fréquence de Faraday plus étendu. Bien que le paquet d'onde initial soit constitué de nombreuses longueurs d'ondes différentes, *le champ rétropropagé généré est lui monochromatique*, à la longueur d'onde de Faraday (environ 6 mm). La figure 5.8 (d) montre l'évolution spatiotemporelle du champ d'onde. La photographie de la figure 5.8 (d) (gauche) est tirée d'un film de l'expérience et montre le champ d'onde quelques instants après le début de la mise en vibration du bain. Le trait épais bleu correspond aux points utilisés pour réaliser le kymogramme (à droite). Sur ce kymogramme,

2. En effet le premier impact du souffle sur la surface génère plusieurs longueurs d'ondes et non uniquement celle correspondant à la fréquence de 30 Hz. On distingue des longueurs d'onde plus faibles, se propageant plus rapidement du fait de la dispersion des ondes de surface. Les longueurs d'ondes plus grandes se propagent moins rapidement et se superposent aux deux premiers cycles du paquet d'onde à 30 Hz. On distingue un autre défaut à la fin du paquet d'onde : une longueur d'onde plus grande est émise par le dernier impact du souffle sur la surface.



(a) Paquet d'onde émis

(b) Paquets émis et rétropropa-  
gés(c) Paquets émis et rétropropa-  
gés ( $T_F$  plus tard)

Champ d'onde vu de dessus

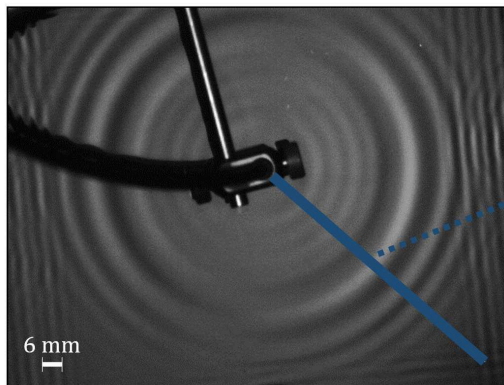
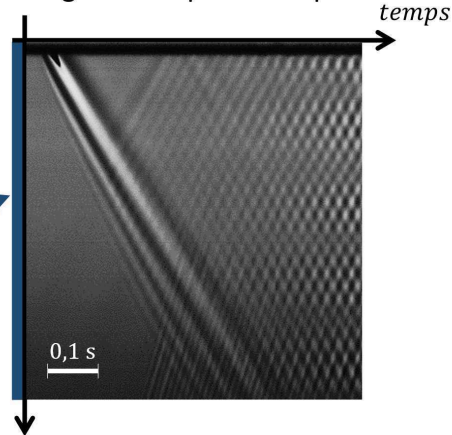


Diagramme spatio-temporel



distance au centre

(d) Champ d'onde et diagramme spatiotemporel

**Figure 5.8** – Évolution du champ d'onde pour un paquet d'onde de large spectre au cours d'une expérience de miroir temporel à conjugaison de phase. (a) Vue du paquet d'onde initial à large spectre peu après son émission. Le trait blanc marque 6 mm. (b) Vue du champ d'onde peu après le début de la vibration. Un champ d'onde à la longueur d'onde de Faraday ( $\approx 6$  mm) est visible à l'intérieur du paquet d'onde initial. (c) Vue du champ d'onde une période de Faraday après la photo (b). Le champ d'onde à la longueur d'onde de Faraday a avancé d'une longueur d'onde vers le centre, montrant sa rétropropagation vers le centre. (d) Champ d'onde vu du dessus pendant la phase de rétropropagation (à gauche) et kymogramme (à droite). Le trait épais bleu sur la photographie à gauche correspond aux points utilisés pour réaliser le kymogramme à droite. Le motif en bandes descendant en s'élargissant vers la droite sur le kymogramme correspond au paquet d'onde divergent polychromatique initial. Son élargissement est l'effet de la dispersion. Les ondes rétropropagées (bandes montant vers la droite) sont émises périodiquement toutes les périodes de Faraday ( $T_F \approx 33$  ms) depuis le paquet d'onde initial. De ces ondes convergentes nouvellement générées, repartent également des ondes divergentes (bandes descendant vers la droite), également générées périodiquement. Le champ résultant entre les deux fronts constitués par le paquet d'onde initial d'une part et la première onde rétropropagée d'autre part est globalement stationnaire (motif en damier).

un faisceau de bandes descendant vers la droite en s'élargissant est visible. Il correspond au paquet d'onde initial au spectre large. L'élargissement observé est l'effet de la dispersion des ondes de surface. À partir de l'instant de la mise en route de la vibration du bain, des bandes montant depuis le paquet d'onde initial vers la droite sont observées. Elles correspondent à l'émergence d'ondes rétropropagées. Bien que le paquet d'onde initial soit de large spectre, on constate que les ondes rétropropagées sont à la fréquence et à la longueur d'onde de Faraday, ce qui témoigne de la sélection fréquentielle du processus de conjugaison de phase. Comme précédemment, un motif en

damier est observé entre les deux fronts d'ondes (initial et rétropropagé), traduisant l'émergence d'ondes stationnaires à la fréquence de Faraday, moitié de la fréquence de modulation temporelle. Comme précédemment, on observe une augmentation du contraste à droite du kymogramme traduisant l'augmentation de l'amplitude de l'onde stationnaire.<sup>3</sup>

Remarquons enfin un défaut expérimental : des ondes sont émises par les bords de la cuve carrée et se superposent aux ondes circulaires observées et brouillent légèrement le motif visualisé à temps longs. Ces ondes parasites sont visibles sur les bords de la photographie de la figure 5.8 (d) (gauche) ainsi que sur le kymogramme (fines bandes montant vers la droite depuis le bas du kymogramme). Ce défaut expérimental fait cependant apparaître la fréquence de vibration sur le kymogramme (les ondes émises par les bords le sont à cette fréquence) et permet donc de visualiser directement le fait que la fréquence des ondes retournées est bien la moitié de celle de la vibration du bain.

En conclusion, nous avons montré que la vibration d'un bain de liquide réalise un processus de conjugaison de phase pour les ondes de surface : des ondes rétropropagées sont générées à la fréquence de Faraday, moitié de celle de la vibration du bain. Ces ondes sont le conjugué en phase de la composante à la fréquence de Faraday de l'onde incidente. En réalisant une zone de profondeur faible, on peut diminuer fortement l'effet de la vibration dans une partie du bain et réaliser une séparation spatiale entre une zone de faible profondeur où les ondes se propagent essentiellement comme dans un milieu libre et une zone de forte profondeur, qui se comporte comme un miroir à conjugaison de phase et émet vers la zone de faible profondeur l'onde conjuguée en phase de l'onde initiale. Contrairement aux dispositifs optiques ou acoustiques, notre dispositif permet d'observer le champ d'ondes (sans le perturber) au sein même de ce miroir à conjugaison de phase. On observe que la génération de ces ondes conjuguées en phase s'accompagne de l'émergence d'une onde stationnaire dans le milieu modulé périodiquement temporellement. Comme en optique, une amplification des ondes de surface est également observée. Du fait de la dissipation visqueuse des ondes de surface, ce phénomène d'amplification ne peut être observé que pour des valeurs de l'accélération du bain au-dessus d'un seuil (nous y reviendrons à la section 5.4). Dans la partie suivante nous allons développer une théorie permettant de rendre compte de ces observations et d'expliquer la parenté entre la conjugaison de phase standard en optique et cette nouvelle conjugaison de phase hydrodynamique.

---

3. Notons que la première bande de rétropropagation est plus large que les autres. Ceci peut s'expliquer par le fait que le début de la vibration correspond à un choc d'accélération du bain. Cette disruption instantanée engendre un premier retournement temporel plus large bande, d'après le mécanisme du miroir temporel instantané, décrit à la partie 4. Ainsi des longueurs d'ondes plus grandes (correspondant à des composantes fréquentielles plus basses) sont retournées temporellement par la disruption correspondant au début de la vibration du bain. On distingue également la bande descendant vers la droite correspondant à leur redivergence après passage par le point de focalisation. Le choc correspondant au début de la vibration du bain étant moins important est moins bref que dans les expériences du retournement temporel instantané, l'onde retournée ainsi générée est de faible amplitude et seules les basses fréquences sont retournées. Ceci ne se produit qu'une fois. La génération d'ondes rétropropagées sous l'effet de la vibration continue du bain se fait par la suite exclusivement à la fréquence de Faraday.

## 5.3 Théorie du miroir à conjugaison de phase hydrodynamique

Cette section présentera une description théorique des phénomènes de conjugaison de phase d'onde de surface observés dans les bains vibrés à la section précédente. Elle permettra notamment d'éclaircir les liens entre ces phénomènes et la conjugaison de phase optique, ainsi que l'instabilité de Faraday et le MTI. Nous présenterons tout d'abord la théorie standard des bains vibrés et des ondes de surface stationnaires de l'instabilité de Faraday. Puis nous en déduirons une description théorique du phénomène de conjugaison de phase d'onde de surface et nous montrerons l'équivalence formelle à la conjugaison de phase en optique.

### 5.3.1 Théorie standard des bains vibrés et de l'instabilité de Faraday

Les ondes de surface dans un bain en vibration sinusoïdale verticale ont beaucoup été étudiées dans le cadre de l'instabilité de Faraday [59].

#### L'instabilité de Faraday dans les bains vibrés

Lorsqu'on vibre verticalement à une fréquence donnée un bain de liquide suffisamment fort, la surface libre, plane au repos, se déstabilise spontanément et des ondes stationnaires se développent. Cette instabilité hydrodynamique, qui a été découverte par Faraday au XIXe siècle [59], est caractérisée principalement par :

- l'existence d'un seuil d'accélération. L'émergence spontanée d'ondes stationnaires est observée uniquement au-dessus d'une valeur seuil de l'amplitude d'accélération verticale du bain (appelée *seuil de Faraday*). Ce seuil augmente avec la fréquence de vibration et avec la viscosité du liquide utilisé [105]. Au-dessus du seuil, la croissance des ondes stationnaires est d'autant plus rapide que l'accélération est forte. Si l'on repasse en-dessous du seuil, les ondes stationnaires s'atténuent avec un temps caractéristique d'autant plus faible que l'accélération est faible [104, 106] (c'est un phénomène de ralentissement critique).
- les ondes stationnaires observées à partir du seuil oscillent à la fréquence moitié de la fréquence de vibration du bain. Cette fréquence est ainsi appelée *fréquence de Faraday*. On observe généralement un motif d'ondes stationnaires à la longueur d'onde de Faraday (voir figure 5.9), donnée par la relation de dispersion des ondes de surface (voir l'annexe B) à la fréquence de Faraday.

#### Équation de Mathieu

De nombreuses propriétés de l'instabilité de Faraday peuvent être décrites par une théorie linéaire des ondes de surface. En utilisant les équations de Navier-Stokes linéarisées, on obtient les équations des ondes de surface dans le référentiel d'un bain vibré (voir l'annexe B). Ces équations s'écrivent en eau profonde :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2}(k_x, k_y, t) + \omega_0^2(k) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = -a_0 k \cos(2\Omega t) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t), \quad (5.19)$$

où  $a_0$  est l'amplitude d'accélération du bain,  $2\Omega$  est sa pulsation de vibration verticale et  $\omega_0(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3 / \rho}$  désigne comme précédemment la relation de dispersion des ondes de surface. Notons que dans le cas que l'on considère ici de l'eau profonde, l'équation obtenue définit pour chaque



**Figure 5.9** – Ondes stationnaires à la surface d'une cuve d'eau, accélérée sinusoidalement à 80 Hz par un pot vibrant. Le motif présente une longueur d'onde caractéristique égale à la longueur d'onde de Faraday (environ 5 mm). La cuve fait 22 cm de diamètre.

vecteur d'onde  $\vec{k}$  une solution non couplée aux autres vecteurs d'ondes. En revanche, nous verrons par la suite que le terme de forçage sinusoidal introduit des couplages entre des composantes à différentes fréquences de  $\tilde{\zeta}$ . En posant :

$$\begin{cases} r(k) = \frac{gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3}{\Omega^2} \\ q(k) = \frac{-a_0k}{2\Omega^2} \\ T = \Omega t, \end{cases} \quad (5.20)$$

on peut réécrire l'équation (5.19) sous la forme adimensionalisée standard de l'équation de Mathieu utilisée par MacLachlan [107] et citée par Benjamin et Ursell [108] :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial T^2}(k_x, k_y, T) + (r(k) - 2q(k) \cos(2T))\tilde{\zeta}(k_x, k_y, T) = 0. \quad (5.21)$$

Le théorème de Floquet, appliqué à cette équation différentielle à coefficients périodique d'ordre 2, donne la forme générale des solutions [109] :

$$\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = \text{Re} \left[ c_1(k_x, k_y) e^{\sigma(k_x, k_y)t} p_1(k_x, k_y, t) + c_2(k_x, k_y) e^{-\sigma(k_x, k_y)t} p_2(k_x, k_y, t) \right], \quad (5.22)$$

où  $c_1$ ,  $c_2$  et  $\sigma$  sont des coefficients complexes, et où  $p_1$  et  $p_2$  sont des fonctions du temps périodiques à la pulsation  $2\Omega$  de la vibration du bain. Des détails sur cette forme générale des solutions sont fournis en annexe F. Nous y reviendrons dans la partie 6.

### Langues d'instabilité

L'étude de stabilité a effectuée à partir de l'équation de Mathieu dans le cas non visqueux pour la première fois par Benjamin et Ursell [108] et pour une viscosité quelconque par Kumar et Tuckerman [110]. Ces derniers ont montré que les modes pour  $\text{Im}[\sigma]$  différents de 0 ou  $\Omega$  (modulo  $2\Omega$ ) dans l'équation (5.22) correspondent à des solutions pseudo-périodiques stables. Les modes

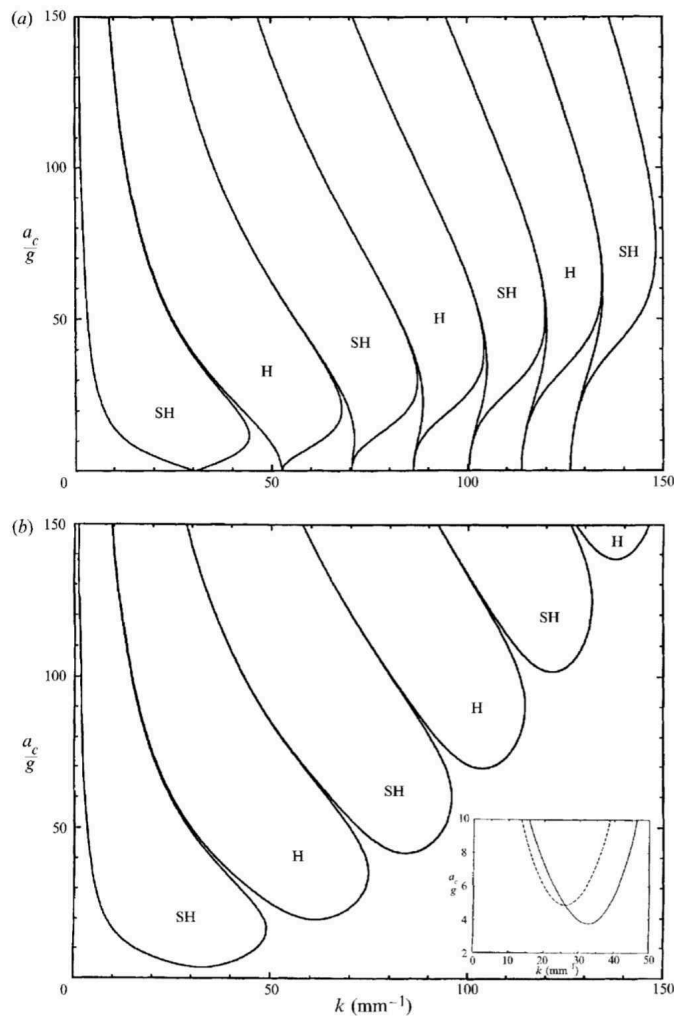


FIGURE 1. (a) Stability boundary for ideal fluids. The tongues correspond alternately to subharmonic (SH) and harmonic (H) responses. Fluid parameters are  $\rho_1 = 519.933 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 415.667 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $\sigma = 2.181 \times 10^{-6} \text{ n m}^{-2}$  and  $2\pi/\omega = 100 \text{ Hz}$ . (b) Stability boundary for FHS.  $\eta_1 = 3.908 \times 10^{-8} \text{ Pa s}$ ,  $\eta_2 = 3.124 \times 10^{-8} \text{ Pa s}$ , and other parameters are as in (a). Inset: Comparison of the lowest tongues for the model (dashed line) and the FHS (solid line).

**Figure 5.10** – Limites de stabilité d'un bain liquide vibré (issu de [110]). (a) Liquide non visqueux (b) Liquide visqueux. Les "langues" obtenues sont successivement "subharmoniques" (associées à une périodicité à la pulsation  $\Omega$ ) et "harmoniques" (associées à une périodicité à la pulsation de forçage  $2\Omega$ ).

instables de Faraday sont donc classés en deux catégories (données par  $\text{Im}[\sigma] = 0 \pmod{2\Omega}$  et  $\text{Im}[\sigma] = \Omega \pmod{2\Omega}$ ). Pour un bain liquide non visqueux, régi par l'équation de Mathieu, il existe des modes instables  $k_n$  dans la limite  $a_0 \rightarrow 0$ . Ils sont donnés par la relation de dispersion (des ondes sur un bain non vibré) pour toutes les fréquences multiples de la moitié de la fréquence de vibration du bain :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_0(k_n) = n\Omega. \quad (5.23)$$

Pour  $a_0$  non nul, il existe autour de chaque valeur de  $k_n$  un continuum de valeurs de  $k$  proches de  $k_n$  associées à des modes instables. Chaque mode instable est donné par le produit d'une exponentielle croissante et d'une fonction périodique à la pulsation  $\Omega$  (respectivement  $2\Omega$ ) si  $n$  est impair (si  $n$  est pair). Ces régions d'instabilités forment dans l'espace  $(k, a_0)$  des langues disjointes montrées dans la figure 5.10 (a).

Les courbes de limites de stabilité pour un fluide visqueux, établies par Kumar et Tuckerman [110], sont présentées à la figure 5.10 (b). Les langues d'instabilité ne croisent plus l'axe  $a_0 = 0$ . Pour chaque langue, la valeur minimale de l'accélération sur la courbe de limite de stabilité

correspond au seuil de déclenchement. La plus petite valeur de seuil est obtenue pour le mode à la fréquence moitié de la fréquence de forçage : c'est cette fréquence, dite fréquence de Faraday, qui est observée lorsqu'on passe au dessus du seuil de l'instabilité de Faraday en augmentant l'amplitude de la vibration du bain à une fréquence donnée. Notons d'ores et déjà que juste en dessous du seuil de l'instabilité, cette fréquence est également privilégiée : toute perturbation à cette fréquence sera amortie avec un temps caractéristique grand, inversement proportionnel à l'écart au seuil. Nous allons montrer au paragraphe suivant que cette émergence spontanée d'une onde stationnaire est associée au phénomène de conjugaison de phase observé dans nos expériences. Notons également que cette instabilité est source d'une limitation dans nos expériences de conjugaison de phase hydrodynamique : toutes doivent être réalisées sous le seuil de l'instabilité ou dans un temps inférieur à son déclenchement. En effet, si l'on vibre le bain au dessus du seuil de Faraday suffisamment longtemps, l'émergence d'une onde stationnaire perturbe l'observation des ondes émises et renvoyées par le processus de conjugaison de phase.

### Couplage entre les fréquences, pour un vecteur d'onde donné

Avant de présenter plus en détails la théorie de la conjugaison de phase dans les milieux modulés temporellement de manière périodique (dans cette partie) ainsi que des résultats plus généraux sur les ondes dans ces milieux modulés périodiquement (dans la partie 6), donnons une première idée générale des couplages fréquentiels mis en jeu. La modulation temporelle du milieu intervient dans l'équation de Mathieu (5.19) sous la forme d'un second membre comprenant un terme source en  $e^{-2i\Omega t}\tilde{\zeta}$ . Pour une composante du champ  $\tilde{\zeta}$  à la fréquence  $\omega$ , ce terme correspond donc à une source à la fréquence  $\omega - 2\Omega$ . L'effet de ce terme de modulation temporelle est donc de coupler la composante à la pulsation  $\omega$  du champ à celle à la pulsation  $\omega - 2\Omega$ . Le rôle particulier de la pulsation de Faraday  $\Omega$ , moitié de la pulsation de modulation du milieu, apparaît clairement : la composante à  $\Omega$  est la seule à être couplée par la modulation temporelle à la composante de pulsation opposée  $\Omega - 2\Omega = -\Omega$ , qui correspond à son retourné temporel. En effet, pour une onde monochromatique, le changement de  $\Omega$  en  $-\Omega$  est équivalent à un retournement temporel (changement de  $t$  en  $-t$ ). Ce couplage entre les composantes à  $\Omega$  et  $-\Omega$  est à l'origine de l'émergence d'une onde retournée (conjuguée en phase) observée dans nos expériences. Nous allons détailler le mécanisme de cette génération dans les sections suivantes. Remarquons par ailleurs que la modulation fait également intervenir un terme source en  $e^{2i\Omega t}\tilde{\zeta}$  qui couple une composante à  $\omega$  à une composante à  $\omega + 2\Omega$ . Ainsi, pour chaque vecteur d'onde  $\vec{k}$ , une composante à  $\omega$  est indirectement couplée, à des ordres divers, à toutes les composantes à  $\omega + 2n\Omega$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 5.3.2 Conjugaison de phase hydrodynamique dans l'approximation de faible vibration

### Régime de faible vibration du bain

Nous allons ici montrer comment l'équation de Mathieu permet de comprendre l'émergence, dans le régime de faible vibration du bain, d'une onde conjuguée en phase. Le régime de faible vibration du bain est donné par :

$$a_0 k \ll \omega_0(k)^2. \quad (5.24)$$

Nos expériences, pour lesquelles l'accélération est de l'ordre de la gravité, sont effectuées à la limite de ce régime. Ainsi, pour l'expérience de la figure 5.4 :



$$\epsilon = \frac{a_0 k}{\omega_0(k)^2} \sim 0.75. \quad (5.25)$$

Cependant, le régime perturbatif de faible vibration constitue le cadre théorique usuel de l'instabilité de Faraday et suffit à prédire la plupart des caractéristiques des ondes observées dans l'instabilité de Faraday (fréquence et longueur d'onde des ondes de Faraday, seuil d'instabilité pour les liquides de faible viscosité, etc.) [106]. Nous verrons que l'approximation de faible vibration conduit également à des résultats pertinents pour nos expériences de conjugaison de phase. L'étude de stabilité présentée au paragraphe précédent nous montre que dans ce régime limite, l'unique valeur du vecteur d'onde  $k$  donnant une instabilité (et donc l'unique  $k$  pouvant donner lieu à la croissance d'un nouveau mode) est le vecteur d'onde de Faraday, donné par :

$$\omega_0(k) = \Omega. \quad (5.26)$$

Nous allons retrouver ce résultat dans l'approche perturbative décrite ci-après.

### Méthode de l'expansion à deux variables

Posons :

$$\epsilon = \frac{a_0 k}{\omega_0(k)^2} \ll 1. \quad (5.27)$$

Nous utilisons ici la méthode multi-échelle d'expansion à deux variables telle que présentée dans [111] et [112]. Nous introduisons donc les variables :

$$\begin{cases} \xi = t \\ \eta = \epsilon t. \end{cases} \quad (5.28)$$

Le sens physique de cette méthode est de séparer les échelles de temps d'oscillations des modes instables et leurs temps de croissance (plus longs, parce que le forçage paramétrique est de faible amplitude). Par souci de simplicité nous omettrons la dépendance en  $\vec{k}$  de  $\tilde{\zeta}$  dans l'écriture :  $\tilde{\zeta}(t) = \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t)$ . Avec nos variables d'expansion :

$$\tilde{\zeta}(t) = \tilde{\zeta}(\xi, \eta). \quad (5.29)$$

L'équation de Mathieu (5.19) se réécrit ici :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial \xi^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial \xi \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial \eta^2} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \cos(2\Omega\xi)) \tilde{\zeta} = 0. \quad (5.30)$$

Nous effectuons désormais un développement de  $\tilde{\zeta}$  en puissances de  $\epsilon$  :

$$\tilde{\zeta}(\xi, \eta) = \tilde{\zeta}_0(\xi, \eta) + \epsilon \tilde{\zeta}_1(\xi, \eta) + O(\epsilon^2). \quad (5.31)$$

Nous obtenons donc les équations respectivement pour les ordres 0 et 1 en  $\epsilon$  :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_0}{\partial \xi^2} + \omega_0^2 \tilde{\zeta}_0 = 0, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_1}{\partial \xi^2} + \omega_0^2 \tilde{\zeta}_1 = -2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_0}{\partial \xi \partial \eta} - \omega_0^2 \tilde{\zeta}_0 \cos(2\Omega\xi). \quad (5.33)$$

La solution générale de l'équation (5.32) s'écrit :

$$\tilde{\zeta}_0(\xi, \eta) = A(\eta)e^{i\omega_0\xi} + B(\eta)e^{-i\omega_0\xi}. \quad (5.34)$$

En injectant cette forme dans l'équation (5.33), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_1}{\partial \xi^2} + \omega_0^2 \tilde{\zeta}_1 = -2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial \eta} e^{i\omega_0\xi} + 2i\omega_0 \frac{\partial B}{\partial \eta} e^{-i\omega_0\xi} - \frac{\omega_0^2 A(\eta)}{2} (e^{i(\omega_0+2\Omega)\xi} + e^{i(\omega_0-2\Omega)\xi}) - \frac{\omega_0^2 B(\eta)}{2} (e^{-i(\omega_0+2\Omega)\xi} + e^{-i(\omega_0-2\Omega)\xi}). \quad (5.35)$$

Les termes en  $e^{i\omega_0\xi}$  et  $e^{-i\omega_0\xi}$  sont appelés résonnants ou séculaires car ils conduisent à une solution linéairement croissante en temps (avec  $\xi = t$ ), incompatible avec l'hypothèse de calcul que  $\tilde{\zeta}_1$  est très inférieur à  $\tilde{\zeta}_0$ . Ainsi, la solution  $\tilde{\zeta}_0$  donnée par (5.34) correspond à la solution d'ordre le plus bas, si les coefficients  $A$  et  $B$  vérifient les équations dites de "flux lents", qui annulent les termes séculaires. Cette condition de non résonnance est triviale pour  $\omega_0 \neq \Omega$  :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\eta} = 0 \\ \frac{dB}{d\eta} = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Nous retrouvons le rôle particulier joué par la fréquence de Faraday car si  $\omega_0 = \Omega$ , les équations de flux lents sont non triviales :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\eta}(\eta) = i\Omega \frac{B(\eta)}{4} \\ \frac{dB}{d\eta}(\eta) = -i\Omega \frac{A(\eta)}{4}. \end{cases} \quad (5.37)$$

Nous obtenons des équations couplées pour les amplitudes des deux composantes du champ à l'ordre 0, dont nous montrerons dans le paragraphe suivant qu'elles correspondent aux équations d'amplitude de la conjugaison de phase optique. Ces équations peuvent être découplées :

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{d\eta^2} = \frac{\Omega^2 A}{16} \\ \frac{d^2 B}{d\eta^2} = \frac{\Omega^2 B}{16}. \end{cases} \quad (5.38)$$

La solution générale s'écrit donc :

$$\begin{cases} A(\eta) = \alpha e^{\frac{\Omega\eta}{4}} + \beta e^{-\frac{\Omega\eta}{4}} \\ B(\eta) = i \left( -\alpha e^{\frac{\Omega\eta}{4}} + \beta e^{-\frac{\Omega\eta}{4}} \right), \end{cases} \quad (5.39)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont constants.

Si nous revenons à l'écriture du terme dominant en fonction de la coordonnée du temps, nous obtenons :

$$\tilde{\zeta}_0(t) = \left( \alpha e^{\frac{\epsilon\Omega t}{4}} + \beta e^{-\frac{\epsilon\Omega t}{4}} \right) e^{i\Omega t} + i \left( -\alpha e^{\frac{\epsilon\Omega t}{4}} + \beta e^{-\frac{\epsilon\Omega t}{4}} \right) e^{-i\Omega t}. \quad (5.40)$$

### Génération de l'onde retournée

L'équation (5.40) que nous avons obtenue mérite quelques commentaires. La composante de Fourier du champ d'onde de surface s'y écrit comme la somme de deux termes respectivement en  $e^{i\Omega t}$  et  $e^{-i\Omega t}$ . Les champs d'ondes correspondant à chacun de ces deux termes correspondent à deux ondes de fréquences opposées en écriture complexe. Physiquement, cela signifie que ces ondes oscillent à la même fréquence mais dans des directions de propagations opposées : l'une est le retourné temporel de l'autre ( $e^{-i\Omega t} = e^{i\Omega(-t)}$ ). Notons l'analogie avec le MTI, dont le bain vibré peut être vu comme une variante monofréquentielle : le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est conservé, mais on fait apparaître une composante de fréquence négative (qui correspond à une onde se propageant en sens inverse). Par ailleurs, chacune de ses ondes est modulée en temps par un facteur d'amplitude qui est une somme d'exponentielles (lentement) croissantes et décroissantes. Le temps caractéristique de croissance (ou de décroissance) des ondes est en  $1/4\epsilon\Omega$  donc très supérieur à la période dans notre approximation ( $\epsilon \ll 1$ ).

Supposons qu'initialement, comme dans les expériences, nous envoyons dans le milieu modulé temporellement une onde à la fréquence de Faraday se propageant dans une direction donnée. Pour simplifier, considérons une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  :

$$\zeta(\vec{r}, t) = h_0 e^{i(\Omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}. \quad (5.41)$$

Sa transformée de Fourier spatiale s'écrit donc  $\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = \delta(\vec{k} - \vec{k}_0) h_0 e^{i\Omega t}$ . Autrement dit, la composante de Fourier spatiale du champ d'onde initial au vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  est donnée par :  $\tilde{\zeta}_{0,\text{initial}}(t) = h_0 e^{i\Omega t}$ . Cela correspond à la condition initiale :

$$\begin{cases} A(0) = h_0 \\ B(0) = 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

On en déduit :

$$\tilde{\zeta}_0(t) = h_0 \left( \text{ch}\left(\frac{\epsilon\Omega t}{4}\right) e^{i\Omega t} - \text{ish}\left(\frac{\epsilon\Omega t}{4}\right) e^{-i\Omega t} \right). \quad (5.43)$$

La vibration du bain amplifie l'onde plane initiale en même temps qu'elle fait naître une onde plane de fréquence négative en  $e^{-i\Omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ , conjuguée en phase de l'onde initiale. Un tel effet d'amplification est également observé pour la conjugaison de phase optique [5]. Notons cependant que ce modèle, qui suppose un régime linéaire des ondes de surface, prédit une croissance exponentielle des deux ondes (initiale et retournée) à temps long : il ne décrit pas l'effet de saturation des amplitudes des champs d'ondes induite par l'effet des non-linéarités hydrodynamiques négligées.

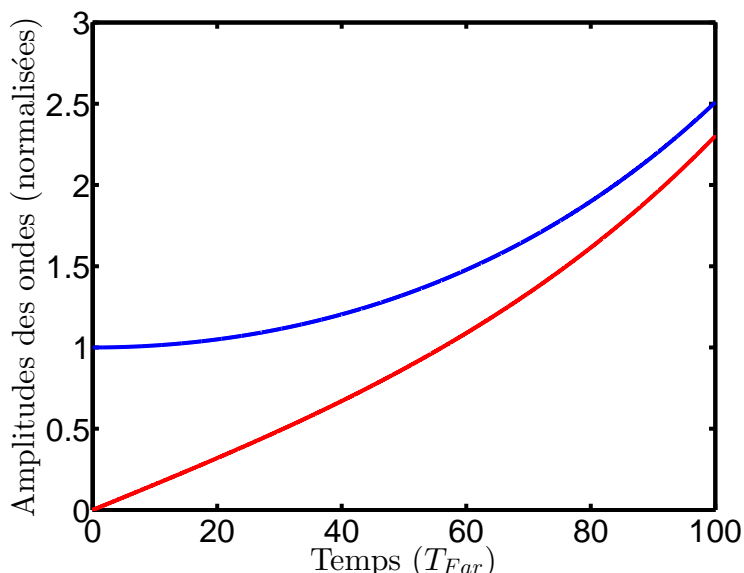
Notons que le raisonnement effectué ici ne dépend pas de la forme de l'onde initiale. Cependant, il ne s'applique qu'aux ondes à la fréquence de Faraday (moitié de la fréquence de modulation du milieu). Ainsi, les vecteurs d'ondes mis en jeu doivent vérifier :

$$\omega_0(\vec{k}) = \Omega, \quad (5.44)$$

où  $\omega_0$  désigne toujours la relation de dispersion des ondes de surface.

Le mode se propageant vers l'avant à la pulsation  $\Omega$  échange de l'énergie avec le mode se propageant vers l'arrière de même fréquence. Notons que dans le modèle prévoit qu'à temps long les amplitudes des deux modes sont égales :

$$\zeta_{0,\text{arrière}}(t) = -i\zeta_{0,\text{avant}}(t). \quad (5.45)$$



**Figure 5.11** – Croissance des amplitudes des ondes originale (bleu) et retournée (rouge). Dans chaque cas, l'enveloppe de la transformée de Fourier du champ d'onde à la longueur d'onde de Faraday est représentée. Les amplitudes sont normalisées par la valeur de l'amplitude de l'onde initiale. Initialement, l'onde retournée est nulle. Sous l'effet de la modulation, son amplitude augmente. L'onde initiale est parallèlement amplifiée.

Nous retrouvons bien l'émergence d'une onde stationnaire observée expérimentalement (dans le bain profond). Notons également que l'on retrouve, comme dans le cas du MTI et comme pour la conjugaison de phase optique, un déphasage de  $\pi/2$  entre l'onde avant et l'onde retournée.

### 5.3.3 Équivalence à l'approximation d'enveloppe temporelle lentement variable

Remarquons l'analogie formelle entre les équations de flux lent (5.37) et les équations d'amplitude (5.13) obtenues pour la conjugaison de phase optique. Afin de dresser une comparaison directe entre les conjugaisons de phase optique et hydrodynamique, nous présentons ici un formalisme plus proche de celui de l'optique.

Considérons initialement (" $t = 0$ ") une onde signal (plane par souci de simplicité) :

$$\zeta_s = A_s e^{i(\Omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r})}. \quad (5.46)$$

On entend par là que l'onde de sonde, se propageant jusqu'alors dans un milieu libre, sera soumise à l'action de la vibration du bain à partir de  $t = 0$ . Cela décrit l'expérience où l'onde est générée dans un bain non vibré qu'on met en vibration quelques temps après le début de la propagation. On peut également dans une première approximation décrire l'expérience pour laquelle une zone restreinte du milieu est soumise à une vibration effective en considérant que ce temps initial modélise le moment d'entrée du paquet d'onde original dans la zone à gravité effective modulée.

On va montrer qu'on obtient une autre onde, dont on va montrer qu'elle est essentiellement la retournée temporelle de la première :

$$\zeta_c = A_c e^{i(-\Omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r})}. \quad (5.47)$$

Nous appliquons le même raisonnement que pour obtenir les équations de la conjugaison de phase

optique, présenté à la section 5.1. Le champ d'onde total (réel)  $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_s + \zeta_s^* + \zeta_c + \zeta_c^*)$  vérifie l'équation de Mathieu (5.19). Comme en optique, cette décomposition est une approximation : la somme de deux ondes planes est, en toute rigueur, solution de l'équation des ondes libres, et non de l'équation de Mathieu. On supposera simplement ici que les amplitudes  $A_s$  et  $A_c$  sont des fonctions lentement variables du temps, et on négligera les autres contributions au champ d'onde total. Par l'effet de la modulation sinusoïdale à  $2\Omega$  sur l'onde signal, on peut obtenir une composante de même vecteur d'onde et de fréquence opposée  $-\Omega$ . En négligeant les contenus spectraux introduits par les évolutions temporelles des amplitudes  $A_s(t)$  et  $A_c(t)$ , on peut séparer les différentes contributions au champ total en fonction de leurs fréquences et vecteurs d'ondes et ainsi obtenir une équation pour chaque composante. L'évolution de la composante  $\zeta_c$  de fréquence  $-\Omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_s$  est ainsi gouvernée par l'équation :

$$\frac{\partial^2 \zeta_c}{\partial t^2} + c_0^2 k_s^2 \zeta_c = -\frac{a_0}{2} e^{-2i\Omega t} k_s \zeta_s. \quad (5.48)$$

De même, l'onde signal, de vecteur d'onde  $\vec{k}_s$  et de fréquence  $\Omega$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial t^2} + c_0^2 k_s^2 \zeta_s = -\frac{a_0}{2} e^{2i\Omega t} k_s \zeta_c. \quad (5.49)$$

Notons l'analogie avec les équations (5.9) obtenues pour la conjugaison de phase en optique. Seule différence : ici l'émergence d'un retournement temporel est décrit par une transformation de  $\Omega$  en  $-\Omega$  plutôt que par une conjugaison de la partie spatiale de l'onde, ce qui est rigoureusement équivalent (voir partie 1).

En remplaçant les composantes du champ par leurs expressions on obtient les équations d'amplitudes :

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_c}{dt^2} - 2i\Omega \frac{dA_c}{dt} = -\frac{a_0}{2} k_s A_s(t) \\ \frac{d^2 A_s}{dt^2} + 2i\Omega \frac{dA_s}{dt} = -\frac{a_0}{2} k_s A_c(t). \end{cases} \quad (5.50)$$

Ici, nous faisons comme en optique l'hypothèse d'enveloppe lentement variable. Cette approximation est valable dans le régime de faible vibration : physiquement, cela revient à considérer que les ondes observées sont approximativement des ondes planes telles qu'elles existeraient dans un bain non vibré, dont l'amplitude est faiblement perturbée par la vibration du bain et varie lentement au cours du temps. Cette hypothèse donne pour les amplitudes :

$$\begin{cases} \left| \frac{d^2 A_c}{dt^2} \right| \ll \left| \Omega \frac{dA_c}{dt} \right| \\ \left| \frac{d^2 A_s}{dt^2} \right| \ll \left| \Omega \frac{dA_s}{dt} \right| \end{cases} \quad (5.51)$$

Notons que l'on peut évaluer de manière très simple la validité de cette hypothèse dans nos expériences. L'hypothèse d'enveloppe lentement variable est vérifiée si la période d'oscillation de Faraday  $\Omega^{-1}$  est très petite devant le temps caractéristique de croissance de l'amplitude attendu, que l'on notera  $\mu^{-1}$ . Ce dernier dépend de manière évidente de l'accélération. Au seuil de l'instabilité de Faraday, celui compense tout juste la dissipation visqueuse (nous y reviendrons à la section suivante). Ainsi, dans nos expériences, effectuées proches du seuil de l'instabilité,  $\mu \sim \nu k^2$ .

On peut ainsi montrer que nous sommes à la limite du régime d'enveloppe lentement variable :

$$\frac{\Omega^{-1}}{\mu^{-1}} \sim \frac{\nu k^2}{\Omega} \sim \frac{20 \cdot 10^{-6} (2\pi)^2}{(6 \cdot 10^{-3})^2 2\pi 30} \sim 0.1 \quad (5.52)$$

Dans cette approximation, on retrouve les équations couplées d'amplitudes (5.37) de la méthode d'expansion à deux variables :

$$\begin{cases} \frac{dA_c}{dt} = -i \frac{A_s}{\tau} \\ \frac{dA_s}{dt} = i \frac{A_c}{\tau} \\ \tau = \frac{a_0 k_s}{4\Omega} = \frac{\Omega \epsilon}{4}. \end{cases} \quad (5.53)$$

Cette description en enveloppe temporelle lentement variable conduit donc exactement au même résultat que l'expansion à deux variables présentée à la section précédente. Comme précédemment, si on part d'une onde signal d'amplitude  $A_0$ , on obtient :

$$\zeta(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ A_0 \text{ch} \left( \frac{t}{\tau} \right) e^{i\Omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r}} - i A_0 \text{sh} \left( \frac{t}{\tau} \right) e^{-i\Omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r}} \right] \quad (5.54)$$

Rappelons qu'à temps long :

$$A_c(t) \sim -i \frac{A_0}{2} e^{\frac{t}{\tau}} \sim -i A_s(t), \quad (5.55)$$

l'amplitude de l'onde initiale et celle de l'onde retournée tendent à être égales et on obtient bien une onde stationnaire, qui peut se décomposer en une onde proportionnelle à l'onde initiale et en une onde rétropropagée, qui est proportionnelle au retourné temporel de l'onde initiale, avec un déphasage de  $\pi/2$ .

### 5.3.4 Équivalence à l'approximation d'enveloppe spatiale lentement variable dans le cas de l'eau peu profonde

Nous avons réalisé nos développements théoriques en faisant l'hypothèse d'un régime d'eau profonde car c'est ce régime qui correspond aux conditions de nos expériences. En effet, dans nos expériences, la hauteur d'eau  $h$  est supérieure à 5 mm, la longueur d'onde de Faraday est de l'ordre de 5 mm, d'où :

$$\text{th}(hk) = \text{th} \left( \frac{5 \cdot 10^{-3} 2\pi}{5 \cdot 10^{-3}} \right) \approx 1. \quad (5.56)$$

Cependant, un cas d'école théorique intéressant est le régime limite des eaux de faible profondeur. Dans ce régime,  $hk \ll 1$  et :

$$\text{th}(hk) \approx hk \quad (5.57)$$

Les expériences n'ont pu être réalisées dans ce régime car il est associé à une forte dissipation. Dans ce régime, l'équation des ondes peut s'écrire dans l'espace réel. Les ondes gravitaires à la surface d'un fluide idéal non visqueux sont décrites par l'équation de d'Alembert (c.f. annexe B). Pour un bain vibré :

$$c_0^2 \Delta \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a_0 h \cos(2\Omega t) \Delta \zeta. \quad (5.58)$$

Le fait que l'équation des ondes puisse s'écrire dans l'espace réel nous permet d'envisager de décrire, comme usuellement en optique, les ondes dans le milieu "non linéaire" (ici le milieu où la gravité effective est modulée) par des ondes planes modulées par des enveloppes spatiales (plutôt

que temporelles). De même qu'à la section 5.1.2, nous allons, pour simplifier l'écriture, désigner par  $z$  la direction de propagation de l'onde de sonde. On envoie en entrée du milieu modulé ( $z = 0$ ) une onde de sonde :

$$\zeta_s = A_s e^{i(\Omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r})}. \quad (5.59)$$

On va de même qu'en optique montrer qu'on obtient une autre onde, dont on va montrer qu'elle est conjuguée en phase :

$$\zeta_c = A_c e^{i(\Omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})}. \quad (5.60)$$

On fait l'hypothèse que  $A_s$  et  $A_c$  sont des amplitudes lentement variables. Le champ d'onde total est donné (approximativement) par  $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_s + \zeta_s^* + \zeta_c + \zeta_c^*)$  et vérifie l'équation (5.58). En négligeant les contenus spectraux introduits par les évolutions spatiales des amplitudes  $A_s$  et  $A_c$ , on peut séparer les différentes contributions au champ total en fonction de leurs vecteurs d'ondes et obtenir une équation pour chaque composante. L'évolution de la composante  $\zeta_c$  de vecteur d'onde  $-\vec{k}_s$  est ainsi gouvernée par l'équation :

$$c_0^2 \Delta \zeta_c - \frac{\partial^2 \zeta_c}{\partial t^2} = a_0 h e^{2i\Omega t} \Delta \zeta_s^*. \quad (5.61)$$

De même, l'onde de sonde vérifie :

$$c_0^2 \Delta \zeta_c - \frac{\partial^2 \zeta_c}{\partial t^2} = a_0 h e^{2i\Omega t} \Delta \zeta_s^*. \quad (5.62)$$

Notons l'analogie formelle avec les équations (5.9) obtenues pour la conjugaison de phase en optique. La différence principale est que le terme source est donné par un laplacien du champ conjugué plutôt que par le champ conjugué lui-même. L'hypothèse d'enveloppe lentement variable donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial^2 A_c}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_s \frac{\partial A_c}{\partial z} \right| \\ \left| \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_s \frac{\partial A_s}{\partial z} \right| \end{array} \right. \quad (5.63)$$

On obtient alors le système d'équations couplées pour les amplitudes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ic_0^2 k_s \frac{\partial A_c}{\partial z} = a_0 h \left( -k_s^2 A_s^* + 2ik_s \frac{\partial A_s^*}{\partial z} \right) \\ -2ic_0^2 k_s \frac{\partial A_s}{\partial z} = a_0 h \left( -k_s^2 A_c^* - 2ik_s \frac{\partial A_c^*}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (5.64)$$

On peut découpler ces équations pour obtenir les solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} A_c(z) = \alpha e^{i \frac{a_0^2 h^2}{2c_0^4} k_s \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}} \right) z} + \beta e^{i \frac{a_0^2 h^2}{2c_0^4} k_s \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}} \right) z} \\ A_s(z) = \alpha' e^{i \frac{a_0^2 h^2}{2c_0^4} k_s \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}} \right) z} + \beta' e^{i \frac{a_0^2 h^2}{2c_0^4} k_s \left( -1 - \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}} \right) z} \end{array} \right., \quad (5.65)$$

où, d'après les équations de couplage entre  $A_c$  et  $A_s$  :

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}}}{\frac{c_0^2}{a_0 h} + \frac{a_0 h}{c_0^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}}\right)} \beta^* \\ \beta' = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}}}{\frac{c_0^2}{a_0 h} + \frac{a_0 h}{c_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}}\right)} \alpha^*. \end{cases} \quad (5.66)$$

Envisageons désormais les conditions aux limites du milieu modulé de taille finie. De même qu'en optique, en faisant l'hypothèse qu'un régime permanent peut-être atteint, l'amplitude de l'onde de sonde est imposée en entrée ( $z = 0$ ) par sa valeur envoyée depuis le milieu libre, tandis que l'amplitude de l'onde conjuguée est supposée nulle en sortie du milieu ( $z = L$ ), puisqu'elle est générée uniquement au sein du milieu et se propage dans la direction des  $z$  négatifs :

$$\begin{cases} A_s(0) = A_0 \\ A_c(L) = 0. \end{cases} \quad (5.67)$$

En utilisant les expressions (5.65) et (5.66) trouvées précédemment, on obtient qu'il est renvoyé par le milieu modulé l'onde retournée :

$$\begin{cases} \zeta_c = A_c(0) e^{i\Omega t + k_s z} \\ A_c(0) = i \frac{a_0^3 h^3}{c_0^6 \tan\left(\frac{a_0^2 h^2}{c_0^4} k_s \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}} L\right)} \sqrt{1 + \frac{c_0^4}{a_0^2 h^2}} A_0^*. \end{cases} \quad (5.68)$$

Cette onde est proportionnelle au conjugué de phase de l'onde de sonde. Notons que dans le cas d'école considéré ici des ondes en eau peu profonde, l'analogie avec le formalisme usuel de la conjugaison de phase en optique est parfaite (c.f. section 5.1.2 notamment l'équation (5.16)). Remarquons également qu'ici encore, le coefficient de proportionalité entre le conjugué de l'onde de sonde et l'onde retournée est imaginaire pur, donc on attend, de comme dans le retournement temporel instantané par MTI et comme dans la conjugaison de phase optique, un déphasage de  $\pi/2$  entre les deux ondes.

Ainsi, nous avons, à partir des équations des ondes de surface dans les bains vibrés, établi une description théorique du phénomène de conjugaison de phase observé expérimentalement à la section précédente. Comme en optique, une description des ondes signal et conjuguées en phase par des ondes planes avec une enveloppe lentement variable, et interagissant via une modulation temporelle de la célérité du milieu, peut être utilisée. Ces enveloppes lentement variables peuvent être supposées spatiales dans le cas des ondes gravitaires en eau peu profonde et l'analogie formelle à la description de l'optique est alors parfaite. Alternativement, les ondes peuvent être décrites de façon équivalente à l'aide d'enveloppes temporelles. Toutes ces descriptions équivalentes aboutissent au même résultat et expliquent l'émergence de l'onde retournée dans le processus de conjugaison de phase et l'émergence d'une onde stationnaire dans le milieu modulé temporellement périodiquement. Cette émergence d'une onde stationnaire, générée à partir de l'onde initiale propagative, est, de manière évidente, étroitement liée à l'émergence d'une onde stationnaire dans l'instabilité de Faraday. La section suivante continuera l'étude de la conjugaison de phase dans le cas des ondes



---

de surface en mettant en évidence et en expliquant ce lien étroit.



## 5.4 Conjugaison de phase hydrodynamique, instabilité de Faraday et Miroir temporel instantané

Cette section complètera l'étude théorique et expérimentale de la conjugaison de phase hydrodynamique. Nous étudierons le rôle de la viscosité dans nos expériences de conjugaison de phase. Nous établirons ensuite explicitement les liens entre la conjugaison de phase hydrodynamique et l'instabilité de Faraday dans les bains vibrés. Enfin, nous relierons ces deux concepts au Miroir temporel instantané.

### 5.4.1 Effet de la dissipation visqueuse : un seuil d'amplification

#### Une atténuation temporelle

Revenons à l'étude du cas correspondant à nos expériences des ondes en eau profonde dans les bains vibrés. Nous avons jusqu'ici négligé la viscosité du liquide, ce qui nous a conduit à décrire les ondes par une équation de Mathieu (5.19). Cette hypothèse conduit à une bonne approximation des résultats pour une viscosité cinématique  $\nu$  et un vecteur d'onde  $k$  de l'onde considérée suffisamment faibles [110, 113] :

$$\nu k^2 \ll \omega_0(k) = \sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3}. \quad (5.69)$$

Dans le cas de l'huile silicone 20 cSt, pour une fréquence de 30 Hz,  $\nu k^2/\omega_0(k) \sim 0,1$ . Nos expériences avec de l'huile sont donc proches de la limite du domaine de validité de l'approximation. L'approximation est encore mieux vérifiée dans nos expériences avec de l'eau (de viscosité 20 fois moindre). Cependant, notons que même pour un liquide faiblement visqueux comme l'eau, la dissipation visqueuse induit un effet qualitatif notable : elle introduit un seuil de déclenchement de l'instabilité de Faraday. Dans la limite de faible viscosité énoncée ci-dessus, un terme correctif d'atténuation peut être ajouté à l'équation de Mathieu pour prendre en compte l'atténuation visqueuse [110] :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2}(k_x, k_y, t) + 4\nu k^2 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + \omega_0^2(k) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = -a_0 k \cos(2\Omega t) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t). \quad (5.70)$$

On peut alors se ramener au cas non visqueux en posant :

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = e^{-2\nu k^2 t} \tilde{\zeta}_{\text{id}} \\ \omega_{\text{id}}(k) = \sqrt{\omega_0^2(k) - 4\nu^2 k^4} \\ a_{0,\text{id}} = a_0 \frac{\omega_0^2(k)}{\omega_{\text{id}}^2(k)}. \end{cases} \quad (5.71)$$

Avec ces changements de variables,  $\tilde{\zeta}_{\text{id}}$  vérifie une équation de Mathieu comme dans le cas non visqueux (5.19). Dans nos expériences où la viscosité est relativement faible,  $\omega_{\text{id}}(k)$  est proche de  $\omega_0(k)$ . Ainsi, l'analyse que nous avons effectuée précédemment en négligeant la viscosité reste tout à fait valable. Il suffit de multiplier le résultat idéal sans viscosité par l'exponentielle décroissante  $e^{-2\nu k^2 t}$  pour prendre en compte l'effet de la viscosité.

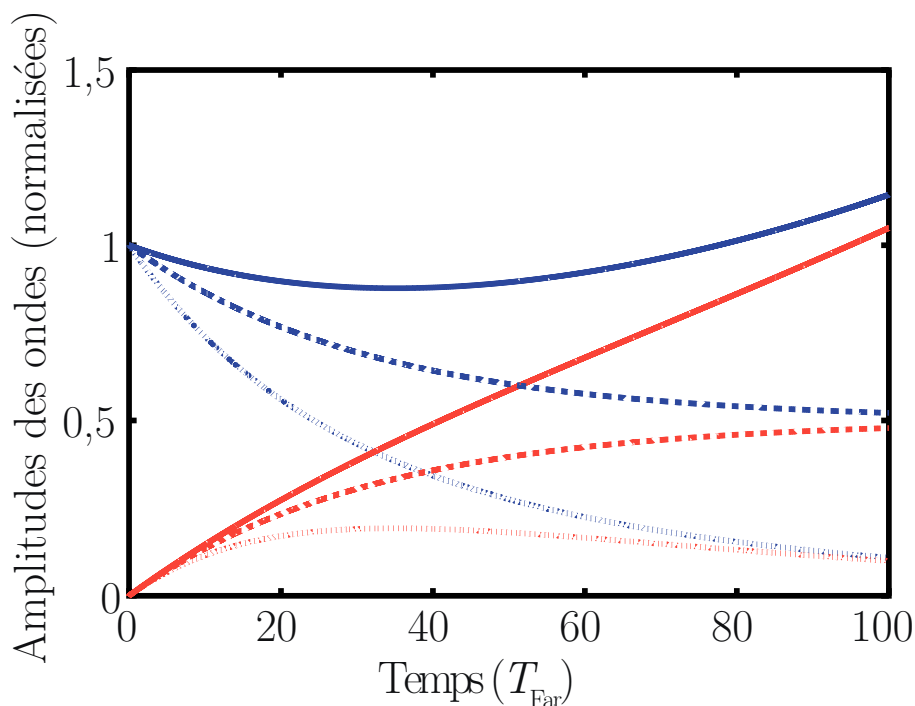
### "Stationnarisation" des ondes et seuil effectif d'amplification à la fréquence de Faraday

Revenons au cas d'une onde plane initiale de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  associé à la fréquence  $\Omega$ . À partir de l'instant  $t = 0$ , elle est soumise à une modulation temporelle périodique de la célérité du milieu (le bain est mis en vibration). D'après le résultat obtenu précédemment dans le cas non visqueux (voir équation (5.43)), on obtient :

$$\tilde{\zeta} = h_0 e^{-2\nu k_0^2 t} \left( \operatorname{ch} \left( \frac{a_0 k_0 t}{4\Omega} \right) e^{i\Omega t} - \operatorname{ish} \left( \frac{a_0 k_0 t}{4\Omega} \right) e^{-i\Omega t} \right), \quad (5.72)$$

où  $k_0 = |\vec{k}_0|$ . Deux comportements sont alors possibles :

- si  $a_0 > 8\Omega\nu k_0$  l'onde initiale (en  $e^{i\Omega t}$ ) et l'onde retournée (en  $e^{-i\Omega t}$ ) sont toutes deux d'amplitudes croissantes aux temps longs car amplifiées sous l'effet dominant de la modulation de la gravité. Ce comportement est qualitativement identique au cas non visqueux.
- si  $a_0 < 8\Omega\nu k_0$  l'onde initiale (en  $e^{i\Omega t}$ ) et l'onde retournée (en  $e^{-i\Omega t}$ ) sont toutes deux atténuées aux temps longs et leurs amplitudes tendent vers 0. Malgré cela, notons que la viscosité n'efface pas le retournement temporel monochromatique : l'onde retournée est tout de même générée avant d'être atténuée (c.f. figure 5.12).



**Figure 5.12** – Évolution des amplitudes des ondes initiale (bleu) et retournée (rouge). Dans chaque cas, l'amplitude représentée est l'enveloppe de la transformée de Fourier du champ d'onde à la longueur d'onde de Faraday. Les évolutions sont comparées pour différentes accélérations du bain : en-dessous du seuil d'amplification (lignes pointillées), au seuil (lignes de tirets) ou au-dessus du seuil d'amplification (lignes continues). Pour les lignes pointillées,  $a_0 = 4\Omega\nu k_0$ . Pour les lignes de tirets,  $a_0 = 8\Omega\nu k_0$ . Pour les lignes continues,  $a_0 = 16\Omega\nu k_0$ .

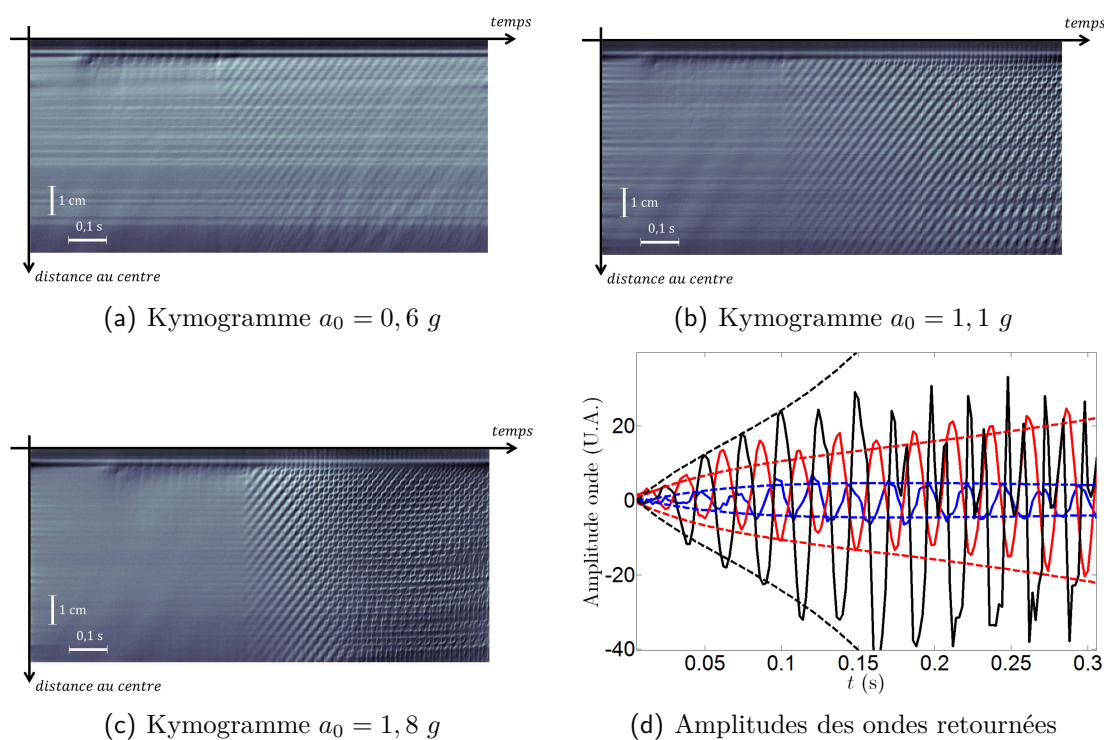
La figure 5.12 montre l'évolution des ondes initiale et rétropropagée par l'effet de la modulation du bain en prenant en compte la viscosité. La composante en  $e^{i\Omega t}$ , correspondant à la propagation de l'onde initiale vers l'avant, est représentée en bleu et celle en  $e^{-i\Omega t}$ , correspondant à l'onde rétropropagée, est représentée en rouge. Cette figure est à comparer à la courbe équivalente dans le cas non visqueux présentée à la figure 5.11. L'évolution de l'amplitude de chacune de ces deux

ondes est représentée pour trois valeurs différentes de l'accélération  $a_0$  du bain. Le cas d'une vibration du bain au-dessus du seuil d'amplification ( $a_0 > 8\Omega\nu k_0$ ) est représenté par les lignes continues. Celui d'une vibration du bain juste au seuil d'amplification ( $a_0 = 8\Omega\nu k_0$ ) est représenté en lignes de tirets. Enfin, le cas d'une vibration du bain à une accélération en-dessous du seuil ( $a_0 < 8\Omega\nu k_0$ ) est représenté en lignes pointillées. Au-dessus du seuil, l'évolution des amplitudes des ondes initiales et rétropropagées est similaire à celle obtenue en absence de viscosité : elles croissent toutes les deux à temps long sous l'effet dominant de l'amplification paramétrique. Notons également qu'on observe, comme dans le cas non visqueux que les amplitudes des deux ondes tendent également à devenir égales. En-dessous du seuil, l'amplitude de l'onde dans la direction de propagation initiale décroît sous l'effet dominant de la viscosité. Cette décroissance est également observée pour l'amplitude de l'onde rétropropagée à temps longs, mais celle-ci passe d'abord par une phase de croissance pendant laquelle elle est générée par la vibration du bain depuis zéro. Ces résultats montrent bien qu'il y a apparition d'une onde conjuguée en phase *même en-dessous du seuil d'amplification*. Notons qu'ici encore, les deux ondes tendent à avoir la même amplitude à temps long. Le cas critique d'une accélération au seuil est particulièrement intéressant. Cela correspond à la situation où le taux d'amplification de chacune des ondes par la modulation du milieu est exactement égal au taux d'atténuation par dissipation visqueuse. La puissance fournie par le pot vibrant au système compense exactement la puissance perdue par dissipation visqueuse et à temps longs, les amplitudes des ondes sont constantes. L'énergie totale du champ d'onde est conservée. Cependant, on observe à temps courts une décroissance de l'amplitude de l'onde se propageant dans la direction initiale, associée à un transfert d'énergie depuis l'onde initiale vers l'onde rétropropagée. À temps longs, on observe que les amplitudes des deux ondes tendent vers la même valeur, égale à la moitié de l'amplitude de l'onde initiale. L'effet de la modulation temporelle au seuil est donc de "stationnariser" une onde initialement propagative en transférant la moitié de son énergie vers une onde retournée. Notons que cet effet de "stationnarisation", associé à la génération d'une onde conjuguée en phase, dont l'amplitude tend vers la même valeur que celle de l'onde initiale à temps longs, est également attendu pour tout autre valeur de l'accélération. En effet, nous observons que les amplitudes des ondes initiales et rétropropagées tendent toujours à se confondre. Un effet d'amplification (si l'accélération est au-dessus du seuil) ou d'atténuation (si l'accélération est en-dessous du seuil) vient s'ajouter alors à la "stationnarisation".

### Comparaison avec l'expérience

Le phénomène d'amplification prédit par le modèle théorique est observé expérimentalement. Le kymogramme de la figure 5.8 de la section 5.2 montre une croissance de l'amplitude de l'onde stationnaire formée dans une expérience de conjugaison de phase hydrodynamique. L'existence d'un seuil d'accélération du bain pour ce phénomène d'amplification a été mise en évidence par des expériences présentées à la figure 5.13.

La configuration de l'expérience est la même qu'à la section 5.2.3 : un paquet d'onde initial est envoyé sur un bain non vibré. Quelques temps après son émission, la vibration du bain est mise en route, et on observe l'apparition d'une onde rétropropagée conduisant aux temps longs à une onde stationnaire. Les figures 5.13 (a), (b) et (c) sont des kymogrammes filtrés, réalisés à partir de points situés sur un rayon de l'onde circulaire initiale, pour différentes valeurs de l'accélération du bain.  $a_0$  vaut respectivement  $6 \text{ ms}^{-2}$  pour la figure (a),  $11 \text{ ms}^{-2}$  pour la figure (b) et  $18 \text{ ms}^{-2}$  pour la figure (c). Dans ces expériences, un train d'onde (14 cycles à 40 Hz) est émis et la vibration du bain (à 80 Hz) est mise en route immédiatement après la fin de l'émission. Un masque a été appliqué dans l'espace de Fourier, annulant toute composante correspondant à des motifs orientés



**Figure 5.13** – Évolution des ondes rétropropagées dans une expérience de miroir temporel à conjugaison de phase, pour différentes valeurs de l'accélération du bain. (a), (b) et (c) : diagrammes spatiotemporels filtrés. Ils sont réalisés à partir du film de l'expérience en choisissant des points situés sur un rayon partant du centre des ondes circulaires observées. Le filtre est un masque dans l'espace de Fourier qui supprime tout motif descendant vers la droite et permet d'isoler les ondes convergentes, apparaissant sous la forme de bandes montant régulièrement vers la droite. La diminution du contraste sur la droite du kymogramme (a) traduit l'atténuation des ondes aux temps longs pour une accélération du bain de  $0,6 g$ . L'augmentation du contraste sur la droite des kymogrammes (b) et (c) traduit l'amplification des ondes pour des accélérations du bain plus élevées. (d) : Évolution des amplitudes des ondes pour chacune des trois accélérations (bleu :  $0,6 g$ , rouge :  $1,1 g$ , noir :  $1,8 g$ ). Les traits pleins correspondent aux profils temporels tirés des kymogrammes à  $2,1$  cm du centre du motif. Les traits pointillés sont des prédictions théoriques pour l'enveloppe de l'amplitude des ondes, détaillées à la section 5.4.1.

en descendant vers la droite. Cela permet de filtrer le paquet d'ondes initial divergent. Seules les ondes rétropropagées sont donc visibles. Elles correspondent aux bandes montant vers la droite et apparaissent à l'instant de mise en route du bain. La bande horizontale en haut des kymogrammes correspond à la partie du champ d'onde cachée par le dispositif souffleur, au point d'émission de l'onde initiale. On s'éloigne ainsi de ce point d'émission lorsqu'on descend le long du kymogramme. Le filtre ne supprime pas toutes les traces de l'émission : les 14 cycles de l'onde initiale sont encore visibles sous formes de traces verticales résiduelles en haut des différents kymogrammes. On observe un seuil d'amplification. Pour le kymogramme (a), correspondant à une accélération en-dessous du seuil, on observe une diminution du contraste peu après l'apparition des ondes rétropropagées, traduisant une atténuation de ces ondes aux temps longs. Pour les kymogrammes (b) et (c), correspondant à des accélérations au-dessus du seuil, le contraste augmente après l'apparition des ondes rétropropagées, traduisant une amplification de ces dernières. Des effets de saturation du contraste liés à la méthode de visualisation du champ d'onde sont visibles dans la partie la plus à droite du kymogramme (b) et sur une large portion à droite sur le kymogramme (c). Ils conduisent à un brouillage du motif de bandes obliques et correspondent à des amplitudes d'ondes trop grandes pour être visualisées correctement par notre dispositif. Leur apparition témoigne

donc du fait que les ondes générées ont atteint une très forte amplitude.

La figure 5.13 (d) montre l'évolution des amplitudes des ondes rétropropagées pour chacune des accélérations, à partir du moment où elles apparaissent. Les courbes pleines sont tirées respectivement d'une coupe horizontale des kymogrammes (a) (bleu), (b) (rouge) et (c) (noir). Elles correspondent approximativement à la pente du champ d'onde retourné, observée à 2,1 cm du point d'émission. Les traits pointillés correspondent à des prédictions théoriques pour l'enveloppe, ajustées à partir de la formule (5.72). Les paramètres d'ajustement sont l'amplitude  $h_0$  et l'origine des temps, correspondant au début de la génération des ondes retournées. Le liquide étant de l'eau courante, le coefficient d'atténuation visqueuse est pris avec une viscosité de quatre fois la viscosité de l'eau pure, pour prendre en compte les effets importants de dissipation induits par les impuretés à la surface de l'eau. Pour chaque courbe expérimentale, un bon accord qualitatif est obtenu avec l'enveloppe théorique, sauf pour la courbe noire (correspondant à  $a_0 = 1,8 g$ ), au-delà de 120 ms. Ceci s'explique par le fait que la mesure expérimentale du champ d'onde n'est plus fiable pour des amplitudes d'onde si élevées et également par des effets de saturation induits par des non linéarités hydrodynamiques pour des ondes de forte amplitude [106] et non prises en compte dans notre modèle. On observe que l'amplitude des ondes croît puis décroît pour la courbe bleue (correspondant à une amplitude d'accélération du bain de 0,6 g). Pour les courbes rouge et noire, correspondant à des amplitudes d'accélération du bain au-dessus d'un seuil, l'amplitude croît. Elle croît plus rapidement pour la courbe noire, correspondant à une accélération plus élevée. À partir de 120 ms environ, on observe une saturation et un brouillage du signal de la courbe noire, liée aux défauts de visualisation des ondes à forte amplitude par notre dispositif.

Nous observons donc l'existence d'un seuil d'amplification des ondes de surface (ici  $a_{0,\text{seuil}} \approx 8 \text{ ms}^{-2}$ ) dans un milieu modulé temporellement sinsusoïdalement, compatible avec la prédiction théorique de notre modèle. Ce seuil, induit par la dissipation visqueuse, est de ce fait une propriété particulière de la conjugaison de phase dans les systèmes ondulatoires dissipatifs, dont les ondes de surface font partie, à la différence des ondes électromagnétiques en optique. Il apparaît évident que ce seuil d'accélération pour l'amplification des ondes stationnaires générées dans le processus de conjugaison de phase hydrodynamique est lié au seuil de l'instabilité de Faraday. Nous montrerons à la section suivante que ces deux seuils sont bien identiques, et expliquerons la relation entre les deux phénomènes.

### 5.4.2 Miroir à conjugaison de phase hydrodynamique et instabilité de Faraday

Les expériences et leur description théorique présentées à la section précédente montrent ce qu'il advient d'une onde que l'on induit sur la surface d'un bain vibré sinsusoïdalement. Cependant, si le bain est vibré à une accélération suffisamment importante, il n'est pas nécessaire d'imposer une onde initiale : au-dessus d'une accélération seuil (qui dépend de la fréquence de vibration et de la viscosité du liquide) le bain se couvre spontanément d'ondes stationnaires, c'est l'instabilité de Faraday [59, 108, 110]. Il est évident que les phénomènes que nous avons décrits jusqu'ici sont étroitement liés à cette instabilité hydrodynamique. Le formalisme que nous venons de développer permet de décrire la génération d'une onde conjuguée en phase dans les milieux modulés périodiquement temporellement mais il permet également d'apporter de nouveaux éclairages sur les mécanismes mis en jeu par l'instabilité Faraday.

## Conjugaison de phase et émergence d'une onde stationnaire

Toutes les descriptions théoriques de l'instabilité de Faraday dans la littérature font de la stationnarité des ondes de Faraday une hypothèse de travail [69, 106, 108, 110, 114–116]. La description que nous venons de présenter permet d'expliquer l'émergence d'une onde stationnaire. En effet, le phénomène de stationnarisation décrit à la section 5.4.1 transforme n'importe quelle onde initiale en onde stationnaire (amplifiée ou atténuée). Ainsi, l'instabilité de Faraday peut être décrite de la façon suivante. Initialement, la surface du bain est plane. Dans les conditions des études expérimentales, il est légitime de supposer que cette planéité n'est pas parfaite : un (très faible) bruit, imposé par l'extérieur recouvre la surface. Plusieurs causes peuvent être envisagées pour ce bruit. Évoquons l'existence d'une composante horizontale dans la vibration (défaut du pot vibrant) [70], ainsi que les courants d'air à la surface du liquide (non complètement négligeables même pour une pièce fermée, et favorisés par la vibration du bain). Par ailleurs, les ménisques aux bords de la cuve émettent également des ondes lorsque celle-ci est vibrée, même si leur influence est diminuée dans nos expériences par l'utilisation de plages sous-marines. En supposant que ce bruit d'ondes de surface possède une composante au vecteur d'onde de Faraday (défini par la relation (5.26)), cette dernière est soumise au phénomène de conjugaison de phase sous l'effet de la vibration du bain et est ainsi stationnarisée. Si l'amplitude de vibration est supérieure au seuil d'amplification défini à la section 5.4.1, cette stationnarisation s'accompagne d'une amplification. Un motif *stationnaire* d'amplitude notable émerge alors : c'est l'instabilité de Faraday. Notons que le seuil d'amplification associé à la conjugaison de phase hydrodynamique est ainsi identique au seuil de cette instabilité.

### Seuil d'amplification, seuil d'instabilité

Nous avons montré à la section précédente que c'est la viscosité du liquide qui entraîne l'existence d'un seuil d'amplification-atténuation, pour une onde initiale soumise à une modulation temporelle de la gravité. Ce seuil, que nous venons d'identifier au seuil de l'instabilité de Faraday, disparaît lorsque la viscosité tend vers 0. Cette prédiction est cohérente avec les résultats trouvés dans la littérature [110] : lorsque la viscosité tend vers une valeur nulle, le seuil de l'instabilité en fait autant (voir à la section 5.3 la figure 5.10). Puisque les deux seuils doivent être identiques, l'expression explicite établie à la section précédente pour le seuil d'amplification détermine aussi le seuil de l'instabilité de Faraday :

$$a_{0,\text{seuil}} = 8\Omega\nu k_0, \quad (5.73)$$

valable pour un bain de largeur infinie (pas d'effets de bords) et de profondeur infinie ( $hk_0 \ll 1$ , où  $h$  est la profondeur du bain), pour un liquide de faible viscosité (5.69), et dans la limite de faible vibration du bain (5.24). Ici comme précédemment  $k_0$  désigne le vecteur d'onde de Faraday ( $\omega_0(k_0) = \Omega$ ) associé la pulsation de Faraday  $\Omega$ , valant la moitié de la pulsation de vibration du bain. La formule (5.73), donnant la valeur du seuil de l'instabilité dans la limite de basse viscosité et de faible vibration, est cohérente avec les différentes formules approchées données dans la littérature pour le seuil de Faraday. Elle correspond ainsi à celle donnée par Douady [106] en remplaçant le terme d'atténuation phénoménologique  $f$  par le terme d'atténuation  $2\nu k_0^2$  obtenu par un développement à faible viscosité des équations de Navier-Stokes [73, 110, 113].<sup>4</sup> Elle correspond aussi à celle donnée par Edwards et Fauve [69] (en négligeant le terme gravitaire de la relation de dispersion) ou encore à celle obtenue en effectuant un développement à l'ordre le plus bas non

4. Attention à l'erreur de typographie dans l'équation (4) de la référence [106], la division par  $\omega$  doit être remplacée par une division par  $\omega_0$ .



nul en  $\nu$  (la viscosité) à partir de la formule de Beyer [115]. Citons enfin l'étude expérimentale de Bechhoefer *et al* [117], qui présente également une formule compatible avec (5.73) avant de montrer que la validité de cette formule n'est bien assurée que pour de faibles accélérations.

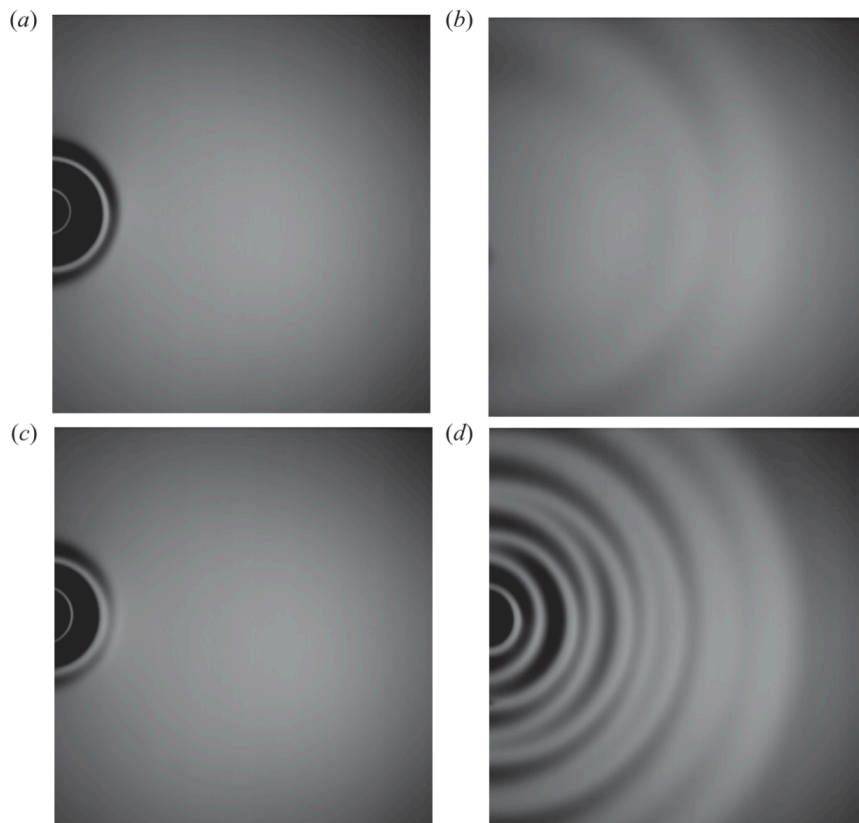
Ainsi donc, notre étude de la conjugaison de phase hydrodynamique nous a permis de revisiter l'instabilité de Faraday, dans le régime de faible viscosité et de faible vibration, en l'interprétant comme la conséquence de la stationnarisation-amplification d'un bruit initial quelconque possédant une composante à la longueur d'onde de Faraday par conjugaison de phase. Le modèle de la conjugaison de phase que nous avons présenté permet de décrire la sélection de la longueur d'onde (et de la fréquence de Faraday) pour les ondes instables. Il permet également de décrire le phénomène de stationnarisation qui permet d'expliquer l'émergence d'une onde stationnaire. Enfin, il permet aussi de décrire l'existence d'un seuil d'amplification-instabilité introduit par la dissipation visqueuse, et permet de retrouver les résultats de la littérature pour l'expression du seuil. Nous verrons dans le paragraphe suivant que les nouveaux éclairages apportés par cette approche peuvent s'avérer particulièrement intéressants dans certaines situations particulières. Nous reviendrons par ailleurs sur l'instabilité de Faraday à la partie 6 dans une description plus générale des propriétés des ondes dans les milieux modulés temporellement périodiquement, généralisant notamment les résultats présentés ici à des amplitudes de vibration du bain quelconques.

### Le ralentissement critique et la mémoire des gouttes rebondissantes

L'étude de la conjugaison de phase hydrodynamique et de ses liens avec l'instabilité de Faraday que nous venons de réaliser peut permettre d'expliquer les propriétés de certains phénomènes de ralentissement critique observés dans la littérature. Le ralentissement critique est une propriété standard des instabilités non linéaires en général et de l'instabilité de Faraday en particulier : si l'on excite une onde de Faraday, par exemple en vibrant un bain liquide à une accélération supérieure au seuil de l'instabilité, puis qu'on baisse l'accélération du bain à une valeur en-dessous du seuil, on observe une atténuation lente des ondes stationnaires [106]. Plus généralement, toute perturbation de la surface du liquide à la fréquence de Faraday croît exponentiellement si l'accélération du bain est au-dessus du seuil, avec un temps caractéristique inversement proportionnel à l'écart au seuil, tandis qu'elle décroît exponentiellement si l'accélération du bain est en-dessous du seuil, également avec un temps caractéristique inversement proportionnel à l'écart au seuil. Cette propriété observée expérimentalement découle directement de l'expression (5.72) établie précédemment pour le champ d'onde.

Par ailleurs, d'autres propriétés de ce phénomène ont été mises en évidence et étudiées par Eddi *et al* [118] pour comprendre le mécanisme d'auto-propulsion de gouttes rebondissant sur la surface d'un bain d'huile vibré [104, 105]. Dans leurs travaux, les auteurs réalisent une expérience simple. Ils lâchent une petite bille d'acier (de 2 mm de diamètre) à la surface d'un bain d'huile. L'impact de la bille génère un front d'onde circulaire divergent qui se propage depuis le point d'impact. Ils comparent le cas où le bain est en vibration verticale avec le cas où le bain est au repos. Les photos de l'expérience sont présentées à la figure 5.14.

Les photos (a) et (b) de la figure 5.14 correspondent aux instants  $t = 51$  ms et  $t = 173$  ms après l'impact sur un bain de liquide non vibré. Seul le front d'onde circulaire engendré par l'impact est visible. Les photos (c) et (d) correspondent aux mêmes instants après l'impact sur un bain de liquide vibré à une accélération proche mais inférieure au seuil de l'instabilité. Derrière le front d'onde circulaire généré par l'impact, une onde stationnaire est observée. Celle-ci s'atténue au cours du temps (c'est le ralentissement critique). Nos travaux nous permettent de décrire plus



**Figure 5.14** – Photos tirées de [104]. Ondes créées par une bille d’acier tombant sur le bain. (a) et (b) Dans le cas où le bain est au repos, on observe uniquement une onde capillaire qui se propage radialement (photographies prises à  $t = 51$  ms et  $t = 173$  ms après l’impact. (c) et (d) Dans le cas où le bain est en vibration avec une accélération  $a_0$  inférieure au seuil  $a_{0,seuil}$  de l’instabilité, mais proche du seuil ( $|a_0 - a_{0,seuil}| \ll a_{0,seuil}$ ), une structure stationnaire avec la longueur d’onde de Faraday se met en place sur le bain après le passage de l’onde capillaire.

précisément ces résultats expérimentaux. L’onde émise au moment de l’impact contient dans son spectre une composante à la longueur d’onde de Faraday (que l’on peut noter  $h_0$ ). La description, développée dans les sections précédentes, de l’évolution d’une onde initialement propagative à la fréquence de Faraday peut être appliquée à cette composante à la longueur d’onde de Faraday. La modulation du milieu entraîne ainsi la génération d’une onde contrapropagative selon la formule (5.72). Les amplitudes des composantes divergentes et rétropropagées se confondent au bout de quelques périodes sous l’effet de la modulation temporelle (c.f. figure 5.12) pour donner naissance à une onde stationnaire derrière le front d’onde. Devant le front d’onde, dans les zones que ce dernier n’a pas encore atteintes, aucune onde rétropropagée n’a été encore créée car celle-ci n’est engendrée qu’à partir de l’onde divergente initiale (et celle-ci n’est pas encore présente devant le front d’onde). Ainsi un front d’onde initial lié à une perturbation initiale de la surface d’un liquide en vibration laisse derrière lui une onde stationnaire issue de l’effet stationnarisant de la modulation temporelle. Notons que dans les ondes convergentes générées par la modulation temporelle redivergent après être passées par le point d’impact et contribuent ainsi également à la composante divergente. Remarquons également que cette expérience d’Eddi *et al* est tout à fait similaire à celle que nous avons présentée dans la section 5.2.3. La différence principale<sup>5</sup>

5. Une autre différence réside dans le fait que les auteurs réalisent leur expérience dans une huile très visqueuse, alors que l’expérience de la section 5.2.3 est réalisée dans l’eau. La forte viscosité atténue fortement les courtes longueurs d’ondes, qui sont donc absentes du paquet d’onde dans l’huile, tandis qu’elles sont nettement visibles dans l’eau.

entre les deux expériences réside dans le fait que le bain est initialement au repos au moment de l'impact générant le front d'onde, et la vibration est mise en route quelque temps après dans notre expérience, tandis que le bain est déjà en vibration au moment de l'impact dans celle d'Eddi *et al.* Le délai que nous avons introduit entre le moment de l'impact et le début de la vibration du bain permet d'introduire une limite intérieure supplémentaire à la zone dans laquelle l'onde stationnaire est développée, ce qui nous a permis de mettre en évidence un front d'onde rétropropagé correspondant à l'onde conjuguée en phase. C'est cependant bien-sûr le même effet de génération d'onde conjuguée en phase qui fait émerger l'onde stationnaire observée par Eddi *et al.* Enfin, d'un point de vue quantitatif, l'atténuation en  $e^{-(2\nu k^2 - a_0 k_0/4\Omega)t}$  prévue par notre modèle permet de retrouver, comme ces auteurs, que le temps caractéristique d'atténuation  $\tau$  des ondes est proportionnel à l'inverse de l'écart de l'accélération au seuil de l'instabilité :  $\tau \propto (a_{0,\text{seuil}} - a_0)^{-1}$ .

Le lien entre la conjugaison de phase hydrodynamique et l'instabilité de Faraday, expliqué dans les sections précédentes nous a permis ici de mieux comprendre un phénomène particulier de ralentissement critique. Dans la section suivante, nous allons voir que la conjugaison de phase hydrodynamique nous permet de relier indirectement cette instabilité au concept de Miroir temporel instantané.

### 5.4.3 Liens entre le miroir à conjugaison de phase de Faraday et le MTI

#### La conjugaison de phase hydrodynamique : un MTI monochromatique interférentiel

Le miroir à conjugaison hydrodynamique pour les ondes à la surface d'un liquide, induit par une accélération sinusoïdale du liquide, peut être considéré comme l'équivalent monofréquentiel du miroir temporel instantané : lorsqu'une onde initiale à une certaine fréquence se propage, une modulation temporelle sinusoïdale de la célérité du milieu à la fréquence double entraîne la production d'une onde rétropropagée, conjuguée en phase. La modulation sinusoïdale réalise donc un retournement temporel sélectif, pour des ondes à une fréquence spécifique uniquement.

Équation des ondes (domaine de Fourier spatial)	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + \omega_0^2(k)\phi(\vec{k}, t) = s(\vec{k}, t)$	
Forme de la source	$s(\vec{k}, t) = \alpha_k \delta(t - t_{\text{MTI}})\phi(\vec{k}, t)$	$s(\vec{k}, t) = \alpha_k \cos(2\Omega t)\phi(\vec{k}, t)$
Spectre de la fonction source	plat	piqué à la pulsation $2\Omega$
Bande passante du retournement	large bande	très étroite autour de $\Omega$

**Table 5.1** – Comparaison entre MTI et conjugaison de phase hydrodynamique

Le tableau 5.1 dresse un récapitulatif de la comparaison entre le miroir temporel instantané, réalisé par une disruption temporelle du milieu, et le miroir à conjugaison de phase, réalisé par modulation temporelle périodique du milieu. Il est intéressant de noter le parallèle, dans chaque cas, entre le spectre de la modulation du milieu et la bande passante du retournement temporel réalisé. Ainsi, dans le cas du MTI, la modulation de la vitesse effective des ondes dans le milieu est (dans le cas idéal) une fonction delta de Dirac, dont le spectre est plat. À cette modulation large bande correspond un retournement temporel large bande. Dans le cas de la conjugaison de phase par modulation périodique, la modulation est une sinusoïde, dont le spectre se réduit à deux pics

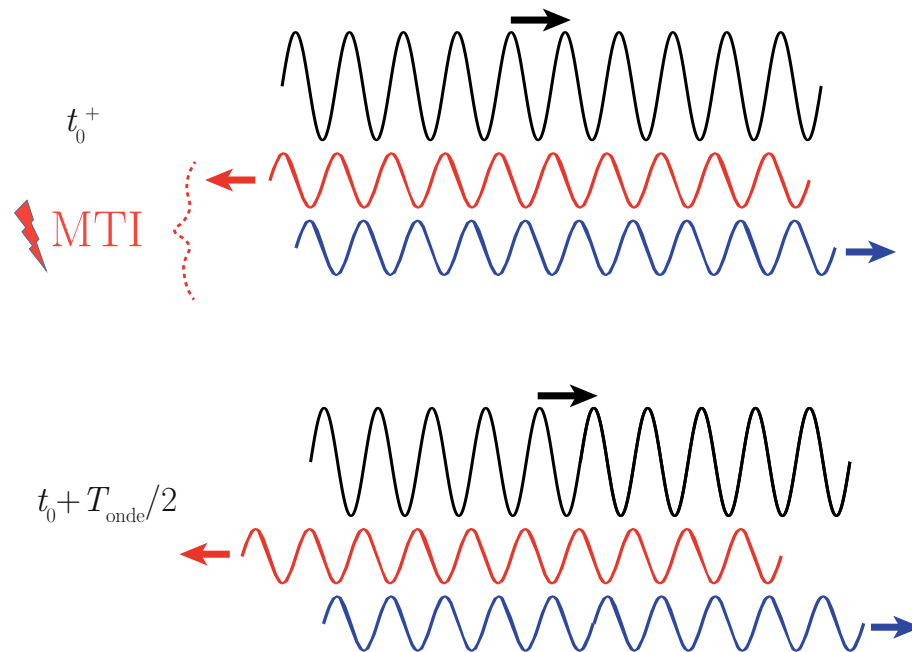
aux pulsations  $2\Omega$  et  $-2\Omega$ . La bande passante du retournement effectué est alors très étroite : ne sont retournées que les ondes de pulsation  $\Omega$ .

Une interprétation simple de cette sélection fréquentielle peut être fournie par un modèle simplifié de la conjugaison de phase, dans lequel la modulation sinusoïdale de la célérité du milieu de propagation est modélisée par une succession périodique de chocs instantanés de célérité. Comme nous le verrons en détail dans la partie 6.1, ce modèle simplifié permet de retrouver la plupart des propriétés des ondes dans un milieu modulé temporellement selon une sinusoïde, car celles-ci sont déterminées essentiellement par le caractère périodique de la modulation. Dans ce modèle, à chaque période de la modulation, l'onde est soumise à un choc de célérité, réalisant un MTI. Ce MTI génère une onde copropagative et une onde contrapropagative, dont les amplitudes sont proportionnelles au champ d'onde au moment du choc. Ainsi, la composante rétropropagée observée après un grand nombre de chocs résulte de la superposition des ondes rétropropagées produites à chaque choc. Dès lors, la condition pour générer efficacement un champ rétropropagé résultant est que toutes les contributions issues des différents chocs interfèrent constructivement. Il en résulte une condition de compatibilité entre la période de l'onde initiale considérée et la période de la modulation temporelle, c'est-à-dire dans notre modèle simplifié la durée entre deux chocs. Celle-ci doit nécessairement correspondre à la sélection fréquentielle mentionnée précédemment pour le processus de conjugaison de phase : la durée entre deux chocs doit être la moitié d'une période de l'onde initiale. Ce résultat peut sembler *a priori* contre-intuitif : l'intuition suggère que les deux processus, modulation et propagation, soient reliés par une même fréquence pour pouvoir donner lieu à des interférences constructives. Mais il peut être expliqué par le fait que deux ondes contrapropagatives monochromatiques de même longueur d'onde et possédant initialement un déphasage spatial donné, retrouvent ce déphasage pour la première fois après une *demie* période. En effet, durant la moitié d'une période, une onde a parcouru une moitié de longueur d'onde dans un sens tandis que l'autre a parcouru une moitié de longueur d'onde dans l'autre sens. Ainsi, elles se sont décalées l'une de l'autre d'une distance d'une longueur d'onde. Une durée d'une *demie* période de l'onde entre deux chocs assure ainsi que l'onde contrapropagative générée à partir de l'onde initiale lors d'un choc est phase avec l'onde contrapropagative générée à partir de cette onde initiale au choc précédent. Cette condition d'interférence constructive est présentée à la figure 5.15.

Dans ce schéma, une onde monochromatique initiale (se propageant vers la droite) est représentée en noir. À l'instant  $t_0$ , un choc de célérité est effectué, réalisant un MTI. À  $t_0^+$ , deux ondes ont donc été produites : une onde copropagative (en bleu) et une onde rétropropagée (en rouge). Comme nous l'avons montré à la partie précédente, à l'instant où elles sont produites, chacune de ces deux ondes est déphasée spatialement d'un quart de longueur d'onde ( $\pi/2$ ) par rapport à l'onde initiale. Notons que l'une est décalée vers la droite et l'autre vers la gauche par rapport à l'onde initiale, si bien que les deux ondes contrapropagatives sont décalées d'une *demie* longueur d'onde à l'instant  $t_0$  de leur production : elles s'annulent donc au moment du choc, ce qui assure la continuité du champ d'onde total. Une *demie* période plus tard, à l'instant  $t_0 + T_{\text{onde}}/2$ , l'onde initiale et l'onde copropagatives se sont proropagées vers la droite d'une *demie* longueur d'onde tandis que l'onde rétropropagative s'est propagée d'une *demie* longueur d'onde vers la gauche. Ainsi, après cette durée, les ondes se sont relativement écartées d'une longueur d'onde et ont retrouvé leur déphasage initial. Si un nouveau choc de célérité est effectué à cet instant, la composante rétropropagée générée à ce nouveau choc interfère donc constructivement avec celle générée au choc précédent.<sup>6</sup> Le processus peut alors être répété. Ainsi, après de nombreux chocs effectués

---

6. Notons qu'à  $t_0 + T_{\text{onde}}/2$ , les ondes contrapropagatives générées au choc précédent sont de nouveau décalées d'une *demie* longueur d'onde, si bien que le champ d'onde total à cet instant est donné uniquement par l'onde initiale. L'onde rétropropagée générée lors d'un nouveau choc est donc bien décalée d'un quart de période *par*



**Figure 5.15** – Schéma simplifié de l'accord de fréquence entre la modulation et l'onde dans la conjugaison de phase. La modulation est décrite par une succession de chocs instantanés. Une onde initiale monochromatique (en noir) est soumise à l'instant  $t_0$  à un premier MTI. Deux ondes sont produites à  $t_0^+$  : une onde copropagative (en bleu) et une onde rétropropagative (en rouge). Cette dernière retrouve le même déphasage spatial avec l'onde initiale et l'onde copropagative à l'instant  $t_0 + T_{\text{onde}}/2$ , une demie période des ondes plus tard : elle a avancé d'une demie longueur d'onde vers la gauche pendant que les autres ont avancé d'une demie longueur d'onde vers la droite, ce qui les a décalé relativement d'une longueur d'onde. Si un nouveau choc de célérité est réalisé à cet instant, l'onde rétropropagative générée à ce choc interfère ainsi constructivement avec celle produite au choc précédent.

toutes les *demies* périodes de l'onde, une onde rétropropagée cohérente résulte des interférences constructives entre les ondes produites à chaque choc.

La condition d'accord de fréquence pour la conjugaison de phase peut donc être interprétée comme une condition interférentielle de cohérence entre les différentes ondes rétropropagées générées aux différents chocs successifs. Remarquons par ailleurs que cette condition d'accord de fréquence est un équivalent purement temporel du problème bien connu de l'accord de phase (spatial) qui intervient dans différents phénomènes d'optiques non linéaires [100].

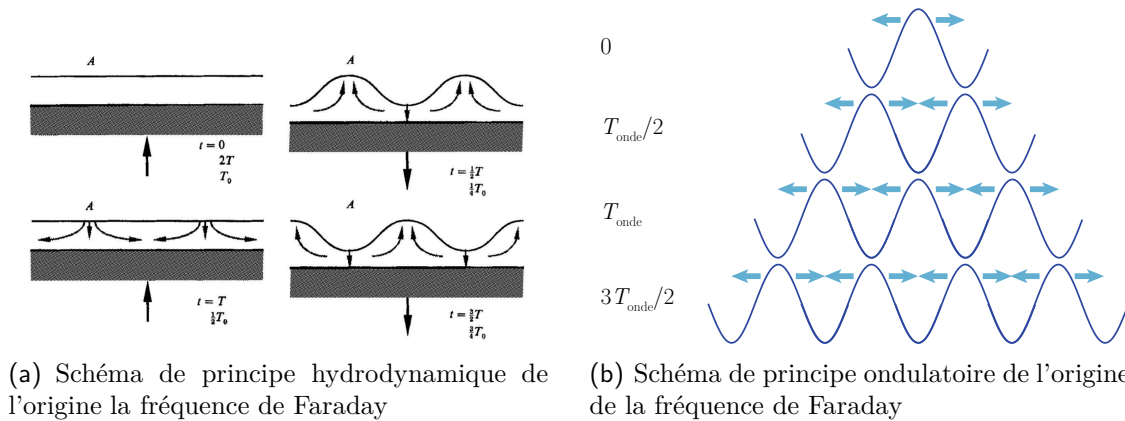
### L'instabilité de Faraday comme une suite périodique de MTI

Puisque la conjugaison de phase hydrodynamique peut être interprétée de manière simplifiée comme une succession périodique de MTI, ce modèle peut être utilisé pour décrire l'instabilité de Faraday. De façon remarquable, une telle approche de l'instabilité de Faraday à l'aide d'un modèle de succession périodique de fonctions delta de Dirac a déjà été proposée par Bechhoefer et Johnson [114]. Ces auteurs ont montré que l'allure générale du diagramme d'instabilité (en forme de langues, voir figure 5.10) était prédite par ce modèle simple, bien que la forme exacte soit différente de celle obtenue pour une modulation sinusoïdale. De même, l'évolution de ces zones d'instabilités lorsqu'on augmente viscosité du liquide est qualitativement identique à d'autres prédictions issues de modèles plus précis [110]. Nos travaux sur le MTI et la conjugaison de phase hydrodynamique nous permettent ici d'aller plus loin. Comme nous l'avons évoqué à la section

---

*rapport à l'onde initiale*, et est en phase avec l'onde rétropropagée issue du choc précédent.

précédente, c'est l'amplification et la stationnarisation d'un bruit initial, par génération d'une onde conjuguée en phase, qui conduit à l'émergence d'une onde stationnaire dans l'instabilité de Faraday. La description en série de fonctions delta de Dirac permet, de même que pour le phénomène de conjugaison de phase, d'illustrer de manière simple l'origine interférentielle de la sélection d'une onde de fréquence moitié de celle de la modulation.



**Figure 5.16** – Schémas de principe expliquant l'émergence d'ondes à la fréquence moitié dans l'instabilité de Faraday. (a) Schéma de principe hydrodynamique de l'émergence de la fréquence de Faraday d'après [106]. La force d'inertie d'entraînement conduit au déplacement relatif d'une partie du liquide vers le haut lorsque l'accélération du bain pointe vers le bas et ce déplacement est annulé lorsque l'accélération pointe ensuite vers le haut. La déformation opposée est observée une période d'excitation plus tard. (b) Schéma de principe ondulatoire de l'émergence de la fréquence de Faraday. La modulation périodique est modélisée par des chocs instantanés toutes les demies périodes de l'onde. Un "bourrelet" initial (à la longueur d'onde de Faraday) est séparé en deux contributions équivalentes contrapropagatives par un choc de célérité à  $t = 0$ . Une demie période de Faraday plus tard, à  $t = T_{\text{onde}}/2$ , chaque bourrelet secondaire s'est éloigné du point initial d'une demie longueur d'onde. Un nouveau choc a lieu qui sépare de nouveau chaque "bourrelet" en deux contributions contrapropagatives. À  $t = T_{\text{onde}}$ , les contributions de chaque bourrelet se propageant vers le point initial s'ajoutent constructivement pour reformer le bourrelet initial, et le processus peut se répéter ensuite indéfiniment. Dans ce schéma simplifié, les phases des ondes générées lors des retournement ont été mises à zéro.

La figure 5.16 (a) présente un schéma hydrodynamique classique (tiré de [106]) utilisé pour décrire l'apparition de la fréquence moitié dans l'instabilité de Faraday. La force d'inertie d'entraînement conduit au déplacement relatif d'une partie du liquide lorsque l'accélération du bain pointe vers le bas et est compensée lorsque celle-ci se dirige de nouveau vers le haut. La déformation opposée est observée une période d'excitation plus tard. Nous proposons ici un schéma descriptif alternatif à la figure 5.16 (b). Il illustre dans un schéma simplifié le principe interférentiel présenté précédemment à la figure 5.15 et met en évidence les conditions d'accord de fréquence pour l'accumulation cohérente des ondes générées à chaque période de mouvement du bain. En ce sens, il est plus général car il est également valable pour les instabilités paramétriques observées pour tout autre type d'onde, lorsque le milieu est modulé temporellement périodiquement. Pendant une demie période, une onde (divergeant par exemple d'un point source du bruit initial) parcourt une demie longueur d'onde. Elle est alors (partiellement) retournée temporellement par la modulation. L'onde retournée retourne au point de départ durant une nouvelle demi période. Le processus peut alors se répéter. Deux périodes de la modulation du milieu correspondent donc à un aller-retour cohérent sur une période pour l'onde. C'est pourquoi on observe une onde de fréquence moitié de la fréquence de modulation du milieu. Notons que tous les multiples de cette fréquence moitié correspondent également à un aller-retour cohérent pour l'onde et peuvent égale-

ment donner lieu à une amplification constructive. Cette description interférentielle permet donc de retrouver que toutes les fréquences multiples de la fréquence de Faraday donnent également lieu (potentiellement) à une instabilité :

$$\omega = n\Omega, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.74)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde instable et  $2\Omega$  est la pulsation de modulation du milieu (en pratique, ces ordres fréquentiels plus élevés sont cependant plus difficiles à observer expérimentalement, nous y reviendrons dans la partie suivante). L'instabilité de Faraday peut donc être interprétée comme l'effet d'une suite périodique de MTI sur un bruit initial, qui s'accompagne d'une accumulation cohérente des contributions générées à chaque période à condition que la fréquence de l'onde soit un multiple de la fréquence de Faraday, moitié de la fréquence de modulation. Notons que cette accumulation conduit à un effet d'amplification et donc d'instabilité si le gain d'amplitude à chaque choc dépasse l'atténuation de l'amplitude entre deux chocs par dissipation visqueuse.

Cette partie nous a permis d'exposer une variante monofréquentielle du MTI, équivalente à la conjugaison de phase en optique. Après avoir montré que cette dernière est obtenue par un procédé équivalent à une modulation temporelle périodique de la célérité du milieu à la fréquence double des ondes retournées, nous avons appliqué ce principe de modulation périodique aux ondes à la surface d'un bain liquide en le mettant en vibration. Un phénomène de conjugaison de phase hydrodynamique a ainsi été mis en évidence. Nous en avons ensuite fourni une description théorique, montrant l'émergence d'une onde stationnaire dans le milieu modulé quelque soit l'onde initiale, et s'accompagnant d'un phénomène d'amplification. Cette amplification ne se manifeste dans un liquide réel visqueux qu'au-dessus d'un seuil d'accélération, à partir duquel l'effet amplificateur de la modulation compense la dissipation visqueuse. Ce concept de conjugaison de phase hydrodynamique permet de mieux comprendre les mécanismes d'émergence spontanée d'ondes stationnaires dans l'instabilité de Faraday, et permet de montrer les liens entre conjugaison de phase, MTI et instabilité de Faraday. Comme nous l'avons vu avec le modèle simplifié de l'instabilité de Faraday comme suite de MTI, l'ingrédient essentiel est la périodicité de la modulation de la célérité, qui produit des effets remarquables sur les ondes à la fréquence de Faraday. Dans la partie suivante, nous nous intéresserons à l'effet de cette modulation pour des ondes à d'autres fréquences. L'analyse que nous avons présentée explique les échanges entre les modes à  $\Omega$  et à  $\Omega - 2\Omega = -\Omega$ , sous l'effet de la modulation à  $2\Omega$ , qui induisent la conjugaison de phase. Elle peut nous servir de modèle pour étudier des échanges attendus entre un mode de pulsation quelconque  $\omega$  et ceux dont la pulsation diffère d'un multiple de la pulsation de forçage  $\omega + 2n\Omega$  (où  $n$  est entier). En utilisant cette approche, nous allons étudier, dans la partie suivante, les propriétés générales des ondes de fréquence quelconque dans ces milieux modulés temporellement périodiquement.





---

Ondes (de surface) dans un cristal temporel

---

**Table des matières**

---

6.1	Équivalent temporel d'un cristal . . . . .	<b>181</b>
6.1.1	Analogie formelle entre périodicité temporelle et spatiale pour les ondes : l'équation de Hill . . . . .	181
	Modulation temporelle périodique et équation de Hill . . . . .	181
	Un analogue spatial : les ondes dans les structures périodiques . . . . .	182
6.1.2	Rappels sur les structures périodiques spatiales : la théorie de Floquet- Bloch . . . . .	182
	Fonctions de Bloch, relation de dispersion . . . . .	182
	Cas de l'équation de Mathieu, structure de bandes du diagramme de Brillouin . . . . .	183
6.1.3	Modulation périodique d'un milieu de propagation homogène : un cristal temporel . . . . .	186
	De la périodicité spatiale à la périodicité temporelle . . . . .	186
	Théorie de Floquet et relation de dispersion . . . . .	188
6.1.4	Croissance ou décroissance exponentielle ? : des bandes d'amplification Existence de pulsations de partie imaginaire négatives dans les bandes complexes . . . . .	192
	Bandes d'amplification et amplification dans la conjugaison de phase hydrodynamique . . . . .	193
6.2	Instabilité dans les cristaux temporels . . . . .	<b>195</b>
6.2.1	Langues d'amplification, langues d'instabilité . . . . .	195
	Construction des domaines d'amplification à partir des diagrammes de Brillouin temporels . . . . .	195
	Amplification et instabilité . . . . .	197
6.2.2	Dissipation dans un cristal temporel et effet de la viscosité . . . . .	198
	Établissement des diagrammes de Brillouin temporels en présence de dissipation . . . . .	198
	Existence d'un seuil pour chaque bande d'amplification . . . . .	199
	Ralentissement critique et ouverture des bandes sous le seuil . . . . .	201

---

	Mode le plus instable au-dessus du seuil . . . . .	202
6.2.3	Influence de la fréquence de modulation du milieu . . . . .	203
	Influence de la fréquence de forçage sur l'allure des diagrammes de Brillouin et de stabilité . . . . .	203
	"Relation de dispersion" des ondes de Faraday . . . . .	204
6.3	Perspectives : Propriétés d'un émetteur ponctuel dans un cristal temporel . . .	<b>207</b>
6.3.1	Échanges fréquentiels dans un cristal temporel . . . . .	207
	Émission d'ondes dans un cristal temporel . . . . .	207
	Effet de la modulation sur le spectre d'une fréquence quelconque . . .	208
	Balayage en fréquence et relation de dispersion . . . . .	210
6.3.2	Influence de la phase de l'émetteur : nœuds et ventres temporels d'un mode stationnaire du cristal . . . . .	212
	Génération d'une onde stationnaire dans un cristal, analogie avec une cavité spatiale . . . . .	212
	Étude expérimentale de l'influence de la phase . . . . .	214
	Phase spatiale d'un émetteur dans une cavité et équivalent temporel dans un cristal temporel . . . . .	215

---





Dans la partie 2 de cet ouvrage, nous avons tiré profit des rôles similaires joués par le temps et l'espace dans la propagation des ondes pour réaliser l'équivalent temporel d'un miroir. Dans cette partie, nous allons de nouveau tirer profit de cette analogie temps-espace, pour étudier les ondes se propageant dans un milieu périodique en temps. Par milieu périodique en temps, nous entendons un milieu dans lequel un paramètre contrôlant la célérité des ondes évolue de manière périodique au cours du temps, en restant à chaque instant homogène spatialement. Ainsi, un tel milieu de propagation est caractérisé à chaque instant par une célérité effective de même valeur en tout point de l'espace, mais cette valeur varie dans le temps, de manière périodique. Cette périodicité est le pendant temporel de la périodicité spatiale qui caractérise les cristaux, c'est pourquoi nous qualifierons ces milieux de "cristaux temporels" pour les ondes. Comme précédemment, nous caractériserons les propriétés générales des cristaux temporels et considérerons (théoriquement puis expérimentalement) le cas particulier des ondes à la surface d'un bain liquide. Pour ces ondes, le cristal temporel est obtenu par vibration sinusoïdale du bain. De ce fait, cette partie forme le prolongement logique de la partie précédente, ayant présenté le phénomène de conjugaison de phase hydrodynamique, et qui constitue un aspect particulier (et particulièrement intéressant) de la propagation des ondes de surface dans un cristal temporel.

## 6.1 Équivalent temporel d'un cristal

La théorie des ondes dans les milieux dont les propriétés varient spatialement de manière périodique est bien connue. Dans cette section, après avoir rappelé les résultats classiques sur les ondes dans ces structures spatiales périodiques (cristaux, miroirs de Bragg, etc.), nous nous proposons de les adapter pour décrire les propriétés des ondes dans un milieu modulé temporellement de manière périodique. Nous utiliserons l'analogie entre la partie spatiale et la partie temporelle de l'équation d'onde usuelle de d'Alembert (1) pour montrer que l'approche utilisée pour la description des cristaux peut être directement utilisée pour décrire ces "cristaux" temporels, dont nous montrerons qu'ils possèdent des propriétés d'amplification surprenantes.

### 6.1.1 Analogie formelle entre périodicité temporelle et spatiale pour les ondes : l'équation de Hill

#### Modulation temporelle périodique et équation de Hill

La partie précédente a étudié le phénomène de conjugaison de phase ayant lieu pour un système ondulatoire dans lequel la célérité est modulée temporellement périodiquement. Insistons ici sur la généralité de ce phénomène. Comme pour le MTI, il est applicable à toute onde régie par une équation de la catégorie  $\mathcal{H}$  introduite à la partie 4, dont la transformée de Fourier spatiale est l'équation de l'oscillateur harmonique. La modulation temporelle d'un paramètre conduit un tel système à être gouverné par une équation dite de Hill [111] :

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) + a(t)f(t) = 0, \quad (6.1)$$

où  $a(t)$  est une fonction périodique donnée. Cette catégorie d'équations a été introduite pour la première fois par Hill dans le contexte de l'étude de l'orbite lunaire [119]. L'équation de Mathieu 5.19 régissant les ondes à la surface des bains vibrés en est un cas particulier. Ce type d'équation décrit l'évolution temporelle de systèmes physiques divers et variés. Ainsi, par définition, tout

oscillateur harmonique dont on varie l'un des paramètres au cours du temps périodiquement est décrit par une équation de Hill, comme par exemple un pendule dont on varie périodiquement la longueur [120]. En physique des ondes, nous avons présenté au chapitre précédent le cas du mélange à quatre ondes dégénérées en optique et celui des ondes à la surface des bains vibrés. Citons encore l'exemple de la corde de Melde où la tension d'une corde vibrante est modulée périodiquement [121].

### Un analogue spatial : les ondes dans les structures périodiques

L'équation de Hill (6.1) régit également l'évolution *spatiale* de nombreux systèmes ondulatoires. Citons en premier lieu la structure spatiale périodique par excellence, le cristal. Les électrons de conduction dans un cristal peuvent être décrits par une équation de Schrödinger avec un potentiel périodique [122, 123]. Pour simplifier, considérons une structure unidimensionnelle. Les fonctions propres d'amplitude de probabilité du système à l'énergie  $E$  vérifient l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (6.2)$$

où  $V(x)$  est le potentiel périodique décrivant le cristal. Bien-sûr, cette équation est valide pour tout autre type d'onde de matière régie par l'équation de Schrödinger et décrit ainsi également par exemple les condensats de Bose-Einstein dilués guidés par un réseau optique [124, 125].

L'équation de Hill régit également un champ électrique monochromatique dans les cristaux photoniques [126], dont les applications sont multiples, et dont la version unidimensionnelle est appelée miroir de Bragg. Il s'agit de milieux diélectriques dans lesquels l'indice optique est spatialement périodique. En pratique, ce type de milieu est réalisé en superposant des couches successives de permittivités diélectriques différentes tandis que la perméabilité magnétique reste constante [126, 127]. Les cristaux phononiques en sont l'équivalent pour des ondes élastiques [128]. Par ailleurs, des équivalents de miroirs de Bragg existent également pour les ondes à la surface d'un liquide [129–131]. Le fait que la structure d'équation de Hill (6.1) soit partagée par ces différents types d'ondes dans des milieux périodiques permet d'en réaliser un traitement générique [128].

L'identité formelle entre les équations d'ondes de Hill spatiales et temporelles nous permettra, dans la section suivante, d'obtenir, par analogie avec le cas spatial, de nombreuses propriétés essentielles des ondes dans les milieux modulés périodiquement temporellement en général (et des ondes de surface dans les bains vibrés en particulier).

## 6.1.2 Rappels sur les structures périodiques spatiales : la théorie de Floquet-Bloch

### Fonctions de Bloch, relation de dispersion

Pour pouvoir établir cette analogie formelle et décrire ses conséquences, nous présentons ici les propriétés essentielles des ondes dans les structures périodiques spatiales. Afin de rester concret, nous considérons ici l'exemple des fonctions d'onde des électrons de conduction, dans un cas unidimensionnel (par souci de simplicité). Tous les résultats sont bien-sûr applicables aux autres types d'ondes évoqués ci-dessus. Le théorème de Floquet [132] appliqué à l'équation de Hill (6.1) permet d'établir la forme générale des solutions [109, 133]. En fonction des propriétés du coefficient périodique  $a(x)$ , celle-ci peut prendre cinq formes différentes détaillées en annexe F. Nous pouvons

cependant sans perte de généralité considérer la forme générale :

$$\psi(E, x) = e^{ikx}p(x), \quad (6.3)$$

où  $p(x)$  est une fonction périodique de même période  $2\pi/k_c$  que la structure spatiale.  $k$  est souvent appelé pseudo-vecteur d'onde ou vecteur d'onde. Notons d'ores et déjà que cette écriture générale d'une solution n'est pas unique : si  $e^{ikx}p(x)$  est solution, toute fonction  $e^{i(k+mk_c)q(x)}$ , avec  $m$  un entier et  $q(x) = p(x)e^{-imk_c x}$  est une écriture acceptable équivalente. On peut ainsi sans perte de généralité, imposer dans la forme générale à  $k$  d'appartenir à l'intervalle  $[-k_c/2 : k_c/2]$  (appelé première zone de Brillouin). Remarquons également que le qualificatif de vecteur d'onde (parfois appelé pseudo-vecteur d'onde) a ici un sens différent du sens usuel, puisque la solution générale de vecteur d'onde  $k$ , n'est en général pas une onde harmonique  $e^{ikx}$  de longueur d'onde  $2\pi/k$ , mais plutôt une fonction pseudo-périodique  $e^{ikx}p(x)$ . Dans toute la suite, par souci de simplicité, nous utiliserons malgré tout pour  $k$  l'appellation courante de vecteur d'onde. La périodicité de  $p(x)$  permet de la développer en série de Fourier :

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ink_c x}. \quad (6.4)$$

Le potentiel périodique  $V(x)$  peut aussi être développé en série de Fourier. On note  $v_n$  ses coefficients de Fourier. En introduisant la forme générale (6.3) dans l'équation de Hill, on obtient un système linéaire d'équations couplées pour les coefficients de Fourier  $c_n$  :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left( \frac{\hbar^2}{2m} (k + nk_c)^2 - E \right) c_n + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k c_{n-k} = 0. \quad (6.5)$$

Pour chaque valeur de l'énergie  $E$ , la (ou les) valeur(s) de  $k$  dans la première zone de Brillouin, annulant le déterminant (infini) du système linéaire (6.5) assure l'existence d'une solution non identiquement nulle. Ces valeurs de  $k$  définissent la relation de dispersion  $k(E)$ , dont il n'existe *a priori* pas d'expression analytique générale. Puisque  $E = \hbar\omega$ , le qualificatif de relation de dispersion est naturel : elle relie un (pseudo-)vecteur d'onde  $k$  à une pulsation  $\omega$ . Cette relation de dispersion est éventuellement multivaluée et est au moins bivaluée pour toutes les valeurs de  $E$  pour lesquelles il existe une solution  $k(E)$  non nulle. En effet, si  $k(E)$  est une solution de l'équation de dispersion et  $c_n$  est la solution correspondante du système (6.5), les coefficients  $c_{-n}$  sont également solution du système (6.5), pour l'énergie  $E$  et le vecteur d'onde  $-k(E)$ . Ainsi, pour toute solution  $k(E)$  de l'équation de dispersion,  $-k(E)$  est également solution. Par ailleurs, la relation de dispersion dépend bien sûr de la forme exacte du coefficient périodique utilisé pour décrire la structure périodique. Elle peut être évaluée de manière approchée numériquement en supposant que la série de Fourier définissant  $p(x)$  peut être tronquée (ce qui permet de calculer un déterminant fini).

### Cas de l'équation de Mathieu, structure de bandes du diagramme de Brillouin

Un modèle d'intérêt particulier très étudié est celui du potentiel sinusoïdal :

$$V(x) = V_0 \cos(k_c x) = V_0 \frac{e^{ik_c x} + e^{-ik_c x}}{2}. \quad (6.6)$$

En introduisant ce potentiel dans l'équation (6.2), on obtient une équation de Mathieu, qui a été introduite dans de nombreux contextes [107, 108, 124, 134, 135]. Notons qu'en posant :

$$\begin{cases} r = \frac{8mE}{\hbar^2 k_c^2} \\ q = \frac{2V_0}{k_c^2} \\ X = \frac{k_c x}{2}, \end{cases} \quad (6.7)$$

on obtient l'équation de Mathieu sous sa forme adimensionnée standard utilisée par exemple par MacLachlan [107] :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (r - 2q \cos(2X)) \psi = 0. \quad (6.8)$$

En utilisant l'analyse en composantes de Fourier développée à la section précédente, on obtient, pour ce choix de potentiel, le système (infini) linéaire d'équations couplées suivant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left( \frac{\hbar^2}{2m} (k + nk_c)^2 - E \right) c_n + \frac{V_0}{2} (c_{n-1} + c_{n+1}) = 0. \quad (6.9)$$

La structure de ce système d'équation présente une propriété particulière propre à l'équation de Mathieu, et déjà évoqué à la section 5.3.1 : chaque composante de Fourier à l'ordre  $n$  de la fonction périodique  $p(x)$ , correspondant pour le champ d'onde au vecteur d'onde  $k + nk_c$ , est couplée à la composante à l'ordre  $n - 1$ , correspondant au vecteur d'onde  $k + (n - 1)k_c$ , et celle à l'ordre  $n + 1$ , correspondant au vecteur d'onde  $k + (n + 1)k_c$ .

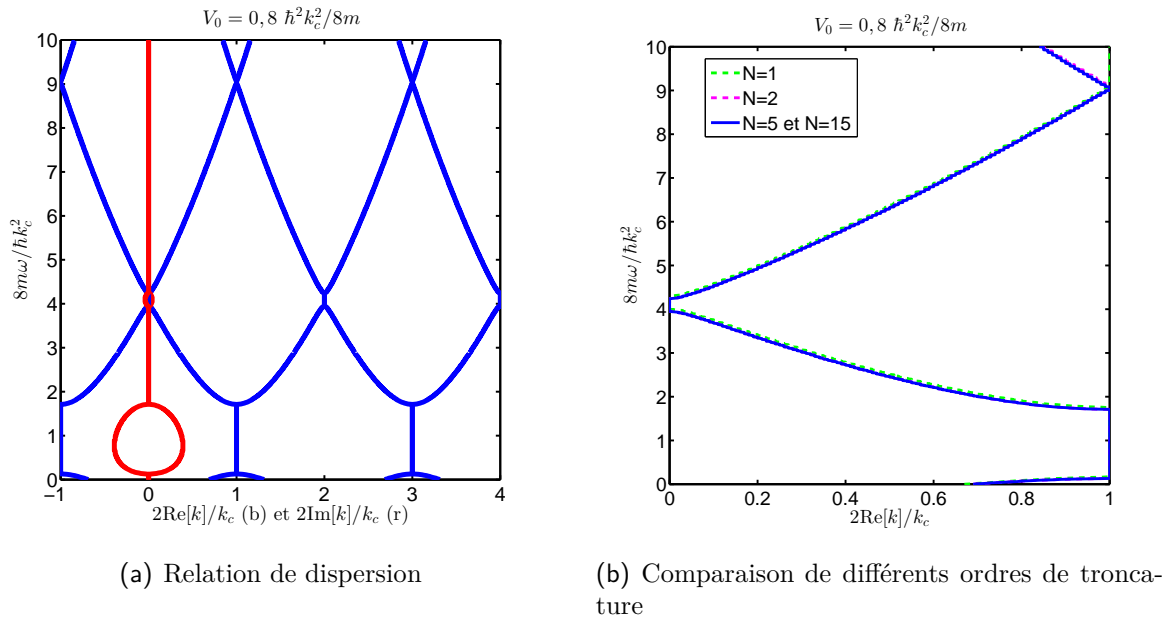
La relation de dispersion liant  $k$  à  $\omega = E/\hbar$  est obtenue en écrivant que le déterminant de ce système doit nécessairement être nul pour obtenir un champ d'onde non identiquement nul. Ce système étant infini, il est nécessaire d'effectuer une troncature avant la résolution. Les solutions pour une troncature du système à l'ordre 15 et pour une valeur de l'intensité du potentiel  $V_0 = 0,1 \hbar^2 k_c^2/m$ , sont présentées à la figure 6.1 (a). L'ordre 15 est ici un ordre suffisant de troncature, comme le montre la figure 6.1 (b), qui compare (sur la moitié de la première zone de Brillouin) les parties réelles des relations de dispersions obtenues à différents ordres de troncature : le système (6.9) est tronqué à  $n \in \llbracket -N; N \rrbracket$ . On observe que lorsqu'on augmente l'ordre  $N$  de troncature, le motif converge vers une forme limite obtenue dès  $N = 2$ . Pour tous les ordres supérieurs, les courbes sont indistinguibles de celle obtenue pour  $N = 5$ , à la précision de notre affichage. Nous ferons donc l'hypothèse que l'ordre 15 est donc un ordre d'approximation suffisant pour obtenir un bon résultat approché de la relation de dispersion. Notons que l'ordre minimum nécessaire pour observer une convergence du motif augmente avec la taille de la fenêtre d'observation (pour  $N = 1$ , le motif est déjà très proche du motif limite sur toute la partie basse du diagramme de la figure 6.1 (c)). Cet ordre de troncature minimum pour observer le motif limite augmente également si l'on augmente la valeur de  $V_0$  considérée.

#### Diagramme de Brillouin :

La figure 6.1 (a) présente le diagramme de Brillouin donnant la relation de dispersion. Les courbes bleues représentent la partie réelle des solutions pour  $k$ , tandis que les courbes rouges représentent la partie imaginaire de ces solutions. On y retrouve les propriétés principales des ondes dans les structures spatiales périodiques :

- Le motif obtenu pour le domaine de vecteurs d'onde entre  $-k_c/2$  et  $k_c/2$ , appelé première zone de Brillouin, se répète périodiquement. Le reste du graphe est obtenu par translations





**Figure 6.1** – Relation de dispersion des ondes dans les structures périodiques. (a) Diagramme de Brillouin représentant toutes les solutions pour le vecteur d'onde  $k$  complexe quelconque. Bleu :  $\text{Re}[k]$ , rouge :  $\text{Im}[k]$ . Deux solutions symétriques par rapport à zéro sont trouvées pour cette partie imaginaire. (b) Comparaison des parties réelles de la relation de dispersion obtenues à différents ordres de troncatures (dans la demie première zone de Brillouin). Pour chaque valeur de  $N$ , le système linéaire infini (6.9) est tronqué à  $n \in \llbracket -N; N \rrbracket$ . Les courbes à  $N = 5$  et  $N = 15$  sont confondues.

successives de  $k_c$  à partir de la première zone de Brillouin,

- Le motif obtenu est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées  $k = 0$ ,
- Le motif obtenu possède une structure de bandes. Pour certains intervalles de fréquences, aucune valeur *réelle* du vecteur d'onde n'est solution de l'équation de dispersion. Ces domaines sont usuellement appelés "bandes interdites" ou "bandes d'arrêt".

Notons qu'usuellement dans la littérature, seules les solutions réelles de la solution de dispersion sont représentées sur le diagramme de Brillouin [128, 135, 136] (et le comportement des ondes dans les bandes interdites est représenté dans un "diagramme d'atténuation" séparé). Pour les valeurs de pulsation correspondant à ces bandes "interdites", la relation de dispersion (6.9) possède bien des solutions pour  $k$ , mais celles-ci possèdent une partie imaginaire non nulle.

*Partie réelle constante dans les bandes interdites :*

Au sein de chacune de ces bandes interdites, tous les vecteurs d'onde  $k$  partagent la même partie réelle (modulo  $k_c$ ) :

$$\begin{cases} \text{Re}[k] = \frac{k_c}{2} \text{ pour la bande interdite de pulsation la plus basse,} \\ \text{Re}[k] = k_c \text{ pour la seconde bande interdite.} \end{cases} \quad (6.10)$$

Si l'on augmente la valeur de l'intensité  $V_0$  du potentiel périodique, d'autres bandes interdites apparaissent aux intersections de la relation de dispersion, par pulsation croissante. Une alternance est alors observée entre des bandes avec  $\text{Re}[k] = k_c/2$  et des bandes avec  $\text{Re}[k] = k_c$ .

*Une partie imaginaire négative ?*

Deux solutions opposées sont observées pour la partie imaginaire au sein d'une bande interdite.

On observe que chacune des deux peut être associée à chacune des valeurs possibles de la valeur réelle. Ainsi l'ensemble des vecteurs d'onde (complexes) solutions de l'équation de dispersion est donnée pour une pulsation  $\omega$  appartenant à la première bande par :

$$k = \frac{k_c}{2} + nk_c \pm ik_i(\omega), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.11)$$

où  $k_i(\omega)$  est la partie imaginaire d'une solution particulière pour la pulsation  $\omega$ . Cette propriété de symétrie des parties imaginaires, observée ici dans le cas particulier d'un potentiel sinusoïdal, est une propriété générale valable pour tous les potentiels  $V(x)$  à valeurs réelles. En effet, si  $V(x)$  est réel, pour toute solution  $\psi$  de vecteur d'onde  $k$  de (6.2), son complexe conjugué  $\psi^*$  est aussi solution. Cela implique que  $-k^*$  est également solution de l'équation de dispersion. D'après la propriété de symétrie des solutions de l'équation de dispersion par rapport à 0,  $k^*$  est donc également solution. Ainsi, pour les potentiels à valeurs réelles, la relation de dispersion possède également la symétrie par conjugaison complexe et *les solutions complexes apparaissent par paires de complexes conjugués au sein des bandes interdites*.

Remarquons que cette propriété n'est pas discutée dans la littérature usuelle que nous avons pu consulter. Si certains ouvrages [126, 128] présentent les solutions complexes dans les bandes interdites (d'une manière à la courbe rouge de la figure 6.9 (a)), ils ne mentionnent pas l'existence d'une solution  $k$  de partie imaginaire négative. Cette solution correspond à une croissance exponentielle de l'amplitude de l'onde dans la direction de croissance de la coordonnée spatiale au sein du cristal. Dans son ouvrage original sur les électrons dans les réseaux cristallins [122], Bloch suggère que les conditions aux limites dans le cristal sélectionnent les valeurs autorisées du vecteur d'onde, qui doivent être compatibles avec le fait que la probabilité de trouver un électron hors du cristal est très faible. Une décroissance de la fonction d'onde est donc attendue aux limites du cristal. Bloch s'affranchit de ces considérations en imposant des conditions aux limites périodiques à la fonction d'onde. Ce faisant, il se restreint à l'étude des ondes dont l'amplitude est homogène dans le milieu et exclut les solutions  $k$  non réelles. Aujourd'hui, la théorie de Bloch est communément utilisée et mise en pratique sans référence à cette question [126, 136, 137]. L'existence d'une partie imaginaire du vecteur d'onde est directement associée à un phénomène d'évanescence (décroissance exponentielle) à l'entrée du milieu périodique. Nous verrons cependant que l'existence d'une solution à partie imaginaire négative pour le vecteur d'onde sera essentielle pour la description des ondes dans l'analogie temporelle d'un cristal.

### 6.1.3 Modulation périodique d'un milieu de propagation homogène : un cristal temporel

#### De la périodicité spatiale à la périodicité temporelle

L'évolution temporelle des ondes usuelles (correspondant à la catégorie  $\mathcal{H}$  présentée à la section 4.2) peut être décrite dans le cas d'une modulation temporelle périodique du milieu par une équation de Hill (dans l'espace de Fourier spatial). Il y a donc une analogie formelle entre les équations spatiales que nous venons de présenter et les équations temporelles régissant ces ondes usuelles dans les "cristaux temporels". Dans le cas des ondes régies par l'équation de d'Alembert, comme le champ électromagnétique, il y a une parfaite analogie entre une périodicité spatiale dans un cas unidimensionnel et une périodicité temporelle. Ainsi pour un cristal photonique, dans une configuration unidimensionnelle, où un champ électrique monochromatique à la pulsation  $\omega$  se propage selon une direction  $z$  le long de laquelle la permittivité diélectrique du milieu  $\epsilon(z)$  varie

Milieu spatialement périodique	Milieu temporellement périodique
$x$	$t$
$t$	$x$
$k$	$\omega$
$\omega$	$k$
$k_c$	$\omega_c = 2\Omega$
exemple : ondes de matière dans un potentiel périodique	exemple : ondes à la surface d'un bain vibré
$\frac{2mE}{\hbar^2}$	$\omega_0^2(k) = gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3$
$\frac{2mV_0}{\hbar^2}$	$a_0k$
$\psi(\omega, x)$	$\tilde{\zeta}(k, t)$

**Table 6.1** – Correspondances pour le passage de la périodicité spatiale à la périodicité temporelle

périodiquement, on obtient l'équation de Hill [126] :

$$\frac{\partial^2 \widehat{E}}{\partial z^2}(z, \omega) + \epsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{E}(z, \omega) = 0, \quad (6.12)$$

où l'indice de réfraction  $n(z)$  est une fonction périodique et  $\widehat{E}(z, \omega)$  est la transformée de Fourier *temporelle* du champ électrique à la fréquence  $\omega$ . De même, si l'on considère désormais un milieu homogène spatialement, mais dont la permittivité diélectrique  $\epsilon(t)$  varie temporellement de manière périodique, la transformée de Fourier *spatiale* du champ d'induction électrique  $\widetilde{D}$  à un vecteur d'onde  $\vec{k}$  vérifie l'équation de Hill suivante [138] :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{D}}{\partial t^2} + \frac{\vec{k}^2}{\mu_0 \epsilon(t)} \widetilde{D} = 0, \quad (6.13)$$

Pour un problème unidimensionnel, les rôles joués par les variables de temps et d'espace sont ici exactement intervertis, par rapport aux ondes dans les structures spatiales périodiques. Cette analogie parfaite découle des rôles similaires joués par les variables de temps et d'espace dans l'équation de d'Alembert (ces rôles sont identiques pour les problèmes à une dimension).

Du fait de cette analogie, le théorème de Floquet et la description par les fonctions de Bloch et les diagrammes de Brillouin sont encore valables dans le cas du "cristal temporel", à condition de remplacer les variables spatiales par les variables temporelles correspondantes du cas temporel. Dans toute la suite, nous considérerons, pour rester concret, le cas des ondes à la surface d'un bain de liquide en vibration, gouvernées par l'équation de Mathieu (5.19). Le tableau 6.1 présente les correspondances entre le cas spatial des ondes de matière dans un potentiel sinusoïdal et celui, temporel, des ondes à la surface d'un bain oscillant verticalement.

Nous adoptons pour la pulsation de la modulation temporelle du milieu (de la vibration du bain pour les ondes de surface) la notation d'usage pour l'étude de l'instabilité de Faraday  $\omega_c = 2\Omega$ .

$\Omega$ , la pulsation moitié, est la pulsation dite de Faraday.

### Théorie de Floquet et relation de dispersion

Comme précédemment, en application du théorème de Floquet, nous pouvons, sans perte de généralité, considérer pour les solutions de l'équation de Mathieu (5.19) la forme générale (voir l'annexe F) :

$$\tilde{\zeta}(k, t) = e^{i\omega t} p(t), \quad (6.14)$$

où  $p(t)$  est une fonction périodique de même période  $\pi/\Omega$  que la modulation temporelle. On peut décomposer  $p(t)$  en série de Fourier :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2ni\Omega t}. \quad (6.15)$$

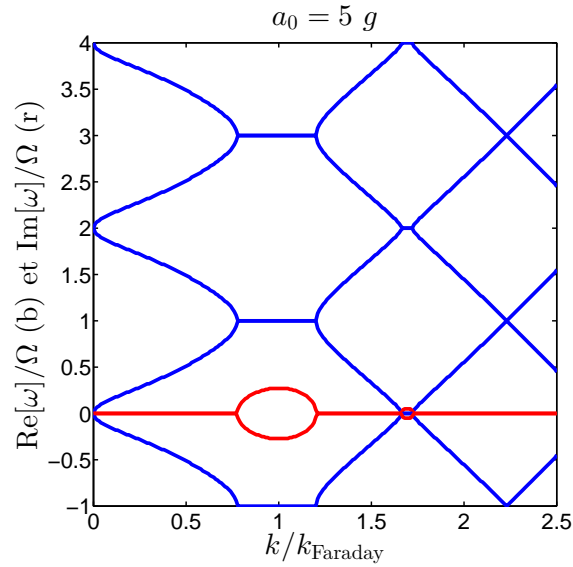
On obtient comme à la section précédente un système linéaire (infini) d'équations couplées :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left( -(\omega + 2n\Omega)^2 + \omega_0^2(k) \right) c_n - \frac{a_0 k}{2} (c_{n-1} + c_{n+1}) = 0. \quad (6.16)$$

Ici le couplage du coefficient de Fourier  $c_n$  avec les coefficients immédiatement inférieur  $c_{n-1}$  et supérieur  $c_{n+1}$  signifie qu'une composante à une pulsation  $\omega$  est directement couplée à une composante à la pulsation  $\omega+2\Omega$  et à une composante à la pulsation  $\omega-2\Omega$ . Comme précédemment, l'équation de dispersion s'écrit comme une condition de nullité du déterminant (infini) du système linéaire (6.16). Notons que le tableau de correspondances 6.1 nous permet d'anticiper l'allure de la relation de dispersion : puisque les rôles de  $\omega$  et de  $k$  sont intervertis par rapport au cas de la périodicité spatiale du milieu, le même diagramme de Brillouin est attendu, tourné d'un quart de tour. La relation de dispersion approchée, obtenue par une troncature du système à l'ordre 15 est présentée à la figure 6.2. Les vecteurs d'onde  $y$  sont normalisés par le vecteur d'onde de Faraday, défini par  $\omega_0(k_{\text{Faraday}}) = \Omega$ , correspondant aux ondes à la fréquence de Faraday dans un milieu libre (sans modulation). Nous verrons à la section suivante le rôle particulier de ce vecteur d'onde. Dans ce diagramme et dans les suivants,  $\Omega/2\pi = 30$  Hz. Comme précédemment (voir figure 6.1 (b)), nous avons vérifié qu'il s'agissait d'un ordre de troncature suffisamment élevé pour obtenir le motif limite attendu lorsque l'ordre de troncature tend vers l'infini.

Comme attendu du fait de la correspondance avec le cas de la périodicité spatiale, le diagramme obtenu présente une périodicité et une structure de bandes. Par analogie avec les diagrammes de Brillouin donnant la relation de dispersion des ondes dans les structures spatiales périodiques, nous appellerons souvent par la suite ce type de diagramme un diagramme de Brillouin temporel.

Notons qu'on trouve dans la littérature des diagrammes similaires introduits dans des contextes différents. Citons ainsi les travaux de MacKay et Saffman sur des "bulles d'instabilités" conduisant à l'instabilité de motifs de vagues raides de forte amplitude [139] vis à vis de perturbations infinitésimales. Citons également les travaux de Casedy et Olliner, dans le contexte des lignes de transmission électriques modulées par une onde de pompe [140, 141]. L'onde de pompe que ces auteurs considèrent, induit une modulation périodique du milieu d'une manière plus complexe que celle considérée ici (modélisée par des équations n'appartenant pas à la catégorie des équations de Hill). Néanmoins, l'existence d'une composante temporelle dans la périodicité du milieu dans leur étude les conduit à établir un diagramme de relation de dispersion similaire à celui de la figure 6.2, présentant une structure de bandes complexes. Ainsi, une partie des propriétés des diagrammes de Brillouin temporels, que nous allons étudier dans la suite de ce travail, a également été décrite



**Figure 6.2** – Relation de dispersion des ondes pour des modulations temporelles périodiques. Bleu :  $\text{Re}[\omega]$ , rouge :  $\text{Im}[\omega]$ . Une structure de bandes est observée.

dans cette étude. Citons enfin des études plus récentes concernant des milieux diélectriques dont la constante diélectrique est une fonction périodique du temps par Zurita-Sánchez *et al* [142] et Salem et Caloz [143]. Ces auteurs n'envisagent pas la possibilité de bandes de solutions à pulsations complexes telles qu'elles apparaissent dans la figure 6.2. Cependant, comme nous le verrons par la suite, ces bandes possèdent bien une réalité physique et constituent même l'ingrédient essentiel permettant de décrire les principaux phénomènes observés pour des ondes dans des cristaux temporels. Comme nous le détaillerons à la section suivante, c'est notamment l'existence de ces bandes complexes qui permet de décrire un phénomène d'amplification/instabilité, observé notamment dans les simulations numériques effectuées par ces mêmes auteurs [41]. Tout au long de ce travail, les différentes caractéristiques de la propagation des ondes dans les cristaux temporels seront déduites de l'étude approfondie des diagrammes de Brillouin temporels que nous venons d'introduire.

#### *Répétition verticale du motif :*

Le motif obtenu pour la relation de dispersion, pour sa partie réelle, se répète verticalement. Comme dans le cas spatial, l'écriture du champ d'onde  $\tilde{\zeta}$  sous la forme  $e^{i\omega t}p(t)$ , où  $p(t)$  est une fonction périodique de même période que la modulation du milieu ( $\pi/\Omega$ ), n'est pas unique :  $e^{i(\omega+2n\Omega)t}q(t)$ , où  $n$  est un entier et  $q(t) = e^{-2in\Omega t}p(t)$  est une écriture alternative équivalente. On peut donc se restreindre à une zone de pulsations finie  $[-\Omega; \Omega]$ , équivalent temporel de la première zone de Brillouin. L'ensemble de la courbe de dispersion, pour la partie réelle, est obtenue par translations successives *verticales* de ce motif.

Si l'allure du diagramme de bandes obtenu est identique (après rotation d'un quart de tour pour intervertir  $\omega$  et  $k$ ) à celle obtenue à la section précédente pour les ondes stationnaires de Schrödinger dans un potentiel périodique, la forme exacte diffère légèrement. Deux raisons expliquent cette légère différence. La première est qu'ici, la relation reliant le paramètre de l'équation sans modulation,  $\omega_0^2(k)$  a une dépendance cubique à  $k$  (pour  $k$  élevé), qui contraste avec la dépendance linéaire de  $E = \hbar\omega$  à  $\omega$  (le correspondant dans le cas spatial de  $k$ ). La seconde raison est que l'intensité de la modulation temporelle ( $a_0k$ ) dépend pour les ondes de surface dans les bains vibrés de  $k$ , contrairement au potentiel  $V_0$  considéré pour la modulation spatiale des ondes de Schrödinger.

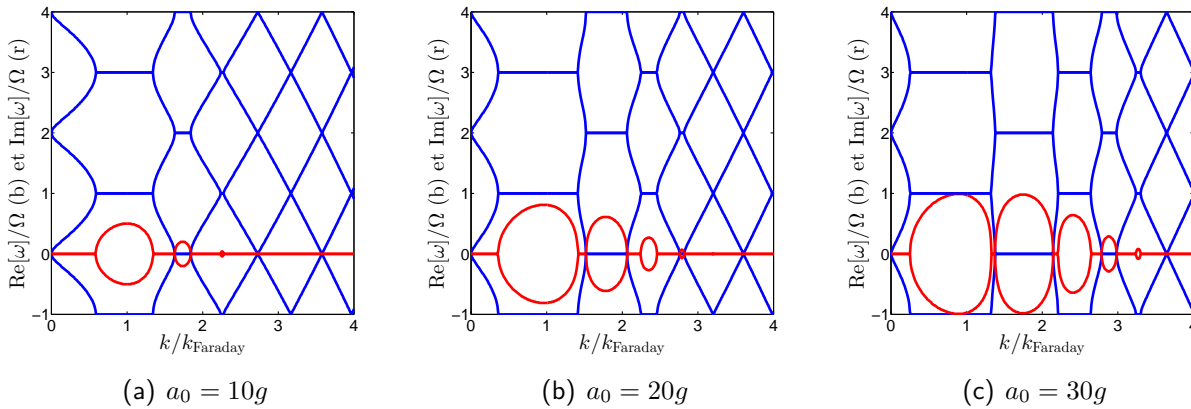
Remarquons également que le motif obtenu est symétrique (partie réelle comme partie imagi-

naire) par rapport à l'axe des abscisses ( $\omega = 0$ ). En effet, comme pour le cas spatial, on peut montrer que si  $\omega$  est solution de l'équation de dispersion,  $-\omega$  l'est aussi.

*Bandes verticales :*

Puisque les rôles de  $\omega$  et de  $k$  ont été intervertis par rapport au cas spatial, nous observons sur la figure 6.16 que la structure de bandes et notamment les bandes "interdites" sont désormais *verticales*. Elles correspondent désormais à des domaines de *vecteurs d'onde*  $k$  pour lesquels il n'existe pas de *pulsation*  $\omega$  réelle solution de l'équation de dispersion. Dans ces bandes de vecteurs d'onde, les pulsations solutions de l'équation dispersion ont une partie imaginaire non nulle. Deux bandes "interdites" temporelles sont visibles sur le diagramme de la figure 6.2. Au sein de chacune de ces bandes, toutes les pulsations  $\omega$  partagent la même partie réelle (modulo  $2\Omega$ ) :

$$\begin{cases} \text{Re}[\omega] = \Omega \pmod{2\Omega} \text{ pour la première bande interdite,} \\ \text{Re}[\omega] = 2\Omega \pmod{2\Omega} \text{ pour la seconde.} \end{cases} \quad (6.17)$$

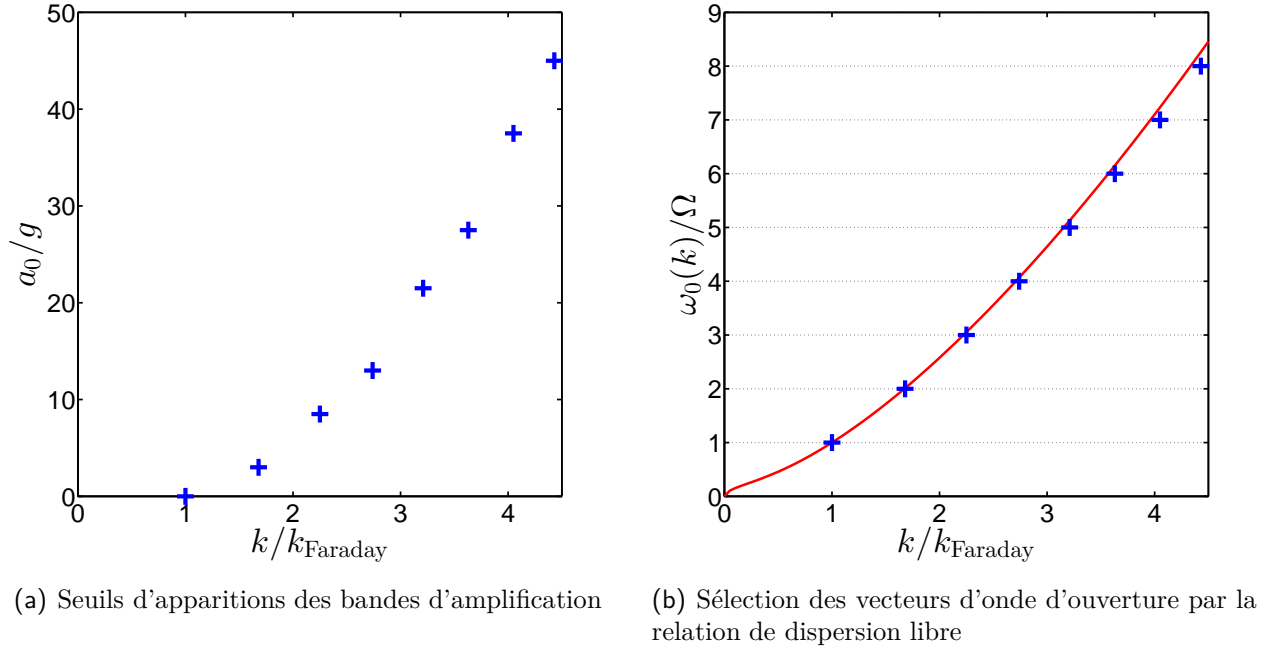


**Figure 6.3** – Ouvertures des bandes complexes avec l'amplitude de modulation (c'est-à-dire l'amplitude d'accélération du bain  $a_0$ ). (a)  $a_0 = 5g$ , (b)  $a_0 = 10g$ , (c)  $a_0 = 15g$ .

La figure 6.3 montre "l'ouverture" successive de nouvelles bandes complexes, par ordre de vecteurs d'ondes croissants, lorsque l'on augmente l'intensité de la modulation du milieu, c'est-à-dire lorsqu'on augmente l'amplitude  $a_0$  de l'accélération du bain dans le cas des ondes de surface sur un bain vibré). L'amplitude de l'accélération vaut 10 fois l'accélération de gravité  $g$  pour la figure (a),  $20g$  pour la figure (b) et  $30g$  pour la figure (c). Deux bandes de pulsations complexes sont présentes pour  $a_0 = 5g$  (voir figure 6.2). Une troisième bande de pulsation complexe, sur un domaine de vecteurs d'ondes plus élevés, est obtenue pour  $a_0 = 10g$ . Une quatrième bande apparaît lorsqu'on augmente encore l'amplitude, elle est visible sur la figure 6.3 (b), où  $a_0 = 20g$ , puis une cinquième, visible sur la figure 6.3 (c), où  $a_0 = 30g$ . Ainsi, au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de modulation, on observe les apparitions successives de bandes de pulsations complexes, par vecteurs d'ondes croissants. Une alternance est alors observée entre des bandes impaires avec  $\text{Re}[\Omega] = \Omega \pmod{2\Omega}$  et des bandes paires avec  $\text{Re}[\omega] = 2\Omega \pmod{2\Omega}$ . Parallèlement à "l'ouverture" de nouvelles bandes complexes, on observe l'augmentation de la largeur des bandes existantes ainsi que l'augmentation de la valeur du maximum de la partie complexe de la pulsation au sein de chaque bande.

Par ailleurs, les bandes complexes "s'ouvrent" autour de vecteurs d'onde qui correspondent à des intersections des courbes de dispersion (voir par exemple l'ouverture de la quatrième bande d'amplification autour du vecteur d'onde  $2,74 k_{\text{Faraday}}$  sur la figure 6.2). Par symétrie du diagramme

par toute translation verticale d'un multiple de  $2\Omega$ , chaque nœud d'intersection des courbes de dispersion à un vecteur d'onde donné est accompagné par l'ensemble de ses répétitions décalées d'un multiple de  $2\Omega$ . La figure 6.4 détaille les caractéristiques des ouvertures successives des différentes bandes complexes.



**Figure 6.4** – Ouvertures des bandes complexes avec l'amplitude de modulation (c'est-à-dire l'amplitude d'accélération du bain  $a_0$ ). (a) Accélération seuil d'apparition de chaque bande en fonction du vecteur d'onde auquel la bande "s'ouvre". (b) Sélection des vecteurs d'onde des bandes complexes par la relation de dispersion libre, des ondes en l'absence de vibration du bain. Ligne continue rouge : relation de dispersion libre  $\omega_0(k)$ . Croix bleues : Vecteurs d'onde associés aux ouvertures des bandes complexes et pulsations associées. À chaque vecteur d'onde sont également associées dans le diagramme de Brillouin toutes les pulsations obtenues par translation d'un multiple de  $2\Omega$  : toutes ces répétitions ne sont pas représentées ici par souci de clarté.

La figure 6.4 (a) présente les accélérations successives pour lesquelles une nouvelle bande complexe apparaît en fonction du vecteur d'onde autour duquel cette bande apparaît. Une croissance non linéaire est observée. La figure 6.4 (b) compare les vecteurs d'onde et les pulsations auxquelles les bandes complexes successives s'ouvrent à la relation de dispersion des ondes libres (sans vibration). La courbe continue rouge représente cette relation de dispersion libre ( $\omega_0(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$ ). Les croix bleues représentent les points d'intersections de la relation de dispersion du milieu modulé autour desquels s'ouvrent successivement les bandes complexes. L'abscisse d'une croix bleue représente donc le vecteur d'onde autour duquel la bande complexe correspondant s'ouvre. L'ordonnée d'une croix bleue est une pulsation (réelle) associée à ce vecteur d'onde sur le diagramme de Brillouin pour l'amplitude accélération d'ouverture. Comme évoqué précédemment, à chaque vecteur d'onde sont également associées dans le diagramme de Brillouin toutes les pulsations obtenues par translation d'un multiple de  $2\Omega$  : toutes ces répétitions verticales ne sont pas représentées ici par souci de clarté. Ce diagramme montre que les vecteurs d'ondes d'ouverture des bandes complexes sont sélectionnés, dans le régime des faibles amplitudes d'accélération, par la relation de dispersion libre  $\omega_0(k)$  (caractérisant les ondes dans un milieu libre non modulé) : la  $n^{\text{ième}}$  bande complexe s'ouvre approximativement autour du vecteur d'onde

$k_n$  associé par la relation de dispersion libre au  $n^{\text{ième}}$  multiple de la pulsation de Faraday :

$$\omega_0(k_n) = n\Omega. \quad (6.18)$$

Pour les bandes d'ordre plus élevé, s'ouvrant à des accélérations plus élevées, une légère déviation à cette sélection est observée. Notons que cette propriété de sélection, que nous venons de décrire ici dans le cas temporel, est également observée dans l'analogie spatial présenté à la section précédente (voir figure 6.9, l'ouverture des bandes (horizontales) se fait alors autour des pulsations données par  $\omega = n^2 \hbar k_c^2 / 8m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).

### 6.1.4 Croissance ou décroissance exponentielle ? : des bandes d'amplification

#### Existence de pulsations de partie imaginaire négatives dans les bandes complexes

Les parties imaginaires des solutions de l'équation de dispersion présentent une symétrie par rapport zéro. Comme dans le cas spatial, cette symétrie des solutions de l'équation de dispersion par conjugaison complexe est liée au fait que les coefficients de l'équation de Hill gouvernant le système sont à valeurs réelles. En effet, pour toute solution  $\tilde{\zeta}(k, t) = e^{i\omega t} p(t)$  (où  $\omega$  est la pulsation et  $p(t)$  une fonction périodique de même pulsation  $2\Omega$  que la modulation, son complexe conjugué  $\tilde{\zeta}^*(k, t) = e^{-i\omega^* t} p^*(t)$  est aussi solution.  $p^*(t)$  est une fonction périodique de pulsation  $2\Omega$ , et  $-\omega^*$  est donc également solution de l'équation de dispersion. Ainsi, *les solutions complexes apparaissent par paires de complexes conjugués au sein des bandes interdites*. Au sein d'une bande "interdite", l'ensemble des solutions de l'équation de dispersion est donc :

$$\omega = p\Omega + 2n\Omega \pm i\omega_i(k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.19)$$

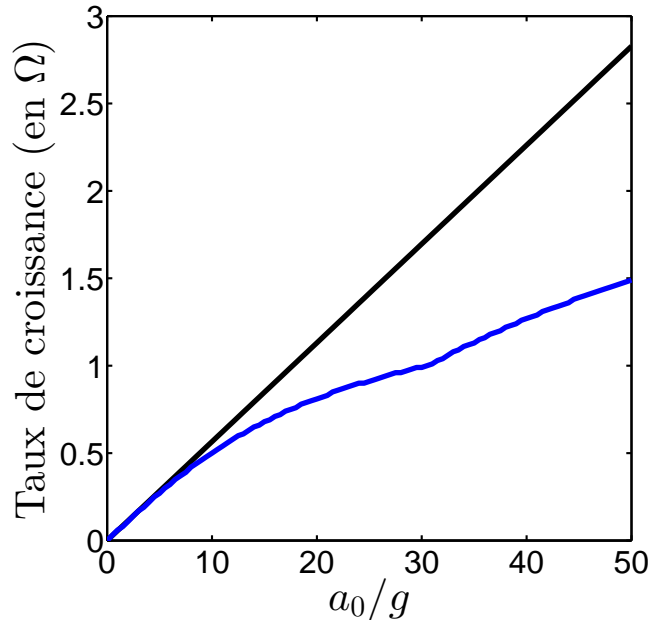
où  $\omega_i(k)$  est la valeur particulière de la partie imaginaire d'une pulsation complexe solution de l'équation de dispersion pour le vecteur d'onde  $k$ , et  $p$  vaut 1 pour une bande impaire et 2 pour une bande paire.

Par analogie avec le cas de la modulation spatiale, nous avons appelé jusqu'à présent bandes "interdites" les domaines de vecteurs d'onde pour lesquels la pulsation solution de l'équation de dispersion possède une partie imaginaire non nulle. Cependant, pour ces valeurs de vecteur d'onde, il existe toujours une solution de partie imaginaire négative, correspondant à une croissance de l'amplitude de l'onde. Contrairement au cas spatial, des conditions "aux limites temporelles" ne peuvent pas être imposées et induire une sélection parmi les solutions possibles, du fait de la causalité. En effet, si une condition initiale sur le champ d'onde (et sur sa dérivée) peut (et même suffit, d'après le théorème de Cauchy, à) sélectionner une solution particulière, il est absurde d'envisager qu'une condition "finale" puisse influencer la dynamique aux instants antérieurs. Notons par ailleurs que la croissance de l'amplitude du champ d'onde peut être expliquée énergétiquement par la puissance fournie par la modulation temporelle du milieu. Il est donc, *a priori*, tout à fait envisageable physiquement de retenir une solution exponentiellement croissante. Au sein de ces bandes particulières, les ondes peuvent donc être amplifiées plutôt qu'atténuées au cours de leur propagation. Pour une modulation temporelle, l'équivalent des bandes "interdites" ne mérite donc pas ce qualificatif et pourraient, à l'inverse, être qualifiées de bandes "hyperautorisées", ou plus prosaïquement de "bandes d'amplification".



## Bandes d'amplification et amplification dans la conjugaison de phase hydrodynamique

Si une onde est envoyée dans un milieu modulé temporellement, possédant une composante à une longueur d'onde se situant dans une bande d'amplification à l'amplitude de modulation considérée, nous attendons, d'après les résultats que nous venons d'obtenir, une croissance exponentielle de son amplitude. Cette prédiction peut être confrontée aux résultats théoriques et expérimentaux obtenus aux sections 5.2, 5.3 et 5.4. En effet, dans ces sections, nous avons considéré l'envoi dans un milieu modulé temporellement d'une onde possédant une composante à la longueur d'onde de Faraday. Le vecteur d'onde de Faraday associé se situe au cœur de la première bande d'amplification des diagrammes de Brillouin temporels que nous venons d'établir. Notre étude des sections précédentes a démontré (en plus de l'existence d'un phénomène de stationnarisation) la croissance exponentielle de la composante à la longueur d'onde de Faraday, telle que prédite par les diagrammes de Brillouin temporels.



**Figure 6.5** – Comparaison des différentes prédictions du taux de croissance d'une onde à la longueur d'onde de Faraday dans un cristal temporel. Courbe bleue :  $\text{Im}[\omega(k_{\text{Faraday}})]/\Omega$ , taux de croissance lu sur les diagrammes de Brillouin obtenus pour les différentes accélérations. Droite noire :  $a_0 k_{\text{Faraday}}/4\Omega^2$ , taux de croissance prédit par la théorie développée à la section 5.4. Cette dernière n'est valable que dans le régime des faibles accélérations ( $a_0 k \ll \omega_0^2(k)$ ). Les deux prédictions coïncident sur le domaine des faibles amplitudes d'accélération, où elles sont toutes les deux valables.

La figure 6.5 présente la prédiction par la théorie des diagrammes de Brillouin temporels, du taux de croissance de l'amplitude d'une onde à la longueur d'onde de Faraday (courbe bleue). Cette prédiction est comparée à l'expression  $a_0 k_{\text{Faraday}}/4\Omega^2$  (ligne droite noire), que nous avons obtenue et confrontée aux résultats expérimentaux à la section 5.4. Cette dernière n'est valable que dans le régime des faibles accélérations ( $a_0 k \ll \omega_0^2(k)$ ). Ici, nous avons choisi  $2\pi\Omega = 30$  Hz, le régime des faibles accélérations correspond donc à :  $a_0 \ll 4,4g$ . Nous observons que les deux prédictions coïncident sur ce domaine d'accélération. Remarquons par ailleurs qu'aux faibles accélérations que nous avons considérées au chapitre précédent (typiquement de l'ordre de  $g$ ), seule la première bande d'amplification, centrée sur le vecteur d'onde de Faraday, est ouverte. Ceci est cohérent avec le fait que seule la composante à la fréquence de Faraday est amplifiée dans ce régime, comme nous l'avons observé expérimentalement. Ainsi, cette nouvelle description des ondes dans les milieux

modulés périodiquement dans le temps à l'aide de diagrammes de Brillouin temporels englobe nos précédents résultats (et les généralise au régime d'accélération quelconque). Remarquons que cette théorie, à ce stade, s'applique à un milieu non dissipatif (l'équation de Mathieu (5.19) ne contient pas de terme de viscosité).

Ainsi, les ondes dans les milieux modulés temporellement de manière périodique peuvent être décrites à l'aide de diagrammes de Brillouin temporels, analogues à ceux utilisés pour les ondes dans les structures périodiques spatiales. Par rapport au cas spatial, ces diagrammes temporels sont renversés (les rôles de  $\omega$  et  $k$  sont intervertis) et les bandes "interdites" sont remplacées par des bandes d'amplification, "s'ouvrant" successivement autour de vecteurs d'onde croissants au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de modulation du milieu. Comme nous l'avons vu à la section 5.4, le phénomène d'amplification des ondes à la fréquence de Faraday est le moteur de *l'instabilité de Faraday*. Par conséquent, peut-on déduire de notre description à l'aide des diagrammes de Brillouin temporels des informations sur cette instabilité elle-même? C'est ce que nous allons montrer dans la section suivante. Nous avons cependant déjà donné l'élément clef de cette réflexion : aux bandes interdites dans les milieux spatialement périodiques correspondent, d'une manière générale, des bandes d'amplification dans les milieux temporellement périodiques, donnant lieu à un phénomène d'amplification de certains modes, moteur d'une instabilité.

## 6.2 Instabilité dans les cristaux temporels

À la section précédente, nous avons présenté la théorie des ondes dans les "cristaux temporels" par une approche analogue à celle utilisée pour les cristaux spatiaux, et avons mis en évidence l'existence de bandes de vecteurs d'onde amplifiés. Cette section montrera les propriétés du phénomène d'instabilité qui peut être prédit par ce modèle, en considérant plus particulièrement le cas des ondes de surface, ce qui nous permettra de revisiter l'instabilité de Faraday et d'en décrire de nouveaux aspects.

### 6.2.1 Langues d'amplification, langues d'instabilité

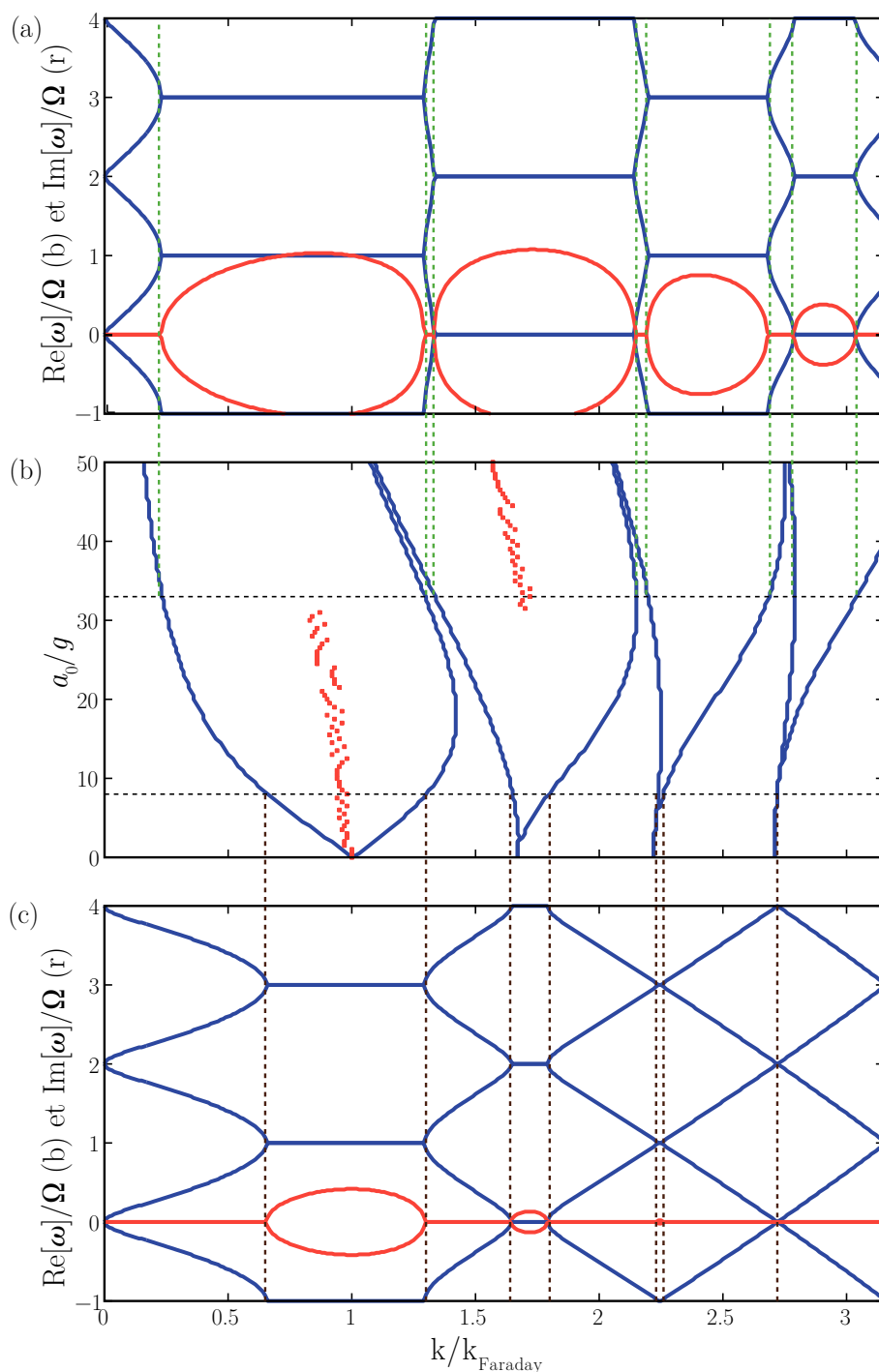
#### Construction des domaines d'amplification à partir des diagrammes de Brillouin temporels

Nous avons montré à la section 5.4 que l'instabilité de Faraday pouvait être interprétée comme un mécanisme d'amplification d'un bruit initial, réalisée par la modulation temporelle périodique du milieu. Dans le régime de faible amplitude de modulation du milieu, seule la première bande d'amplification est ouverte et celle-ci est de faible largeur. Ainsi, seul un domaine de vecteur d'onde étroit autour du vecteur d'onde de Faraday  $k_{\text{Faraday}}$  (vérifiant  $\omega_0(k_{\text{Faraday}}) = \Omega$ ), est amplifié : on retrouve ainsi le fait que, dans ce régime, correspondant au modèle de la section 5.4, seul le mode à la longueur d'onde et à la fréquence de Faraday est instable. Pour des amplitudes de modulation plus importantes, les ouvertures successives d'autres bandes d'amplification, au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de modulation du milieu, correspondent à l'apparition de nouveaux domaines de vecteurs d'onde instables. La figure 6.6 présente l'évolution de ces zones de modes instables avec l'amplitude de modulation du milieu.

Les courbes bleues du diagramme 6.6 (b) indiquent les frontières des différentes zones d'amplification/instabilité. L'intérieur des "langues" qu'elles décrivent correspond au domaine instable. Les figures 6.6 (a) et (c) représentent les diagrammes de Brillouin temporels associés respectivement aux accélérations  $a_0 = 33g$  et  $a_0 = 8g$ . Les traits pointillés, marquant les frontières des différentes bandes d'amplification, respectivement à  $a_0 = 33g$  (vert) et  $a_0 = 8g$  (marron), permettent d'illustrer la façon de le diagramme (b) est construit : pour chaque valeur de l'accélération  $a_0$  entre 0 et  $50g$ , un diagramme de Brillouin est calculé, puis, les vecteurs d'onde frontières des zones d'amplification à cette accélération sont enregistrés et reportés (en bleu) sur le diagramme (b).

De même, pour chaque valeur de l'accélération, le vecteur d'onde correspondant sur le diagramme de Brillouin temporel, au minimum de la courbe de la partie imaginaire (négative) de la pulsation (*i.e.* le mode le plus amplifié) est également enregistré et reporté (en rouge) sur le diagramme (b). On remarque que le mode le plus amplifié effectue un saut abrupt vers  $a_0 \approx 31g$ . En dessous de ce seuil, le mode le plus amplifié est proche du vecteur d'onde de Faraday, il reste proche du centre de la première zone d'amplification. Au-dessus de ce seuil, sur le reste du domaine considéré, le mode le plus amplifié est au cœur de la deuxième bande d'amplification.

On retrouve sur le diagramme de stabilité 6.6 (b) que dans le régime où  $a_0$  tend vers zéro, seule une zone autour du vecteur d'onde de Faraday est ouverte, les autres se réduisant à un mode marginalement instable. Les bandes d'amplification forme des "langues" qui s'élargissent vers les accélérations élevées jusqu'à être mitoyennes, sans jamais cependant se croiser. Notons qu'en plus d'être amplifiés, les modes des "langues" impaires oscillent à la pulsation  $\Omega(\text{mod}[2\Omega])$  et les modes des "langues" paires oscillent à la pulsation  $2\Omega(\text{mod}[2\Omega])$ . Cette allure très particulière de langues est bien connue. On la retrouve dans le diagramme des zones d'instabilité établi dans



**Figure 6.6** – "Langues" d'amplification du cristal temporel (b), construites à partir de diagrammes de Brillouin temporels, tels que ceux en (a) et (c). Sur ces derniers, comme précédemment, les courbes bleues et rouges désignent respectivement les parties réelles et imaginaires de la pulsation solution de l'équation de dispersion. Sur le diagramme (b), les courbes bleues représentent les frontières des zones d'amplification. La courbe rouge représente le vecteur d'onde d'amplification maximale. Les courbes pointillées horizontales désignent les amplitudes d'accélération  $8g$  et  $33g$  respectivement associées au diagrammes (a) et (c). Les courbes pointillées verticales, également reportées sur les diagrammes de Brillouin (a) et (c), aident à la visualisation des frontières des bandes d'amplification pour chacune de ces deux amplitudes d'accélération.

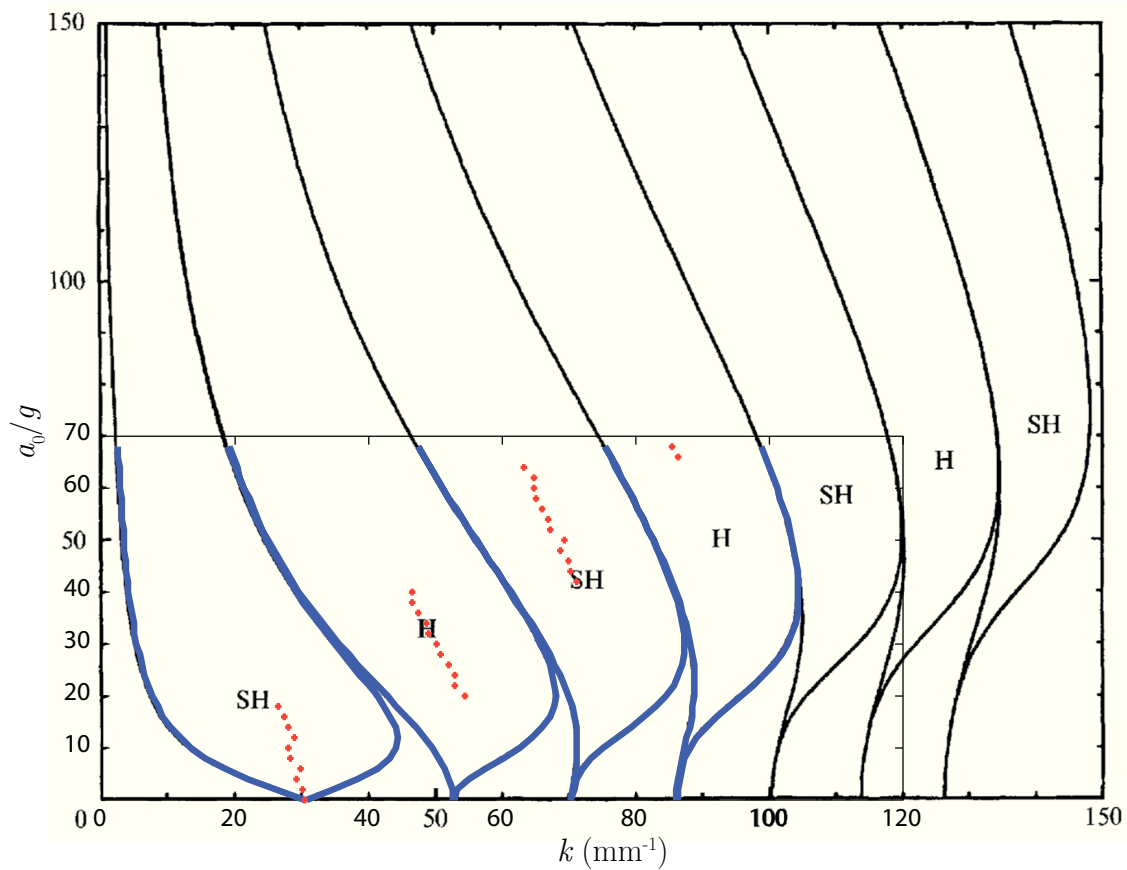
le cas des ondes à la surface des bains de liquides en vibration (instabilité de Faraday) par Kumar et Tuckermann [110] (voir figure 5.10), ainsi que dans le diagramme des zones d'instabilités établi pour le cas des ondes électromagnétiques dans un milieu de permittivité périodique par Holberg et Kunz [138].

### Amplification et instabilité

Comparons le diagramme d'amplification que nous avons obtenu à partir des diagrammes de Brillouin temporels au diagramme d'instabilité de Faraday trouvé dans la littérature. Selon la même méthode qu'au paragraphe précédent, nous avons reconstruit un diagramme de bandes d'amplification en utilisant les mêmes paramètres de fluides que ceux choisis dans les travaux de Kumar et Tuckermann [110], ainsi que la même fréquence de modulation du milieu (100 Hz). Ici, l'interface considérée n'est pas une interface liquide-air comme précédemment mais l'interface entre deux fluides de masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$  comparables. L'équation de Mathieu 5.19 utilisée précédemment est cependant toujours valable, à condition de multiplier le terme d'accélération par  $(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  et de modifier la relation de dispersion en :

$$\omega_0(k) = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)gk + \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (6.20)$$

La figure 6.7 présente le résultat de la comparaison.



**Figure 6.7** – "Langues" d'amplification du cristal temporel et d'instabilité de Faraday. Les frontières des zones d'instabilité de Faraday (noir) pour une interface entre deux fluides non visqueux (figure issue de [110]). Les frontières des bandes d'amplification issues des diagrammes de Brillouin temporel (bleu) ont été superposées et coïncident avec les premières. Les points rouges indiquent le mode le plus instable à chaque accélération.

Les "langues" d'instabilités calculées pour un fluide idéal par Kumar et Tuckermann sont représentés en noir. Nous avons superposé à cette figure de référence le diagramme des frontières des zones d'amplification obtenu par notre approche des diagrammes de Brillouin temporels (en bleu, restreint à un domaine plus petit de vecteurs d'onde et d'amplitudes d'accélération). Les deux ensembles de courbes se superposent parfaitement.

Nous retrouvons donc par la méthode des diagrammes de Brillouin temporels le diagramme d'instabilité déjà connu de l'instabilité de Faraday dans un milieu non dissipatif. Notons que la compatibilité entre nos résultats et ceux de la littérature de référence n'est pas surprenante, car ils résultent dans les deux cas d'une analyse des propriétés de la même équation de Mathieu (5.19). Insistons cependant sur la généralité de ce phénomène d'amplification/instabilité, qui n'est pas propre aux ondes de surface mais se manifeste pour tout type d'onde classique dans un milieu modulé temporellement périodiquement. Ainsi, cette même allure caractéristique du diagramme, en "langues" s'élargissant avec l'amplitude de modulation, est retrouvée, dans le cas d'ondes électromagnétiques, par Holberg et Kunz [138].

Remarquons par ailleurs que l'approche des diagrammes de Brillouin nous permet d'obtenir des informations supplémentaires, en plus des frontières des zones d'instabilité. Notamment, les taux de croissances des différents modes instables sont évalués et le mode le plus instable est connu. Nous obtenons un résultat surprenant : contrairement aux prédictions fournies par la littérature, se fondant pour cet aspect sur des analyses effectuées dans la limite des faibles modulation (voir section 5.3 et référence [110]), le mode le plus instable n'est pas toujours le mode au vecteur d'onde de Faraday. Les points rouges sur le diagramme 6.7 indiquent le mode le plus instable pour chaque accélération. Pour les faibles accélérations, le vecteur d'onde le plus instable reste proche du vecteur d'onde de Faraday (sur lequel se referme la première bande d'instabilité quand  $a_0$  tend vers zéro). Il reste situé vers le centre de cette première bande. Lorsque l'accélération est augmentée et dépasse un seuil, proche de  $20g$ , le taux de croissance le plus grand au sein de la deuxième bande d'amplification dépasse celui de la première bande d'amplification (cette configuration est visible sur la figure 6.6 (a)). Le mode le plus instable bascule vers le centre de la deuxième bande d'instabilité. Ce basculement est surprenant car il signifie que le mode le plus instable pour cette gamme d'accélération n'est pas le mode à la fréquence moitié de la fréquence de modulation, de longueur d'onde proche de longueur d'onde de Faraday, mais au contraire un mode à la fréquence de modulation, de vecteur d'onde très différent. Un autre basculement est observé vers  $40g$  : le taux de croissance le plus élevé au sein de la troisième bande d'amplification dépasse celui de la deuxième bande. Vers  $64g$ , le mode le plus instable bascule à nouveau de la troisième vers la quatrième bande, ce qui nous conduit à conjecturer que ce phénomène se reproduit : le mode le plus instable bascule par seuils successifs d'une bande à la suivante, en alternant entre la fréquence de modulation et la fréquence moitié, au fur et à mesure que l'accélération croît.

Cependant, dans le cas spécifique des ondes de surfaces, la dissipation visqueuse induit une atténuation qui dépend du vecteur d'onde (elle augmente avec le vecteur d'onde). L'analyse du mode le plus amplifié par la modulation temporelle ne suffit donc pas à décrire la dynamique d'instabilité. Nous allons étudier dans la section suivante l'effet de cette dissipation.

## 6.2.2 Dissipation dans un cristal temporel et effet de la viscosité

### Établissement des diagrammes de Brillouin temporels en présence de dissipation

La théorie présentée dans cette section ne prend pas en compte, à ce stade, d'effet de dissipation (d'origine visqueuse pour les ondes de surface). Usuellement, les effets dissipatifs sont modélisés en rajoutant un terme proportionnel à la dérivée temporelle du champ dans l'équation de Mathieu. La théorie de Floquet utilisée précédemment reste néanmoins valable, car les coefficients de l'équation sont toujours périodiques (ou constants). Suivant le type d'onde considéré, le coefficient de dissipation peut varier différemment avec le vecteur d'onde, ce qui influence fortement la dynamique du système.

Pour les ondes de surface, la dissipation visqueuse peut, dans la limite des faibles viscosités ( $\nu \ll$

$\omega_0(k)/k^2$ ), être modélisée par l'ajout d'un terme correctif en dérivée première dans l'équation de Mathieu, avec le coefficient de dissipation  $4\nu k^2$  (voir équation (5.70)). En appliquant directement la théorie de Floquet à cette équation, on peut reporter la forme générale (6.14) dans l'équation des ondes en présence de viscosité (5.70), pour obtenir le nouveau système linéaire :

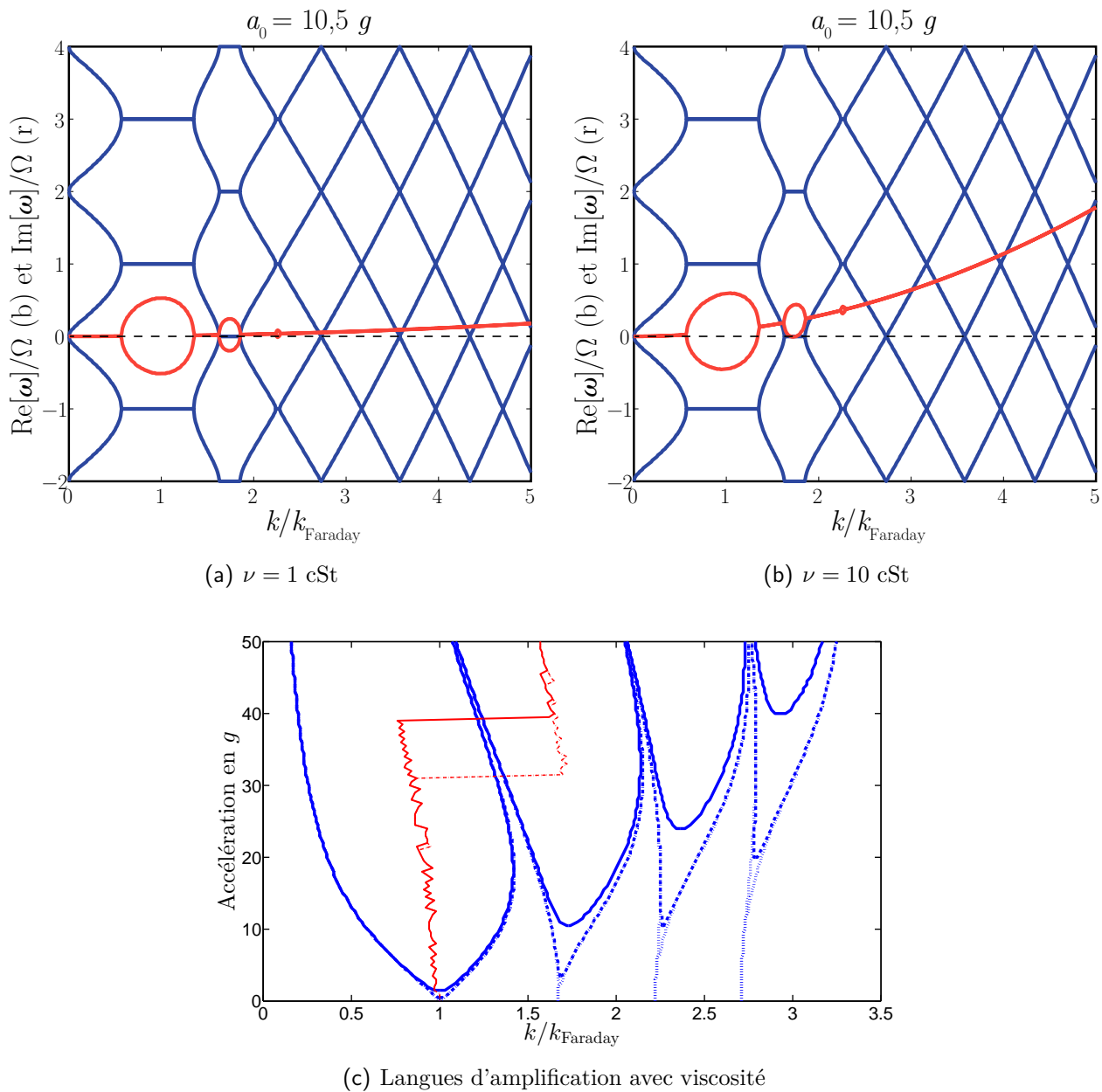
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left( -(\omega + 2n\Omega)^2 + \omega_0^2(k) + 4i\nu k^2(\omega + 2n\Omega) \right) c_n - \frac{a_0 k}{2}(c_{n-1} + c_{n+1}) = 0. \quad (6.21)$$

La nullité du déterminant de ce système linéaire (infini) donne l'équation de dispersion. Notons qu'alternativement, on peut traiter le cas dissipatif en se ramenant au cas non dissipatif par un simple changement de variable (voir le système (5.71) à la section 5.3). Pour des viscosités suffisamment faibles, la modification de  $\omega_0(k)$  par le changement de variable est négligeable, et le seul effet de la viscosité est de multiplier le champ d'onde par  $e^{-2\nu k^2 t}$ . À un champ d'onde solution du problème non dissipatif, pour un vecteur d'onde  $k$  et une pulsation  $\omega$ , de forme générale  $e^{i\omega t} p(t)$  (voir équation (6.14)), correspond un champ d'onde solution du problème visqueux  $e^{i(\omega + 2i\nu k^2)t} p(t)$ , associé à la pulsation  $\omega + 2i\nu k^2$ . Ainsi, l'ajout d'une faible dissipation n'affecte que la partie imaginaire du diagramme de Brillouin temporel. La dissipation visqueuse augmente la partie imaginaire de la pulsation (*i.e.* le taux algébrique d'atténuation) de chaque mode et cette augmentation est plus forte pour les vecteurs d'ondes plus élevés.

Des diagrammes de Brillouin temporels tenant compte de la dissipation des ondes à la surface d'un liquide sont présentés aux figures 6.8 (a) (pour un liquide de viscosité  $\nu = 1$  cSt) et (b) (pour un liquide de viscosité  $\nu = 10$  cSt), pour un bain vibré à 10,5g et 60 Hz. Notons qu'en négligeant la modification de la fonction  $\omega_0(k)$  par la viscosité, on réalise ici une erreur de moins de 4 pourcents sur la plage de vecteurs d'onde considérée. Comme précédemment, les courbes bleues représentent la partie réelle de la pulsation et les courbes rouges leur partie imaginaire. Par rapport au cas non visqueux, la partie réelle de la pulsation est inchangée. Seule la partie imaginaire est affectée. Ainsi, les modes en dehors des bandes d'amplification, dont la partie imaginaire de la pulsation est nulle dans le cas non visqueux, possèdent désormais sous l'effet de la viscosité une partie imaginaire positive et sont donc atténués. La partie imaginaire suit alors la courbe quadratique donnée par l'expression du coefficient d'atténuation :  $\text{Im}[\omega] = 2\nu k^2$ . La raideur de cette courbe quadratique est d'autant plus élevée que la viscosité est élevée, comme l'illustre la comparaison des diagrammes 6.8 (a) et (b). Au sein des bandes d'amplification ouvertes, la courbe de la partie imaginaire de la pulsation se sépare en deux parties, symétriques par rapport à la courbe quadratique d'atténuation.

### Existence d'un seuil pour chaque bande d'amplification

Pour chaque mode d'une bande d'amplification, puisque les parties imaginaires solutions du problème dissipatif sont obtenues en ajoutant  $2\nu k^2$  à celles du problème non dissipatif, on observe l'apparition d'un seuil. En effet, le taux d'amplification de ce mode dans le cas non dissipatif, qui est nul pour une accélération nulle, croît lorsqu'on augmente l'accélération. Pour de faibles accélérations, ce taux d'amplification non dissipatif est ainsi inférieur à  $2\nu k^2$  et le mode est par conséquent atténué dans le cas dissipatif. Au-dessus d'une valeur seuil pour l'accélération, le taux d'amplification non dissipatif dépasse l'atténuation visqueuse, et la partie imaginaire de la pulsation dans le cas visqueux devient négative : le mode devient amplifié et instable. Ainsi, à  $a_0 = 10,5g$ , pour une viscosité de dix centiStokes (voir figure 6.8 (b)), l'essentiel des vecteurs d'onde au sein de la première bande est associé à une pulsation de partie imaginaire en-dessous de zéro. Il y a alors amplification effective au sein de ce domaine. Ce n'est pas le cas pour la



**Figure 6.8** – Influence de la viscosité. (a) et (b) : diagrammes de Brillouin temporels pour  $a_0 = 10,5g$  et respectivement  $\nu = 1 \text{ cSt}$  et  $\nu = 10 \text{ cSt}$ . (c) Diagramme des "langues" d'amplification en l'absence de viscosité (lignes pointillées), pour la viscosité de l'eau  $\nu = 1 \text{ cSt}$  (lignes de tirets) et pour une viscosité  $\nu = 10 \text{ cSt}$  (ligne continue). Comme précédemment, les courbes bleues représentent les frontières des bandes d'amplification et les courbes rouges le mode le plus instable. Pour une viscosité de  $\nu = 10 \text{ cSt}$ , le mode le plus instable bifurque vers la deuxième bande à une accélération plus élevée.

deuxième bande pour laquelle le mode le plus amplifié par la modulation voit la partie imaginaire de la pulsation atteindre tout juste zéro. Cette situation correspond donc au seuil d'instabilité de la deuxième bande. De même, pour toutes les autres bandes d'amplification, il existe un seuil d'amplitude de modulation à partir duquel il existe un mode qui est plus amplifié par la modulation temporelle qu'il n'est atténué par la viscosité, et devient instable.

La figure 6.8 (c) présente le diagramme de stabilité obtenu (à partir des diagrammes de Brillouin temporels) dans le cas visqueux. Comme précédemment, les courbes bleues indiquent les frontières des zones d'instabilité et la courbe rouge indique le mode le plus instable. Les lignes continues correspondent à une viscosité de  $10 \text{ cSt}$ , les lignes de tirets à une viscosité de  $1 \text{ cSt}$  et les lignes



pointillées à une viscosité nulle pour comparaison. On observe les seuils mentionnés dans le cas visqueux pour chaque bande. Puisque, d'une part, la dissipation visqueuse croît avec le vecteur d'onde et, d'autre part, l'accélération d'ouverture des bandes d'amplification augmente également avec le vecteur d'onde central qui la caractérise, le seuil d'instabilité est toujours plus bas pour une bande d'amplification que pour la suivante. Un effet majeur de la viscosité est donc d'introduire un seuil d'amplification/instabilité, différent pour chaque bande. De ce fait, il existe également un seuil global de déclenchement de l'instabilité : il correspond au plus bas des seuils d'instabilités des différentes bandes d'amplification, obtenue pour la première bande. Par ailleurs, pour une bande donnée, puisque l'atténuation augmente avec la viscosité, l'accélération seuil à partir de laquelle elle est compensée par l'amplification augmente également avec la viscosité. Cette évolution des frontières des bandes d'amplification avec la viscosité est identique à celle déjà donnée dans la littérature par une autre approche théorique [110] (voir figure 5.10). Ainsi, l'approche des diagrammes de Brillouin temporels permet de retrouver l'ensemble des propriétés connues des instabilités paramétriques ondulatoires. Mais la connaissance, pour chaque accélération et pour chaque vecteur d'onde, du taux d'amplification effectif (ou d'atténuation effectif) du mode considéré (ainsi que de sa fréquence), nous permet également d'obtenir plusieurs informations supplémentaires sur les caractéristiques des ondes dans les milieux modulés temporellement périodiquement.

### Ralentissement critique et ouverture des bandes sous le seuil

Ainsi, nous observons que chaque bande est déjà ouverte pour des accélérations inférieures à son seuil d'amplification. Cela signifie que l'effet de la modulation est déjà notable pour cette bande en-dessous du seuil d'amplification effective. Prenons l'exemple de la deuxième bande du diagramme 6.8 (b). Dans tout le domaine de vecteurs d'onde correspondant à cette bande, la partie réelle de la pulsation est fixée à la valeur  $2\Omega$  (modulo  $2\Omega$ ). Par ailleurs, la partie imaginaire descend en-dessous de la courbe quadratique d'atténuation : les ondes à ces vecteurs d'onde sont moins atténués qu'en absence de modulation temporelle du milieu. Ce résultat permet de décrire le phénomène de ralentissement critique observé pour les ondes à la longueur d'onde de Faraday juste en-dessous du seuil, par Eddi *et al* [118], et dont le modèle développé dans la section 5.3 pour le régime des faibles accélérations nous avait permis de fournir une première description.

L'étude conduite ici nous permet de montrer que tout un groupe de vecteurs d'onde autour du vecteur d'onde de Faraday est en général concerné par ce phénomène : il s'agit de toute la première bande d'amplification. De ce fait, tous ces modes oscillent *exactement* à la fréquence de Faraday (bien que leurs longueurs d'onde soient (légèrement) différentes de la longueur d'onde de Faraday). Le domaine de vecteurs d'ondes sujets à ce ralentissement critique est déterminé, pour une accélération (inférieure au seuil) donnée, par la bande d'amplification correspondante. Ce domaine croît donc avec l'accélération. Par ailleurs, l'existence d'autres bandes d'amplification associées à d'autres seuils implique que ce phénomène de ralentissement critique se généralise à d'autres domaines de vecteurs d'onde (ceux associés aux autres bandes). Notons que, puisque les autres bandes ne s'ouvrent qu'à des accélérations non nulles (voir figure 6.5), ce phénomène de ralentissement critique n'apparaît sur un domaine de vecteur d'ondes notable qu'au-dessus d'un seuil d'accélération correspondant à l'ouverture de la bande correspondante.

Pour un vecteur d'onde quelconque  $k$ , on observe donc typiquement trois comportements successifs au fur et à mesure qu'on augmente l'amplitude de modulation du milieu :

- pour de faibles accélérations, la dispersion de ces ondes n'est pas affectée par la modulation temporelle du milieu, les ondes à cette longueur d'onde se propagent essentiellement comme dans un milieu non modulé.

- à partir d'une certaine accélération seuil, le vecteur d'onde  $k$  considéré entre dans une des bandes d'amplification. Ce mode correspond alors à un mode instable du milieu idéal *non dissipatif* correspondant aux mêmes paramètres que le milieu réel dissipatif considéré. Cependant, du fait de l'atténuation plus forte que l'amplification, le mode n'est pas instable pour le système réel. Le phénomène de ralentissement critique est alors attendu : la pulsation d'oscillation des ondes à ce vecteur d'onde est alors fixée à  $\Omega \pmod{[2\Omega]}$  si  $k$  appartient à une bande d'amplification impaire ou  $2\Omega \pmod{[2\Omega]}$  si  $k$  appartient à une bande d'amplification paire. Les ondes sont par ailleurs moins atténuées par la dissipation qu'en l'absence de modulation temporelle.
- lorsque l'accélération dépasse un deuxième seuil,  $k$  appartient à la bande d'amplification du milieu dissipatif et le mode est amplifié.

Notons cependant que l'instabilité déclenchée dans la première bande doit rendre difficile l'observation directe du ralentissement critique dans les autres bandes, puisque les divers modes instables croissent spontanément, indépendamment de l'onde émise par un expérimentateur dans le milieu et peuvent brouiller l'observation.

### Mode le plus instable au-dessus du seuil

Les diagrammes de Brillouin temporels apportent également des informations sur les propriétés attendues pour les ondes émergeant spontanément aux fortes accélérations (au-dessus d'un ou plusieurs des seuils d'instabilités des différentes bandes). Notamment, le mode le plus instable est obtenu en fonction de l'accélération (courbes rouges de la figure 6.8(c)). Comme nous l'avons évoqué, dans le cas non visqueux, le mode le plus instable bascule d'une bande à la suivante lorsque l'accélération est augmentée. Le même comportement est observé ici dans le cas visqueux. La courbe donnant le mode instable pour  $\nu = 1$  cSt est pratiquement indiscernable de celle obtenue dans le cas non visqueux. En revanche, l'effet d'une viscosité plus élevée de 10 cSt est d'augmenter le seuil d'accélération correspondant au basculement de la première bande vers la seconde. Ce mode le plus amplifié présente un grand intérêt expérimental. En effet, au-dessus du seuil, on observe, en régime permanent, des ondes stationnaires d'amplitude constante à la surface du bain. La saturation de l'amplitude des ondes spontanément générées par l'instabilité est liée à des effets non linéaires apparaissant aux amplitudes d'onde élevées, non pris en compte dans notre modèle (linéaire). Cependant, il est légitime de supposer que le mode observé est issu de la croissance du mode le plus instable en régime linéaire. Notre approche permet alors de prédire, pour n'importe quelle accélération (au-dessus du seuil d'instabilité), la longueur d'onde et la fréquence des ondes stationnaires qui émergent spontanément. Le résultat aux fortes amplitudes de modulation est surprenant car il n'est pas prédit par les analyses effectuées à faibles amplitudes de modulation. Ainsi, pour tout un domaine d'accélérations (entre  $39,5g$  et  $50g$  au moins, pour un liquide de viscosité 10 cSt vibré à 60 Hz), le mode spontané attendu n'oscille pas à la fréquence de Faraday mais à la fréquence de modulation du milieu. Ce résultat surprenant jamais observé encore à notre connaissance directement, fait néanmoins écho à l'observation d'un mode similaire à la fréquence de forçage par Müller et al [144], dans un régime différent (le régime de faible profondeur). Ces informations obtenues au-dessus du seuil sont particulièrement intéressantes dans l'étude des ondes formées spontanément par l'instabilité. D'un point de vue expérimental, une des caractéristiques principales des ondes spontanées observées, est l'évolution de leur longueur d'onde avec la fréquence de modulation. Nous allons étudier cette question dans la section suivante à l'aide des résultats que nous venons d'obtenir.

### 6.2.3 Influence de la fréquence de modulation du milieu

Les diagrammes de Brillouin temporels donnent la relation de dispersion des ondes dans un milieu modulé temporellement à une fréquence donnée. Mais que se passe-t-il si l'on change la fréquence de modulation ? Nous allons voir dans cette section comment les paramètres caractéristiques des diagrammes de Brillouin temporels sont modifiés. Nous considérerons tout d'abord l'effet d'une augmentation de la fréquence de modulation en gardant tous les autres paramètres constants. Puis nous ferons varier tous les paramètres simultanément pour considérer le point de vue d'un expérimentateur, qui observe le motif des ondes de Faraday obtenu, pour différentes fréquences de modulation, *au seuil de l'instabilité* correspondant.

#### Influence de la fréquence de forçage sur l'allure des diagrammes de Brillouin et de stabilité

*Sans viscosité : diminution équivalente de  $k_0$  et  $a_0$*

La mise de l'équation de Mathieu sous une forme sans dimension montre que deux points d'un diagramme de Brillouin temporels pour des fréquences différentes sont équivalents s'ils partagent les mêmes valeurs des paramètres adimensionnés :

$$\begin{cases} r = \frac{\omega_0^2(k)}{\Omega^2} \\ p = -\frac{a_0 k}{2\Omega^2}. \end{cases} \quad (6.22)$$

Ainsi, si l'on change la pulsation de modulation d'une valeur  $\Omega_1$  à une valeur  $\Omega_2$  supérieure, on retrouve le même comportement à condition de remplacer les vecteurs d'onde  $k_1$  et accélération  $a_{0,1}$  de départ par  $k_2$  et  $a_{0,2}$ , vérifiant :

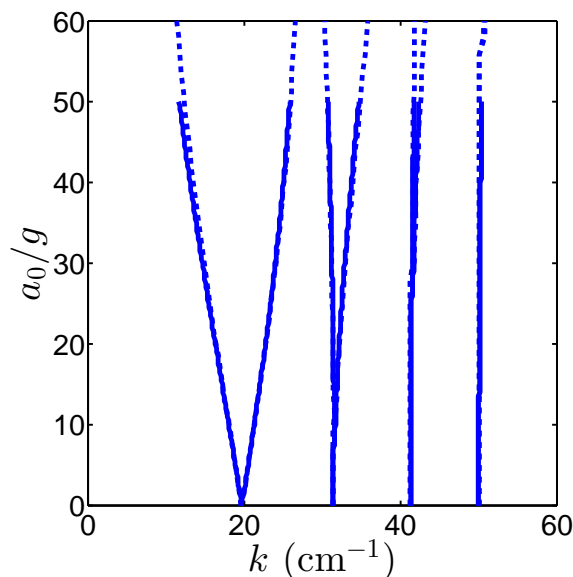
$$\begin{cases} \omega_0(k_2) = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \omega_0(k_1) \\ a_{0,2} = \frac{k_{\text{Faraday}}(\Omega_1) \Omega_2^2}{k_{\text{Faraday}}(\Omega_2) \Omega_1^2} a_{0,1}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Puisque  $k_{\text{Faraday}}(\Omega)$  et  $\omega_0(k)$  sont des fonctions croissantes, on retrouve le même comportement à  $\Omega_2 > \Omega_1$  pour des accélérations et des vecteurs d'onde plus élevés. Autrement dit, pour un vecteur d'onde et une accélération donnés, l'effet de l'augmentation de la fréquence de modulation est équivalent à celui, à fréquence de modulation fixée, d'une *diminution* conjuguée du vecteur d'onde et de l'accélération considérés.

La figure 6.9 illustre ce propos. Les traits pleins représentent les frontières des bandes d'instabilité pour une modulation de fréquence 200 Hz. La forme du diagramme est identique à celle de la partie basse et gauche du diagramme obtenu pour une modulation de 60 Hz (voir figure 6.8). Ceci illustre le fait que l'augmentation de la fréquence est équivalente à une diminution conjuguée du vecteur d'onde et de l'accélération. Cette équivalence est également mise en évidence par la courbe pointillée, qui est obtenue, à partir d'une partie du diagramme obtenu à 60 Hz, par transformation des vecteurs d'onde et de l'accélération selon le système (6.23). Elle se superpose à la courbe obtenue pour 200 Hz (les différences de pas de calculs utilisés pour une sous partie d'un diagramme et un diagramme complet expliquent une très légère différence entre les deux courbes).

*Avec viscosité : augmentation supplémentaire des seuils*

Comme nous l'avons vu, l'effet de la dissipation vient (dans la limite des faibles dissipations)



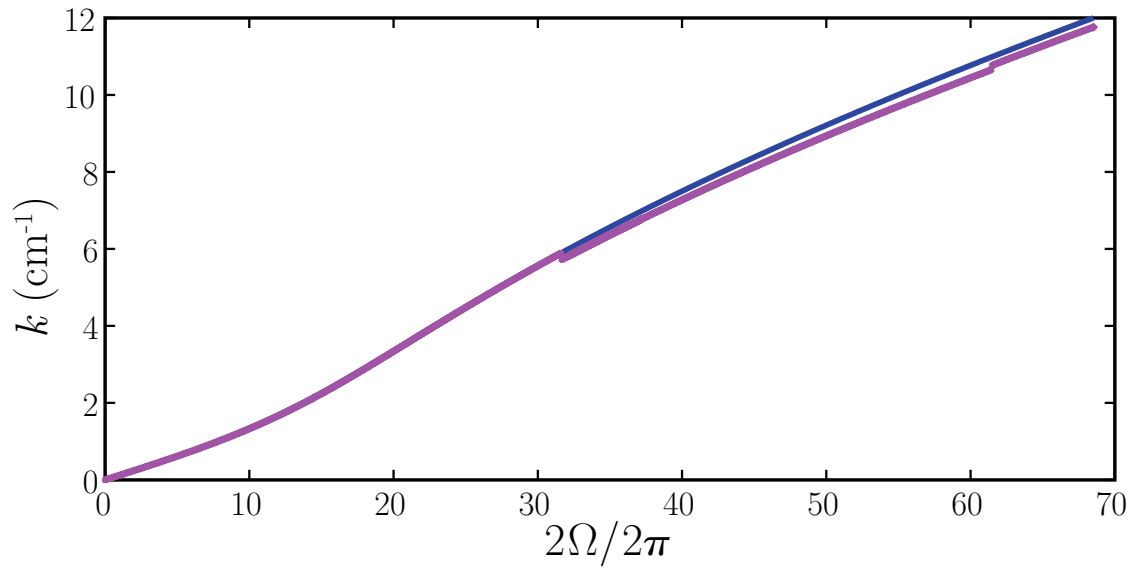
**Figure 6.9** – Diagrammes de langues d'instabilité à haute fréquence ( $2\Omega = 2\pi 200 \text{ s}^{-1}$ ). Il est à comparer au diagramme 6.8 (c), obtenu pour  $2\Omega = 2\pi 60 \text{ s}^{-1}$ . Tout se passe comme si le diagramme haute fréquence était obtenu en étirant celui de basse fréquence selon les axes des abscisses et des ordonnées. Ceci est illustré par le trait pointillé, qui correspond au diagramme de la figure 6.8 (c), transformé selon les relations du système (6.23).

se superpose aux effets de la modulation et peut être pris en compte par un facteur  $e^{-2\nu k^2 t}$  sur l'amplitude de l'onde. Contrairement au taux d'amplification, pour un vecteur d'onde et une accélération donnés, le taux d'atténuation par dissipation est indépendant de la modulation (et donc de sa fréquence). Ainsi, la différence entre les deux taux, qui caractérise l'évolution du champ d'onde, ne varie que sous l'effet de la variation du taux d'amplification induit par la modulation. Considérons un taux d'amplification donné. Nous venons de voir que, si l'on augmente la fréquence de modulation, ce taux est retrouvé pour une accélération plus élevée. Cela signifie que le seuil d'instabilité pour chaque bande augmente avec la fréquence de modulation. Nous avons vu que la même situation d'amplification est retrouvée non seulement pour une accélération plus élevée mais également pour un vecteur d'onde plus élevé. Cela implique que le taux d'atténuation visqueuse qui lui est opposé est plus élevé, ce qui joue dans le même sens : le seuil d'amplification effective pour une bande donnée est plus élevé à fréquence de modulation plus élevée. En ce sens, augmenter la fréquence de modulation a un effet proche d'une augmentation de la viscosité.

### "Relation de dispersion" des ondes de Faraday

Considérons ici le point de vue classique d'un expérimentateur qui observe le motif des ondes de Faraday obtenu, pour une fréquence de vibration du bain donnée, à l'accélération seuil de son déclenchement. L'expérience peut être répétée à d'autres fréquences de vibration pour obtenir l'évolution, en fonction de la pulsation  $2\Omega$  de la modulation du milieu, du vecteur d'onde  $k_{\text{Faraday}}$  observé *au seuil de l'instabilité* correspondant à cette pulsation. Cette relation entre  $k_{\text{Faraday}}$  et  $2\Omega$ , souvent appelée relation de dispersion des ondes de Faraday dans la littérature [69, 110], ne doit pas être confondue à la relation de dispersion (donnée par le diagramme de Brillouin temporel) des ondes de surface, dans un bain vibré à une accélération et une fréquence données. La "relation de dispersion" des ondes de Faraday, reliant la longueur d'onde des ondes *au seuil* à la fréquence de modulation du bain a été obtenue expérimentalement par Edwards et Fauve [69]. Ces derniers ont observé que la longueur d'onde de Faraday suivait, à basse fréquence, la relation de dispersion

des ondes libres (en fonction de la fréquence moitié de la fréquence de modulation) et déviait légèrement de cette relation à haute fréquence. Comme nous l'avons vu aux sections précédentes, le mode obtenu au seuil peut être prédit très simplement à partir du mode le plus instable, que nous avons obtenu à partir des diagrammes de Brillouin temporels pour chaque valeur de l'accélération (voir figure 6.6). En effet, le seuil de Faraday est atteint pour la première valeur de l'accélération pour laquelle le mode le plus amplifié par la modulation est instable. Au seuil, son taux d'amplification est alors égal au taux de dissipation visqueuse à ce vecteur d'onde. Le résultat issu du calcul, pour plusieurs fréquences de modulation, de ce mode seuil est présenté sur le diagramme 6.10.



**Figure 6.10** – Évolution de la longueur d'onde des ondes de Faraday *au seuil* en fonction de la fréquence de modulation (en magenta). Elle est comparée à la relation de dispersion des ondes libres (chaque longueur d'onde étant associée à la fréquence de Faraday par cette relation :  $\omega_0(k) = \Omega$ ).

Nous retrouvons à haute fréquences de modulation, la légère déviation vers le bas du vecteur d'onde par rapport à la relation de dispersion des ondes libres, qui est le résultat limite attendu pour les faibles amplitudes de modulation également prédit par Kumar et Tuckermann [110]. Notons que nous avons vu que pour une accélération et un vecteur d'onde donné, augmenter la fréquence de modulation est équivalent à une baisse des deux autres paramètres. Cependant, ici, ni le vecteur d'onde considéré, ni l'accélération considérée ne sont constants d'une fréquence de modulation à l'autre (car ils sont à chaque fréquence tous deux redéfinis par le nouveau seuil).

Insistons sur le fait que, contrairement aux approches trouvées dans la littérature, les calculs effectués à l'aide des diagrammes de Brillouin temporels permettent de déterminer pour toute fréquence de modulation et toute accélération au-dessus du seuil (et pas uniquement au seuil) les fréquence et longueur d'onde des ondes dont l'émergence spontanée est attendue (mode le plus instable). Ceci résout donc (numériquement), dans la limite des faibles viscosités mais pour une amplitude de modulation quelconque, la question de la relation de dispersion des ondes observées dans l'instabilité de Faraday.

Au cours de cette section, nous avons ainsi montré que l'approche des diagrammes de Brillouin temporels permet de décrire les propriétés du phénomène d'instabilité observé pour des ondes dans les cristaux temporels, et nous ont permis notamment de revisiter l'instabilité de Faraday pour les ondes de surface. Nous avons montré ainsi qu'ils permettent de retrouver les diagrammes d'instabilité ("langues") caractéristiques de ce phénomène. En plus des propriétés connues de

ces diagrammes d'instabilité, nous avons obtenu d'autres résultats. Nous avons notamment pu décrire dans quelles conditions l'effet de la modulation temporelle du milieu sur les ondes peut être notable y compris en-dessous du seuil d'instabilité retrouvé par notre modèle. Nous avons également montré que le mode le plus instable attendu bascule d'une bande d'amplification à la suivante (et donc d'une pulsation multiple de  $\Omega$  à une pulsation multiple de  $2\Omega$ ), au fur et à mesure qu'on augmente l'amplitude de modulation du milieu, et que les accélérations correspondant aux seuils de basculements augmentent avec la dissipation du milieu. D'autre part, nous avons étudié le rôle de la fréquence de modulation et avons montré que l'augmentation de la fréquence de modulation à autres paramètres constants est équivalent à une diminution de l'amplitude de modulation et du vecteur d'onde considéré. Enfin, nous avons obtenu pour les ondes de surface la relation de dispersion des ondes de Faraday, reliant la longueur d'onde des ondes observée au seuil de déclenchement de l'instabilité à la fréquence de modulation du milieu.

La pertinence de la description des ondes dans les cristaux temporels par les diagrammes de Brillouin temporels a ainsi été montrée dans cette section. Dans la section suivante, nous en montrons une première utilisation pour décrire les propriétés particulières d'un émetteur d'ondes dans un cristal temporel, que nous étudierons expérimentalement.

## 6.3 Perspectives : Propriétés d'un émetteur ponctuel dans un cristal temporel

Les sections précédentes ont permis d'établir une théorie des cristaux temporels, permettant notamment, dans le cas des ondes de surface, une nouvelle description de l'instabilité de Faraday et des ondes émergeant spontanément à la surface des bains vibrés. Nous donnons ici une première application entièrement nouvelle de cette description en considérant le cas d'ondes de fréquences quelconques, qui n'émergent pas spontanément à basse amplitude de modulation du milieu. Nous les étudions en analysant l'effet d'un émetteur ponctuel placé dans un cristal temporel et discutons de l'analogie avec le cas d'un émetteur ponctuel dans un cristal spatial. Deux aspects sont ici examinés : l'influence de la fréquence de l'émetteur puis, dans le cas particulier d'un émetteur à la fréquence de Faraday, sa phase relative d'émission par rapport à la modulation du milieu.

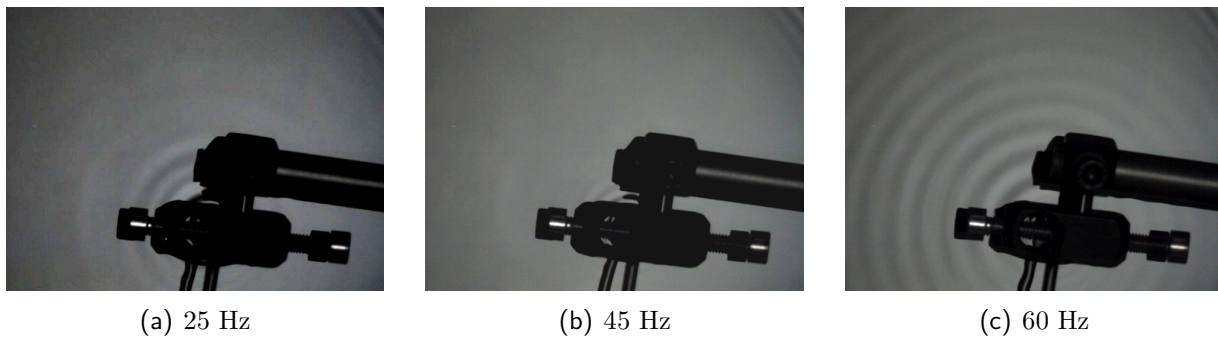
### 6.3.1 Échanges fréquentiels dans un cristal temporel

#### Émission d'ondes dans un cristal temporel

À la section 5.2, nous avons étudié expérimentalement la réflexion temporelle (conjugaison de phase) et l'amplification des ondes émises par un émetteur ponctuel à la fréquence moitié de la fréquence de modulation dans un cristal temporel. La théorie des diagrammes de Brillouin des cristaux temporels, que nous avons établie à la section 6.1, nous fournit un outil pour étudier la propagation d'ondes à une fréquence quelconque considérées ici, qui sont générées par un émetteur ponctuel réglable.

Le montage expérimental utilisé est similaire à celui de la section 5.2 (voir figure 5.6) : un souffleur est monté au dessus de la surface d'un bain mis en vibration. Il émet, en continu, des ondes à une fréquence réglable, que nous faisons varier d'une expérience à l'autre de 10 Hz à 60 Hz par pas de 5 Hz. Peu après le début de l'émission du souffleur, la vibration du bain est mise en route, à une fréquence fixée à  $2\Omega/2\pi = 40$  Hz pour toutes les expériences. Le liquide utilisé est de l'huile silicone CRC 20 cSt. Le bain est vibré à une amplitude très légèrement au-dessus du seuil de l'instabilité de Faraday, de sorte que le déclenchement d'un motif stationnaire spontané met un temps plus long que la durée d'une expérience (cette dernière dure typiquement quelques secondes). Ainsi, le déclenchement d'un motif stationnaire global imposé par la forme de la cuve (carrée) n'a pas lieu pendant l'expérience et ne gêne pas la visualisation des ondes circulaires issues du souffleur. La surface est filmée du dessus à 400 images par seconde. Notons que nous choisissons une faible amplitude d'émission pour notre émetteur. En l'absence de vibration du bain, du fait de la dissipation visqueuse, le paquet d'onde propagatif n'est observé que sur une zone très proche du point d'émission. Lorsque le bain est mis en vibration (à 40 Hz), et lorsque le souffleur fonctionne à 20 Hz, *i.e.* la fréquence de Faraday, on observe, le déclenchement d'une onde stationnaire à cette fréquence, sur un domaine beaucoup plus large, ce qui témoigne du phénomène d'amplification des ondes à cette fréquence, que nous avons décrit précédemment. Pour les autres fréquences d'émission, on observe des comportements très variés. Le diagramme 6.11 présente les motifs typiques observés.

Pour certaines fréquences, le paquet d'onde propagatif observé en l'absence de modulation du bain semble essentiellement inchangé lorsque la modulation est mise en route. C'est ce qui est observé à 45 Hz (figure 6.11 (b)). Ici, le paquet d'onde (propagatif) émis par le souffleur, a, du fait de l'importante atténuation visqueuse à cette longueur d'onde, une très faible extension



**Figure 6.11** – Vue du dessus du champ d’onde émis par une source ponctuelle (souffleur) sur un bain d’huile (de viscosité cinématique  $\nu = 20$  cSt), vibré à  $2\Omega/2\pi = 40$  Hz. La fréquence du souffleur est respectivement 25 Hz (a), 45 Hz (b) et 60 Hz (c). La largeur du champ de vision de la caméra correspond à 12,3 cm.

autour du point d’émission et est en grande partie masqué par le dispositif d’émission (souffleur). Cependant, la longueur d’onde mesurée sur la partie visible du motif,  $\lambda_{45\text{Hz,exp}} = 3,9 \pm 0,6$  mm, est bien compatible avec la valeur donnée par la relation de dispersion à cette fréquence ( $\lambda_{45\text{Hz,th}} = 4,1$  mm). Notons par ailleurs qu’on observe au coin haut droit du champ d’observation des ondes de longueur d’onde légèrement plus grande ( $\lambda_{40\text{Hz,exp}} = 5,0 \pm 0,6$  mm). Ces ondes émises sont émises par les bords de la cuve carrée, du fait de sa vibration (à la fréquence 40 Hz). On les observe également sur les figures 6.11 (a) et (c).

Pour d’autres fréquences d’émission d’ondes, comme la fréquence 25 Hz correspondant à la photo 6.11 (a), on observe un champ d’onde mixte où (au moins) deux longueurs d’onde sont reconnaissables. Proche du point d’émission, le champ d’onde semble être dominé par la longueur d’onde associée à la fréquence d’émission ( $\lambda_{25\text{Hz,exp}} \approx 6,7 \pm 0,6$  mm). Plus loin du point source, on devine une longueur d’onde plus grande qui domine le motif (sur la photo (a), on mesure  $\lambda_{\text{loin}} \approx 11$  mm).

Enfin, pour les fréquences d’émission 10, 30 et 60 Hz (voir photo 6.11 (c)), on observe, comme à 20 Hz, le déclenchement d’un motif stationnaire à la fréquence 20 Hz et à la longueur d’onde de Faraday ( $\lambda_{\text{Faraday,th}} = 8,5$  mm). La grande extension du paquet d’onde stationnaire alors observé témoigne, ici encore, du phénomène d’amplification associé aux ondes à la fréquence de Faraday. Ces diverses observations suggèrent que des échanges interférentiels ont lieu dans le milieu modulé.

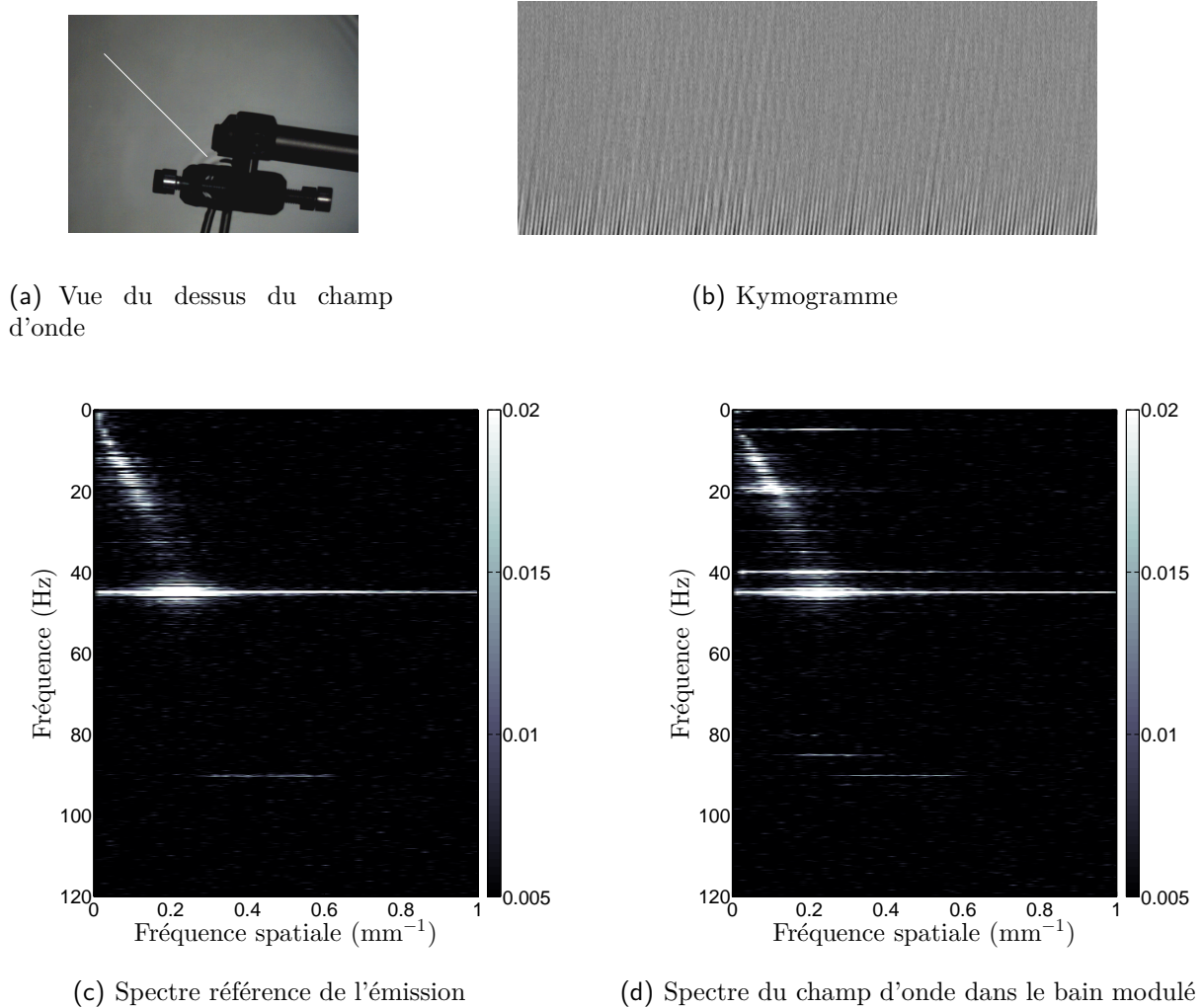
### Effet de la modulation sur le spectre d’une fréquence quelconque

#### *Obtention d’un spectre d’émission à 45 Hz :*

Afin de mettre en évidence ces échanges fréquentiels, nous analysons le spectre spatiotemporel du champ d’onde observé. Ce dernier est obtenu, pour chaque film, en effectuant un kymogramme (voir photo 6.12 (b)) à partir d’une ligne passant par le centre d’émission (voir figure 6.12 (a)). On réalise alors la transformée de Fourier bidimensionnelle du kymogramme. Le spectre obtenu est présenté aux figures 6.12 (c) et (d).

Le kymogramme 6.12 (b) est obtenu à partir du film à 400 images par seconde de l’émission du souffleur à 45 Hz. Le signal enregistré par les pixels le long de la ligne blanche sur la photographie 6.12 (a) est reporté ligne par ligne pour former le kymogramme. Pour éliminer l’effet du gradient d’intensité de luminosité introduit par l’éclairage, nous retirons à chaque ligne sa valeur moyenne (sur l’ensemble de la durée de l’expérience). L’examen attentif de ce kymogramme révèle l’existence de plusieurs fréquences. Proche de la source (bas du diagramme), seule la fréquence





**Figure 6.12** – Effet de la modulation temporelle du milieu (à 40 Hz) sur le spectre des ondes émises par une source ponctuelle (à 45 Hz). (a) Vue du dessus du champ d'onde. La largeur du champ de vision correspond à 12,3 cm. Le trait blanc indique les points du film utilisés pour réaliser le kymogramme (b). La direction horizontale représente le temps (la largeur totale du kymogramme correspond à 3 s). La direction verticale correspond à l'espace (distance au centre, le bas du diagramme correspond au point le plus proche du centre, la hauteur totale correspond à 6,2 cm). (c) Spectre observé pour un souffleur à 45 Hz *sur un bain libre, non vibré*. (d) Spectre observé pour un souffleur à 45 Hz *sur un bain vibré à 40 Hz*.

du souffleur (45 Hz) est visible, tandis que plus loin, une fréquence plus basse apparaît. En haut du diagramme, des bandes horizontales sont visibles. Ces dernières correspondent à un artefact qui est dû notre dispositif de visualisation : ce dernier introduit nécessairement un éloignement relatif oscillant de la surface du liquide par rapport à la lampe qui l'éclaire, et donc une modulation spatialement homogène de l'image à la fréquence de vibration du bain. La transformée de Fourier bidimensionnelle du kymogramme 6.12 (b) permet d'obtenir le spectre 6.12 (d). Le même procédé est employé dans une expérience référence, pour laquelle le bain n'est pas vibré, pour obtenir le spectre de référence de l'émission 6.12 (c). Sur cette figure, un pic intense est, comme attendu, observé à la fréquence d'émission (45 Hz). Les observations ne permettent pas de définir avec précision une longueur d'onde associée (le pic se présente sous la forme d'une fine bande horizontale), mais une fréquence (temporelle) bien définie est observée. Les informations obtenues dans nos expériences concernent donc essentiellement les fréquences (temporelles) présentes dans le champ d'onde. Nous observons également une trace courbe continue entre 0 et 30 Hz environ.

Celle-ci peut s'interpréter comme le large spectre émis lors d'un seul impact par le souffleur (la pression qu'il effectue sur la surface n'est pas exactement une sinusoïde). L'allure de ce continuum est compatible avec la relation de dispersion des ondes de surface en eaux profondes dans un milieu libre. On distingue par ailleurs également un pic à 90 Hz, correspondant à une harmonique générée par le système d'émission.

*Effet de la modulation sur le spectre des ondes émises par un souffleur à 45 Hz :*

La comparaison du diagramme de référence 6.12 (c) et du diagramme 6.12 (d) permettent d'observer l'effet de la modulation à 40 Hz. La même échelle des couleurs (arbitraire) est utilisée sur les deux diagrammes pour pouvoir comparer les deux spectres. Les pics observés dans la référence (c) sont retrouvés, et d'autres pics sont apparus. Le pic à 40 Hz correspond à l'artefact d'éclairage visible sur la partie haute du kymogramme 6.12 (b). La composante à 20 Hz du continuum est amplifiée. Ceci correspond à l'amplification de la composante de Faraday déjà observée à la section 5.2. Par ailleurs, deux autres pics notables sont observés : l'un à 5 Hz et l'autre à 85 Hz (à la verticale du pic à 45 Hz). L'existence de ces pics, situés respectivement à 40 Hz et à -40 Hz de la fréquence de l'émetteur peut être expliquée simplement par la théorie des cristaux temporels. Ils sont le résultat du couplage de chaque composante d'onde à la fréquence  $f$  avec les fréquences séparées d'un multiple de la fréquence de modulation ( $f + n \times 40$  Hz où  $n$  est entier). Bien qu'il ne soit pas possible de mesurer avec précision les vecteurs d'onde mis en jeu, ces pics à  $45-40=5$  Hz et  $45+40=85$  Hz semblent se situer, comme attendu par la théorie, à la verticale du pic à 45 Hz, *i.e.* au même vecteur d'onde.

*Déclenchement efficace de l'instabilité de Faraday à 30 et 60 Hz :*

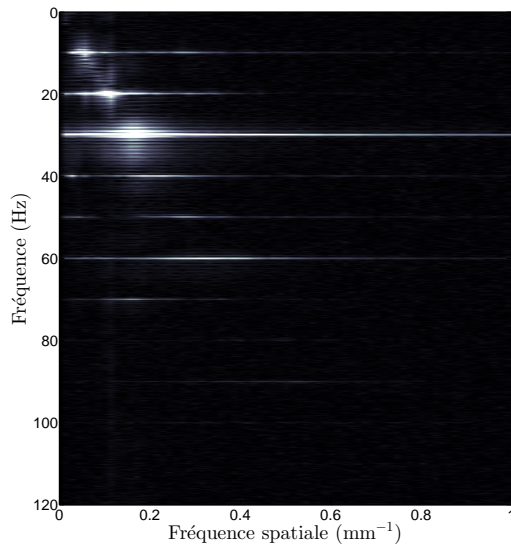
Outre l'émission à 20 Hz, on obtient un motif stationnaire d'amplitude importante à la fréquence de Faraday pour des émissions du souffleur à 10, 30 et 60 Hz. Ce résultat est trivial pour la fréquence 10 Hz : la présence d'une harmonique à 20 Hz dans le signal émis par le souffleur explique l'émergence d'une onde stationnaire de forte amplitude selon le mécanisme décrit en détail à la section 5.3. Pour 60 Hz, l'émission d'une onde à  $20=60-40$  Hz est, comme précédemment, le résultat du couplage directe des ondes émises aux ondes de fréquences distantes de 40 Hz. Cette onde à la fréquence de Faraday est alors amplifiée et domine donc le spectre du champ d'onde. Lorsque le souffleur est réglé à 30 Hz, le déclenchement du motif stationnaire à 20 Hz a la même origine : une harmonique à 60 Hz est générée par le souffleur, cette dernière génère une composante à 20 Hz. Le phénomène est légèrement moins efficace car l'harmonique à 60 Hz est générée avec une plus faible amplitude.

Sur les deux spectres de la figure 6.13, un pic est observé à 60 Hz (il est issu de l'harmonique du signal d'émission pour le cas de l'émission à 30 Hz) ainsi qu'un pic intense à  $60-40=20$  Hz. Sur le diagramme (a), correspondant à 30 Hz, des pics à  $-30+40=10$  Hz et  $-30+80=50$  Hz et enfin  $30+40=70$  Hz sont de plus observés.

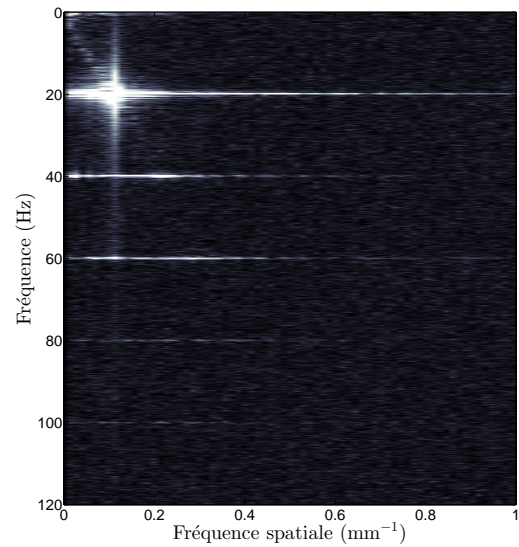
### Balayage en fréquence et relation de dispersion

Ce phénomène d'apparition de pics décalés de 40 Hz de la fréquence d'émission a été observé à toutes les fréquences. Pour chaque fréquence (principale) d'émission du souffleur, les pics supplémentaires induits par la modulation dans le spectre sont représentés sur la figure 6.14.

Le diagramme 6.14 (a) représente les données brutes des pics observés en fonction de la fréquence à laquelle est réglé le souffleur. Les croix noires droites correspondent aux pics observés dans le spectre d'émission sur un bain non vibré. Une ou deux harmoniques de la fréquence à laquelle

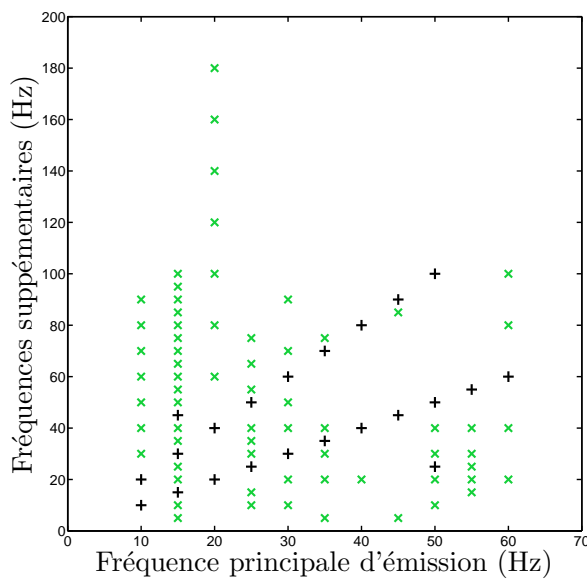


(a) Spectre pour un souffleur à 30 Hz

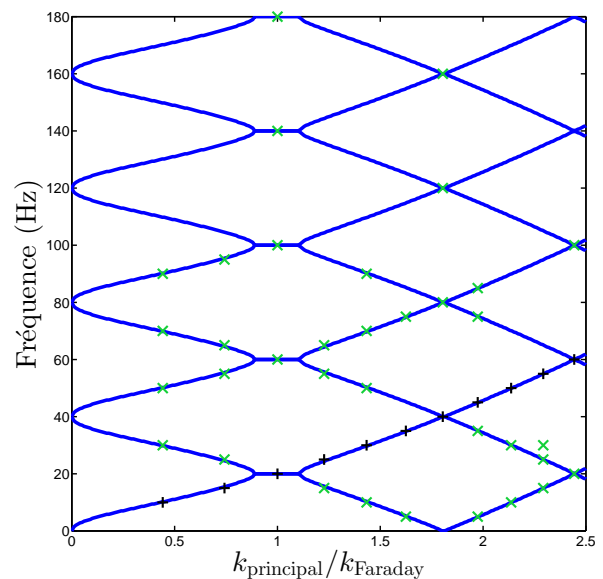


(b) Spectre pour un souffleur à 60 Hz

**Figure 6.13** – Déclenchement efficace d'un motif à la fréquence de Faraday (20 Hz) par une émission à une autre fréquence. (a) Spectre observé pour un souffleur à 30 Hz. (b) Spectre observé pour un souffleur à 60 Hz.



(a) Données brutes



(b) Tri par groupes de fréquences équivalentes

**Figure 6.14** – Fréquences supplémentaires induites par la modulation sur les spectres des champs d'onde. (a) Fréquences observées dans le spectre d'émission sur bain au repos (croix droites noires) et fréquences supplémentaires (croix vertes obliques) observées dans le spectre si le bain est vibré à 40 Hz (en fonction de la fréquence sur laquelle le souffleur est réglé). (b) Fréquences supplémentaires induites dans le spectre par la modulation à 40 Hz ordonnées en fonction du vecteur d'onde de la fréquence pure dont elles sont issues. Le diagramme de Brillouin du cristal temporel correspondant est superposé (lignes bleues : partie réelle de la fréquence).

le souffleur est réglé sont observées. Elles sont dues à l'imperfection de la force appliquée par le souffleur sur la surface du liquide (qui n'est pas parfaitement sinusoïdale à une fréquence pure). Les croix vertes obliques indiquent les fréquences supplémentaires observées dans le spectre du champ d'onde lorsque le bain est vibré à 40 Hz. On retrouve dans chaque spectre la fréquence

40 Hz, pouvant être expliquée par la présence d'ondes émises par les bords ainsi que par un artefact d'éclairage lié à l'éloignement relatif de la lampe à la surface du bain en vibration. On retrouve également la fréquence 20 Hz de Faraday dans de nombreux spectres, qui peut-être expliquée par un début de déclenchement de l'instabilité pendant la durée de l'expérience (qui est conduite très légèrement au-dessus du seuil). Toutes les autres fréquences observées correspondent à d'autres valeurs discrètes bien précises : elles sont distantes d'un multiple de 40 Hz d'une des fréquences observées dans le spectre d'émission (éventuellement au signe près). Des échanges fréquentiels, par pas de fréquence égal à la fréquence de modulation, sont ainsi observés. Ceci s'explique de nouveau dans la théorie des cristaux temporels par l'existence d'un couplage (induit par la modulation du milieu) de chaque fréquence avec les fréquences inférieure et supérieure de 40 Hz. La présence d'harmoniques dans le spectre d'émission implique une superposition de contributions issues de différentes fréquences d'émission pour chaque expérience et complique l'interprétation des observations. On sépare les contributions issues des différentes fréquences pures émises par le souffleur (déjà présentes dans le spectre de l'émission en milieu non modulé) en regroupant les fréquences observées par groupes correspondant à une même valeur modulo 40 Hz. Le diagramme 6.14 (b) présente chacune des fréquences supplémentaires (croix obliques vertes) observées dans les différentes expériences en fonction du vecteur d'onde de la fréquence pure à laquelle elle est associée (*i.e.* la fréquence dont elle est éloignée par un multiple de 40 Hz, symbolisée par une croix noire droite). Le diagramme de Brillouin du cristal temporel correspondant a été superposé : les lignes bleues correspondent à la partie réelle de la fréquence attendue à chaque vecteur d'onde. Les fréquences observées se superposent à la relation de dispersion théorique.

Ces échanges fréquentiels entre une fréquence pure émise par le souffleur et les fréquences translattées de 40 Hz constituent la manifestation expérimentale de l'invariance du diagramme de dispersion par translations de 40 Hz (et par symétrie des fréquences positives et négatives) introduites par la périodisation temporelle du milieu à 40 Hz. Ainsi, pour chaque fréquence émise (par un émetteur ponctuel) au sein d'un cristal temporel, les fréquences translattées (de la fréquence de modulation), émergent spontanément. Notons que ces fréquences supplémentaires obtenues sont analogues aux différents ordre de diffraction obtenus en sortie d'un réseau spatial et caractérisés par des vecteurs d'onde supplémentaires, vérifiant une relation similaire, du type  $\vec{k}_n = \vec{k}_0 + n \vec{k}_R$ , où  $\vec{k}_R$  désigne le vecteur d'onde caractérisant la fréquence spatiale du réseau.

### 6.3.2 Influence de la phase de l'émetteur : nœuds et ventres temporels d'un mode stationnaire du cristal

#### Génération d'une onde stationnaire dans un cristal, analogie avec une cavité spatiale

*Le rôle particulier de la fréquence de Faraday et la conjugaison de phase :*

Ces résultats sur les échanges fréquentiels au sein d'un cristal temporel nous permettent d'envisager d'autres aspects du cas particulier de l'émission d'ondes à la fréquence de Faraday. Ainsi, dans l'expérience précédente, l'onde émise à 20 Hz dans un cristal temporel à 40 Hz est directement couplée à une onde à la fréquence 20-40=-20 Hz : c'est-à-dire que l'onde émise induit, sous l'effet de la modulation, la génération d'une onde de même fréquence mais contrapropagative. Ceci explique que cette fréquence de Faraday joue un rôle particulier en donnant lieu à l'émergence d'une onde retournée temporellement et donc d'une onde stationnaire. Comme nous l'avons vu à la section 5.3, cette génération efficace d'une onde contrapropagative peut être interprétée comme la résultante des interférences constructives entre les ondes réfléchies temporellement à chaque période de modulation du milieu. Pour que ces interférences soient effectivement constructives, il

est nécessaire, dans le cas d'un émetteur ponctuel, que les ondes réfléchies soient produites à la fois :

- à la bonne fréquence. C'est ce que nous venons de voir dans les parties précédentes : l'émergence d'une onde stationnaire n'a lieu que si la pulsation d'émission  $\omega$  prend, pour le mode le plus amplifié à faible amplitude de modulation, une des valeurs discrètes associées à la fréquence de Faraday  $\omega = (2n + 1)\Omega$ , où  $2\Omega$  est la pulsation de modulation du milieu.
- à la bonne phase par rapport à la modulation. En effet, il faut que les ondes directes émises dans une direction interfèrent constructivement avec celles issues des ondes émises dans la direction opposée après réflexions temporelles. C'est ce que nous allons voir dans cette partie.

*Excitation d'un mode amplifié dans un cristal temporel, excitation d'un mode propre d'une structure spatiale :*

Ces conditions d'accord de fréquence et de phase pour l'excitation d'un mode amplifié d'un cristal temporel ont un équivalent bien connu pour un émetteur dans un milieu structuré *spatialement*. Dans un milieu donné (cristal, cavité ou autre structure spatiale), la capacité d'un émetteur ponctuel monochromatique à exciter les modes propre du milieu est déterminée par la densité locale de modes au point de l'émission [145]. Cette propriété remarquable est notamment à l'origine de l'effet Purcell [146] : le taux d'émission spontanée de certains systèmes quantiques, comme par exemple une molécule fluorescente, peut être augmenté ou diminué par son environnement (ce taux est alors proportionnel à la densité locale de modes à la position de la molécule).

D'un point de vue purement qualitatif, cette dépendance de la capacité de couplage d'un émetteur à un mode en fonction de sa position peut être décrite comme un effet interférentiel. Considérons un exemple très simple : celui d'un émetteur ponctuel monochromatique dans une cavité parfaite unidimensionnelle. L'onde propagative émise par l'émetteur se réfléchit (périodiquement en espace) contre les bords de la cavité pour générer une onde contrapropagative de même fréquence. Une onde stationnaire globale peut alors être générée, si la longueur d'onde de l'onde émise est adaptée à la longueur de la cavité. Remarquons l'analogie entre la loi de sélection de la longueur d'onde dans une cavité unidimensionnelle dont les deux bords sont identiques ( $\lambda = 2L_c/n$ , où  $n$  est entier et  $L_c$  est la longueur de la cavité), et la loi de sélection des périodes des ondes amplifiées dans un cristal temporel ( $T = 2T_c/n$ , où  $n$  est entier et  $T_c$  est la période du cristal temporel).

*Le problème de la phase pour un émetteur dans une cavité spatiale :*

Bien-sûr, l'analogie entre l'excitation d'un mode propre d'une simple cavité spatiale et celle d'un mode amplifié d'un cristal temporel par un émetteur ponctuel présente de nombreuses limites (il n'y a notamment pas de contributions des ondes transmises aux interfaces dans le cas spatial), et comme nous l'avons vu au début de cette partie, une meilleure analogie pourrait être réalisée en considérant un milieu spatialement périodique (ainsi qu'une source ponctuelle en temps et monochromatique en espace). Cependant, cette comparaison simple permet de souligner la nature interférentielle de la génération efficace d'une onde stationnaire dans un cristal temporel et d'envisager l'analogie temporel d'un aspect essentiel d'un émetteur ponctuel dans une cavité : sa position (*i.e.* sa phase spatiale). En effet, un émetteur ponctuel monochromatique ne peut, même si sa longueur d'onde est adaptée à un mode propre de la cavité, l'exciter efficacement s'il se trouve à un nœud de ce mode. Ceci est dû à un effet interférentiel de phase : les ondes émises dans une direction par l'émetteur et celles émises dans l'autre direction, puis renvoyées par les bords, sont déphasées de  $\pi$  et interfèrent destructivement. L'excitation efficace d'un mode stationnaire par un

émetteur ponctuel dans une cavité est ainsi également soumise, en plus de la condition d'accord de longueur d'onde (la longueur d'onde de l'émetteur doit correspondre à un mode propre de la cavité), à un accord de phase (l'émetteur ne doit pas être situé sur un nœud de ce mode propre). La généralisation de ce phénomène à des structures spatiales plus complexes conduit à introduire la densité locale de modes, déterminant la capacité d'émission de l'émetteur à une fréquence et une position donnée [147]. Le même scénario est-il envisageable pour un émetteur ponctuel dans un cristal temporel? Jusqu'ici, nous avons montré, dans le cas du cristal temporel l'existence d'une condition d'accord de fréquence. Tirant parti de l'analogie avec la cavité spatiale, nous allons ici étudier l'existence d'une condition d'accord de phase temporelle.

### Étude expérimentale de l'influence de la phase

*Contrôle de la phase d'un émetteur à la fréquence de Faraday :*

Comme précédemment, nous utilisons ici un dispositif souffleur émettant des ondes sur un bain vibré à 40 Hz. La fréquence d'émission des ondes est choisie à 20 Hz, c'est-à-dire la fréquence de Faraday, adaptée au déclenchement d'un motif stationnaire par amplification (au sein de la première bande). Les ondes sont émises dans un bain vibré juste en dessous du seuil de déclenchement de l'instabilité, dans de l'huile silicone 20 cSt. Les signaux contrôlant le souffleur et le bain sont synchronisés avec un déphasage phase réglable. Notons que, puisque la fréquence de l'émetteur est la moitié de la fréquence de la modulation, cette phase n'est pas définie de façon univoque. Comme précédemment, nous choisissons ici comme référence de phase celle associée au mouvement du bain. La position verticale du bain suit donc :

$$z_{\text{bain}}(t) = z_0 \sin(2\Omega t), \quad (6.24)$$

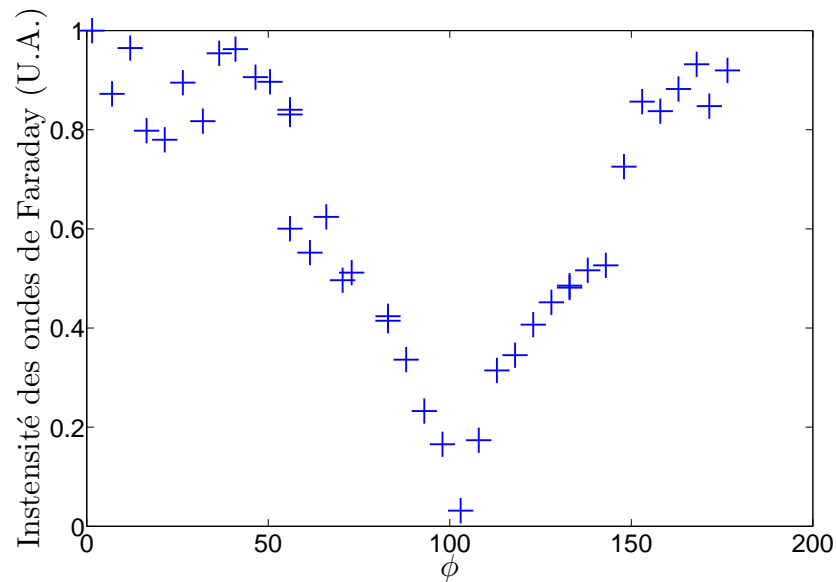
où  $z_0$  est une constante. On note  $\zeta_{\text{souffle}}$  l'élévation locale de la surface induite par le souffle au point d'impact du jet d'air. Le déphasage  $\phi$  du signal des ondes émises par le souffleur par rapport au bain est alors défini par :

$$C = \zeta_0 \sin(\Omega t + \phi), \quad (6.25)$$

où  $\zeta_0$  est une constante. Les phases  $\phi$  et  $\phi + \pi$  sont rigoureusement équivalentes dans cette définition et nous pouvons donc nous restreindre à définir  $\phi$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Les expériences sont répétées pour différentes valeurs de  $\phi$  choisies et le champ d'onde est filmé pour chaque réalisation.

*Influence de la phase temporelle de l'émetteur :*

L'émetteur est ponctuel et dans un milieu homogène. L'émission est ici choisie à un niveau très faible : en l'absence de vibration du bain, l'amplitude des ondes émises par le souffleur est trop faible pour qu'elles soient observées. Un motif, stationnaire, apparaît donc uniquement lorsque le bain est mis en vibration, sous l'effet de l'amplification induite par la modulation périodique du milieu. Cela permet d'observer, seul, ce motif amplifié. Nous obtenons une estimation de l'intensité globale du champ d'onde stationnaire à la fréquence considérée en réalisant une analyse de Fourier spatiotemporelle. Sur le film d'une expérience donnée, on soustrait l'arrière plan, puis on effectue la transformée de Fourier (spatiale) de chaque image du film. On sélectionne ensuite sur la transformée de chaque image la portion d'information associée à la longueur d'onde de Faraday : on calcule la valeur moyenne des pixels sur une couronne correspondant aux vecteurs d'onde de modules proches de celui de Faraday. Sur l'ensemble du film, on observe naturellement que ce signal moyen associé à la longueur d'onde de Faraday oscille à la fréquence de Faraday. La valeur de la composante de Fourier de ce signal à la fréquence de Faraday donne une estimation quantitative de l'amplitude des ondes observées.



(a) Amplitude des ondes stationnaires

(b)  $\phi = 100^\circ$ (c)  $\phi = 0^\circ$ 

**Figure 6.15** – Influence du déphasage (en degrés) d'un émetteur ponctuel à la fréquence de Faraday sur le champ d'onde stationnaire émergent.

Le résultat de ces mesures est présenté à la figure 6.15. Elle montre que l'amplitude du motif stationnaire généré dépend fortement du déphasage  $\phi$  entre l'émetteur et le cristal temporel. Un minimum d'amplitude du champ d'onde est obtenu pour une valeur  $\phi = 100 \pm 10$  degrés. Le champ d'onde est alors presque nul (voir figure 6.15 (b)). Un maximum d'intensité de l'onde stationnaire déclenchée est observé pour un déphasage proche de zéro.

Ainsi donc, au sein d'un cristal temporel, la capacité d'un émetteur ponctuel à exciter un mode amplifié donné du cristal dépend de sa phase temporelle, relativement au cristal. Afin d'expliquer les effets interférentiels conduisant à cette influence notable de la phase de l'émetteur, nous présentons dans la suite tout d'abord le cas spatial d'un émetteur dans une cavité, pour en tirer ensuite un mécanisme temporel équivalent.

### Phase spatiale d'un émetteur dans une cavité et équivalent temporel dans un cristal temporel

*Position d'accord de phase d'un émetteur dans une cavité :*

Considérons tout d'abord le cas d'une cavité *spatiale* unidimensionnelle située entre  $x = 0$  et  $x = L_c$ . Nous supposons que ses bords sont identiques et imposent une condition de champ

nul en ces deux points. Ce cas de figure peut correspondre par exemple à espace vide entre deux miroirs parfaits pour un champ d'onde électromagnétique, ou encore à un espace d'eau profonde entre deux obstacles immergés affleurant à la surface de l'eau pour un champ d'onde de surface. Considérons un émetteur ponctuel monochromatique à la plus basse fréquence propre de la cavité, situé en  $x = x_e$ . L'onde émise par l'émetteur ponctuel s'écrit simplement :

$$\phi_e(x, t) = \phi_0 e^{i\omega_0(k)t} \left( \Theta(x - x_e) e^{-ik(x-x_e)} + \Theta(x_e - x) e^{ik(x-x_e)} \right), \quad (6.26)$$

où  $k = \pi/L_c$ ,  $\Theta$  est la fonction de Heaviside, et  $\omega_0(k)$  est la pulsation donnée par la relation de dispersion libre des ondes considérées. Ce champ émis est constitué de deux composantes : l'une se propageant vers les  $x$  croissants (depuis  $x_e$ ) et l'autre se propageant du même point dans la direction opposée. Le champ d'onde total est la superposition de ce champ d'onde émis et de ses réflexions multiples par les bords de la cavité. Un mode stationnaire est généré efficacement si le champ directement émis interfère constructivement avec celui issu des réflexions multiples. Un tel accord de phase est parfaitement obtenu pour toutes les composantes si le champ issu de la *première* réflexion est en phase avec le champ directement émis se propageant dans la même direction. Considérons ainsi le champ  $\phi_{rg}$ , issu de la première réflexion du champ émis vers le bord gauche de la cavité. Comme nous l'avons vu à la section 4.1, un bord miroir réalise un retournement spatial autour de  $x = 0$ , avec un déphasage additionnel de  $\pi$  :

$$\phi_{rg}(x, t) = \phi_0 e^{i\omega(k)t} e^{-ikx - ikx_e + i\pi}. \quad (6.27)$$

Cette onde réfléchie se propage bien vers la droite et interfère constructivement avec l'onde directe émise dans cette direction si :

$$-kx_e + \pi = kx_e \quad \text{mod } [2\pi]. \quad (6.28)$$

On obtient donc l'excitation parfaitement efficace du mode stationnaire pour la condition d'accord de phase pour la position de l'émetteur :

$$x_e = \frac{L_c}{2}. \quad (6.29)$$

Au contraire, l'excitation du mode de la cavité est parfaitement inefficace si l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde directe :

$$-kx_e + \pi = kx_e + \pi \quad \text{mod } [2\pi], \quad (6.30)$$

ce qui donne une excitation nulle du mode propre de la cavité si :

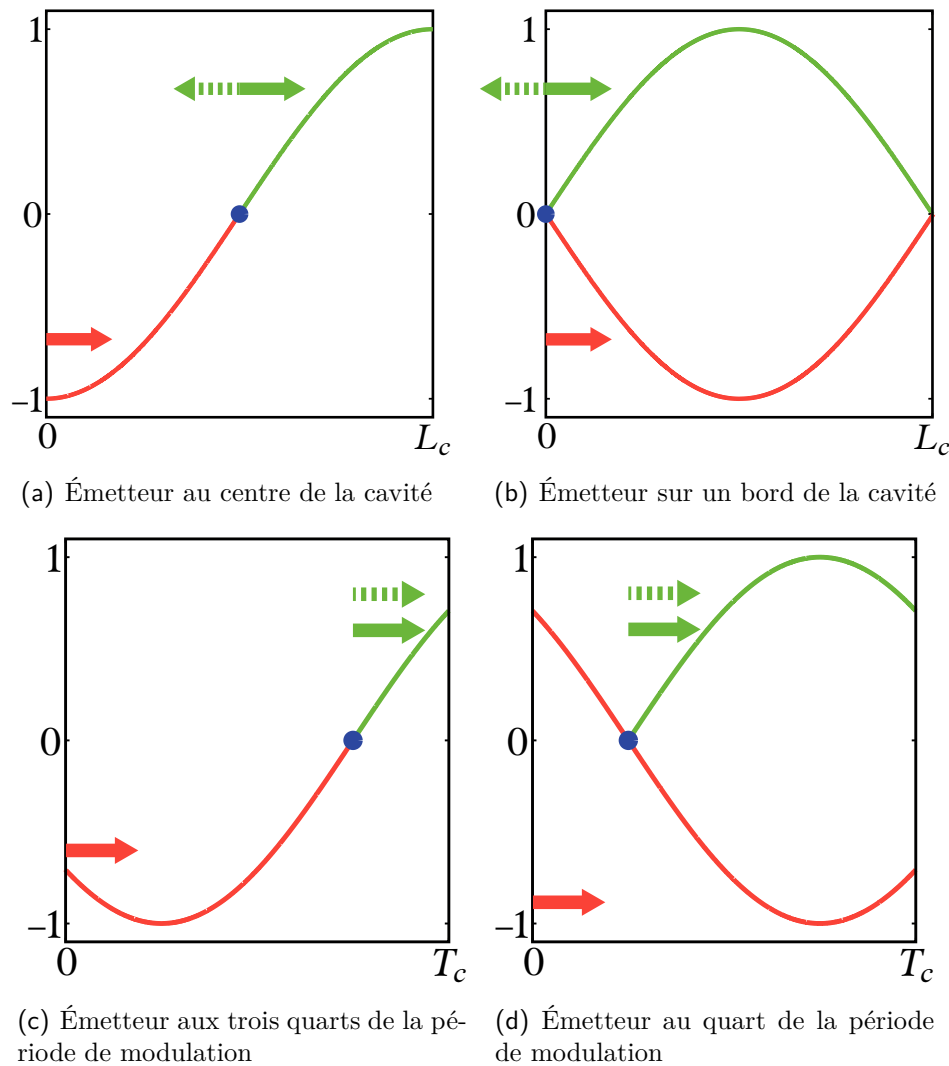
$$x_e = 0 \text{ ou } L_c. \quad (6.31)$$

Notons que ce résultat se généralise à tous les modes propres de la cavité : un émetteur à la fréquence d'un mode propre donné ne peut exciter ce mode s'il est situé sur l'un des nœuds de ce mode propre.

Ces résultats sont résumés à la figure 6.16 (a) et (b). L'émetteur est symbolisé par le point bleu. L'onde directe émise dans la direction des  $x$  croissants est représentée en vert. Sa longueur d'onde est le double de la longueur de la cavité (car la fréquence de l'émetteur est supposée ici être la fréquence propre fondamentale de la cavité). Une onde (non représentée) est également envoyée



dans la direction opposée par l'émetteur ponctuel et se réfléchit sur le bord en  $x = 0$ . Cette onde réfléchie est représentée en rouge. Si l'émetteur est situé au centre de la cavité ( $x_0 = L_c/2$ ), l'onde réfléchie vers les  $x$  croissants est en phase avec l'onde directe. Si l'émetteur est situé sur le bord gauche de la cavité  $x_0 = 0$ , l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde directe.



**Figure 6.16** – Schéma des interférences entre ondes directe (en vert) et réfléchie (en rouge) pour un émetteur ponctuel monochromatique à la fréquence fondamentale dans une cavité spatiale (a) et (b) ou dans un cristal temporel (c) et (d). Sur les diagrammes (a) et (b), les flèches pleines indiquent la direction de propagation des ondes représentées. La flèche pointillée verte rappelle qu'une onde (non représentée) est également émise depuis le point source dans la direction opposée. C'est elle qui se réfléchit en  $x = 0$  sur la paroi pour donner l'onde réfléchie (rouge). Sur les diagrammes (c) et (d), correspondant au cas analogue du cristal temporel, toutes les flèches pointent vers les temps croissants (pour rappeler la causalité). La flèche pointillée verte rappelle ici encore l'existence d'une onde (non représentée) émise dans la direction de propagation opposée, et dont la "réflexion temporelle" génère l'onde réfléchie (rouge).

*Instant d'accord de phase d'un émetteur dans un cristal temporel :*

Considérons maintenant le cas analogue d'un cristal temporel de période  $T_c$  et d'un émetteur ponctuel monochromatique à la fréquence de Faraday. Puisqu'il n'y a pas dans ce cas de référence spatiale (le milieu est supposé homogène et infini), on supposera l'émetteur situé en  $x = 0$ . Il existe en revanche une référence des temps (celle du cristal temporel). Le champ d'onde émis peut

donc être écrit :

$$\phi(x, t) = \phi_0 e^{i\Omega(t+t_0)} \left( \Theta(x) e^{-ik_0(\Omega)x} + \Theta(-x) e^{ik_0(\Omega)x} \right), \quad (6.32)$$

où  $\Omega = \pi/T_c$ ,  $k_0(\Omega)$  est le vecteur d'onde donné par la relation de dispersion libre des ondes considérées, et  $\Omega t_0$  est le déphasage de l'émetteur par rapport à la référence de phase imposée par le cristal temporel. Comme précédemment, ce champ émis possède une composante émise vers les  $x$  croissants et une composante émise vers les  $x$  décroissants. De façon analogue au cas spatial de la cavité, une onde réfléchie (temporellement) est générée à partir de chaque composante du champ émis. Comme précédemment, un mode stationnaire est généré efficacement si chaque onde réfléchie interfère constructivement avec le champ d'onde direct émis dans sa direction. Les ondes générées sous l'effet de la modulation temporelle du milieu à partir de chaque composante du champ émis peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de deux fonctions de Bloch temporelles  $e^{\pm ikx} e^{i\omega t} p(t)$ , dont les pulsations (imaginaires) peuvent être calculées numériquement (voir section 6.1). Une expression entièrement analytique peut même être obtenue en supposant que la modulation temporelle du milieu est de faible amplitude (voir équation (5.43)). Par souci de simplicité, ainsi que pour illustrer l'analogie avec le cas spatial, nous présentons ici le calcul effectué en supposant que le cristal temporel est constitué d'une suite périodique de MTI. Chacun de ces MTI correspond à une frontière temporelle sur laquelle l'onde émise par la source ponctuelle se réfléchit. Comme précédemment, l'accord de phase entre le champ directement émis et l'ensemble des réflexions multiples sur chacun des MTI est assuré si l'onde issue de la *première* réflexion est en phase avec l'onde directement émise. Nous considérons ainsi l'onde  $\phi_{r-}$  issue de la réflexion temporelle (en  $t = 0$ ) de l'onde émise vers les  $x$  décroissants :

$$\phi_{r-}(x, t) = A\phi_0 e^{ikx} e^{i\Omega t_0} e^{-i\Omega t + i\frac{\pi}{2}}. \quad (6.33)$$

Cette onde (écrite ici en écriture complexe) est équivalente à son complexe conjugué (de même partie réelle), qui s'exprime sous la même forme que l'onde directe. L'accord de phase avec l'onde directe est réalisé si :

$$-\Omega t_0 - \frac{\pi}{2} = \Omega t_0 \pmod{[2\pi]}. \quad (6.34)$$

L'accord de phase est donc obtenu si l'émission présente un retard de phase de  $-\pi/4$  (modulo  $\pi$ ) sur la modulation du milieu, ce qui correspond à un "instant d'émission" décalé par rapport à la modulation de :

$$t_0 = \frac{3T_c}{4} \pmod{[T_c]}. \quad (6.35)$$

De même, l'onde réfléchie est exactement en opposition de phase avec l'onde directe et donne une excitation minimale du mode stationnaire pour un retard de phase de  $\pi/4$  (modulo  $\pi$ ) :

$$t_0 = \frac{T_c}{4} \pmod{[T_c]}. \quad (6.36)$$

Ces deux cas sont illustrés à la figure 6.15 (c) et (d). La référence de phase de l'émetteur est symbolisée par un point bleu. L'onde directe émise dans la direction des  $x$  croissants est représentée en vert. Sa période est le double de celle de la modulation du milieu. La flèche verte pointillée rappelle qu'une onde (non représentée) est également émise dans la direction opposée par l'émetteur ponctuel. C'est la "réflexion temporelle" de cette onde en  $t = 0$  qui est à l'origine de l'onde réfléchie (représentée en rouge). Si l'émetteur est en retard d'un quart de période de modulation sur la modulation, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde directe. Si l'émetteur est en avance d'un quart de période de modulation sur la modulation, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec

l'onde directe. Notons la forte analogie avec le cas spatial illustrée par la similarité des diagrammes (a) et (c) d'une part et des diagrammes (b) et (d) d'autre part. La différence principale entre les deux situations est que les phases d'interférences maximalement constructives et destructives sont décalées dans le cas (du cristal) temporel de  $\pi/4$  par rapport au cas spatial. Ceci est dû à la différence de déphasage induite au moment de l'opération de retournement : une réflexion spatiale s'accompagne d'un déphasage de l'onde de  $\pi$  tandis qu'un retournement temporel s'accompagne d'un déphasage de  $\pi/2$ .

*Phase géométrique de Gouy pour un champ d'onde bidimensionnel :*

Le calcul que nous venons de présenter est valable pour un champ d'onde unidimensionnel. Pour généraliser ce résultat à un espace 2D ou 3D, il est nécessaire de prendre en compte une spécificité de la géométrie des ondes circulaires émises par une source ponctuelle. En effet, lorsqu'une onde circulaire converge en passant par un centre puis rediverge, elle acquiert en champ lointain un déphasage supplémentaire d'origine géométrique par rapport à une onde plane ayant parcouru la même distance. Cette phase supplémentaire, découverte par Gouy [148], vaut  $\pi/2$  dans un espace à deux dimensions et  $\pi$  à trois dimensions. Ainsi, la condition d'accord de phase (6.34) entre l'onde émise directement et l'onde retournée (après qu'elle ait convergé puis redivergé) doit être modifiée pour les ondes à la surface du liquide dans nos expériences, qui se propagent dans un espace bidimensionnel, pour prendre en compte ce déphasage supplémentaire de l'onde retournée :

$$\frac{\pi}{2} - \Omega t_0 - \frac{\pi}{2} = \Omega t_0 \pmod{[2\pi]}, \quad (6.37)$$

Ce qui donne une génération efficace de l'onde stationnaire pour :

$$\Omega t_0 = 0 \pmod{[\pi]}, \quad (6.38)$$

et une efficacité de génération minimale pour :

$$\Omega t_0 = \frac{\pi}{2} \pmod{[\pi]}, \quad (6.39)$$

Ainsi, on retrouve bien une excitation maximale pour un déphasage nul et une excitation minimale pour un déphasage de  $\pi/2$ , compatibles avec les observations expérimentales. Un critère purement interférentiel, d'accord de phase entre ondes directes et ondes réfléchies, analogue à celui régissant la capacité d'un émetteur ponctuel dans une cavité spatiale, explique donc l'influence de la phase temporelle sur la capacité de génération d'une onde stationnaire d'un émetteur ponctuel dans un cristal temporel. Notons que ce résultat constitue une première ébauche de généralisation du concept de densité locale (en espace) de modes au cas d'une structuration temporelle du milieu, correspondant à une densité locale de mode en temps.

Au cours de cette section, nous avons décrit les propriétés particulières d'un émetteur placé dans un cristal temporel. En faisant varier dans un premier temps la fréquence de l'émetteur, nous avons montré que le cristal donnait lieu à l'apparition de signaux translatés en fréquence d'un multiple de la fréquence du cristal. Ce phénomène traduit l'invariance temporelle des ondes par translations de leur fréquence d'un multiple de la fréquence du cristal temporel. Il implique également qu'il est possible d'exciter un mode instable du cristal, comme celui à la longueur d'onde et à la fréquence de Faraday, en utilisant un émetteur à une fréquence autre (translatée d'un multiple de la fréquence du cristal), et rappelle le rôle particulier de la fréquence de Faraday, dont l'opposée est aussi le translaté par moins une fois la fréquence du cristal. Dans un deuxième temps, en fixant la valeur

de la fréquence de l'émetteur à la fréquence amplifiée de Faraday, nous avons étudié l'influence de la phase de l'émetteur. Dans une structure spatiale, la phase spatiale (la position) d'un émetteur ponctuel influe, par des effets interférentiels, sur la capacité de l'émetteur à exciter un mode propre donné de la cavité spatiale. De même, dans un cristal temporel, la capacité d'un émetteur ponctuel à exciter un mode amplifié du cristal dépend de sa phase temporelle, relativement à la modulation du milieu. Ceci peut être décrit par un mécanisme interférentiel similaire au cas spatial.

Cette partie a permis d'étudier les propriétés très particulières des ondes dans les milieux modulés temporellement périodiquement. En tirant partie de l'analogie formelle la théorie des ondes dans les structures périodiques spatiales, nous avons tout d'abord donné une description générale des ondes dans les "cristaux temporels", grâce aux diagrammes de Brillouin temporels, permettant d'en prédire de nombreuses propriétés. L'équivalent temporel des bandes de fréquences interdites est très différent de son pendant spatial : il est donné par des bandes de vecteur d'onde associées à un comportement d'amplification. Les propriétés de ces bandes d'amplifications permettent d'interpréter les propriétés des instabilités pouvant être observées dans ces cristaux temporels, comme l'instabilité de Faraday pour les ondes à la surface d'un bain vibré, et d'aborder de nouveaux aspects de ces phénomènes (mode le plus instable, ...). Enfin, nous avons étudié expérimentalement l'effet du cristal temporel sur un émetteur ponctuel. Nous avons mis en évidence un effet de déploiement du spectre de l'onde émise sur plusieurs ordres, par translations d'un multiple de la fréquence du signal. Dans le cas où la fréquence de l'émetteur correspond à un domaine d'amplification du cristal, nous avons montré que, par un mécanisme interférentiel similaire à un équivalent spatial, cette amplification ne peut avoir lieu que si la phase temporelle de l'émetteur est adaptée à celle du cristal.

### Conclusion

Le lecteur aura découvert, tout au long de cet ouvrage, des concepts généraux de description et de contrôle de la propagation des ondes, mettant en évidence de nouveaux aspects de l'analogie bien connue entre les rôles joués par l'espace et le temps dans la propagation des ondes.

Dans un premier temps, partant de la propriété fondamentale de réversibilité temporelle des ondes usuelles, régies par l'équation de d'Alembert, nous avons tiré parti du principe de superposition pour imaginer une expérience de pensée de retournement temporel pour les ondes. Dans cette expérience de pensée, un démon, similaire au célèbre démon de Loschmidt pour les particules, annule, à un instant donné, la dérivée temporelle du champ, caractérisant le sens de propagation de l'onde. Celle-ci se scinde alors immédiatement en deux : une partie poursuit sa propagation initiale, l'autre revient en sens arrière. Cette dernière est le retourné temporel de l'onde initiale. Ce résultat a été généralisé à tout découplage global (sur l'ensemble de l'espace) entre le champ d'onde et sa dérivée temporelle, qui à eux deux caractérisent l'état du système ondulatoire à un instant donné. Ce type de découplage peut être obtenu en modifiant fortement et brièvement une propriété du milieu de propagation qui détermine la vitesse de propagation des ondes. Après le choc, le champ d'onde obtenu se décompose dans ce cas en une somme de trois composantes : à l'onde initiale non perturbée viennent s'ajouter une onde copropagative, proportionnelle à la dérivée temporelle du champ initial, et une onde contrapropagative, proportionnelle à son retourné temporel. Nous avons ainsi montré théoriquement qu'un choc de célérité (homogène spatialement) permet de générer instantanément, dans tout le milieu, le retourné temporel de n'importe quelle onde initiale.

Afin de valider expérimentalement le concept, nous avons ensuite réalisé des expériences sur les ondes à la surface libre d'un liquide. Pour ce type d'onde, la gravité est un paramètre caractéristique de la célérité. Un choc de célérité peut donc être obtenu en soumettant l'ensemble du liquide à la surface duquel se propagent les ondes à une accélération verticale brève et intense, équivalente à un choc de gravité. Nous avons donc développé un dispositif expérimental permettant de réaliser ce choc dans un environnement contrôlé pour étudier son effet sur la propagation des ondes. Il est composé d'un pot vibrant mettant en mouvement verticalement une cuve remplie de liquide, sur la surface duquel un dispositif permet d'appliquer une pression pour émettre des ondes. De plus, l'ensemble du champ d'onde de surface peut être visualisé sans perturber une expérience. Grâce à ce montage, nous avons pu observer l'effet du choc de gravité obtenu (de l'ordre de  $20 g$  pendant  $3 \text{ ms}$ ) sur une onde initiale, et mettre en évidence l'émergence instantanée, au moment

du choc, de l'onde rétropropagée attendue. Cette onde se propage depuis le paquet d'onde initial à l'instant du choc et se refocalise au(x) point(s) d'émission initiale. L'analyse du champ d'onde rétropropagé et notamment de sa corrélation à l'onde initiale a mis en évidence son caractère d'onde retournée temporellement, dont l'une des manifestations les plus spectaculaires est la compression du paquet d'onde lors du trajet de retour, contrastant avec l'élargissement induit usuellement par la dispersion. L'opération de retournement temporel effectuée présente une large bande passante, malgré un léger filtrage des hautes fréquences dû à la durée non nulle du choc, et accentué par la légère dissipation visqueuse dans l'eau utilisée. Comme toute opération de retournement temporel, notre procédé est également robuste à la présence de diffuseurs statiques, consistant dans nos expériences en un obstacle sous marin, bien que la modulation temporelle d'inhomogénéités de la célérité induise une radiation parasite.

Ayant ainsi démontré et caractérisé le retournement temporel obtenu par un choc de célérité, nous avons pu en étudier plus en profondeur les causes et les implications. La génération instantanée depuis l'onde initiale de l'onde retournée (et d'une autre onde contrapropagative) nous a amené à revisiter le principe d'Huygens-Fresnel en décrivant l'émission de ces deux ondes comme le fait de sources secondaires particulières. Ce formalisme permet ainsi d'explicitier le rôle du choc de célérité dans la propagation à l'origine de l'onde retournée. Puisque c'est la variation temporelle de la célérité du milieu qui est centrale dans l'émission de l'onde retournée, nous avons été amené à comparer notre procédé au concept de réfraction temporelle, développé depuis plusieurs années en optique. Nous avons montré qu'une seule variation de célérité du milieu permet de générer une onde contrapropagative (de même(s) vecteur(s) d'onde et de sens de propagation opposé), mais pas une onde retournée temporellement car les fréquences sont modifiées par le changement de célérité. Une deuxième variation temporelle du milieu, permettant de revenir à la célérité initiale, est donc nécessaire pour obtenir l'onde retournée temporellement. Dans la limite de deux variations successives très proches et très fortes, correspondant à notre choc de célérité, l'interférence des ondes contrapropagatives générées à chacune des deux interfaces temporelles est à l'origine du défaut de l'ordre de dérivation supplémentaire de l'onde retournée mais permet de générer efficacement (et instantanément) l'onde retournée temporellement quel que soit son contenu spectral. L'étude des symétries de notre "lame mince" temporelle montre qu'elle réalise l'équivalent dans le domaine temporel d'un miroir dans le domaine spatial, justifiant ainsi le nom de Miroir temporel instantané (MTI) donné au procédé. Ce nouveau type de retournement temporel constitue une approche complémentaire de la cavité à retournement temporel numérique, qui représente à ce jour l'unique procédé alternatif de retournement temporel large bande. Le parallèle entre l'utilisation de l'information contenue dans toutes les "d" dimensions de l'espace (et à un instant unique) par le procédé du MTI et l'utilisation de l'information contenue dans "d-1" dimensions d'espace et dans le temps, dans le procédé des cavités à retournement temporel numérique, laisse envisager une généralisation à des miroirs spatiotemporels utilisant l'information contenue sur une hypersurface quelconque de dimension "d" pour générer une onde retournée.

Tous ces résultats théoriques ont été démontrés pour des ondes satisfaisant l'équation de d'Alembert, mais nous avons pu facilement les généraliser à d'autres types d'ondes similaires, comme les ondes à la surface d'un liquide utilisées dans nos expériences, en constatant que l'opération du MTI ne concerne que la variation temporelle du champ d'onde et non sa variation spatiale. Nous avons montré que le procédé résiste à la présence d'une faible dissipation, dont l'effet sur la propagation se réduit dans le cas des ondes de surface à un filtrage des hautes fréquences, mais ne résiste pas à la présence d'une non linéarité. Le MTI ne peut pas se généraliser non plus à des ondes de matière régies par l'équation de Schrödinger, dont la structure est différente, bien qu'elle permette d'envisager une technique de retournement monochromatique. Des propositions de généralisations

à d'autres types de choc que le choc de célérité (choc de couplage avec un autre type d'onde, choc de dissipation) ont également été présentées, qui possèdent un potentiel d'applications similaires intéressants.

L'idée qu'un couplage d'ondes peut permettre de générer une onde retournée nous a naturellement conduit à comparer le concept du MTI à la conjugaison de phase, utilisée en optique pour générer le retourné temporel d'une onde monochromatique. Nous avons montré que cette dernière repose sur la réalisation, d'une manière effective, d'une modulation temporelle périodique de la célérité du milieu, qui est l'analogue monofréquentiel de notre choc de célérité. L'étude expérimentale pour les ondes de surface a révélé la généralité de cette approche, en montrant qu'une conjugaison de phase hydrodynamique est obtenue dans les bains vibrés sinusoïdalement. Celle-ci consiste en un retournement temporel sélectif spectralement des ondes à la fréquence moitié de la fréquence de modulation du milieu. Comme pour le MTI, la génération de l'onde contrapropagative s'accompagne d'une onde copropagative, si bien que le processus conduit dans toute la zone modulée à une stationnarisation. Couplé à l'effet de seuil d'amplification introduit par la dissipation visqueuse, ce phénomène permet de réinterpréter l'émergence spontanée d'ondes stationnaires à la fréquence moitié dans l'instabilité hydrodynamique de Faraday : elle peut être vue comme le fait de l'amplification et de la stationnarisation d'un bruit initial à la surface du bain vibré. Le lien entre cette instabilité, la conjugaison de phase hydrodynamique et le MTI a été montré plus directement grâce à la modélisation simplifiée de la vibration du bain comme une suite périodique de MTI. Cette description permet d'isoler l'élément clef de la conjugaison de phase et de l'amplification associée : la périodicité de la modulation temporelle du milieu.

Ceci nous a amené à conduire une réflexion plus générale sur la propagation des ondes dans les milieux modulés temporellement périodiquement. Ces milieux constituent l'équivalent dans le domaine temporel des structures périodiques dans le domaine spatial, dont l'exemple canonique est le cristal. Nous avons montré que les propriétés des ondes dans ces "cristaux temporels" pouvaient être obtenues de manière exactement analogue au cas spatial, en utilisant la théorie de Floquet et les fonctions de Bloch pour obtenir leur relation de dispersion. L'équivalent des bandes usuelles de pulsations interdites dans les cristaux spatiaux est donné par des bandes de vecteur d'onde complexes dans leur équivalent temporel. Cependant, du fait de l'absence de condition imposée sur l'amplitude de l'onde à temps longs, ces domaines, loin d'être nécessairement associés à une décroissance de l'amplitude, correspondent à des bandes, au sein desquelles un phénomène d'amplification est obtenu. L'amplification observée, pour des ondes à la fréquence et à la longueur d'onde de Faraday, dans nos expériences de conjugaison de phase hydrodynamique en est un cas particulier. Le modèle de cristal temporel que nous avons présenté fournit ainsi une nouvelle description plus complète des instabilités paramétriques de systèmes ondulatoires. Dans le cas particulier de l'instabilité hydrodynamique de Faraday, nous avons vérifié que ce modèle permet de retrouver les diagrammes d'instabilité de la littérature, puis nous avons montré qu'il permet d'effectuer des prédictions nouvelles (valeurs et sauts du mode le plus instable à hautes amplitudes de modulation, "relation de dispersion" des ondes de Faraday au seuil d'instabilité). L'analogie au cas spatial dans le formalisme du cristal temporel se révèle particulièrement intéressante pour étudier l'effet d'un émetteur (ponctuel et monochromatique) dans un cristal temporel. Nous avons montré expérimentalement, en utilisant les ondes de surface, qu'un émetteur dans un cristal temporel engendre une onde possédant, en plus de sa propre fréquence, des composantes aux fréquences translatées d'un multiple de la fréquence du cristal. Dans le cas où l'une de ces fréquences translatées correspond à la fréquence de Faraday (moitié de celle de la modulation), un mode stationnaire amplifié à la longueur d'onde et à la fréquence de Faraday est généré efficacement. L'adaptation de la fréquence de l'émetteur à la fréquence du cristal temporel est une condition nécessaire pour

<b>Équation de d'Alembert</b>	
$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$	
Domaine spatial	Domaine temporel
Transformée de Fourier temporelle $\Delta\hat{\phi}(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\phi}(\vec{r}, \omega) = 0$	Transformée de Fourier spatiale $\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + c^2\vec{k}^2\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0$
Équation de Helmholtz	Équation de l'oscillateur harmonique
Variations spatiales du milieu $\Delta\hat{\phi}(\vec{r}, \omega) + \frac{n(\vec{r})^2\omega^2}{c^2}\hat{\phi}(\vec{r}, \omega) = 0$	Variations temporelles du milieu $\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + c(t)^2\vec{k}^2\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0$
Réflexion sur une lame mince d'indice infini en $x = x_m$ : $n(\vec{r})^2 = 1 + L\delta(x - x_m)$	Miroir temporel instantané en $t = t_{\text{MTI}}$ : $c(t)^2 = c_0^2(1 + \tau\delta(t - t_{\text{MTI}}))$
Cristal (ou miroir de Bragg) : $n(\vec{r})^2 = 1 + \alpha \cos(k_c x)$	Cristal temporel $c(t)^2 = c_0^2(1 + \alpha \cos(\omega_c t))$

**Table 6.2** – Comparaison des rôles joués par l'espace et le temps dans la propagation des ondes en général et dans les phénomènes étudiés dans cet ouvrage en particulier.

générer efficacement le mode stationnaire de Faraday, mais non suffisante. En effet, l'adaptation de la phase de l'émetteur à celle du cristal temporel est également nécessaire. De façon analogue à un émetteur dans une cavité spatiale, cette nécessité d'adaptation de phase résulte d'une condition d'interférences constructives entre les ondes directes et les ondes retournées. Nous avons démontré cette propriété expérimentalement sur les ondes de surface dans un bain vibré, pour lesquelles l'adaptation est approximativement obtenue quand émission et modulation sont en phase.

Aucun des phénomènes, tous classiques, présentés dans cet ouvrage ne nécessitent de faire intervenir la théorie de la relativité. Néanmoins tous ces résultats participent d'un même principe : le rôle joué par le temps dans les phénomènes ondulatoires est analogue au rôle joué par une dimension de l'espace. Il est intéressant de remarquer ici que la relativité est apparue de l'étude des propriétés ondulatoires de la lumière [149], régies usuellement par l'équation de d'Alembert. L'analogie est particulièrement évidente pour les ondes régies par cette équation et apparaît plus clairement encore grâce à l'analyse de Fourier (voir tableau 6.2).

Par transformée de Fourier temporelle, l'équation de d'Alembert devient l'équation de Helmholtz. Par transformée de Fourier spatiale, elle devient l'équation de l'oscillateur harmonique, qui est la version unidimensionnelle de l'équation de Helmholtz. Les différents concepts de contrôle des ondes à une fréquence donnée par une structuration spatiale du milieu, couramment modélisée, notamment en optique, par un indice  $n(\vec{r})$  dépendant de l'espace, peuvent ainsi être transposés directement dans le domaine temporel à des ondes d'un vecteur d'onde donné, en modélisant la "structuration" temporelle du milieu par une célérité dépendant du temps  $c(t)$ .

Ces potentielles analogies spatiotemporelles ne peuvent en revanche pas être appliquées en



général aux ondes de matière, régies par l'équation de Schrödinger, qui ne possèdent pas cette symétrie entre le temps et l'espace. De plus, pour les systèmes ondulatoires classiques, malgré les analogies très fortes dont nous avons tiré parti, nos travaux ont également mis en évidence des différences importantes entre les concepts spatiaux d'origine et leur équivalent temporel (réflexions temporelles vers les temps ultérieurs plutôt qu'antérieurs dans les MTI, bandes d'amplification dans les cristaux temporels). Ces différences, induites par la causalité, révèlent ainsi, par delà les symétries de l'équation de d'Alembert, certaines limites classiques de la description du temps comme une quatrième dimension d'espace pour les systèmes ondulatoires.

## Perspectives

L'approche générale adoptée dans nos travaux de transposition des propriétés particulières de certains milieux de propagation statiques à leur équivalent temporel ouvre de très nombreuses perspectives, tant pour développer des techniques de contrôle temporel des ondes que pour sonder de nouvelles propriétés fondamentales de leur propagation. Citons ainsi le cas du désordre spatial, dont la transposition au cas temporel permet d'envisager un équivalent temporel de la localisation d'Anderson [150]. Ainsi, dans le cas de notre système d'ondes de surface, l'analogie suggère que si un bain de liquide est vibré aléatoirement plutôt que périodiquement, un mode à une longueur d'onde donnée pourrait voir son amplitude fluctuer en temps avec une évolution localement exponentielle.

Par ailleurs, notre outil expérimental d'étude de milieux dont la célérité des ondes est variée en temps pourrait être utilisé également dans le contexte de l'optique de transformation. En effet il est bien connu qu'une variation bien choisie de l'indice optique d'un milieu peut permettre de modéliser les effets relativistes d'espace-temps courbes [151]. Qualitativement, changer la célérité peut être interprété comme une modification du lien entre les échelles caractéristiques de temps et d'espace de la propagation des ondes. Ainsi, de ce point de vue, une modification temporelle de la célérité, homogène sur tout l'espace, pourrait être envisagée comme l'équivalent d'un ralentissement (ou d'une accélération) de "l'écoulement" du temps, correspondant à un espace-temps dont la métrique dépend du temps. Dans ce contexte, il est possible d'envisager que l'expansion de l'univers, décrite usuellement par la métrique dépendante du temps de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [152], soit équivalente à une variation temporelle de l'indice donnant lieu à un phénomène de réflexion temporelle de certains champs d'ondes. Notre approche de contrôle temporel de la célérité des ondes de surface pourrait être utilisée pour sonder expérimentalement de tels phénomènes de réflexion, déjà envisagés par Schrödinger [153], à travers cette équivalence.

D'une manière plus générale, les premiers résultats sur l'obtention d'un MTI par choc de pression de radiation induit par un transducteur permettent d'envisager de contrôler spatiotemporellement la célérité des ondes de surface, grâce au contrôle de la pression de radiation à la surface du liquide à l'aide d'un réseau de transducteurs. Ces résultats ouvrent ainsi la voie à de nombreuses possibilités d'études des effets sur les ondes de variations spatiotemporelles plus complexes de la célérité.



---

## Éléments de théorie des fonctions de Green pour la propagation des ondes

---

Cette annexe présentera quelques éléments de la théorie des fonctions de Green pour le calcul de la propagation des ondes. Nous suivons la démonstration utilisée par Barton [68].

### A.1 La "règle d'or de la propagation des ondes"

L'objectif de cette section est d'obtenir l'expression d'un champ d'onde quelconque, solution de l'équation de d'Alembert (1), à l'aide des fonctions de Green de l'équation.

Soit  $\phi(\vec{r}, t)$  un champ d'onde solution de l'équation de d'Alembert en présence de sources :

$$\Delta\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

où  $\rho(\vec{r}, t)$  est le champ de sources, supposé connu. Soit  $G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t)$  la fonction de Green (causale) de l'équation de d'Alembert. Par définition :

$$\left( \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) = -\delta(t' - t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (\text{A.2})$$

En utilisant la propriété de réciprocité de la fonction de Green [68] ( $G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) = G(\vec{r}, -t | \vec{r}', -t')$ ), et en posant le changement de variables  $\vec{r}' = \vec{r}$  et  $t' = -t$ , on peut passer la dérivation sur les variables de droites de la fonction de Green pour obtenir l'équation similaire :

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = -\delta(t' - t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (\text{A.3})$$

En un instant  $t_0$  initial, l'état du système, défini par la donnée en tout point du champ  $\phi(\vec{r}, t_0)$  et de la dérivée temporelle du champ  $\partial\phi/\partial t(\vec{r}, t_0)$  est supposé connu. Nous considérons un instant  $t'$  ultérieur à  $t_0$  et définissons pour les besoins du calcul :  $t'^+ = t' + \epsilon$ , où  $\epsilon$  est une durée faible dont on prendra finalement la limite nulle. On multiplie par  $G$  l'équation (A.1) et on la soustrait à la multiplication par  $\phi$  de l'équation (A.3). On intègre enfin la quantité obtenue sur tout l'espace

et entre les instants  $t_0$  et  $t'^+$  pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) \right] \\
 & - \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV [G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \Delta \phi(\vec{r}, t) - \Delta G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t)] \\
 & = \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV - [\delta(t' - t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \phi(\vec{r}, t) + G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)].
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Nous en déduisons directement :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) \right] \\
 & - \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV [G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \Delta \phi(\vec{r}, t) - \Delta G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t)] \\
 & = -\phi(\vec{r}', t') - \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t).
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Le premier terme de l'intégrale du membre de gauche se simplifie par intégration tandis que le second se simplifie en utilisant la formule de Stokes, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t'^+) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t'^+) \phi(\vec{r}, t'^+) \right] \\
 & - \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t_0) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t_0) \phi(\vec{r}, t_0) \right] \\
 & - \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_S d\vec{S} [G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \overrightarrow{\text{grad}}(\phi(\vec{r}, t)) - \overrightarrow{\text{grad}}(G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t)) \phi(\vec{r}, t)] \\
 & = -\phi(\vec{r}', t') - \int_{t_0}^{t'^+} dt \int_V dV G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t),
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

où  $S$  est la surface fermée qui enferme le volume  $V$  considéré. La fonction de Green  $G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t'^+)$  et sa dérivée temporelle sont nulles par causalité car  $t'^+ > t'$ . On obtient finalement, après passage à la limite où  $\epsilon$  tend vers 0 par valeurs positives, l'expression générale de  $\phi$  :

$$\phi(\vec{r}', t') = f(\vec{r}', t') + g(\vec{r}', t') + h(\vec{r}', t'), \tag{A.7}$$

où  $f(\vec{r}', t')$  est le terme de champ d'onde émis par le champ de sources  $\rho(\vec{r}, t)$  :

$$f(\vec{r}', t') = - \int_{t_0}^{t'} dt \int_V dV G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t), \tag{A.8}$$

$g(\vec{r}', t')$ , est le terme de champ imposé par les conditions aux limites du milieu :

$$g(\vec{r}', t') = \int_{t_0}^{t'} dt \int_S d\vec{S} [G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \overrightarrow{\text{grad}}(\phi(\vec{r}, t)) - \overrightarrow{\text{grad}}(G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t)) \phi(\vec{r}, t)], \tag{A.9}$$

et  $h(\vec{r}', t')$  est le terme de champ imposé par les conditions initiales :

$$h(\vec{r}', t') = \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}', t' | \vec{r}, t_0) \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0) - \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r}', t' | \vec{r}, t_0) \phi(\vec{r}, t_0) \right]. \tag{A.10}$$

Remarquons qu'en pratique, on n'utilise souvent qu'un seul terme à la fois.  $f(\vec{r}', t')$  est le champ émis par les sources  $\rho$  dans la limite d'un espace infini et en l'absence d'onde initiale.  $g(\vec{r}', t')$

permet de calculer le champ d'onde dans un volume donné sans sources (et initialement vide d'ondes) apparaissant comme conséquence d'ondes venant de l'extérieur imposant des conditions aux limites connues.  $h(\vec{r}', t')$  permet enfin de calculer le champ d'onde dans un milieu infini sans source à partir des conditions initiales en un instant donné.

## A.2 Équivalence du champ émis par un champ de sources instantanées à une condition initiale

Considérons le champ émis par des sources instantanées :

$$\rho(\vec{r}', t) = \delta(t - t_0)\sigma(\vec{r}'). \quad (\text{A.11})$$

D'après la règle d'or de la propagation des ondes (A.7), le champ émis par ces sources est donné par :

$$\phi(\vec{r}, t) = - \int_{t_0}^t dt' \int_V dV G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t') = - \int_V dV G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \sigma(\vec{r}'). \quad (\text{A.12})$$

De façon analogue, considérons le champ obtenu, en l'absence de sources, mais avec des conditions initiales bien choisies :

$$\forall \vec{r}' \in V, \begin{cases} \phi(\vec{r}', t_0) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}', t_0) = -c^2 \sigma(\vec{r}'). \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

La règle d'or (A.7) appliquée à ce cas donne le champ :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{1}{c^2} \left[ G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \left( -\sigma(\vec{r}') c^2 \right) - \frac{\partial G}{\partial t'}(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \times 0 \right] = - \int_V dV G(\vec{r}, t | \vec{r}', t_0) \sigma(\vec{r}'). \quad (\text{A.14})$$

Nous obtenons la même expression. L'action d'un champ de sources instantanées est donc formellement équivalent à l'évolution libre d'une onde à partir de conditions initiales de champ nul mais de *dérivée temporelle du champ* initialement non nulle.

## A.3 Expressions explicites de la fonction de Green de l'équation de d'Alembert

L'expression de la fonction de Green est obtenue en réalisant une transformation de Fourier spatiale de l'équation (2.18). Celle-ci conduit à l'équation définissant la fonction de Green de l'oscillateur harmonique (voir section A.4). On montre ainsi aisément [68] que la fonction de Green causale s'exprime comme une transformée de Fourier (spatiale) inverse :

$$G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = \frac{c^2 H(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin(\omega(\vec{k})(t - t'))}{\omega(\vec{k})} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} d^d \vec{k}, \quad (\text{A.15})$$

où  $d$  est la dimension du problème considéré,  $H$  désigne la fonction de Heaviside et  $\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$  est la relation de dispersion des ondes de d'Alembert. On obtient une expression explicite différente en fonction du nombre de dimensions de l'espace considéré. Les différentes expressions obtenues sont regroupées au tableau A.1.

Dimension	Fonction de Green $G(\vec{r}, t   \vec{r}', t')$
3D	$\frac{\delta\left((t-t') - \frac{\ \vec{r} - \vec{r}'\ }{c}\right)}{4\pi \ \vec{r} - \vec{r}'\ }$
2D	$\frac{\theta\left((t-t') - \frac{\ \vec{r} - \vec{r}'\ }{c}\right)}{2\pi\sqrt{(t-t')^2 - \frac{\ \vec{r} - \vec{r}'\ ^2}{c^2}}}$
1D	$\frac{c}{2}\theta\left((t-t') - \frac{\ \vec{r} - \vec{r}'\ }{c}\right).$

**Table A.1** – Expressions explicites des fonctions de Green de l'équation de d'Alembert en fonction de la dimension.

### A.4 Fonction de Green de l'oscillateur harmonique et généralisation à une source dépendant du champ

La généralisation du MTI à une classe plus générale d'ondes que l'équation de d'Alembert fait intervenir l'équation de l'oscillateur harmonique et sa fonction de Green. Nous considérons donc ici une fonction  $f$  solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t) + \omega_0^2 f(t) = \alpha[f, t]\delta(t - t_0). \tag{A.16}$$

À ce stade, nous autorisons  $\alpha$  à avoir n'importe quelle dépendance en la fonction  $f$  et en la variable  $t$  (pourvu qu'elle soit continue en  $t_0$ , pour que son produit par une fonction de Dirac soit bien défini). Si  $\alpha$  est une constante, cette équation définit la fonction de Green de l'oscillateur harmonique. Si  $\alpha$  est proportionnel à  $f$ , cette équation est celle du MTI dans l'espace de Fourier (4.26). Nous reviendrons sur ces deux cas particuliers en détails dans la suite. En intégrant l'équation (A.16) entre  $t_0 - \epsilon$  et  $t_0 + \epsilon$ , il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \epsilon) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 - \epsilon) - \omega_0^2 \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f(t)dt = \alpha[f, t_0]. \tag{A.17}$$

$f$  est supposée continue en  $t_0$ , ce qui permet de majorer aisément le deuxième terme du membre de gauche :

$$\left| \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f(t)dt \right| \leq 2\epsilon \max_{f_{[t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]}}. \tag{A.18}$$

On obtient donc la discontinuité induite à la dérivée par le choc par passage à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0^+) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0^-) = \alpha[f, t_0]. \tag{A.19}$$

Avant le choc,  $f$  est solution de l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\forall t < t_0, f(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t), \tag{A.20}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Après le choc également :

$$\forall t > t_0, f(t) = A' \sin(\omega_0 t) + B' \cos(\omega_0 t), \quad (\text{A.21})$$

où  $A'$  et  $B'$  sont des constantes. La continuité de  $f$  et la relation de passage pour sa dérivée temporelle (A.19) conduisent aux relations :

$$\begin{cases} A' \sin(\omega_0 t_0) + B' \cos(\omega_0 t_0) = A \sin(\omega_0 t_0) + B \cos(\omega_0 t_0) \\ A' \cos(\omega_0 t_0) - B' \sin(\omega_0 t_0) = A \cos(\omega_0 t_0) - B \sin(\omega_0 t_0) + \frac{\alpha[f, t_0]}{\omega_0}, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

### A.4.1 Cas où $\alpha$ est une constante : fonction de Green de l'oscillateur harmonique

Supposons désormais que  $\alpha[f, t] = 1$ . L'équation (A.16) définit alors la fonction de Green de l'oscillateur harmonique :  $f(t) = G_H(t - t_0)$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} A' = A + \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t_0) \\ B' = B - \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_0). \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

La fonction de Green retardée (causale) est associée à l'hypothèse de nullité de la fonction avant l'instant de la source qui la génère :

$$\forall t < t_0, f(t) = 0, \quad (\text{A.24})$$

qui correspond à  $A = B = 0$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \forall t \leq t_0, G_H(t - t_0) = 0 \\ \forall t \geq t_0, G_H(t - t_0) = \frac{1}{\omega_0} (\cos(\omega_0 t_0) \sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t_0) \cos(\omega_0 t)), \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

ce qui se réécrit de manière plus compacte en :

$$G_H(t - t_0) = \theta(t - t_0) \frac{\sin(\omega_0(t - t_0))}{\omega_0}, \quad (\text{A.26})$$

où  $\theta$  est la fonction de Heaviside.

### A.4.2 Cas où $\alpha$ est proportionnelle à $f$ : équation du MTI dans l'espace de Fourier

Supposons désormais que  $\alpha[f, t] = \alpha f$

$$\begin{cases} A' \sin(\omega_0 t_0) + B' \cos(\omega_0 t_0) = A \sin(\omega_0 t_0) + B \cos(\omega_0 t_0) \\ A' \cos(\omega_0 t_0) - B' \sin(\omega_0 t_0) = A \cos(\omega_0 t_0) - B \sin(\omega_0 t_0) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{\alpha}{\omega_0} (A \sin(\omega_0 t_0) + B \cos(\omega_0 t_0)), \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

qui permettent d'obtenir  $A'$  et  $B'$  en fonction de  $A$  et  $B$  :

$$\begin{cases} A' = A \left[ 1 + \frac{\alpha}{\omega_0} \cos(\omega_0 t_0) \sin(\omega_0 t_0) \right] + \frac{\alpha}{\omega_0} B \cos^2(\omega_0 t_0) \\ B' = B \left[ 1 - \frac{\alpha}{\omega_0} \cos(\omega_0 t_0) \sin(\omega_0 t_0) \right] - A \frac{\alpha}{\omega_0} \sin^2(\omega_0 t_0). \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Quelques calculs trigonométriques montrent que le champ peut ainsi se réécrire :

$$\begin{cases} \forall t \leq t_0, f(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \\ \forall t > t_0, f(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) (A \sin(\omega_0 t_0) + B \cos(\omega_0 t_0)), \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

ce qui, en posant  $f_i(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$ , se réécrit de façon plus compacte :

$$f(t) = f_i(t) + \theta(t - t_0) \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) f_i(t_0). \quad (\text{A.30})$$



---

## Équations générales de l'hydrodynamique d'un bain de liquide vibré

---

Cette annexe présentera les équations générales des ondes à la surface d'un liquide et leurs applications aux bains accélérés.

### B.1 Équations des ondes de surface en profondeur quelconque

On se place dans le cadre classique de l'étude des ondes gravito-capillaires à la surface d'un liquide : on considère l'interface entre un gaz (l'air) et un bain de liquide dont on néglige la viscosité. En absence de source de vorticité initiale, on peut supposer que le champ des vitesses  $\vec{v}$  au sein du liquide dérive d'un potentiel  $\phi$  :

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)(x, y, z, t) \quad (\text{B.1})$$

Notons que le fluide étant incompressible :

$$\Delta\phi(x, y, z, t) = \text{div}(\vec{v})(x, y, z, t) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Le fluide étant ainsi parfait, incompressible et irrotationnel vérifie l'équation de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho \frac{\vec{v}^2}{2} + p + \rho g z = f(t), \quad (\text{B.3})$$

où  $f(t)$  est une fonction du temps, qui vaut la pression atmosphérique  $P_0$  en prenant la référence des altitudes donnée par la surface non perturbée et en supposant que la perturbation est localisée sur une zone finie (il existe donc une zone non perturbée où  $f(t) = P_0$ ). En considérant de "petites" ondes de surface, c'  st-à-dire des perturbations à l'ordre 1 d'une surface stationnaire de "repos", on néglige le terme en vitesse au carré.

On note  $\zeta(x, y)$  l'altitude de la surface par rapport à son état d'équilibre. En considérant un volume de fluide infiniment fin situé juste sous la surface (pour les détails voir par exemple [154]), on obtient une condition d'équilibre des forces surfacique, c'  st-à-dire un équilibre des contraintes.

L'équilibre des contraintes normales s'écrit :

$$p(x, y, \zeta(x, y, t), t) + \gamma \operatorname{div}(\overrightarrow{n(x, y, t)}) = P_0, \quad (\text{B.4})$$

où  $\overrightarrow{n}(x, y, t)$  est le vecteur normal à l'interface en un point repéré dans le plan horizontal par  $x$  et  $y$  et  $\gamma$  est le coefficient de tension de surface à l'interface liquide-air.  $\operatorname{div}(\overrightarrow{n})$  est la courbure de la surface, et  $\gamma \operatorname{div}(\overrightarrow{n})$  est la contrainte normale associée aux effets de capillarité, correspondant à la surpression de Laplace.  $p(x, y, \zeta(x, y, t))$  est la pression du liquide à l'interface.

Pour de faibles amplitudes d'ondes :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{n}) \approx \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad (\text{B.5})$$

Afin d'obtenir un système d'équation définissant  $\zeta$  implicitement, il faut relier  $\phi$  à  $\zeta$ , ce qui s'obtient par un bilan cinématique du transport de volume à l'interface :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}_{2D}(\zeta) \approx v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (\text{B.6})$$

l'approximation étant de nouveau associée à un développement à l'ordre un en l'amplitude des ondes. Enfin, la continuité de la vitesse normale à l'interface liquide-solide au fond du bain de liquide impose la condition de vitesse nulle :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z = -h, t) = 0, \quad (\text{B.7})$$

où  $h$  est la hauteur du liquide au repos.

Ainsi, en se plaçant en  $z = \zeta$  dans l'équation B.3, et en approximant la valeur du potentiel en  $z = \zeta(x, y, t)$  par celle en 0 (de par l'hypothèse d'une faible amplitude de l'onde), on obtient le système d'équations régissant les ondes de surface :

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, y, t) \approx \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0, t) + g\zeta(x, y, t) - \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}(x, y, t) \right) = 0 \\ \Delta \phi(x, y, z, t) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, -h, t) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

où  $\zeta$  est l'élévation de la surface au-dessus de sa hauteur d'équilibre ( $z = 0$ ),  $\phi$  est le potentiel correspondant à la partie potentielle du champ de vitesse, et les notations usuelles sont utilisées pour la gravité  $g$ , la tension de surface  $\gamma$ , et la masse volumique  $\rho$ . On passe dans l'espace de Fourier spatial *uniquement pour les deux directions horizontales* grâce à la transformation de Fourier :

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \zeta(x, y, t) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ \tilde{\phi}(k_x, k_y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \phi(x, y, z, t) e^{i(k_x x + k_y y)}. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Le système (B.8) conduit donc pour les transformées de Fourier de  $\phi$  et  $\zeta$  à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t}(k_x, k_y, t) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}(k_x, k_y, z = 0, t) \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(k_x, k_y, z = 0, t) + g\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) + \frac{\gamma}{\rho}k^2\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}(k_x, k_y, z, t) = k^2\tilde{\phi}(k_x, k_y, z, t) \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}(k_x, k_y, z = -h, t) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . La troisième équation de ce système permet de trouver la forme générale de  $\tilde{\phi}$  :

$$\tilde{\phi}(k_x, k_y, z, t) = A(k_x, k_y, t)e^{kz} + B(k_x, k_y, t)e^{-kz}. \quad (\text{B.11})$$

**Cas du bain accéléré** Pour pouvoir aller plus loin dans les équations des ondes de surface, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires. Notons cependant que tout ce raisonnement est inchangé pour un bain accéléré verticalement comme dans nos expériences, à condition de remplacer  $g$  par :

$$g_{eff}(t) = g + a(t), \quad (\text{B.12})$$

où  $a(t)$  est la valeur algébrique de l'accélération verticale (orientée vers le haut) du bain. Le mouvement de translation verticale du bain dans le référentiel du laboratoire induit en effet une force d'inertie d'entraînement qui augmente la gravité ressentie dans le référentiel du bain lorsque celui-ci accélère vers le haut. Les équations régissant les ondes de surface dans un bain accéléré verticalement s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t}(k_x, k_y, t) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}(k_x, k_y, z = 0, t) \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(k_x, k_y, z = 0, t) + g\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) + \frac{\gamma}{\rho}k^2\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = -a(t)\tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}(k_x, k_y, z, t) = k^2\tilde{\phi}(k_x, k_y, z, t) \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}(k_x, k_y, z = -h, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Pour l'étude des bains vibrés, on remplacera simplement  $a(t)$  par  $a_0 \cos(2\Omega t)$ , avec  $a_0$  l'amplitude d'accélération du bain et  $2\Omega$  sa pulsation de vibration.

## B.2 Cas particulier de l'eau peu profonde : équation de d'Alembert

Un cas d'école des ondes de surface est la limite des eaux peu profondes, pour laquelle nous allons remonter que les équations des ondes de surface se rapprochent des équations de d'Alembert.

Nous faisons ici l'hypothèse d'une hauteur d'eau à l'équilibre très petite devant la longueur d'onde :

$$h \ll \frac{2\pi}{k}. \quad (\text{B.14})$$

D'après l'équation (B.11), la longueur d'onde est aussi l'échelle caractéristique d'évolution spatiale du potentiel des vitesses. Dans ces conditions, nous allons utiliser un développement limité

à l'ordre 2 du potentiel :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}(k_x, k_y, z, t) \approx 0 + (z+h) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}(k_x, k_y, -h, t) \approx (z+h) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2}(k_x, k_y, z, t) = k^2(z+h) \tilde{\phi}(k_x, k_y, z, t). \quad (\text{B.15})$$

On obtient donc, à partir des équations du système (B.13), l'équation pour la transformée de Fourier de l'élévation de la surface :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} + ghk^2 \tilde{\zeta} + \frac{\gamma}{\rho} hk^4 \tilde{\zeta} = -a(t)hk^2 \tilde{\zeta}. \quad (\text{B.16})$$

En supposant que le contenu spectral des ondes considérées est contenu uniquement dans des longueurs d'ondes pour lesquelles l'approximation d'eau peu profonde est vérifiée, on peut repasser dans l'espace réel pour obtenir :

$$c_0^2 \Delta \zeta - \frac{\gamma}{\rho} h \Delta^2 \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a(t)h \Delta \zeta, \quad (\text{B.17})$$

où  $c_0^2 = gh$

**Ondes gravitaires en eau peu profonde** Le cas théoriquement le plus intéressant est celui des ondes gravitaires. L'effet de tension de surface est négligeable devant l'effet de la gravité si :

$$k \ll \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}. \quad (\text{B.18})$$

Notons que cette hypothèse est compatible avec celle d'eau peu profonde puisqu'elle impose également une borne supérieure au spectre spatial de l'onde considérée. Pour les ondes gravitaires en eau peu profonde, l'élévation vérifie donc une équation de d'Alembert, avec une célérité qui évolue sinusoidalement en temps si le bain est vibré :

$$c_0^2 \Delta \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a(t)h \Delta \zeta. \quad (\text{B.19})$$

Pour un bain non vibré ( $a(t) = 0$ ), on obtient l'équation de d'Alembert. C'est un cas d'école théorique, puisqu'on retrouve une équation commune à de très nombreux systèmes ondulatoires. Cependant, expérimentalement, c'est un régime difficile à atteindre puisque la dissipation, notamment sur le fond, devient importante pour des profondeurs faibles [25]. Les expériences présentées dans cette thèse sont effectuées dans le régime d'eau profonde, pour lequel la dissipation peut-être essentiellement négligée lorsqu'on utilise de l'eau.

### B.3 Cas de l'eau profonde

Dans le régime d'eau profonde ( $h \rightarrow -\infty$ ), l'évolution du potentielle des vitesses est sélectionnée par la limite au fond :

$$\phi(k_x, \tilde{k}_y, z, t) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 0. \quad (\text{B.20})$$

Cette condition sélectionne uniquement dans l'expression obtenue précédemment pour le potentiel des vitesses  $\phi$  (B.11) la composante croissant exponentiellement dans la direction verticale :

$$\tilde{\phi}(k_x, k_y, z, t) = A(k_x, k_y, t)e^{kz}, \quad (\text{B.21})$$

d'où, d'après la première équation du système (B.10) la relation linéaire entre la dérivée temporelle de l'élévation de la surface et le potentiel des vitesses :

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t}(k_x, k_y, t) = k \tilde{\phi}(k_x, k_y, z = 0, t). \quad (\text{B.22})$$

En reportant ce résultat dans la deuxième équation du système (B.10), on obtient l'équation des ondes de surface en profondeur infinie :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2}(k_x, k_y, t) + \omega_0^2(k) \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = -a(t) k \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t), \quad (\text{B.23})$$

où  $\omega_0$  définit la relation de dispersion des ondes de surfaces en eau profonde (en espace libre non modulé) :

$$\omega_0 = \sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3}. \quad (\text{B.24})$$

## B.4 Équations des ondes de surface en eau profonde pour un liquide faiblement visqueux

La dérivation classique des équations des ondes de surface dans le cas non visqueux se réalise en introduisant le potentiel des vitesses. L'écoulement n'est en général plus potentiel dans le cas visqueux. Cependant, dans la limite de faible viscosité, Dias *et al* [113] ont proposé une formulation avec un potentiel scalaire et un potentiel vecteur, qui permet de se ramener à des équations très similaires au cas non visqueux. Cette limite est donnée par la condition :

$$\nu k^2 \ll \omega(k, \nu), \quad (\text{B.25})$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide,  $k$  est le nombre d'onde d'une composante spectrale de l'onde considérée et  $\omega$  est la pulsation correspondante. Notons que la condition (B.25) montre que l'influence de la viscosité dépend de la fréquence considérée. En général, l'effet de la viscosité est d'autant plus important que la fréquence est élevée. La condition de faible viscosité peut donc être vue comme une limite supérieure au spectre de l'onde considérée en-dessous de laquelle l'évolution de l'onde est suffisamment lente pour que la viscosité ne joue aucun rôle. Remarquons par ailleurs que cette condition est définie de façon non triviale car elle suppose la connaissance de la relation de dispersion pour une viscosité quelconque  $\omega(k, \nu)$ , qui est donnée en générale par une relation implicite (voie l'annexe de travaux de Hansen *et al* [155] pour une expression implicite exacte à partir des équations de Navier-Stokes). Moyennant cette hypothèse, en eau profonde, on obtient les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2\nu \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \text{ à } z \approx 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = -2\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \text{ à } z \approx 0 \\ \Delta \phi = 0 \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \rightarrow \vec{0} \text{ pour } z \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

où  $\zeta$  est l'élévation de la surface au-dessus de sa hauteur d'équilibre,  $\phi$  est le potentiel correspondant à la partie potentielle du champ de vitesse, et les notations usuelles sont utilisées pour la gravité  $g$ , la tension de surface  $\gamma$ , et la masse volumique  $\rho$ . Notons qu'en prenant  $\nu = 0$ , on retrouve

bien les équations usuelles (B.23). Les transformées de Fourier des deux premières équations du système B.26 s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} = k\tilde{\phi} - 2\nu k^2 \tilde{\zeta} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + g\tilde{\zeta} + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \tilde{\zeta} = -2\nu k^2 \tilde{\phi}, \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

Elles conduisent à :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} + 4\nu k^2 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + \left( gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 + 4\nu^2 k^4 \right) \tilde{\zeta} = 0. \quad (\text{B.28})$$

On note que la viscosité modifie la relation de dispersion (légèrement puisque  $\nu k^2 \ll \omega(k)$ ) mais surtout elle introduit un terme de dissipation dans l'équation.

---

Simulation du MTI pour les ondes de surface

---

Cette annexe présentera le détail des simulations du MTI effectuées pour les ondes de surface. Pour obtenir le champ d'onde simulé de la figure 3.15 (c), nous calculons numériquement, dans l'espace de Fourier spatial, la solution de l'équation (4.38) avec le profil expérimental de l'accélération du bain  $a(t)$ . Les paramètres du fluide sont  $\rho = 1000\text{kg.m}^{-3}$  (masse volumique de l'eau) et  $\sigma = 50\text{mN.m}^{-1}$  (une valeur réaliste de la tension de surface de l'eau courante). Afin de gagner du temps de calcul, nous tirons parti du fait que la forme pointillée correspondant à la Tour Eiffel expérimentale et de la linéarité du système : chaque point est traité séparément et le champ total est reconstitué par une somme des champs obtenus. Cela permet d'effectuer le calcul pour une source dans une configuration simple : centrosymétrique. Pour chaque point, l'effet du jet d'air sur la surface de l'eau est modélisé par un paquet d'onde initial gaussien centrosymétrique centré sur le point d'impact :

$$\tilde{\zeta}_0(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi\delta k^2} e^{-\frac{(k - k_0)^2}{4\delta k^2}}. \quad (\text{C.1})$$

Le vecteur d'onde central est choisi à  $k_0 = 350 \text{ rad.m}^{-1}$  (ce qui correspond à une longueur d'onde  $\lambda_0 = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ), et la largeur de la gaussienne est choisie à  $\delta k = 400 \text{ rad.m}^{-1}$  pour que le paquet d'onde ressemble à celui de l'expérience. Cette gaussienne initialise (dans l'espace de Fourier spatial) la forme du paquet d'onde initial au début de la simulation. Pour chaque vecteur d'onde  $\vec{k}$ , la solution  $\tilde{\zeta}(\vec{k}, t)$  dans l'espace de Fourier est alors calculée à partir de l'équation (4.38), avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}(\vec{k}, 0) = \tilde{\zeta}_0(\vec{k}) \\ \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t}(\vec{k}, 0) = -i\omega_0(k)\tilde{\zeta}_0(\vec{k}), \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Ainsi,  $\tilde{\zeta}(\vec{k}, t)$  est obtenu et le champ d'onde réel est ensuite calculé (numériquement) par une transformée de Fourier inverse :

$$\zeta(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (\text{C.3})$$

Notons que le choix de conditions initiales (C.2) correspond au paquet d'onde initial  $\zeta_i$  :

$$\zeta_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0(\vec{k})t)} \tilde{\zeta}_0(\vec{k}) dk_x dk_y. \quad (\text{C.4})$$

Le problème étant à symétrie centrale, il n'est pas nécessaire de calculer une intégrale bidimensionnelle pour obtenir le champ. On se ramène à un problème unidimensionnel par :

$$\begin{cases} \zeta(x, y, t) = \zeta(r, t) \\ \tilde{\zeta}(k_x, k_y, t) = \tilde{\zeta}(k, t), \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

où on utilise pour la position également la notation usuelle :  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Le changement de variable usuel  $(k_x, k_y) \rightarrow (k, \theta)$  dans la transformée de Fourier inverse (C.3) conduit à :

$$\zeta(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \tilde{\zeta}(k, t) e^{ik(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} d\theta k dk. \quad (\text{C.6})$$

On utilise également les coordonnées polaires pour l'espace réel :  $(x, y) \rightarrow (r, \alpha)$  pour obtenir :

$$\zeta(r, t) = \zeta(r, \alpha, t) = \zeta(r, \alpha = 0, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \tilde{\zeta}(k, t) e^{ikr \cos(\theta)} d\theta k dk. \quad (\text{C.7})$$

Par périodicité du cosinus, on peut faire le changement de variable :  $\theta_b = \theta + \pi/2$  pour se ramener à une intégrale avec un sinus, qui définit la fonction de Bessel de premier type et d'ordre 0 :

$$\zeta(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\zeta}(k, t) k \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{ikr \sin(\theta_b)} d\theta_b \right) dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\zeta}(k, t) J_0(kr) k dk. \quad (\text{C.8})$$

C'est cette intégrale unidimensionnelle que nous calculons numériquement pour obtenir le champ d'onde dans les simulations. Dans la figure 3.15, le champ d'onde est représenté sur un carré de  $6 \times 6 \text{ cm}^2$  avec un pas de réseau de  $0,33 \text{ mm}$ . Tous les résultats observés dans l'expérience et présentés à la section 3.3.1 (forte corrélation et retard de l'onde retournée, anticorrélation après convergence, etc.) sont retrouvés à partir du film de la simulation. (voir diagramme de corrélation issu des simulations figure 4.7).

Insistons sur le fait que le seul ingrédient rattachant cette simulation au cas spécifique des ondes de surface est la relation de dispersion  $\omega_0(k)$  utilisée dans l'équation (4.38). Elle est ainsi adaptable à tout type d'onde de la catégorie  $\mathcal{H}$  en choisissant la relation de dispersion adéquate.



---

## Choc de Potentiel de Schrödinger et discontinuité

---

Cette annexe présentera quelques éléments de calculs permettant de montrer l'effet d'un choc (temporel) de potentiel pour une onde de Schrödinger.

Le problème mathématique (et physique pour le calcul de la solution du choc de potentiel pour des ondes de matière) vient de la discontinuité éventuelle du potentiel "allumé" au temps où il est allumé.

### D.1 Discontinuité de $\psi$

Montrons par l'absurde que  $\psi$  est discontinue en  $t_c$ . Supposons  $\psi$  est continue en  $t_c$ . Pour simplifier, admettons qu'il en va de même pour les dérivées spatiales de  $\psi$ . De façon analogue que calcul de la discontinuité de la dérivée pour le MTI sur onde classique (voir équation (4.51)), nous intégrons l'équation (4.68) entre deux instants entourant le choc :

$$\int_{t_c-\epsilon}^{t_c+\epsilon} \left[ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - H_s \psi \right] dt = \tau V_c(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t_c), \quad (\text{D.1})$$

où  $\epsilon$  est un réel strictement positif. En supposant  $\tilde{\psi}$  continue proche de  $t_{ITM}$ , on peut majorer l'intégrale du deuxième terme du membre de gauche :

$$\left| \int_{t_c-\epsilon}^{t_c+\epsilon} [H_s \psi] dt \right| < 2\epsilon \|H_s \psi\|_\infty. \quad (\text{D.2})$$

où  $\|H_s \psi\|_\infty$  est la norme infinie de  $H_s \psi$  sur un intervalle de temps contenant  $[t_c - \epsilon, t_c + \epsilon]$ , qui est bien définie car on a supposé  $\psi$  et ses dérivées spatiales (et donc  $H_s \psi$ ) continus en temps. On obtient donc en prenant la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0 :

$$i\hbar \left( \psi(\vec{r}, t_c^+) - \psi(\vec{r}, t_c^-) \right) = \tau V_c(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t_c). \quad (\text{D.3})$$

Donc  $\psi$  est discontinue en  $t_c$  si elle n'est pas nulle en cet instant.

Il se pose alors un problème de définition dans l'équation (4.68) car le produit de la distribution de Dirac par une fonction discontinue n'est pas défini. Dans le cas qui nous intéresse, on voit bien le problème : si la fonction test  $\psi$  est discontinue en  $t_c$ , quelle valeur associer à  $\int \delta(t - t_c) \psi dt =$

$\psi(\vec{r}, t_c)$ , issu du produit avec la distribution de Dirac? (Faut-il choisir  $\psi(\vec{r}, t_c^+)$ ,  $\psi(\vec{r}, t_c^-)$ , la moyenne des deux?)

## D.2 Contournement du problème

Dans le cas qui nous intéresse, il est possible de contourner le problème en réalisant un calcul approché. Le choc de potentiel que nous considérons correspond à l'allumage pendant une durée très courte d'un potentiel extérieur intense. La modélisation par une fonction delta de Dirac peut donc être remplacée par une modélisation par une fonction porte très étroite entre deux instants  $t_c^-$  et  $t_c^+$  :

$$H_c(\vec{r}, t) = \frac{\tau}{\delta t} V_c \theta(t - t_c^-) \theta(t_c^+ - t), \quad (\text{D.4})$$

où  $H_c$  désigne le hamiltonien dépendant du temps correspondant au choc de potentiel et  $\delta t = t_c^+ - t_c^-$  est la durée du choc. Bien-sûr, la distribution de Dirac est directement retrouvée dans la limite  $\delta t \rightarrow 0$ . Pendant la durée du choc, la fonction d'onde est régie par l'équation approchée :

$$\forall t \in [t_c^-, t_c^+], i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_s \psi + \frac{\tau}{\delta t} V_c \psi \approx \frac{\tau}{\delta t} V_c \psi, \quad (\text{D.5})$$

où on néglige l'effet du hamiltonien statique devant celui du potentiel extérieur intense pendant le choc. Ce résultat conduit par intégration à :

$$\psi(\vec{r}, t_c^+) = \psi(\vec{r}, t_c^-) e^{-i \frac{\tau V_c(\vec{r})(t_c^+ - t_c^-)}{\hbar \delta t}}. \quad (\text{D.6})$$

Le passage à la limite  $\delta t \rightarrow 0$  conduit à la relation de passage :

$$\psi(\vec{r}, t_c^+) = \psi(\vec{r}, t_c^-) e^{-i \frac{\tau V_c(\vec{r})}{\hbar}}. \quad (\text{D.7})$$

où  $t_c^-$  et  $t_c^+$  renvoient désormais aux limites en  $t_c$ , respectivement par valeurs inférieures et supérieures.

---

 Refroidissement par dissipation
 

---

Cette annexe présentera le choc obtenu par une modification intense mais pendant un temps notable, de la dissipation.

De manière analogue au contrôle temporel de la vitesse de propagation des ondes dans le milieu considéré pour le MTI, nous considérons ici un système ondulatoire dont on contrôle dans le temps le coefficient de dissipation caractérisant le milieu. Dans l'espace de Fourier spatial, le champ d'onde est alors gouverné par une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + f(t)\alpha(\vec{k})\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t) + \omega^2(\vec{k})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0, \quad (\text{E.1})$$

où  $f(t)$  gouverne l'amplitude du coefficient de dissipation au cours du temps. Supposons ici que la dissipation soit portée à une valeur très élevée et qu'elle y reste pendant un temps notable :

$$f(t) = \Theta(t - t_0)\Theta(t_1 - t), \quad (\text{E.2})$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside et  $t_1 > t_0$ . Si  $\alpha(\vec{k}) \gg \omega(\vec{k})$ , le champ d'onde est approximativement gouverné pendant toute la durée du choc de dissipation par :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) \approx -\alpha\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t), \quad (\text{E.3})$$

d'où,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_0)e^{-\alpha(\vec{k})t} \\ \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\phi}(\vec{k}, t_0) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_0)(1 - e^{-\alpha(\vec{k})t}). \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Dans la limite où  $\alpha(\vec{k})$  tend vers l'infini ( $\alpha(\vec{k}) \gg \omega(\vec{k})$  et  $\alpha(\vec{k}) \gg (t - t_0)^{-1}$ ), on obtient donc par cette opération :

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) \approx \tilde{\phi}(\vec{k}, t_0), \quad (\text{E.5})$$

ce qui correspond à un "gel" du champ d'onde à sa valeur avant le choc. À  $t = t_1$ , la dissipation est portée de nouveau à 0. La condition initiale en cet instant est, d'après ce que nous venons de

montrer :

$$\left( \tilde{\phi}(\vec{k}, t_1), \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_1) \right) = \left( \tilde{\phi}(\vec{k}, t_0), 0 \right). \quad (\text{E.6})$$

Comme précédemment, cet état initial peut se décomposer en deux :

$$\left( \tilde{\phi}(\vec{k}, t_0), 0 \right) = \frac{1}{2} \left( \tilde{\phi}(\vec{k}, t_0), \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_0) \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{\phi}(\vec{k}, t_0), -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\vec{k}, t_0) \right), \quad (\text{E.7})$$

et comme précédemment, il conduit de manière évidente à :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \phi_i(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \phi_i(\vec{r}, t_0 + t_1 - t). \quad (\text{E.8})$$

Cette procédure et ce résultat sont présentées pour le système modèle de l'échelle de perroquet à la figure 4.9. Le même résultat que pour un choc court de (forte) dissipation, c'est-à-dire une diminution de moitié de l'amplitude initiale accompagnée d'une génération d'une onde retournée (également d'amplitude moitié), est donc également obtenu pour un choc long devant la période de l'onde.

---

Éléments de théorie de Floquet

---

Cette annexe présentera quelques éléments de la théorie de Floquet appliquée aux équations de Hill et en particulier à l'équation de Mathieu.

Nous considérons en toute généralité un système gouverné par l'équation de Hill :

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + a(x)f(x) = 0, \quad (\text{F.1})$$

où  $a(x)$  est une fonction périodique à valeurs réelles, dont la période est notée  $T$ . D'après le théorème de Cauchy, appliquée à cette équation différentielle linéaire d'ordre 2, il existe une unique solution  $f_1$  vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} f_1(0) = 1 \\ \frac{df_1}{dx}(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

De même, il existe une unique solution  $f_2$  vérifiant :

$$\begin{cases} f_2(0) = 0 \\ \frac{df_2}{dx}(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

On définit la matrice des solutions fondamentales à  $T$  par :

$$B = \begin{pmatrix} f_1(T) & f_2(T) \\ \frac{df_1}{dx}(T) & \frac{df_2}{dx}(T) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.4})$$

La théorie de Floquet [109, 111] donne que la stabilité des solutions de l'équation est déterminée par les valeurs propres de  $B$ . Soit  $W(t)$  le wronskien de l'équation défini par :

$$W(t) = f_1(x)\frac{df_2}{dx}(x) - f_2(x)\frac{df_1}{dx}(x). \quad (\text{F.5})$$

On montre facilement que la dérivée de  $W(t)$  est nulle d'où :

$$\det(B) = W(T) = W(0) = 1. \quad (\text{F.6})$$

Le polynôme caractéristique  $\chi$  de  $B$  s'écrit donc :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(B) + 1, \quad (\text{F.7})$$

et ses valeurs propres ont donc pour expression générale :

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(B) + \pm \sqrt{\operatorname{tr}(B)^2 - 4}}{2}. \quad (\text{F.8})$$

La théorie de Floquet nous permet d'affirmer que les solutions de l'équation de Hill 6.1 sont instables si  $|\lambda| > 1$ , ce qui correspond à  $|\operatorname{tr}(B)| > 2$ . De plus, la valeur de  $\operatorname{tr}(B)$  détermine la forme exacte des solutions générales selon :

- if  $\operatorname{tr}(B) > 2$

$$f(x) = c_1 e^{\mu x} p_1(x) + c_2 e^{-\mu x} p_2(x), \quad (\text{F.9})$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ , et  $p_1$  et  $p_2$  sont des fonctions complexes T-périodiques.

- if  $\operatorname{tr}(B) = 2$

$$f(x) = (c_1 + x c_2) p_1(x) + c_2 p_2(x), \quad (\text{F.10})$$

où  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ , et  $p_1$  et  $p_2$  sont des fonctions complexes T-périodiques.

- if  $-2 < \operatorname{tr}(B) < 2$

$$f(x) = c_1 \operatorname{Re} \left( e^{i\sigma x} p(x) \right) + c_2 \operatorname{Im} \left( e^{i\sigma x} p(x) \right), \quad (\text{F.11})$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ , et  $p$  est une fonction complexe T-périodique.

- if  $\operatorname{tr}(B) = -2$

$$f(x) = (c_1 + x c_2) q_1(x) + c_2 q_2(x), \quad (\text{F.12})$$

où  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ , et  $q_1$  et  $q_2$  sont des fonctions complexes 2T-périodiques.

- if  $\operatorname{tr}(B) < -2$

$$f(x) = c_1 e^{\mu x} q_1(x) + c_2 e^{-\mu x} q_2(x), \quad (\text{F.13})$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ , et  $q_1$  et  $q_2$  sont des fonctions complexes 2T-périodiques.

Ces différentes solutions  $f$  sont les solutions générales complexes de l'équation de Hill (6.1). Par linéarité de l'équation, les solutions générales à valeurs réelles de l'équation (6.1) sont données par les parties réelles des expressions ci-dessus. D'une manière générale on cherchera donc des solutions complexes de la forme  $e^{\mu x + i\omega x} p(x)$ , où  $\mu$  et  $\omega$  sont réels et  $p(x)$  est une fonction T-périodique à valeurs complexes. Les solutions réelles correspondent simplement à la partie réelle d'une combinaison linéaire de deux fonctions de cette forme telles que si l'une fait intervenir les coefficients  $\mu$  et  $\omega$ , l'autre fait intervenir les coefficients  $-\mu$  et  $-\omega$ . Ceci exclut les cas particuliers correspondant à  $|\operatorname{tr}(B)| = 2$ .

Cependant, dans le cas particulier de l'équation de Mathieu (5.21) (où  $a(x)$  est la somme d'une constante et d'une sinusoïde) au moins, ces valeurs particulières de la trace de  $B$  peuvent être raisonnablement exclues dans la description des phénomènes physiques associés. En effet, cette situation particulière correspond uniquement, lorsqu'on varie continuellement les paramètres physiques de l'équation, à la limite de stabilité (au sens de non divergence à temps longs) des solutions. Ces valeurs particulières décrivent des courbes d'épaisseur nulle dans l'espace à deux dimensions des paramètres de l'équation de Mathieu. Expérimentalement, ce comportement n'est donc pas observable pour deux raisons : il est impossible de fixer les valeurs des paramètres avec une erreur nulle et l'effet de la dissipation (essentiellement d'origine visqueuse pour les ondes de surface), négligée dans ce modèle idéal, fait disparaître ce cas particulier en introduisant un facteur multiplicatif en

exponentielle décroissante qui domine sur la croissance linéaire, voir la section 5.4.1.





- [1] J d'Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. *Hist. Ac. Sci. Berlin*, 1747(3) :1749.
- [2] Roshdi Rashed. Le «discours de la lumière» d'Ibn al-Haytham (Alhazen) : Traduction française critique. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 21(3) :197–224, 1968.
- [3] Dennis Gabor et al. A new microscopic principle. *Nature*, 161(4098) :777–778, 1948.
- [4] N Bojarski. A survey of the near-field far-field inverse scattering inverse source integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30(5) :975–979, 1982.
- [5] Amnon Yariv. Phase conjugate optics and real-time holography [invited paper]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 14(9) :650–660, 1978.
- [6] Guang S He. Optical phase conjugation : principles, techniques, and applications. *Progress in Quantum Electronics*, 26(3) :131–191, 2002.
- [7] MC Gower. The physics of phase conjugate mirrors. *Progress in Quantum Electronics*, 9(2) :101–147, 1984.
- [8] Peter Günter. Holography, coherent light amplification and optical phase conjugation with photorefractive materials. *Physics Reports*, 93(4) :199–299, 1982.
- [9] Andrei Petrovich Brysev, LM Krutyanskii, and Vladimir L Preobrazhenskii. Wave phase conjugation of ultrasonic beams. *Physics-Uspekhi*, 41(8) :793, 1998.
- [10] Qi Zhang. *Théorie et simulation de la conjugaison de phase magnéto-acoustique*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I, 2008.
- [11] Fedor Vasil'evich Bunkin, Dmitrii Vasil'evich Vlasov, and Yu A Kravtsov. Problem of reversal of an acoustic wavefront and amplification of the reversed wave. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 11(5) :687, 1981.
- [12] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5) :555–566, 1992.
- [13] Francois Wu, J-L Thomas, and Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. il. experimental results. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5) :567–578, 1992.
- [14] Didier Cassereau and Mathias Fink. Time-reversal of ultrasonic fields. iii. theory of the closed time-reversal cavity. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5) :579–592, 1992.
- [15] Mathias Fink. Time-reversal waves and super resolution. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 124, page 012004. IOP Publishing, 2008.

- [16] Claire Prada. *Retournement temporel des ondes ultrasonores. Application à la focalisation*. PhD thesis, Université Paris VII, 1991.
- [17] Philippe Roux. *Application des miroirs acoustiques à retournement temporel à la focalisation dans un guide d'onde et à la caractérisation d'écoulements hydrodynamiques*. PhD thesis, université Paris 6, 1997.
- [18] Julien De La Gorgue De Rosny. *Milieux réverbérants et réversibilité*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- [19] Arnaud Derode. *La cohérence des ondes ultrasonores en milieu hétérogène*. PhD thesis, Université Paris 07, 1994.
- [20] Arnaud Tourin. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. PhD thesis, Université Paris VII, 1999.
- [21] Jean-Pierre Fouque, Josselin Garnier, and Knut Sølna. Time reversal super resolution in randomly layered media. *Wave Motion*, 43(8) :646–666, 2006.
- [22] Carsten Draeger and Mathias Fink. One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2d-silicon cavity. *Physical Review Letters*, 79(3) :407, 1997.
- [23] Habib Ammari, Elie Bretin, Josselin Garnier, and Abdul Wahab. Time-reversal algorithms in viscoelastic media. *European Journal of Applied Mathematics*, 24(04) :565–600, 2013.
- [24] Geoffroy Lerosey. *Retournement temporel d'ondes électromagnétiques et application à la télécommunication en milieux complexes*. PhD thesis, ESPCI ParisTECH, 2006.
- [25] A Przadka, S Feat, P Petitjeans, V Pagneux, A Maurel, and M Fink. Time reversal of water waves. *Physical review letters*, 109(6) :064501, 2012.
- [26] Amin Chabchoub and Mathias Fink. Time-reversal generation of rogue waves. *Physical review letters*, 112(12) :124101, 2014.
- [27] André Nachbin, Jean-Pierre Fouque, and Josselin Garnier. Time reversal for dispersive waves in random media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64(5) :1810–1838, 2004.
- [28] Jean-Pierre Fouque, Josselin Garnier, Juan Carlos Munoz Grajales, and André Nachbin. Time reversing solitary waves. *Physical review letters*, 92(9) :094502, 2004.
- [29] Mehmet Fatih Yanik and Shanhui Fan. Time reversal of light with linear optics and modulators. *Physical review letters*, 93(17) :173903, 2004.
- [30] Stefano Longhi. Light stopping and time reversal in dynamic nano-photonics structures via Bloch oscillations. In *Lasers and Electro-Optics, 2007 and the International Quantum Electronics Conference. CLEOE-IQEC 2007. European Conference on*, pages 1–1. IEEE, 2007.
- [31] Sunil Sandhu, ML Povinelli, and Shanhui Fan. Stopping and time reversing a light pulse using dynamic loss tuning of coupled-resonator delay lines. *Optics letters*, 32(22) :3333–3335, 2007.
- [32] Andrii V Chumak, Vasil S Tiberkevich, Alexy D Karenowska, Alexander A Serga, John F Gregg, Andrei N Slavin, and Burkard Hillebrands. All-linear time reversal by a dynamic artificial crystal. *Nature communications*, 1 :141, 2010.
- [33] Eli Yablonovitch. Self-phase modulation of light in a laser-breakdown plasma. *Physical Review Letters*, 32(20) :1101, 1974.
- [34] JT Mendonça and PK Shukla. Time refraction and time reflection : two basic concepts. *Physica Scripta*, 65(2) :160, 2002.
- [35] Dentcho A Genov, Shuang Zhang, and Xiang Zhang. Mimicking celestial mechanics in metamaterials. *Nature Physics*, 5(9) :687–692, 2009.

- [36] Thomas G Philbin, Chris Kuklewicz, Scott Robertson, Stephen Hill, Friedrich König, and Ulf Leonhardt. Fiber-optical analog of the event horizon. *Science*, 319(5868) :1367–1370, 2008.
- [37] N Westerberg, S Cacciatori, F Belgiorno, F Dalla Piazza, and D Faccio. Experimental quantum cosmology in time-dependent optical media. *New Journal of Physics*, 16(7) :075003, 2014.
- [38] Amr Shaltout, Alexander Kildishev, and Vladimir Shalaev. Time-varying metasurfaces and lorentz non-reciprocity. *Optical Materials Express*, 5(11) :2459–2467, 2015.
- [39] Moti Fridman, Alessandro Farsi, Yoshitomo Okawachi, and Alexander L Gaeta. Demonstration of temporal cloaking. *Nature*, 481(7379) :62–65, 2012.
- [40] Paul Kinsler and Martin W McCall. Cloaks, editors, and bubbles : applications of spacetime transformation theory. *Annalen der Physik*, 526(1-2) :51–62, 2014.
- [41] Jorge R Zurita-Sánchez and P Halevi. Resonances in the optical response of a slab with time-periodic dielectric function. *Physical Review A*, 81(5) :053834, 2010.
- [42] Laure Saint-Raymond. *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [43] Joseph Loschmidt. *Über den Zustand des Wärmegleichgewichtes eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft : I [-IV]*. aus der KK Hof-und Staatsdruckerei, 1876.
- [44] L Boltzmann. Über das wärmegleichgewicht von gasen, auf welche äussere kräfte wirken. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 2 :1–30, 1875.
- [45] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle*. Librairie Armand Colin, 1972.
- [46] Ludwig Boltzmann. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. In *Kinetische Theorie II*, pages 115–225. Springer, 1970.
- [47] Ronald J DiPerna and Pierre-Louis Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability. *Annals of Mathematics*, pages 321–366, 1989.
- [48] François Golse. Fluid dynamic limits of kinetic equations ii : Convergence proofs for the Boltzmann equation. *Communications on pure and applied mathematics*, 46 :667–753, 1993.
- [49] Claude Bardos, François Golse, and David Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. i. formal derivations. *Journal of statistical physics*, 63(1-2) :323–344, 1991.
- [50] François Golse and Laure Saint-Raymond. The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 91(5) :508–552, 2009.
- [51] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, and Laure Saint-Raymond. From hard sphere dynamics to the Stokes-Fourier equations : An l2 analysis of the Boltzmann-Grad limit. to appear, *Annals of PDEs*, October 2016.
- [52] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, and Laure Saint-Raymond. From hard spheres dynamics to the Stokes-Fourier equations : an l2 analysis of the Boltzmann-Grad limit. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(7) :623–627, 2015.
- [53] Harold Grad. Principles of the kinetic theory of gases. In *Thermodynamik der Gase/Thermodynamics of Gases*, pages 205–294. Springer, 1958.
- [54] Oscar E Lanford III. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical systems, theory and applications*, pages 1–111. Springer, 1975.

- [55] John Martin, Bertrand Georgeot, and DL Shepelyansky. Cooling by time reversal of atomic matter waves. *Physical review letters*, 100(4) :044106, 2008.
- [56] Erwin L Hahn. Spin echoes. *Physical review*, 80(4) :580, 1950.
- [57] John Martin, Bertrand Georgeot, and DL Shepelyansky. Time reversal of Bose-Einstein condensates. *Physical review letters*, 101(7) :074102, 2008.
- [58] Arif Ullah and MD Hoogerland. Experimental observation of Loschmidt time reversal of a quantum chaotic system. *Physical Review E*, 83(4) :046218, 2011.
- [59] Michael Faraday. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 121 :299–340, 1831.
- [60] Dirk Pietschmann, Ralf Stannarius, Christian Wagner, and Thomas John. Faraday waves under time-reversed excitation. *Physical review letters*, 110(9) :094503, 2013.
- [61] Augustin Louis Cauchy. *Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles*, chapter 170, pages 17–33. Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1842.
- [62] Sof'ja V Kovalevskaja. *Zur theorie der partiellen Differentialgleichungen*. PhD thesis, Fakultät zu Göttingen, 1874.
- [63] Guillaume Bal and Leonid Ryzhik. Time reversal and refocusing in random media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(5) :1475–1498, 2003.
- [64] Hubert Ammann and Nelson Christensen. Delta kick cooling : A new method for cooling atoms. *Physical review letters*, 78(11) :2088, 1997.
- [65] CD Murphy, R Trines, J Vieira, AJW Reitsma, R Bingham, JL Collier, EJ Divall, PS Foster, CJ Hooker, AJ Langley, et al. Evidence of photon acceleration by laser wake fields. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 13(3) :033108, 2006.
- [66] JR Reyes-Ayona and P Halevi. Observation of genuine wave vector ( $k$  or  $\beta$ ) gap in a dynamic transmission line and temporal photonic crystals. *Applied Physics Letters*, 107(7) :074101, 2015.
- [67] George Green. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 44 :356–374, 1852.
- [68] Gabriel Barton. *Elements of Green's functions and propagation : potentials, diffusion, and waves*. Oxford University Press, 1989.
- [69] W Stuart Edwards and S Fauve. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 278 :123–148, 1994.
- [70] Daniel M Harris and John WM Bush. Generating uniaxial vibration with an electrodynamic shaker and external air bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 334 :255–269, 2015.
- [71] Frédéric Moisy, Marc Rabaud, and Kévin Salsac. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46(6) :1021–1036, 2009.
- [72] Etienne-Jules Marey. *La méthode graphique dans les sciences expérimentales et principalement en physiologie et en médecine*. G. Masson, 1878.
- [73] Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1916.
- [74] JW Strutt and Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. London Math. Soc.*, 14(1) :8, 1883.

- [75] Geoffrey Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 1065-201, pages 192–196. The Royal Society, 1950.
- [76] Christiaan Huygens. Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. tome dix-neuvième. *La Haye, M. Nijhoff*, 19, 1937.
- [77] Augustin Jean Fresnel. Premier mémoire sur la diffraction de la lumière, 1815.
- [78] Gustav Kirchhoff. Zur theorie der Lichtstrahlen. *Annalen der Physik*, 254(4) :663–695, 1883.
- [79] JT Mendonça, AM Martins, and A Guerreiro. Temporal beam splitter and temporal interference. *Physical Review A*, 68(4) :043801, 2003.
- [80] Yuzhe Xiao, Drew N Maywar, and Govind P Agrawal. Reflection and transmission of electromagnetic waves at a temporal boundary. *Optics letters*, 39(3) :574–577, 2014.
- [81] JB Pendry. Time reversal and negative refraction. *Science*, 322(5898) :71–73, 2008.
- [82] Mohamed A Salem and Christophe Caloz. Space-time cross-mapping and application to wave scattering. *arXiv preprint arXiv :1504.02012*, 2015.
- [83] Claude Elwood Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1) :10–21, 1949.
- [84] Aviran Halstuch, Avishay Shamir, Amiel A Ishaaya, and Yonatan Sivan. Short pulse generation based on ultrafast transient Bragg gratings. In *Optical MEMS and Nanophotonics (OMN), 2015 International Conference on*, pages 1–2. IEEE, 2015.
- [85] J-L Thomas and Mathias A Fink. Ultrasonic beam focusing through tissue inhomogeneities with a time reversal mirror : application to transskull therapy. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 43(6) :1122–1129, 1996.
- [86] Mickaël Tanter, Jean-Louis Thomas, François Coulouvrat, and Mathias Fink. Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics. *Physical Review E*, 64(1) :016602, 2001.
- [87] Louis De Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Migration - université en cours d'affectation, November 1924.
- [88] George P Thomson and Andrew Reid. Diffraction of cathode rays by a thin film. *Nature*, 119 :890, 1927.
- [89] Markus Arndt, Olaf Nairz, Julian Vos-Andreae, Claudia Keller, Gerbrand Van der Zouw, and Anton Zeilinger. Wave-particle duality of c60 molecules. *Nature*, 401(6754) :680–682, 1999.
- [90] Guillaume Labeyrie, Tomasz Karpiuk, Jean-François Schaff, Benoît Grémaud, Christian Miniatura, and Dominique Delande. Enhanced backscattering of a dilute Bose-Einstein condensate. *EPL (Europhysics Letters)*, 100(6) :66001, 2012.
- [91] Kilian Müller, Jérémie Richard, Valentin V Volchkov, Vincent Denechaud, Philippe Bouyer, Alain Aspect, and Vincent Josse. Suppression and revival of weak localization through control of time-reversal symmetry. *Physical review letters*, 114(20) :205301, 2015.
- [92] B. Issenmann. *Déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007.
- [93] Wolfgang Christian. Wave machine model. [www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=1](http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=1) November 2010.
- [94] Menghan Xu, Haifeng Liu, Hui Zhao, and Weifeng Li. How to decrease the viscosity of suspension with the second fluid and nanoparticles? *Scientific reports*, 3, 2013.

- [95] Willis M Winslow. Method and means for translating electrical impulses into mechanical force, March 25 1947. US Patent 2,417,850.
- [96] Weijia Wen, Xianxiang Huang, Shihe Yang, Kunquan Lu, and Ping Sheng. The giant electrorheological effect in suspensions of nanoparticles. *Nature Materials*, 2(11) :727–730, 2003.
- [97] Jacob Rabinow. The magnetic fluid clutch. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 67(2) :1308–1315, 1948.
- [98] Richard L Abrams and Richard C Lind. Degenerate four-wave mixing in absorbing media. *Opt. Lett*, 2(4) :94–96, 1978.
- [99] DL Bobroff. Coupled-modes analysis of the phonon-photon parametric backward-wave oscillator. *Journal of Applied Physics*, 36(5) :1760–1769, 1965.
- [100] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, 2003.
- [101] RB Thompson and CF Quate. Nonlinear interaction of microwave electric fields and sound in linbo3. *Journal of Applied Physics*, 42(3) :907–919, 1971.
- [102] RW Hellwarth. Generation of time-reversed wave fronts by nonlinear refraction\*. *JOSA*, 67(1) :1–3, 1977.
- [103] AP Brysev, FV Bunkin, DV Vlasov, LM Krutyanskii, VL Preobrazhenskii, and AD Stakhovskii. Parametric phase conjugation of an ultrasonic wave in a ferrite, 1988.
- [104] Antonin Eddi. *Marcheurs, Dualité onde-particule et Mémoire de chemin*. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2011.
- [105] Suzie Protiere. *Gouttes rebondissantes : une association onde-particule à échelle macroscopique*. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2007.
- [106] Stéphane Douady. Experimental study of the faraday instability. *Journal of fluid mechanics*, 221 :383–409, 1990.
- [107] Norman William McLachlan. *Theory and application of Mathieu functions*, volume 4. Dover New York, 1964.
- [108] T Brooke Benjamin and F Ursell. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 505–515, 1954.
- [109] Jianke Yang. [http://www.emba.uvm.edu/~jxyang/teaching/Floquet\\_theory\\_Ward.pdf](http://www.emba.uvm.edu/~jxyang/teaching/Floquet_theory_Ward.pdf).
- [110] Krishna Kumar and Laurette S Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 279 :49–68, 1994.
- [111] Richard H Rand. Lecture notes on nonlinear vibrations. [ecommons.cornell.edu/bitstream/handle/1813/28989/NonlinearVibrations\\_ver53.pdf?sequence=1](http://ecommons.cornell.edu/bitstream/handle/1813/28989/NonlinearVibrations_ver53.pdf?sequence=1), 2012.
- [112] N Rojas, M Argentina, E Cerda, and E Tirapegui. Ondes non linéaires dans l’expérience de Faraday. *Résumés des exposés de la 12e Rencontre du Non-Linéaire Paris 2009*, pages 189–194, 2009.
- [113] F Dias, AI Dyachenko, and Vladimir E Zakharov. Theory of weakly damped free-surface flows : a new formulation based on potential flow solutions. *Physics Letters A*, 372(8) :1297–1302, 2008.
- [114] John Bechhoefer and Brad Johnson. A simple model for Faraday waves. *arXiv preprint patt-sol/9605002*, 1996.
- [115] J Beyer and R Friedrich. Faraday instability : Linear analysis for viscous fluids. *Physical Review E*, 51(2) :1162, 1995.

- [116] Peilong Chen and Jorge Viñals. Amplitude equation and pattern selection in Faraday waves. *Physical Review E*, 60(1) :559, 1999.
- [117] John Bechhoefer, Valerie Ego, Sebastien Manneville, and Brad Johnson. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 288 :325–350, 1995.
- [118] Antonin Eddi, Eric Sultan, Julien Moukhtar, Emmanuel Fort, Maurice Rossi, and Yves Couder. Information stored in Faraday waves : the origin of a path memory. *Journal of Fluid Mechanics*, 674 :433–463, 2011.
- [119] George William Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta mathematica*, 8(1) :1–36, 1886.
- [120] Juan Ramón Sanmartín Losada. O botafumeiro : parametric pumping in the middle age. *American Journal of Physics*, 52 :937–945, 1984.
- [121] Franz Melde. Über die Erregung stehender Wellen eines fadenförmigen Körpers. *Annalen der Physik*, 185(2) :193–215, 1860.
- [122] Felix Bloch. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. *Zeitschrift für Physik*, 52(7-8) :555–600, 1929.
- [123] Keivan Esfarjani. Periodic systems and the Bloch theorem. [http://rci.rutgers.edu/~ke116/Teaching\\_files/bloch.pdf](http://rci.rutgers.edu/~ke116/Teaching_files/bloch.pdf).
- [124] Charlotte M Fabre, Pierrick Cheiney, Giovanni Luca Gattobigio, Francois Vermersch, Stéphane Faure, Renaud Mathevet, Thierry Lahaye, and David Guéry-Odelin. Realization of a distributed Bragg reflector for propagating guided matter waves. *Physical review letters*, 107(23) :230401, 2011.
- [125] Sylvain Nascimbene, Nathan Goldman, Nigel R Cooper, and Jean Dalibard. Dynamic optical lattices of subwavelength spacing for ultracold atoms. *Physical review letters*, 115(14) :140401, 2015.
- [126] John Lekner. Light in periodically stratified media. *JOSA A*, 11(11) :2892–2899, 1994.
- [127] Lord Rayleigh. On the reflection of light from a regularly stratified medium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 93(655) :565–577, 1917.
- [128] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures : electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, 2003.
- [129] AG Davies and AD Heathershaw. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 144 :419–443, 1984.
- [130] AG Davies. The reflection of wave energy by undulations on the seabed. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 6(4) :207–232, 1982.
- [131] Elisabeth Guazzelli, Vincent Rey, and Max Belzons. Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *Journal of Fluid Mechanics*, 245 :301–317, 1992.
- [132] Gaston Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 12, pages 47–88, 1883.
- [133] HA Kramers. Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfelde. *Physica*, 2(1) :483–490, 1935.
- [134] Émile Mathieu. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13 :137–203, 1868.
- [135] Charles Elachi. Waves in active and passive periodic structures : A review. *Proceedings of the IEEE*, 64(12) :1666–1698, 1976.

- [136] Charlotte Fabre. *Miroirs de Bragg pour ondes de matière et apport de la supersymétrie aux potentiels exponentiels*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2012.
- [137] AY Cho, A Yariv, and P Yeh. Observation of confined propagation in Bragg waveguides. *Applied Physics Letters*, 30(9) :471–472, 1977.
- [138] D Holberg and K Kunz. Parametric properties of fields in a slab of time-varying permittivity. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(2) :183–194, 1966.
- [139] RS MacKay and PG Saffman. Stability of water waves. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, number 1830-406, pages 115–125. The Royal Society, 1986.
- [140] ES Cassedy and AA Oliner. Dispersion relations in time-space periodic media : part i—stable interactions. *Proceedings of the IEEE*, 51(10) :1342–1359, 1963.
- [141] ES Cassedy. Dispersion relations in time-space periodic media part ii—unstable interactions. *Proceedings of the IEEE*, 55(7) :1154–1168, 1967.
- [142] Jorge R Zurita-Sánchez, P Halevi, and Juan C Cervantes-Gonzalez. Reflection and transmission of a wave incident on a slab with a time-periodic dielectric function  $\epsilon(t)$ . *Physical Review A*, 79(5) :053821, 2009.
- [143] MA Salem and C Caloz. Temporal photonic crystals : Causality versus periodicity. In *Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2015 International Conference on*, pages 490–493. IEEE, 2015.
- [144] H Wittmer Müller, H Wittmer, C Wagner, J Albers, and K Knorr. Analytic stability theory for Faraday waves and the observation of the harmonic surface response. *Physical review letters*, 78(12) :2357, 1997.
- [145] Nadège Kaina. *Métamatériaux localement résonants : cristaux photoniques et phononiques sub-longueur d’onde*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2016.
- [146] Edward Mills Purcell. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. *Physical Review*, 69 :681, 1946.
- [147] Adel Rahmani and Frédérique de Fornel. *Emission photonique en espace confiné*. Eyrolles, 2000.
- [148] Louis Georges Gouy. Sur la propagation anormale des ondes. *Ann. Chim. Phys*, 24 :145–213, 1891.
- [149] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der physik*, 322(10) :891–921, 1905.
- [150] Krzysztof Sacha and Dominique Delande. Anderson localization in the time domain. *arXiv preprint arXiv :1603.05827*, 2016.
- [151] Ulf Leonhardt and Thomas G Philbin. Transformation optics and the geometry of light. *Progress in Optics*, 53 :69–152, 2009.
- [152] Georges Lemaître. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. In *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, volume 47, pages 49–59, 1927.
- [153] Erwin Schrödinger. The proper vibrations of the expanding universe. *Physica*, 6(7) :899–912, 1939.
- [154] J. Bush. Lecture notes on interfacial phenomena. MIT open courses, <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-357-interfacial-phenomena-fall-2010/lectu>



- 
- [155] SH Hansen, S Hørlück, D Zauner, P Dimon, C Ellegaard, and SC Creagh. Geometric orbits of surface waves from a circular hydraulic jump. *Physical Review E*, 55(6) :7048, 1997.