Thèse de doctorat

de l'Université Sorbonne Paris Cité

Préparée à l'Université Paris Diderot

Ecole doctorale ED400 Savoirs Scientifiques

SPHERE & LDAR

Pluralité des concepts liés aux unités de mesure

Liens entre histoire des sciences et didactique,

le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens

Par Charlotte de Varent

Thèse de doctorat de Didactique et d'Histoire des mathématiques

Dirigée par Christine Proust & Nicolas Décamp

Présentée et soutenue publiquement à Paris le 27 Octobre 2018

Président du jury :	Artigue, Michèle / Professeure des Universités émérite / Université Paris Diderot
Rapporteur :	Theis, Laurent / Professeur des Universités / Université de Sherbrooke
Rapporteur :	Tournès, Dominique / Professeur des Universités / Université de la Réunion
Examinateurs :	Chambris, Christine / Maîtresse de Conférences / Université de Cergy-Pontoise,
	Husson, Matthieu / Chargé de recherche / Observatoire de Paris
Directeur de thèse :	Proust, Christine / Directrice de recherche / Université Paris Diderot
Co-directeur de thèse :	Décamp, Nicolas / Maître de conférences / Université Paris Diderot

Titre : Pluralité des concepts liés aux unités de mesure
Liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens

Résumé : Cette thèse traite des apports réciproques de la recherche en histoire des mathématiques anciennes (Cunéiforme, Chinois, Sanskrit) et de la recherche en didactique ; sur le sujet des unités de mesure. Une analyse historique de tablettes paléo-babyloniennes de Nippur est proposée, s'appuyant sur des outils de didactique. Une analyse historico-épistémologique autour de textes anciens traitant des unités de mesure dans l'aire du carré et du rectangle est menée, et mise en lien avec les travaux de didactique de référence. Une analyse de manuels scolaires de CM2 ainsi qu'une expérimentation en classe de seconde utilisant l'histoire sont proposées, dans le cadre d'une ingénierie didactique.

Mots clefs : Histoire des mathématiques, mathématiques anciennes, Chinois, Sanskrit, Cunéiforme, unités de mesure, aire, Nippur, manuels, expérimentation, épistémologie, changement de cadre, changement de registre

Title : Plurality of concepts related to units of measurement
Links between history of science and education research, the case of the area of the square in a selection of ancient texts

Abstract : This PHD thesis deals with reciprocal contributions of research in the history of ancient mathematics (Cuneiform, Chinese, Sanskrit) and in education research; on the subject of units of measurement. A historical analysis of a selection of paleo-Babylonian tablets from Nippur is proposed, with the help of didactic tools. An epistemological analysis around ancient texts dealing with units of measurement in area of the square and rectangle is conducted, and related to the didactic reference research work. An analysis of fifth grade textbooks as well as a classroom experiment in tenth grade using history are proposed, in the framework of a didactic engineering.

Keywords : History of mathematics, ancient mathematics, Chinese, Sanskrit, Cuneiform, units of measurement, area, Nippur, textbooks, experimentation, epistemology, frame change, register change

Je dédicace cette thèse à Eleythéna, Alban, Talin

et aux enfants du monde

Remerciements

Je remercie[1] Christine Proust, ma chère directrice de thèse, pour la pédagogie avec laquelle elle m'a transmis son savoir et m'a dirigée. Je suis impressionnée de la façon dont elle arrive à expliciter des notions de recherche complexes, nuancées, nouvelles ; c'est un beau modèle de réflexion pour l'enseignement. Je la remercie pour sa patience, pour ses très nombreuses relectures, pour sa confiance et son enthousiasme, ses compliments et encouragements, pour ses sourires. Je la remercie aussi pour ses travaux passionnants, et pour sa volonté constante de créer des liens avec l'enseignement, d'appliquer et diffuser les résultats de sa recherche ; pour m'avoir permis de faire cette thèse pour laquelle elle s'est battue. Merci de m'avoir hébergée souvent à Paris : eh oui, la thèse a aussi des aspects pratiques ! Merci Christine d'avoir toujours pensé à m'aider pour l'avenir, et de m'avoir attendue quand j'ai été arrêtée. Merci enfin de m'avoir permis de créer des liens entre les notions et les personnes, en en ayant créé préalablement, par ta gentillesse.

Je remercie Nicolas Décamp, mon cher directeur de thèse, pour la finesse avec laquelle il m'a encadrée, pour la façon dont il cherche *avec* moi, pour m'avoir transmis des outils pour bien regarder. Merci pour cette approche, pour toujours observer, sans chercher ce que l'on aimerait voir. Cette éthique scientifique commune aux didacticiens et aux historiens des sciences, rend les choses si compliquées, mais aussi si belles. Merci pour avoir compris les contraintes disciplinaires de chacun. Merci Nicolas, pour ton infinie patience, pour les réponses à tous ces mails, pour avoir si bien suivi le déroulement de l'expérimentation et du reste. Merci pour le café, merci de m'avoir présentée, intégrée, à toutes ces personnes formidables, dans la douceur qui te caractérise. Toi aussi, tu es un grand créateur de liens, et tu prends le temps de prioriser l'humain. C'est ce qui nous a permis de réussir à trouver cet équilibre, que je présente aujourd'hui.

Je remercie Agathe Keller, pour l'investissement avec lequel elle a dirigé mes travaux en sanskrit. Pour le temps, la patience, l'humour. Pour ne pas avoir simplifié ce qui n'était pas simple, car nous y avons trouvé une belle porte ouverte sur laquelle travailler. Merci pour le café dans lequel nous avons passé des heures à reconstituer cet algorithme multiplicatif avec nos haricots, merci pour tout le temps passé à essayer de travailler pour les lycéens. Cet investissement dans la transmission me touche. Merci de m'avoir guidée épistémologiquement, et de m'avoir aidée à penser cette thèse, et la relation au savoir. A nous deux, pour la suite !

Je remercie Karine Chemla pour m'avoir appris mon métier, pour m'avoir montré la beauté d'un travail fait en profondeur et la richesse de ce qui en ressort. Merci Karine, pour le projet SAW qui t'a tant coûté, mais qui en valait mille fois la peine. Merci de m'avoir fait confiance pour le chinois. Merci pour cette obstination avec laquelle tu tiens à faire changer le monde et

[1] Les recherches nécessaires à cette thèse ont été financées par le 7e Programme de l'European Research Council (FP7/2007-2013), dans le cadre du Projet Mathematical Sciences in the Ancient World, acronyme SAW, dirigé par Karine Chemla. Agrément ERC n. 269804.

à te battre contre la discrimination. Tu sais placer la barre au ciel et montrer à tous pourquoi c'est nécessaire. Je te suis, même si j'en suis loin.

Je remercie Marie-Jeanne Perrin pour ses travaux, pour sa bienveillance. Je suis impressionnée de voir qu'il est possible de penser avec tant de profondeur un pan entier de l'enseignement portant des concepts complexes et d'en fabriquer un processus complet d'enseignement permettant de faire des liens entre les objets. C'est un modèle difficile à suivre, mais qui donne le cap. Merci pour les relectures, les conseils, la patience, et d'avoir plongé avec moi dans ce défi. Merci pour les élèves, merci pour la transmission. Marie-Jeanne, quand un chercheur comme toi se met au service de la pratique du terrain, le monde change déjà.

Je remercie Christine Chambris pour la beauté de ses travaux, pour m'avoir guidée, pour m'avoir comprise. Merci pour tout ton travail en numération, qui me donne le cap en géométrie. Merci de ne pas renoncer aux sujets difficiles mais qui font des liens précieux, avec la physique, avec la pratique. Merci de m'avoir donné du courage, des sourires, pour pouvoir faire mon travail. Merci d'être critique, et de me questionner. Merci pour ICME 13 à Hamburg.

Je remercie Matthieu Husson pour son immense implication au lycée, pour son accueil dans l'option histoire des sciences. Merci Matthieu pour les liens entre l'histoire des sciences et les enseignants que tu fabriques en douceur et en nuance. Merci pour le modèle de recherche que tu proposes, dans la paix, dans la bonne humeur et la rigueur scientifique, tout en finesse. Merci pour la confiance que tu as dans la recherche et les chercheurs, qui me donne envie de travailler. Merci pour l'astronomie !

Je remercie Laurence Viennot qui m'a montré la voie de cette thèse, par son livre d'abord, en personne, ensuite. Merci Laurence de m'avoir guidée dans l'épistémologie, de m'avoir expliqué que oui, c'est difficile, les observables sont fins, et pourquoi il faut s'accrocher. Merci pour la voie que tu as tracée avec tous ces efforts et sacrifices et sur laquelle je vogue maintenant. Merci pour la finesse de ton approche épistémologique et pour ta lutte sans fléchir, contre l'élitisme. Merci pour donner du sens à ce qui compte vraiment. Merci pour les nombreux thés, merci pour avoir été mon soutien.

Je remercie Cécile de Hosson qui m'a accueillie, qui a été ma « grand-mère scientifique ». Merci pour Nicolas que tu m'as présenté, et que tu as guidé aussi auparavant. Merci pour le travail que tu as fait. Ta rencontre a été celle qui m'a permis de commencer, qui m'a montré le chemin du milieu. Grâce à ton travail, j'ai pu faire le mien et suivre tes traces. Merci pour la direction du labo, qui m'a appris comment le fait de valoriser toutes ces intelligences paye, en laissant la place à l'humain et au soutien collectif.

Je remercie Robert Middeke-Conlin qui m'a accueillie dans le cunéiforme, qui m'a formée, qui m'a expliqué et qui m'a également guidée dans le projet SAW. Merci Bob, pour ton amitié et ton intelligence, merci pour ton précieux soutien.

Je remercie Renaud Chorlay, qui m'a accueillie dans la recherche comme à l'ESPE. Merci de ton respect pour les enseignants, merci de tes grandes qualités pour expliciter, et pour expliquer quelles sont les contraintes de chacun. Merci de prendre ces contraintes au sérieux. Merci de m'avoir emmenée à la *Main à la pâte* et aux formations IREM. Merci aussi pour le niveau que tu donnes aux recherches sur le sujet de l'utilisation de l'histoire, pour ton expérimentation utilisant l'histoire des mathématiques en classe, qui ouvre la voie. Merci de l'extrême engagement que tu as dans l'accueil et l'orientation des « nouveaux ».

Je remercie Alain Herreman pour le travail à l'IREM, pour sa finesse philosophique dans l'analyse des processus de simplification de la présentation de l'histoire. Merci de m'avoir entraînée dans cette aventure et de m'avoir permis de comprendre la puissance de ces simplifications que tu as prises au sérieux, de leurs liens et de leur portée. Merci d'avoir tenu à démontrer scientifiquement, pas à pas, pourquoi on ne peut plus continuer comme ça. Merci de l'avoir fait en incluant les enseignants, en leur donnant des outils pour « voir ». Merci Alain de ta patience immense dans la lecture de mes écrits.

Je remercie Nadine de Courtenay qui m'a aidée à penser mon travail. Merci pour la constante « k » ! Merci d'avoir pris le temps de me parler, car tu fais le lien entre tous les éléments de cette thèse. Bravo pour ton travail, j'ai hâte de continuer à travailler avec toi si tu le souhaites.

Je remercie Corine Castela qui m'a aidée à comprendre mon travail. En pensant l'interdisciplinarité, Corine, tu as justifié tous mes efforts, tu m'as aidée à les caractériser, à trouver des ouvertures pour l'avenir. Merci pour la T.A.D, qui fera des liens puissants avec l'histoire, tu m'en as convaincue, toi ainsi que tes nombreux invités du monde entier. Merci de m'avoir guidée avec patience dans mes premiers écrits.

Le projet SAW et les Collections

Le présent travail doit énormément au projet SAW qui m'a financée et formée. L'orientation de la recherche, mes questions de recherche en sont nourries et influencées. Je remercie chaleureusement Karine Chemla, ainsi que tous les collègues avec lesquels j'ai travaillé au quotidien. De plus, le projet a aussi été une aventure que je suis heureuse de partager avec eux dans mes souvenirs. Je remercie également les chercheurs participants, qui m'ont enrichie tout au long de ces trois années, j'ai eu beaucoup de chance de toucher à autant d'excellence scientifique internationale.

Avec la courtoisie du Musée d'Istanbul (İstanbul Arkeoloji Müzeleri) ainsi que l'Université d'Jena (Institut für Orientalistik, Indogermanistik und Ur- und Frühgeschichtliche Archäologie) pour les photographies des tablettes concernées, je leur adresse toute ma gratitude. Je remercie également Manfred Krebernik.

Je remercie les contributeurs du CDLI pour leur travail précieux et Bob Englund pour son aide.

Les amis, les collègues jeunes chercheurs

Je remercie les amis : Robin Bosdeveix, Valentin Maron et Simon Decaens, pour leur affection, leur soutien, leurs conseils, leur aide, leur amitié. Merci aussi à Alix ! Merci à Martina Schneider, merci pour les musées, et pour tout le reste. Merci à Thomas Morel pour son travail qui me montre la voie, pour avoir plongé dans SAW, et pour sa sympathie.

Je remercie les jeunes chercheurs du projet SAW : Magali Dessagnes pour son accueil et de m'avoir passionnée avec l'histoire des collections ; Pierre Chaigneau pour avoir été mon frère de thèse et d'ESPE, Sho Hirose あなたはわたしのあにさんです, Xiaohan, bravo tu es un super modèle, bon courage pour la fin de thèse. Alfred Zihui et Yiwen, pour le travail et pour le rire.

Je remercie Daniel Morgan, pour ses conseils, sa visite, son soutien et son travail.

Je remercie les jeunes chercheurs du 8ème, Luz Martinez qui apporte le soleil, Sophie Canac (merci pour ta thèse !), ma chère Inès Delgado, Alice di Fabio et Isée, Zak mon frère dans l'organisation du WEJCH qui a porté la bannière avec moi.

Bon courage à Helmy, Adeline, Paula, Anne Boulais, pour la suite !

Je remercie les jeunes chercheurs de l'open space, Fabien Grégis pour sa thèse et le colloque sur la mesure, Xiaofei pour son amitié, João pour les discussions sur Pascal, Eleonora Sammarchi pour son amitié, Alexis, Cédric et les autres !

Les membres des labos

Je remercie Christophe Hache et Fabrice Vandebrouck, pour leur accueil, pour m'avoir guidée, pour m'avoir soutenue, pour leur sympathie et leur soutien sans faille dans les difficultés. Merci pour vos travaux.

Je remercie les chercheurs et les jeunes chercheurs (et anciennement « jeunes chercheurs ») du LDAR qui m'ont accueillie avec le sourire : Julie Horoks, Julia Pilet (merci pour l'aide sur le mémoire de Laura !), Laurent Moutet, Zoé Mesnil, Assia Nechache et le groupe JC, Sophie Rousse, Dominique Laval (merci pour le powerpoint !), Jorge Gaona pour sa sympathie envers moi, Noémie Tran Tat pour l'interdisciplinarité. Merci à tous pour votre travail, pour le groupe JC, pour les conseils, pour le partage. Merci aussi à tous les autres avec lesquels je n'ai pas encore travaillé, mais qui ont participé à la construction d'une réflexion commune et fine.

Je remercie SPHERE. Je remercie Catherine Singh pour son travail dont j'ai bénéficié, et Fabien Grégis pour son travail et le colloque sur la mesure. Merci également à Mehrnaz Katouzian-Safadi, pour l'entrée qu'elle m'a offerte dans la recherche et son intérêt tout au long des années de thèse. Je remercie les membres, ceux avec qui je n'ai pas encore travaillé mais qui ont participé à faire mon parcours, ceux avec qui j'ai travaillé et/ou qui m'ont influencée, merci à Emmylou Haffner, Florence Bretelle Establet et Stéphane Schmitt, merci à Sabine Rommevaux et David Rabouin, Pascal Crozet pour son soutien dans les séries de problèmes, Eric Vandendriessche, Justin Smith, Marie-Jo, merci à tous pour la qualité de leurs travaux, le partage, la sympathie, pour les séminaires de lectures de textes, la mesure, ou autres séminaires partagés.

Je remercie le LDAR, les membres, Janine Rogalski, Marc Rogalski, les membres de la chorale, Caroline Leininger-Frézal qui comprend mes intérêts en didactique de l'histoire.

Je remercie Isabelle Kermen pour son accueil, pour le labo, Patricia Crépin-Obert pour son travail, Michèle Artigue et Julia Pilet pour leur aide sur le mémoire de Laura et Brigitte Grugeon Allys pour son travail, qui a permis le mémoire, Clément Maisch, Emmanuel Rollinde, Maha Abboud. Je remercie Rita Khanfour pour son accueil chaleureux.

Je remercie Ivahn Smadja pour son aide sur les cours d'histoire des sciences et pour le modèle qu'il donne en tant que chercheur et qui me donne envie de faire ce métier.

Merci aux physiciens de Condorcet, et spécialement à Michel Seigneuret, pour tout.

Les chercheurs extérieurs

Je remercie Dominique Tournès pour son accueil à Marseille et son travail, en histoire comme à la CII, qui me permet aussi d'être comprise.

Merci à Hélène Gispert qui m'a accueillie et guidée.

Merci à Alain Bernard, Katalin Gosztonyi et Luc Trouche dans leur soutien pour les « petites variations ».

Merci à Baptiste Mélès pour son travail, son aide, et aussi pour le ping-pong !

Merci à Jean-Marie Boilevin et Patrice Laisney pour leur accompagnement du WEJCH.

Merci à Cécile Michel pour son accueil, et m'avoir passionnée. Merci à Catherine Singh qui m'a inspirée, bravo pour la voie que tu as tracée. Merci à Clemency Montelle pour son accueil chaleureux dans la recherche.

Merci pour la partie cunéiforme à John Steele, Nicolas Décamp, Christine Chambris et Marie-Jeanne Perrin, Robert Middeke-Conlin (pour ses nombreuses explications patientes) et les étudiants de l'option « Sciences en Asie » (notamment du Master LOPHISS) à l'Université Paris Diderot. Cette partie a été influencée par les travaux des membres de SAW et leurs invités, par Reviel Netz, Hermann Hunger, Mathieu Ossendrijver, Jens Høyrup, Cécile Michel, Pierre Chaigneau, Magali Dessagnes, Alexander Jones, Carlos Gonçalves, par les participants du colloque SAW « Conference Scholars and Scholarship in Late Babylonian Uruk » en 2015, en particulier Philippe Clancier, qui a accepté de jouer les prolongations et de nous passionner avec la Mésopotamie, par les professeurs de l'équipe de l'IREM de Grenoble (groupe Histoire des Mathématiques) et évidemment par les travaux de recherche traitant des sources en cunéiforme. Je remercie aussi infiniment les contributeurs du CDLI (http://cdli.ucla.edu/) ainsi que Baptiste Mélès pour MesoCalc (http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html). Pour finir, je remercie de tout cœur à nouveau, Christine Proust, Matthieu Husson et Barbara Jamin, les élèves du lycée Léonard de Vinci à Levallois-Perret.

Merci aux Toulousains, en particulier Eric Laguerre de m'avoir invitée et donné ma chance. Merci à Marie-Hélène Lécureux-Têtu pour son aide, et Jean-François Bergeaut pour ses conseils de lecture.

Merci à Laurence Maurines et Christian Orange pour le WEJCH, leur implication et la qualité de leurs interventions qui m'ont beaucoup fait avancer, en seulement deux jours.

Merci à tous ces chercheurs qui font l'EMF qui est un colloque formidable, à Laurent Theis pour sa sympathie et pour 2015, ainsi qu'à ceux qui m'ont aidée dans mes premiers écrits, Kathy Clark, Costas Tzanakis, Fernand Malonga, Abdellah El Idrissi, Thomas Barrier et Thomas de Vittori.

Merci à Marc Troudet et Alice Morales pour leur accueil en classe et leur travail à l'IREM.

Merci à Sylvain Doussot pour l'initiation à la didactique de l'histoire.

L'ESPE de Paris

Merci à Anne Bilgot, tu m'impressionnes énormément (n'oublie pas de dormir !) Merci pour ton accueil et pour ton aide, merci pour ta patience. Merci à Katia Odiot pour son soutien permanent et son accueil chaleureux.

Merci à Pierre Saurel qui m'a fait un super C.V, merci pour tes conseils qui m'ont permis de terminer. Merci de ton implication, de ta bienveillance, de ton attention et de ton sérieux.

Merci à Françoise Herault de m'avoir prise sous son aile, merci à Emmanuelle Servat de ses conseils de lecture.

Merci à toute l'équipe pour son accueil et sa sympathie, merci à Malick Camara et Pierre Chaigneau de leur soutien, merci à Jean-Marc Clérin pour sa gestion efficace et douce, merci à Michèle Deprez pour l'offre magnifique de formation.

Merci à Alexis Gautreau pour son accueil en sixième et le modèle d'enseignement qu'il transmet.

Et surtout merci à mon cher binôme qui va me manquer, Anatole Khelif.

Merci aux étudiants, qui m'ont (presque) tout appris. Vous serez de formidables enseignants !

Les étudiants

Merci à Laura Camus, Eric Plessz et Navid Amidi. Merci aux étudiants de l'ESPE, merci à mes M1 chéris, merci aux étudiants d'histoire des sciences, merci aux étudiants de « sciences en Asie ».

Merci aux lycéens de l'expérimentation à Levallois ! Je ne vous oublierai jamais.

Les anciens enseignants et les débuts en thèse

Merci aux enseignants de Nantes, en mathématiques et en histoire des sciences qui m'ont amenée jusqu'ici. Merci à Martine Acerra, Evelyne Barbin, Jenny Boucard, merci à Vincent Jullien pour cet incroyable moment qu'était le mémoire.

Merci à Xavier Saint-Raymond, à Clément Dunand et à Paul Silici d'avoir cru en moi (et d'avoir donné un petit coup de pouce au destin en m'inscrivant de force !). Merci à Dominique Cerveau, qui m'a fait repenser l'enseignement des mathématiques à l'Université et à son humanité dans l'annonce de la maladie de ma fille.

Merci à M. et Mme Roth de m'avoir accompagnée sur le terrain, en particulier en R.E.P, où j'ai vu de très belles choses de la part de l'équipe enseignante.

Merci à Stéphane Tirard, Pierre Teissier et Jean-Louis Kerouanton, de m'avoir initiée à l'histoire des sciences, je vous admire tant.

Merci à mes enseignants d'histoire qui ont participé à m'amener ici : M.Biette, M.Maistre, et mon enseignant de terminale.

Merci à Gilles Kober, de m'avoir donné l'envie des mathématiques. Merci à Paule Kober, pour ton soutien sur tous les plans et pour l'aide dans les débuts à l'ESPE.

Merci à Anaël Marrec, Sandrine Gafsou et Simon Decaens pour les premières relectures du projet de recherche. Merci à Claude Boué et Régis Babin, pour l'audace.

Merci à Lénaig Astoul (et toute la famille !) pour son amitié, et pour ses conseils. Grâce à elle j'ai pu obtenir une bourse et continuer mes études. Le coût et l'accessibilité des études supérieures, montrent que le combat ne fait que commencer.

Les fées

Merci à Evelyne Scaron pour tout.

Merci à Mousse – Christine Mousset, Virgine Maouchi, Patricia Philippe et Nad Fachard pour leur travail et leur accueil, pour leur sourire qui donne du courage. Merci à Jérôme Barberon pour sa disponibilité et son accueil doux et précis. Merci à Laetitia Gourmand.

Merci à Sandrine Pellé sans qui rien ne serait possible.

Les livres, les séminaires

Merci à tous ceux qui sont dans la bibliographie et tous ceux que j'ai lus, vus, entendus, et qui font cette thèse.

La famille

Merci à mes parents. Merci d'être écrivains. Merci à ma maman cette grande Paulo Freire de l'Antiquité grecque et du théâtre, qui m'a tout appris et m'a montré comment être une didacticienne en herbe, tout au long de ma scolarité. Merci à mon père qui a ouvert les portes, m'a donné les moyens, m'a appris à chercher et m'a permis de faire du japonais et du chinois parce qu'il m'a donné des ailes. Merci de m'avoir montré le chemin d'une carrière (exigeante) engagée ; merci pour les relectures. Merci à ma sœur et mon frère qui sont un si beau modèle pour moi et qui me montrent que le chemin est possible. Cette thèse a beaucoup de vous, de la physique et de l'Antiquité.

Merci à Françoise Michaud, José Bicot, M. Herbert et à tous mes amis, à Thien, Saba, Lily et Weiss, Cécilia et Chris, Yann et Sandrine, de leur soutien infini et de leur confiance sans jamais aucune faille. Merci à Opa et Oma pour le gîte et les bons petits plats pendants certaines semaines de travail chez eux.

Merci à mes enfants pour qui j'ai fait ce travail.

Merci de votre patience pendant ces quatre années de travail, merci d'avoir supporté les allers-retours à Paris, le travail dans le projet ERC, le travail à l'ESPE, le travail de thèse, certains rendez-vous manqués.

Merci à David Freyermuth.

Table des matières

INTRODUCTION

La mesure fait l'objet de références, au quotidien comme dans l'enseignement, dans un cadre ambigu. Le terme « longueur » par exemple, fait référence à l'objet à mesurer, à sa mesure dans une unité de mesure donnée ainsi qu'au concept de longueur lui-même. Les mesures sont liées à plusieurs objets conceptuels abstraits et fins ; elles font appel aux mathématiques, à la physique, ainsi qu'à l'idée que l'on s'en fait dans la vie de tous les jours. Ces concepts sont non seulement très imprégnés du quotidien, mais également fortement interdisciplinaires. Les unités de mesure interviennent dans ce contexte pluriel ; mesurer revient à mobiliser une forme de relation entre grandeurs et leur équivalent dans le monde des nombres. Quelle est la place des unités de mesure dans ce cadre ?

L'objet de ma recherche consiste en deux objectifs complémentaires :

- la mise en valeur de la réalité plurielle des concepts liés aux unités de mesure, en n'aplatissant pas la diversité de ces approches scientifiques, mais au contraire, en articulant les différents points de vue.
- l'étude des liens et apports réciproques entre histoire des sciences et didactique, de la recherche jusqu'à la classe ; et ce à travers l'orientation particulière donnée par la rencontre avec des travaux récents, en histoire des sciences comme en didactique.

Je tenterai de dégager également quelques conséquences pratiques immédiates de cette étude, à utiliser par exemple dans une future ingénierie.

Je m'inscris dans le cadre particulier du projet ERC « SAW2 ». L'un des objectifs de ce projet européen d'histoire des sciences était de donner accès à la diversité de pensée mathématique, notamment dans les sources anciennes en cunéiforme3, sanskrit et chinois. Agathe Keller, Karine Chemla et Christine Proust, ont dirigé chacune une partie de mes travaux de recherche.

Les questions qui ont orienté mon travail en début de thèse étaient relatives à l'apport de l'histoire des sciences dans l'enseignement, en particulier les approches que l'on qualifie de « conceptuelles » ainsi que les approches liées à la « nature des sciences ». En effet, des hypothèses partagées entre chercheurs en histoire des sciences comme en didactique concernent l'utilisation de l'histoire pour l'enseignement des mathématiques selon les idées suivantes, que je représente ici schématiquement :

-l'histoire des sciences comme levier didactique pour travailler sur des problèmes conceptuels, des difficultés liées à l'épistémologie, à la complexité ou à la pluralité des concepts

-l'histoire des sciences pour travailler sur la nature des mathématiques, au service d'une vision des mathématiques comme non dogmatiques, présentant plusieurs réponses possibles, n'ayant pas toujours existé telles quelles.

Un autre aspect m'intéressait également, en lien avec la complexification des mots « culture » et « progrès » :

-l'histoire des sciences pour travailler sur l'image des sciences : des sciences accessibles, qui ne sont pas le fruit d'un génie solitaire ; qui ne se situent pas non plus au terme de leur développement, comme à l'apogée du progrès. Le travail sur la notion de « culture mathématique » entre aussi en jeu : il s'agit de montrer qu'il n'est pas possible d'employer un

---

[2] Le projet SAW (http://sawerc.hypotheses.org/) est un projet européen (European Research Council) d'histoire des mathématiques anciennes, qui étudie en particulier mais pas exclusivement les sources en sanskrit, chinois et cunéiforme ainsi que les enjeux socio-politiques modernes. Il a financé une partie de cette thèse.

[3] Ecriture cunéiforme, voir p.28

seul terme pour une même zone géographique donnée pendant 5000 ans. Ce travail implique également de montrer qu'un même acteur puisse appartenir à plusieurs cultures mathématiques (mathématiques savantes, des marchands, etc.).

J'expliquerai en détails l'évolution de mes questions de recherche (voir 1.2 p.20). Voici la méthode que j'ai choisi de suivre :

- j'ai réalisé une étude (historico)-épistémologique[4] liée à la mesure, dans le calcul de l'aire du carré et du rectangle, dans plusieurs contextes historiques. Il s'agit d'une sélection de textes anciens visant à appréhender la diversité des concepts liés au calcul d'aire.

- j'ai réalisé une expérimentation en classe basée sur cette recherche, dans le cadre d'une ingénierie didactique (Artigue, 1989).

Il s'agit d'une méthodologie de recherche en plusieurs étapes :
-l'analyse (historico)-épistémologique citée ci-dessus, qui a pris une forme particulière pour moi, je l'expliquerai en détail dans l'historique de ma démarche (voir 1.2 p.20). Dans le cadre didactique, cette analyse vise traditionnellement à appréhender les difficultés possibles des élèves, liées à la richesse conceptuelle des objets enseignés.
-l'analyse préalable à l'expérimentation en classe, qui consiste en une étude du terrain sur lequel va être menée l'expérimentation.
Dans mon cadre de travail je l'ai interprétée comme une analyse des travaux de didactique de référence et du savoir savant à enseigner[5]. Je l'ai croisée avec mon analyse historico-épistémologique. Cette analyse croisée a permis d'intégrer les réflexions permises par les textes historiques dans :
-l'observation de manuels scolaires de CM2 sur l'aire du carré et du rectangle
-la constitution d'une expérimentation en classe de seconde sur l'aire du carré et du rectangle, utilisant l'histoire pour revenir en profondeur sur des concepts déjà connus
-l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. L'analyse *a priori* consiste en la description des hypothèses portant sur les effets possibles du protocole mis en place. Dans mon cas, il s'agit de la constitution d'une séquence d'histoire des sciences, avec documents écrits à l'appui, et de protocoles pour les entretiens avec les élèves.
L'analyse *a posteriori* consiste en l'utilisation des traces écrites ou des transcriptions pour confronter les résultats du terrain avec l'analyse *a priori*.

Ces questions m'ont amenée à en soulever une nouvelle : celle de l'apport des outils de didactique à l'analyse historique. J'ai ainsi ajouté, avec l'aide de la didactique, une analyse historique[6] de tablettes de Mésopotamie provenant de Nippur.

---

[4] Cette analyse avait également des objectifs liés à la recherche en histoire.
[5] Mon interprétation de la présentation du « savoir savant à enseigner » ou « savoir de référence » est le fait de montrer des travaux de recherche en didactique qui présentent une théorie mathématique et/ou physique dont on a choisi de présenter (transposer) une partie des informations, sous une forme accessible, aux élèves. Il s'agit donc d'une réflexion synthétique sur « ce qui est enseigné » et « ce qui n'est pas enseigné ». Les auteurs de ces travaux sur la théorie ont aussi parfois fait le choix de montrer que d'autres théories seraient plus adaptées à la transmission.
[6] Je fais une distinction entre « analyse historique » et « analyse historico-épistémologique ». L'analyse historique est, pour moi, le travail mené pour répondre à des questions de recherche en histoire. Celui-ci apporte des informations de nature épistémologique également. L'analyse historico-épistémologique est un travail de

L'idée que l'histoire puisse être intéressante pour l'enseignement des sciences n'est pas nouvelle. D.E. Smith (1900) par exemple, qui a participé à la création des premiers rassemblements internationaux en didactique des mathématiques, avait une réflexion engagée sur le sujet.

L'originalité de mon travail se situe dans la forme d'interdisciplinarité choisie. En effet, il s'agit ici de prendre en compte les contraintes disciplinaires de l'histoire des sciences comme de la didactique, et de les utiliser à profit, pour éclairer les concepts.

> A propos de toutes ces questions, on pourrait appeler à une réflexion spécifique sur la forme d'interdisciplinarité qui ne consiste pas en une interaction dissymétrique entre deux disciplines (par exemple, les mathématiques permettant de résoudre un problème posé par une autre discipline) mais en la mobilisation quasi indépendante de plusieurs disciplines pour éclairer un objet commun. (Castela, El Idrissi et Moungabio, 2016, p.429).

Mon utilisation de l'histoire des mathématiques anciennes, grâce à la variété des éclairages qu'elles apportent sur les unités de mesure, les grandeurs, les nombres, est mobilisée pour la recherche en didactique. Cependant, aucune des deux disciplines « n'est un outil pour l'autre », la discipline non mathématique (ici l'histoire) est un outil pour l'enseignement mathématique simplement parce qu'elle prend « les mathématiques ou certaines de ses productions comme objets d'étude ». (Castela, El Idrissi et Moungabio, 2016, p.429). Réciproquement, les outils de la didactique servent à observer les textes historiques, toujours au niveau de la recherche.

Prenant pour base cette relation symétrique d'interdisciplinarité, l'expérimentation en classe est conçue « à la manière de l'historien ». Les contraintes historiques seront décrites et respectées au plus près dans la conception de la séance à étudier. J'essayerai de décrire objectivement les effets mathématiques observés ou non sur les élèves, du fait de la rencontre avec l'histoire.

Au tout début de ma thèse, j'ai choisi de me concentrer sur les situations multiplicatives[7] ». L'un des objectifs du projet ERC « SAW » qui m'a financée était de donner accès à la diversité de pensée mathématique, notamment dans les sources anciennes en cunéiforme, sanskrit et chinois (voir p.34). Mon travail était de faire le lien entre les résultats récents de la recherche en histoire et la didactique. Agathe Keller, Karine Chemla et Christine Proust, ont dirigé chacune une partie de mes recherches. Le choix des situations multiplicatives en début de thèse correspondait bien au travail qui avait été commencé dans le projet. L'une ou plusieurs des questions suivantes : proportionnalité, aire du carré, volumes, division… avaient été abordés en profondeur dans leurs travaux. La notion de situation multiplicative telle que je l'avais découverte avec Roditi (2005) me permettait de penser un premier lien entre ces travaux.

Le travail dans le projet avait déjà mis particulièrement en valeur l'importance des unités de mesure dans ces situations. Un autre des objectifs du projet était en effet d'étudier les

---

sélection que j'ai constitué, à l'origine, pour répondre à des questions de didactique. Celui-ci apporte toutefois des informations de nature historique.

[7] Voir Vergnaud (1990) et Roditi (2005, p.52-55). C'est une situation de laquelle est issue un problème que la multiplication permet de résoudre, comme par exemple : l'agrandissement de figures, la proportionnalité, le calcul de l'aire d'un rectangle, ou un problème faisant appel à l'addition itérée.

mathématiques dans différents contextes, afin de complexifier l'approche de la notion de « culture[8] » (qui ne serait plus alors présentée comme un « bloc uniforme »). Ce travail avait participé à mettre en valeur les unités de mesure. Ma rencontre avec les didacticiens de la physique Cécile de Hosson, Laurence Viennot et notamment mon directeur, Nicolas Décamp m'a permis une continuité dans la réflexion.

Ce contexte particulier m'a donc amenée à faire une première sélection « large » de lectures autour de la place des unités de mesure dans des situations multiplicatives, comme : l'aire du carré/du rectangle, la règle de trois, le calcul de volumes, les algorithmes de multiplication et de division. Je ne mentionnerai que rapidement ce travail, mais il a donné la possibilité de problématiser la sélection de textes sur l'aire du carré par la suite. C'est à travers ce regard permis par les textes sur les unités de mesure, dans le contexte des situations multiplicatives, que j'ai ensuite construit ma démarche, consistant en des « allers-retours » nécessaires et fructueux, décrits par Dorier (2006, p.29) et de Hosson (2011, p.11). Ces allers-retours entre textes historiques et travaux didactiques ont été constants tout au long des quatre années de travail.

Je vais maintenant préciser le plan que j'ai choisi d'adopter dans cette thèse.

- Dans la partie historique, je traiterai deux grandes sous-parties :

- une analyse historique

Dans cette partie, je m'intéresserai à une sélection de tablettes de Nippur sur le calcul de l'aire du carré. Ces tablettes sont très similaires, excepté pour le choix de la mesure de longueur initiale du côté du carré. Je me demanderai si des objectifs pédagogiques peuvent être liés à ces choix. Pour cela, je discuterai l'utilisation d'outils provenant de la didactique du point de vue méthodologique.

- une analyse historico-épistémologique :

Dans cette partie, je m'intéresserai à une sélection de tablettes de Mésopotamie sur le calcul de l'aire du carré, provenant d'autres périodes. Ces tablettes permettent d'éclairer différemment le concept de mesure, d'unité de mesure, ainsi que d'autres concepts mathématiques qui sont liés aux unités de mesure dans le calcul d'aire. J'ouvrirai sur un travail qui a été entamé sur des textes en chinois et sanskrit ; et qui a donné lieu à des analyses historiques.

- Dans la partie didactique, je traiterai deux grandes sous-parties :

- une analyse préalable à l'expérimentation en classe

Dans cette partie, je m'intéresserai à la présentation de travaux de référence sur le calcul de l'aire du carré et du rectangle aujourd'hui ; en géométrie comme sur la mesure. J'articulerai ces travaux avec ma précédente analyse historico-épistémologique. Je construirai alors une

[8] Le projet SAW a travaillé sur la déconstruction du terme « culture » comme représentant un bloc uniforme, par exemple « les mathématiques babyloniennes ». Pour cela, il s'agissait entre autres, de faire connaitre les mathématiques dans différents contextes (marchand, astronomie, etc.), un même acteur pouvant appartenir à différentes cultures.

grille d'observation qui me permettra une analyse de manuels scolaires de CM2. Cet état des lieux, qui donne une idée théorique des pratiques des enseignants, me permettra de construire mon expérimentation en seconde.

- une expérimentation en classe de seconde

Dans cette partie, je présenterai une expérimentation qui a été menée en classe de seconde. Par une analyse *a priori*, menée sur la base de l'analyse préalable et de l'analyse historico-épistémologique, je présenterai les hypothèses liées aux attendus et le protocole des entretiens que j'ai menés avec les élèves. Ensuite, je présenterai les détails des séances et une analyse *a posteriori* des résultats.

CHAPITRE I - ANALYSE HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

1 INTRODUCTION

1.1 Plan du chapitre

Ce chapitre a deux vocations :

- Une analyse historique de ce que j'ai appelé les « petites variations » (voir 2.3, p.62). Il s'agit de l'étude d'une série de tablettes d'époque paléo-babylonienne provenant de Mésopotamie, écrites en cunéiforme[9], et liées à l'aire du carré. Elles sont très similaires, au choix de la mesure de longueur du côté du carré près. L'analyse historique portera sur la question d'éventuelles décisions d'ordre pédagogique intervenant dans l'élaboration de l'énoncé du problème. Pour cette analyse, je discuterai l'utilisation de concepts de didactique.

- Une analyse historico-épistémologique (voir 2.4, p.111) qui mettra en lumière une multiplicité de points de vue sur les unités de mesure, l'aire, la multiplication, les nombres, les surfaces, en lien avec les systèmes métrologiques[10] adoptés aux époques concernées. Pour cela j'ai fait une sélection de textes cunéiformes sur l'aire du carré, en élargissant à d'autres périodes. Ils seront présentés en détails. Pour ces textes je me baserai sur des analyses historiques, notamment celle de Christine Proust. Cette analyse historico-épistémologique me fournira quelques points de repère pour mon analyse didactique des manuels scolaires et pour mon expérimentation en classe utilisant l'histoire (voir les chapitres 2 et 3). J'évoquerai ensuite plus rapidement d'autres textes en chinois et en sanskrit, sur le thème de l'aire du rectangle et du carré. J'expliquerai comment l'analyse historico-épistémologique pose des questions qui m'ont poussée à faire une recherche de nature historique, sous un angle particulier. Ces analyses historiques sont en cours et feront l'objet de publications ultérieures.

Dans cette introduction, je vais présenter l'historique de ma démarche ainsi que la méthodologie adoptée pour ce chapitre.

1.2 Historique chronologique de la recherche

[9] Pour l'écriture cunéiforme de Mésopotamie, voir p.28
[10] Par exemple, notre système métrologique est le système métrique.

1.2.1 Première étape de sélection

Au début de ma thèse, j'ai entamé une sélection de lectures autour de situations multiplicatives : règle de trois, aire du carré, volumes, algorithmes de multiplication et division ; en lien avec la question des unités de mesure. Ces lectures, en particulier la lecture de Roditi (2005), en me fournissant une première grille d'observation, m'ont permis de débuter l'analyse historico-épistémologique. J'ai ainsi pu proposer une synthèse précise sur l'aire du rectangle et du carré, en histoire et en didactique.

Une première tablette cunéiforme, UM 29-15-192 (voir p.48), questionnait particulièrement la gestion de la bidimensionnalité (Rogalski, 1984), l'implication du système métrologique, la notion de nombre et d'unité de mesure[11]. Ce choix m'a amenée à la sélection de deux autres textes anciens : un extrait des *Neuf Chapitres* (Chemla et Guo, 2004) et un commentaire sanskrit de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya* (Keller, 2006). Cette première sélection était liée à la facilité d'accès des textes historiques en sanskrit et en chinois sur ces thèmes (aire du carré et du rectangle, unités de mesure). La question de l'accessibilité est une réelle difficulté pour le travail interdisciplinaire (ici en didactique et histoire). Parfois, les textes n'ont pas été traduits en français ni en anglais ; ils sont par exemple, commentés en chinois. S'ils l'ont été, les historiens spécialistes prennent en compte une littérature secondaire dont une partie, elle, n'est pas traduite. Parfois, ils ont été traduits pour l'usage interne des historiens mais n'ont pas encore donné lieu à une édition commentée publique. Parfois encore, la synthèse historique date trop par rapport aux critères scientifiques qui définissent la recherche en histoire aujourd'hui. La sélection m'a permis, pour les *Neuf chapitres*, dans l'édition récente de Chemla et Guo (2004) d'orienter mes questions sur la représentation de l'unité de mesure et le rôle du diagramme dans la gestion de la bidimensionnalité. D'une manière générale, cette sélection a soulevé des questions sur le changement de registre de représentation (Duval, 1993), entre registre des figures et registre symbolique.

> Une écriture, une notation, un symbole représentent un objet mathématique : un nombre, une fonction, un vecteur,.... De même les tracés et les figures représentent des objets mathématiques : un segment, un point, un cercle,... [...] Néanmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit « réels » ou « physiques » ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé. Il suffit de considérer le cas du calcul numérique pour s'en convraincre : les procédures, et leur coût, dépendent du système d'écriture choisi. Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique. (Duval, 1993, p.37-38)

[11] L'expression de la mesure d'aire peut utiliser l'addition, qui correspond au compte de « sous-surfaces standard » (par exemple des carreaux) liées à un choix d'unité de mesure d'aire. Le contexte est unidimensionnel, la longueur n'intervient pas explicitement dans l'algorithme. Aujourd'hui lorsque la multiplication est utilisée, le nombre de carreaux (mesurant 1 cm^2) sur un côté du carré, par exemple, est donné par le nombre d'unités de mesure de longueur (par exemple en centimètre). Le lien avec la mesure de longueur est immédiat.

Le texte en sanskrit pose la question du nombre, de sa relation avec la quantité ainsi qu'avec l'unité de mesure. De plus, l'introduction du traité fait également le lien entre la multiplication et le découpage géométrique de la surface suivant une unité de mesure. Cette découverte a donné lieu à un travail historique (en cours) d'analyse croisée de l'introduction du traité et de l'extrait lié à l'élévation au carré.

1.2.2 Deuxième étape de sélection

Cette première étape a ensuite donné lieu à une sélection plus ciblée, que je détaillerai ci-après. En parallèle, cela m'a permis des lectures plus orientées de travaux en didactique sur l'aire et les unités de mesure. C'est ce qui constitue dans mon travail, la mise en œuvre des « allers-retours » entre textes historiques et travaux didactiques, décrits par Dorier (2006, p.29) et de Hosson (2011, p.11). La première sélection d'études didactiques liées à différentes situations multiplicatives a orienté le choix de trois textes en sanskrit, chinois et cunéiforme, sur l'aire du carré. Elle a donné lieu ensuite à un choix de critères de constitution de corpus élargis. Je vais détailler cet approfondissement, tout en explicitant le type d'équilibre entre didactique et histoire que j'ai trouvé pour ce faire.

1. En cunéiforme, le travail est présenté dans cette thèse. Je me suis basée sur des articles d'histoire déjà écrits. J'ai décidé d'ajouter à la première tablette d'argile « UM 29-15-192 » (voir p.48) et aux tablettes similaires de Nippur, des sources datées d'autres périodes qui avaient déjà fait l'objet de recherches par Christine Proust. Réunir ces sources me permettait à la fois d'illustrer une diversité de pratiques au sein des traditions développées en Mésopotamie, et d'apporter différents éclairages sur des concepts liés aux unités de mesure dans le calcul d'aire (tels que la multiplication, l'aire, le nombre…). Cela mettait aussi en évidence l'impact du système métrologique utilisé, sur les techniques et objets mathématiques. Je me suis basée sur cette sélection pour mon analyse historico-épistémologique, (voir 2.4, p.111) qui est ensuite utilisée en didactique. A ce stade du travail, j'avais déjà alimenté ma réflexion didactique par les lectures de travaux de référence sur le thème de l'aire et de la mesure. Ainsi, l'analyse historico-épistémologique trouve sa place naturellement au carrefour entre les deux disciplines, qui alimentent la façon dont le regard se pose sur le texte et les critères d'observation retenus.

2. En chinois, le travail n'est pas présenté dans cette thèse, il est seulement évoqué en ouverture. J'ai décidé de travailler, de manière historique cette fois, sur un texte du XIIIe siècle que j'ai traduit en français pour cette thèse sous la direction de Karine Chemla, parce qu'il apportait beaucoup au propos. Mon intérêt pour ce texte a été aiguisé par des questions épistémologiques, comme évoqué précédemment. Le travail historique bénéficie donc des « aller-retours » entre histoire et didactique. Mais le texte présente aussi de « petites variations » (il s'agit de la multiplication d'autres grandeurs en conservant parfois les valeurs numériques et le diagramme initial du rectangle). Il a contribué à orienter mon travail historique sur les textes en cunéiforme (voir les petites variations, 2.3, p.62) qui sera, lui, présenté ici.

3. En sanskrit (travail évoqué en ouverture) l'équilibre méthodologique entre didactique et histoire est encore différent. Les questions épistémologiques posées au commentaire de

Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya* (Keller, 2006), ont amorcé une enquête historique. Elles m'ont conduite également à m'intéresser à d'autres sources en sanskrit. Celles-ci, bien qu'apparaissant dans des contextes différents (volume, aire du trapèze), suggèrent des hypothèses historiques et alimentent la réflexion. L'histoire interdirait de faire des raccourcis entre ces textes, faute d'en connaitre les liens contextuels précis. Les distances historiques sont trop grandes pour que les textes soient mis frontalement en relation. Les questions initiales ne peuvent trouver de réponse historique directe par la comparaison. En revanche, cette comparaison permet d'affiner les questions, d'aiguiser la prudence.

1.2.3 Troisième étape : analyse historique

C'est finalement après toutes ces étapes qui ont conduit à l'analyse historico-épistémologique que j'ai commencé l'analyse *historique* présentée dans cette thèse. Il s'agit des « petites variations » (voir 2.3, p.62). Je souligne au passage que mon analyse historico-épistémologique a été construite grâce aux allers-retours non seulement entre la didactique et l'histoire, mais aussi entre les différentes sources (en sanskrit, chinois, et cunéiforme).

Avant les « petites variations » j'avais déjà commencé un travail d'histoire concernant les textes en sanskrit avec Agathe Keller, portant sur l'analyse du commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'Āryabhaṭīya. Concernant les textes en chinois, l'amorce d'une traduction d'un traité mathématique du XIII^{e} siècle par l'auteur Yang Hui (Yang Hui Suan Fa, 杨辉算法, « les arts mathématiques de Yang Hui ») avait fait émerger la question des « petites variations ». Cette étape était aussi motivée par ma volonté de ne pas travailler uniquement sur l'apport de l'histoire pour la didactique, mais aussi de façon moins commune, sur l'apport de la didactique à l'histoire.

Cet historique de ma démarche montre donc bien d'une part, que l'analyse historico-épistémologique est constituée de nombreux aller-retours, ou apports réciproques, entre histoire et didactique ; d'autre part les travaux historiques initiés et les questions soulevées montrent que la didactique peut générer du travail historique.

Dans la partie historique de ce chapitre sur les « petites variations », (voir 2.3, p.62) des outils de didactique servent l'analyse. En effet, le travail historique a été inspiré par la notion de variable didactique (bien qu'elle ne soit pas directement transposable)[12]. La notion d'assortiment (Genestoux-Esmenjaud, 2000) peut-être intéressante pour l'étude. D'autres rapprochements sont aussi peut-être possibles, pour analyser ce contexte entre histoire et didactique. Ainsi la théorie anthropologique du didactique ou T.A.D (voir p.106) offre une ouverture méthodologique.

1.2.4 Résumé des étapes : équilibre didactique et historique selon les sources

D'un point de vue schématique (forcément un peu réducteur de la complexité des « allers-retours » réels entre disciplines), la chronologie du travail peut se résumer ainsi. Il est

[12] Cette notion de « variable didactique » est expliquée en détails (voir p.61).

intéressant de voir que pour cette thèse, l'ordre de présentation est pratiquement l'inverse de l'ordre chronologique de mon travail.

Pour le travail sur les textes en cunéiforme (présenté dans la thèse) :
1) travail historique préalable de l'historien sur ses propres questions ;
2) travail épistémologique du didacticien (ici, moi) de regroupement de textes, motivé par la didactique, grâce à un dialogue constant didactique-histoire. Des hypothèses historiques sont soulevées par la sélection, mais elle ne permet pas directement d'y répondre.
3) travail historique de l'historien (ici, moi), sur des points méthodologiques inspirés de la didactique (« petites variations ») et liés à la présence de similarités de ce type dans un texte en chinois (Yang Hui).

Pour le travail sur les textes en sanskrit (seulement évoqué dans la thèse) :
1) travail historique préalable de l'historien sur ses propres questions ;
2) travail épistémologique du didacticien (ici, moi) qui implique une tentative de lecture d'un texte.
3) le travail motive une sélection, faite avec l'historien. Des hypothèses historiques sont soulevées par la sélection, mais elle ne permet pas directement d'y répondre.
4) travail historique de l'historien et du didacticien-historien (en cours), sur le premier texte, inspiré par les étapes précédentes et les précautions soulevées

Pour le travail sur les textes en chinois (seulement évoqué dans la thèse) :
1) travail historique préalable de l'historien sur ses propres questions ;
2) travail épistémologique du didacticien sur des textes en cunéiforme et sanskrit qui motive l'étude d'un texte (traduction de Yang Hui)
3) travail historique de l'historien (ici, moi), sur des points épistémologiques inspirés par l'étude précédente et sur des points méthodologiques inspirés par la didactique.

Maintenant que j'ai présenté l'historique de ma démarche de recherche, je vais exposer plus précisément le travail sur les sources en cunéiforme qui sera présenté en détail ici.

1.3 Détails sur la démarche adoptée pour les sources en cunéiforme

Pour la partie historique (analyse historique des « petites variations », dans les exercices de calcul d'aire paléo-babyloniens, voir 2.3, p.62) je me suis basée sur l'interprétation historique de Proust concernant les systèmes numériques anciens utilisés (voir p.57). Afin de permettre au lecteur de comprendre cette analyse, j'exposerai donc le fonctionnement des systèmes numériques et donnerai quelques éléments de contexte. Ensuite, je présenterai le lot de tablettes similaires de Nippur étudié. Puis, j'analyserai les tâches induites par le choix de la mesure de longueur du côté du carré, à chaque étape de l'algorithme de calcul d'aire. Je discuterai également de la possibilité ou non d'utiliser des concepts de didactique pour analyser ces textes.

Pour l'analyse historico-épistémologique (voir 2.4, p.111) j'ai choisi de présenter en détails la sélection de textes cunéiformes de différentes périodes, me basant sur des hypothèses historiques déjà émises (notamment par Christine Proust). Un tableau permettra de synthétiser, selon des critères précis, ce que les textes disent des unités de mesure, de l'aire, du nombre, de la multiplication, etc., en partant de ces hypothèses historiques. Cette approche épistémologique existe depuis longtemps en didactique ; voir par exemple Saltiel et Viennot (1984, p.214). Il s'agit d'utiliser le travail d'analyse historico-épistémologique pour saisir les concepts plus largement[13] qu'avec notre vision actuelle de ceux-ci.

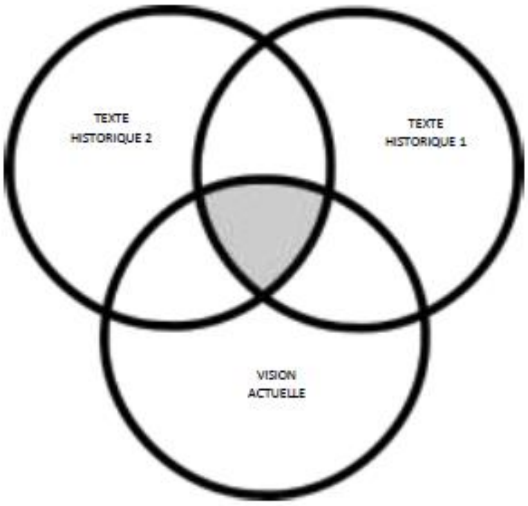


Schéma 1-1 : vision plurielle du concept

Ici, chaque cercle représente une approche du concept dans un texte historique, c'est-à-dire que le concept n'est pas vu comme un objet unifié qui traverserait le temps pour être « précisé » ou « affiné » de plus en plus. Les travaux récents de recherche en histoire me paraissent davantage relever d'une « plongée » dans l'un des cercles pour explorer une vision et une utilisation particulières du concept. Ceci explique notamment l'attention particulière portée par les historiens aux significations des mots comme « multiplication », « aire », « nombre », etc… dans leurs contextes anciens ainsi en conséquence, qu'à leur traduction. Les mots, s'ils sont lus tels quels, avec le sens qu'ils ont actuellement, se comportent comme des « faux-amis » (IREM de Rennes, 2017). L'analyse historique offre une voie d'accès au système de pensée mathématique ancien dans sa diversité.

Peut-être existe-t-il une intersection (en gris) qui correspondrait à ce qui est « toujours associé » au concept. Mais ce n'est pas l'objet de mon travail. Il ne s'agira pas non plus de comprendre « l'évolution » des concepts. Cette évolution, longue, est le fruit de très nombreuses réélaborations. Les décrire en un seul ouvrage impliquerait des raccourcis et des simplifications. J'aimerais au contraire élargir, m'intéresser à l'ensemble des cercles : à la diversité des points de vue, pour questionner d'éventuels implicites dans l'enseignement. Cette première partie sera donc articulée avec les suivantes, en didactique. L'hypothèse est que le fait de s'intéresser à l'ensemble des cercles permettra de mieux comprendre « notre cercle » et de constater certaines absences, afin d'en étudier les conséquences. La première partie a permis de constituer une grille de questions d'analyse de manuels scolaires (voir Chapitre II, partie 4, p.230) préalablement à l'expérimentation en classe (Chapitre III). Les

[13] Ce schéma m'a été proposé par Agathe Keller.

recherches de référence en didactique sur l'aire et les unités de mesure seront présentées dans l'analyse préalable (voir Chapitre II, partie 3, p.193) Comme je l'ai expliqué précédemment (voir p.20) cet ordre de présentation n'est pas conforme à la chronologie de ma recherche.

J'évoquerai ensuite plus « rapidement » en ouverture d'autres textes en chinois et en sanskrit qui feront l'objet de publications ultérieures. Le travail d'analyse historique est encore en cours. Il me paraît tout de même important à présenter dans le cadre de cette thèse dans la mesure où il a participé à l'évolution de mes hypothèses et de ma grille d'observation.

2 Les textes anciens en cuneiforme

2.1 Introduction aux textes en cunéiforme choisis

2.1.1 Introduction

Comme cela a été précisé en introduction, j'ai mené sur les textes en cunéiforme une analyse historique et une analyse historico-épistémologique.

Premièrement, l'analyse historique porte sur le calcul d'aire du carré que l'on trouve sur des tablettes du début du deuxième millénaire avant notre ère. La tablette d'argile « UM 29-15-192 », qui en fait partie, sera présentée en premier lieu (voir 2.2, p.48). Dans l'analyse historique, il s'agira d'étudier les « petites variations » : les différentes mesures de longueur choisies dans un corpus plus large d'exercices de calcul d'aire du carré. Les effets de ces valeurs initiales sur les tâches effectuées par les scribes (voir 2.3, p.62) seront analysés. Je me demanderai s'il est possible d'interpréter ces choix de valeurs numériques en termes de « choix pédagogiques », c'est-à-dire comme ayant des effets que les maîtres auraient tenté de contrôler, sur les apprentissages des élèves.

Je travaillerai sur le groupe de huit tablettes similaires d'évaluation de surfaces carrées constitué par Proust (2007, p.190-197). Il s'agit des tablettes CBS 11318, UM 29-15-192, Ni 18, UM 55-21-076, IM 57846, IM 57828, NBC 8082 et NCBT 1913. Les six premières proviennent toutes de Nippur, les deux dernières sont de provenance inconnue. Toutes les tablettes sont de la même période, l'époque paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire avant notre ère).

Je présenterai d'abord quelques éléments de contexte sur Nippur à la période paléo-babylonienne (voir p.29). Je détaillerai notamment les systèmes numériques et métrologiques utilisés (voir 2.1.3, p.36) ainsi que le cursus scolaire (voir 2.1.4, p.40). Ensuite je présenterai en détail l'algorithme de calcul d'aire à partir de la tablette UM 29-15-192. Enfin, je détaillerai pour chaque tablette du corpus, les tâches à effectuer par les scribes pour calculer les aires, afin d'étudier les effets sur ces tâches, des mesures du côté du carré choisies initialement.

Deuxièmement, l'analyse historico-épistémologique débute par la présentation de la tablette « UM 29-15-192 » (voir 2.2, p.48) que j'ai choisie pour les questions qu'elle soulève du point de vue du calcul d'aire dans une situation de bidimensionnalité. Cette tablette a donné lieu à une expérimentation en classe (voir Chapitre III, p.256). Après avoir analysé les petites variations dans le corpus de tablettes paléo-babyloniennes similaires (décrit ci-dessus), j'ai ensuite choisi d'élargir la sélection à des textes datant d'autres périodes, pour les raisons décrites en introduction (voir p.20). Les tablettes étudiées sont les suivantes : VAT-12-593 datée du troisième millénaire avant notre ère, W 23 291 datée du quatrième siècle avant notre ère et AO 6484 datée du troisième siècle avant notre ère.

Après avoir présenté brièvement le contexte lié à ces sources, et expliqué le calcul d'aire qui y est mené, je réunirai les données les concernant, dans un tableau. Celui-ci me permettra de synthétiser les questions soulevées du point de vue du rôle, dans l'évaluation des aires, de la métrologie, de la conception de l'unité de mesure, du nombre, de la multiplication ou de l'addition, du lien entre grandeur et nombre, de la place des grandeurs dans l'algorithme.

Précautions et choix

Le fait même de sélectionner de manière transverse comporte des risques historiques : par exemple, donner l'impression qu'à une période donnée, une seule pratique de calcul de l'aire existait ; ou donner l'impression qu'il y a une évolution historique du « concret » vers « l'abstrait ». La réalité est plus complexe. Ma sélection n'est absolument pas exhaustive, ni forcément représentative.

Le choix de l'aire du carré comporte aussi le risque de donner l'idée que les mathématiques cunéiformes sont de niveau « élémentaire ». J'espère que le fait d'entrer dans les équilibres numériques, métrologiques et la pensée mathématique du système contribuera à donner une impression plus juste des sources. La lecture de Proust (2007) permettra aussi de mieux connaître le cursus de formation des scribes pour les lecteurs intéressés.

J'ai entamé pour cette thèse une large introduction, dans laquelle je donnais des détails pratiques pour la compréhension des sources mathématiques en cunéiforme (périodisation, géographie, écriture cunéiforme, systèmes numériques, tables métrologiques), mais également des éléments de contexte sur Nippur. Il s'agissait d'une forme de « vulgarisation historique » issue de récents travaux. Ce travail m'apparaît aujourd'hui avoir sa place en marge de la thèse, je le présente en Annexe. En effet, il a donné lieu à une réflexion sur la didactique de l'histoire de la Mésopotamie qui me semble maintenant essentielle, en lien avec l'expérimentation en classe (voir Chapitre III). J'espère pouvoir continuer à travailler sur cette piste à l'avenir.

Je passe maintenant aux éléments de contexte historique : la périodisation, la géographie, ainsi que des détails sur les tablettes d'argile, l'écriture cunéiforme et les écoles de scribe seront donnés.

2.1.2 Contexte historique

Photographies

Avec la courtoisie du Musée d'Istanbul (İstanbul Arkeoloji Müzeleri) ainsi que l'Université d'Jena (Institut für Orientalistik, Indogermanistik und Ur- und Frühgeschichtliche Archäologie) pour les photographies des tablettes concernées, je leur adresse toute ma gratitude. Je remercie également Manfred Krebernik. Je remercie les contributeurs du CDLI pour leur travail précieux et Bob Englund pour son aide.

Lorsque les photographies n'ont pas reçu d'autorisation à la date de soumission de la thèse, elles sont remplacées par un lien (lorsque c'est possible), ainsi qu'un rectangle blanc.

Abréviations et indications

- BCE : Before the Common Era, soit avant notre ère. L'abréviation BCE peut aussi être trouvée (dans d'autres textes) sous la forme de BC (« Before Christ »)

- CE : Common Era, soit pendant notre ère. CE peut aussi être trouvé (dans d'autres textes) sous la forme de AD (Anno Domini, « in the year of the Lord »)

- ca. : Date approximative », du latin « circa ».

- Les demi-crochets : ils indiquent un signe abîmé mais identifiable.

- Les crochets : ils indiquent un signe cassé ou effacé.

- La notation des nombres en système SP (voir 2.1.3 p.36) : lorsqu'elle apparaît dans les citations, je me suis permis de modifier la notation des nombres comme 6.40 en 6:40 pour garantir une cohérence avec mon propos. Cette dernière notation est utilisée par plusieurs chercheurs liés aux mathématiques cunéiformes comme Chaigneau, Reynaud, Proust (voir la justification de l'utilisation de cette notation en lien avec le système SP, 2.1.3 p.36)

Les indices : les indices comme le « 3 » pour l'unité de mesure « kuš$_3$ » sont des indications qui permettent au traducteur de savoir quel est le signe ayant pour son « *kuš* » qui est inscrit (il s'agit donc d'une numérotation des signes homophones). En général, les critères adoptés sont les suivants (mais il s'agit du même objet) :

- translittération: kuš$_3$ (caractères droits, indice conservé).

- traduction: *kuš* (italique, pas d'indice). Certaines traductions ont quand même utilisé la notation droite.

- transcription: *ammatum* (nom akkadien de l'unité représentée par le signe *kuš*. C'est la prononciation probable de ce signe). La transcription était très utilisée au début du XX^{e} siècle, mais l'est beaucoup moins aujourd'hui.

La translittération et la traduction : la translittération reproduit au plus près, avec notre alphabet, les notations d'origine. Les mots écrits en sumérien par exemple, restent en sumérien, mais ils sont écrits avec notre alphabet. La traduction donne le sens français des mots, c'est une première forme d'interprétation. Dans la thèse, dans la mesure où j'ai utilisé des traductions et non des translittérations, j'ai retiré les indices numériques et la notation droite (lorsqu'ils étaient adoptés) des travaux de recherche que j'ai cités.

Texte composite : texte artificiel fabriqué à partir de plusieurs sources du même texte. Ils sont parfois édités avec la translittération mais la traduction est aussi possible (ce sera le cas ici).

Périodisation

Je présente en gris les périodes concernées par ce chapitre sur les sources en cunéiforme (analyse historique et analyse historico-épistémologique).

Période (dénominations du CDLI)	Fourchette chronologique
Pré-écriture (Pre-Writing)	ca. 8500-3500 BCE
Uruk V	ca. 3500-3350 BCE
Uruk IV	ca. 3350-3200 BCE
Uruk III	ca. 3200-3000 BCE
Proto-élamite	ca. 3100-2900 BCE
Dynasties Archaïques (Early Dynastic) I-II	ca. 2900-2700 BCE
Dynasties Archaïques IIIa /Fara	ca. 2700-2500 BCE
Dynasties Archaïques IIIb	ca. 2500-2340 BCE
Ebla	ca. 2350-2250 BCE
Période d'Akkad/*Sar*gonique (Old Akkadian)	ca. 2340-2200 BCE
Elamite linéaire (Linear Elamite)	ca. 2200 BCE
Lagash II	ca. 2200-2100 BCE
Harappan	ca. 2200-1900 BCE
Néo-sumérienne / Ur III	ca. 2100-2000 BCE
Isin-Larsa (Early Old Babylonian)	ca. 2000-1900 BCE
Paléo-assyrienne (Old Assyrian)	ca. 1970-1700 BCE
Paléo-babylonienne (Old Babylonian)	ca. 1900-1600 BCE
Médio-hittite (Middle Hittite)	ca. 1500-1100 BCE
Médio-babylonienne (Middle Babylonian)	ca. 1400-1100 BCE
Médio-assyrienne (Middle Assyrian)	ca. 1400-1000 BCE
Médio-élamite (Middle Elamite)	ca. 1300-1100 BCE
Néo-assyrienne (Neo-Assyrian)	911-612 BCE
Néo-élamite (Neo-Elamite)	770-539 BCE
Néo-babylonienne (Neo-Babylonian)	626-539 BCE
Achéménide (Achaemenid) / Empire Perse	547-331 BCE
Hellénistique/Séleucide (Hellenistic)	323-63 BCE
Parthes (Parthian)	247 BCE - 224 CE
Sassanide (Sassanian)	224-641 CE

Tableau 2-1 : chronologie

La périodisation (voir Tableau 2-1) donne les dates approximatives adoptées par le CDLI (http://cdli.ucla.edu/)[14], basées sur la chronologie moyenne.

Pour la périodisation, voir aussi en Annexe.

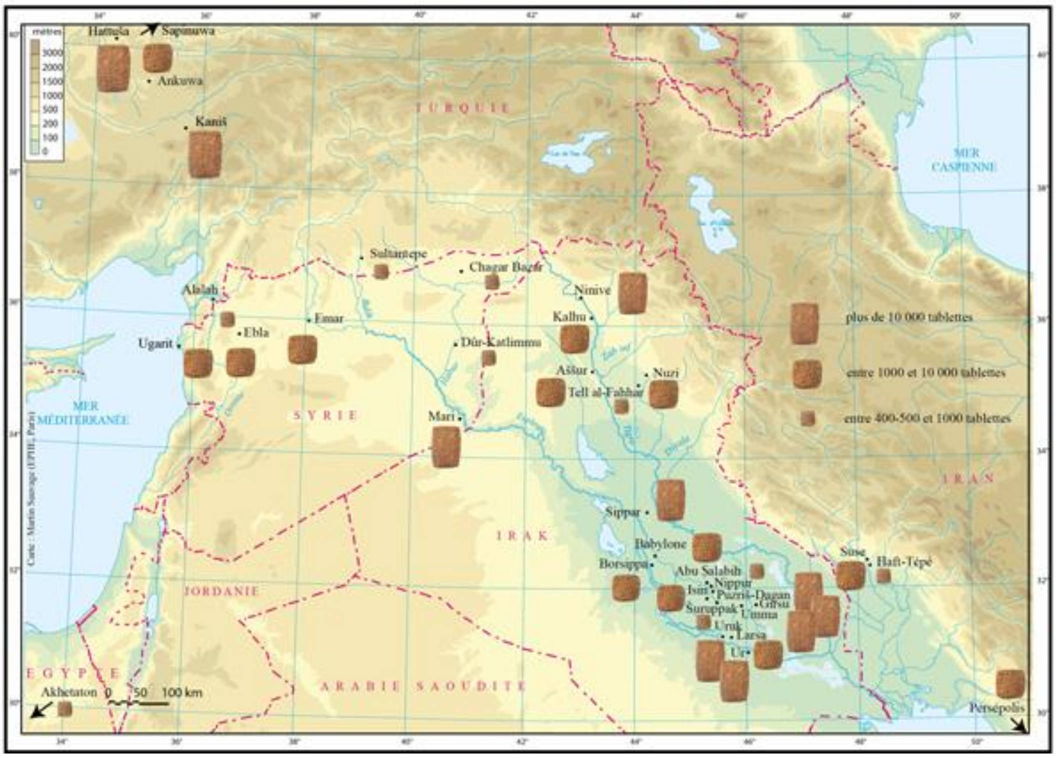
La Géographie - Mésopotamie

La première carte (Carte géographique 2-1 – la Mésopotamie à l'échelle du monde) donne une idée de la localisation de la Mésopotamie à l'échelle du monde (point grisé). La deuxième carte (Carte géographique 2-2) permet une vue plus locale de la Mésopotamie, de quelques cités et des endroits où ont été trouvés les tablettes, la Mésopotamie couvrant approximativement l'emplacement de l'Irak actuel. Enfin, la dernière carte (Carte géographique 2-3 – Tablettes mathématiques et scolaires au Proche-Orient)[15] donne une idée de la répartition des tablettes mathématiques et scolaires à la période paléo-babylonienne. Les cartes ne peuvent donner qu'une idée très partielle de la géographie (inéluctablement mouvante) et de l'occupation de la Mésopotamie, sur une période… de 8000 ans.

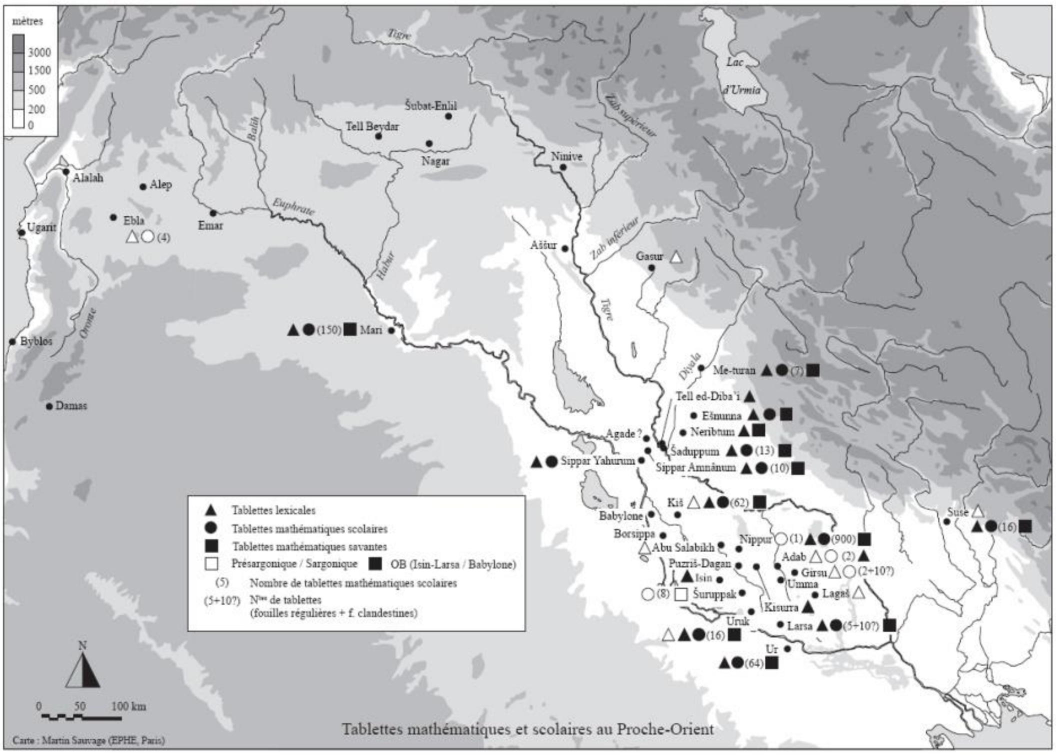
Carte géographique 2-1 – la Mésopotamie à l'échelle du monde (Britton et Kent, s.d.)

14 Il s'agit d'un site de référence pour les assyriologues, qui répertorie notamment les tablettes en cunéiforme (photographies, copies, translittérations, traductions, provenance, datation, publications, photos)

[15] Les deux dernières cartes proviennent des travaux de recherche de Martin Sauvage.



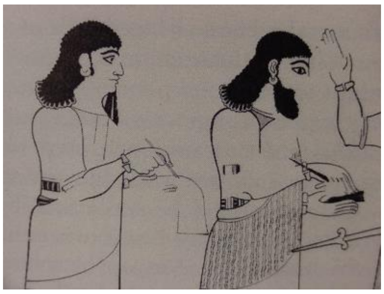
Carte géographique 2-2 : la Mésopotamie et les tablettes (Sauvage et Faivre, s.d.)



Carte géographique 2-3 – Tablettes mathématiques et scolaires au Proche-Orient, période paléo-babylonienne (Sauvage, s.d. dans Proust, 2007, p.281)

Les tablettes d'argile

Je vais commencer par une introduction rapide du support étudié (les tablettes d'argile) ainsi que de l'écriture cunéiforme. Ensuite je préciserai le fonctionnement de l'école de scribes et introduirai la reconstitution du cursus scolaire par les historiens, sur laquelle je me base pour l'analyse historique de mon corpus. Les tablettes étudiées ici sont écrites sur de l'argile. Pourtant, l'argile n'a pas été le seul matériau utilisé pour écrire[16]. La situation diffère entre les premier et deuxième millénaires, au premier millénaire l'argile fait exception.



Représentation 2-1 : scribes assyriens écrivant sur de l'argile et du parchemin (ou papyrus), ca. 744-727 BCE (Mc Call, 1993, p.33) – période Néo-assyrienne

Les tablettes sont souvent imaginées comme de grande taille du fait des photographies, qui les grossissent pour mettre en valeur les signes en cunéiforme. Pourtant s'il existe effectivement des tablettes de 50 cm, de nombreuses tablettes sont plus petites. Les brouillons des écoles de scribes, par exemple, sont des tablettes de 5 à 20 cm de côté environ (Proust, 2007, p.20). Elles sont carrées, rectangulaires ou lenticulaires et comportant parfois des colonnes, et peuvent tenir dans la main. La face et le revers sont régulièrement utilisés et parfois même les bords (en utilisant la profondeur). L'instrument d'écriture est un calame[17].

> [...] c'est-à-dire une tige taillée en biseau qui, d'après son nom sumérien, devait être fabriquée à l'origine en roseau. La texture fibreuse de la plante laisse parfois des traces cannelées dans l'impression des signes sur l'argile, et produit un effet de redoublement des chevrons ou des « jambes » de clous. (Proust, 2007, p.81)

L'écriture cunéiforme, le sumérien et l'akkadien

L'extrait suivant introduit à merveille la présence des langues que sont le sumérien et l'akkadien à l'école des scribes. A la période étudiée, l'école se fait en sumérien comme si aujourd'hui, les élèves étudiaient en latin. Je donne en Annexe des détails sur le statut de ces dialogues.

1. Jeune homme, [es-tu un écolier? – Oui, je suis un écolier]
2. Si tu es un écolier,
3. connais-tu le sumérien ?
4. Oui, je peux parler le sumérien.
5. [Tu] es si jeune, comment peux-tu t'exprimer (si bien) ?
6. J'ai écouté maintes fois les explications du maître,

---

16 Cette illustration vient d'une peinture murale de Til Barsip pendant le règne de Tiglath-Pileser III (McCall, 1993, p.33) A ma connaissance, ces sources en papyrus ou parchemin (peau d'animal) ne sont pas parvenues jusqu'à nous (seulement de l'argile ou de la pierre) et les papyrus ou parchemins à notre disposition seraient plus tardifs.

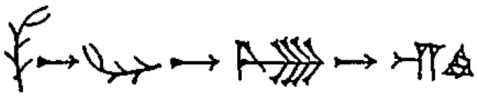
17 Voir Tanret (2002, p. 25).
En classe aujourd'hui, les baguettes de restaurants chinois sont utilisées avec les élèves lors des ateliers « écoles des scribes » conçus par Cécile Michel et Brigitte Lion, auxquels j'ai participé dans le cadre de leur animation par Christine Proust.

7. je vais te répondre.

Extrait du *Dialogue 1* traduit par Civil (1985)

Une écriture, deux langues. Bottéro (1994, p.VII-XXVI) rappelle que la découverte de la Mésopotamie est une « découverte moderne ». Il explique que sa connaissance n'a d'abord « pas été le résultat de fouilles délibérées » car « rien, ou presque, ne subsistait sur le sol de ce vieux pays qui retînt le regard ». Pour lui, c'est un travail de déchiffreurs, de philologues et linguistes. Il s'agit du déchiffrage d'une écriture, en forme de clous[18] :

> Seules intriguaient depuis plusieurs siècles voyageurs et amateurs d'antiquaille des briques ou des plaquettes d'argile, cuite ou séchées au soleil, que l'on trouvait sur place, revêtues d'un enchevêtrement bizarre et inquiétant de traits en forme de coins ou de clous : de « cunéiformes ». C'est lorsqu'on se fut persuadé qu'il s'agissait bel et bien d'une écriture que vint l'envie de la déchiffrer. (Bottéro , 1994, p.VIII)



Représentation 2-2 : : évolution du signe GI =le roseau ; signe 85 (Labat et Malbran-Labat, 2002, p.76[19])
Voir les tablettes W15897,c21 (Uruk, vers -3300) et Ist Ni 3909 (Nippur, vers -1800[20])

La représentation montre l'évolution du signe qui représente le roseau, du dessin à l'écriture cunéiforme. Bottéro explique qu'en 1857, après un demi-siècle d'efforts, on découvre une langue sémitique apparentée à l'hébreu, l'araméen et l'arabe : l'akkadien. Une écriture en forme de clous existe, pour cette langue, dont on comprend que des caractères portent la valeur phonétique tirée de leur prononciation ; de manière un peu similaire à ce qui s'est produit en chinois.

> Ainsi pouvait-on désormais juxtaposer les signes de « la bouche » et de « la main » : *ka-shu*, sans prétendre évoquer le moins du monde ces deux parties du corps, mais simplement pour écrire, mettons, le mot *kâshu* : « venir en aide », *kashushu* : « une arme mythologique », etc. (Bottéro , 1994, p.X)

Petit à petit, on réalise que l'invention de cette écriture cunéiforme est l'œuvre d'un peuple plus ancien, mais encore inconnu, puisque tout ce qui avait été trouvé dans le sol par les archéologues « se rapportait aux Babyloniens et Assyriens, dont on pouvait lire et comprendre la langue, sémitique, sur les inscriptions et tablettes d'argile » (Bottéro, 1994 p.XI). Mais ce sont les « dictionnaires bilingues », tablettes utilisées dans les écoles, qui permettront de comprendre le sumérien grâce à l'akkadien.

> Il est vrai que parmi ces tablettes, on avait retrouvé quelques documents fort curieux, disposés comme des sortes de dictionnaires bilingues : sur une colonne s'y alignaient des mots « assyriens[21] » et, en face, d'autres qui n'avaient rien de sémitique et qui rappelaient, voire reprenaient quelquefois ceux que les

---

[18] Pour davantage de précisions, voir Glassner (2000).

[19] Cet exemple est tiré de la conférence de Christine Proust dans les écoles, collèges et lycées : Ecole de Scribes.
1- Pictogramme (env. 3500 – 2600)
2- Signe cunéiforme (env. 2600 – 1600)
3- Signe simplifié, suppression des obliques (1[er] millénaire)

[20] Diapositive empruntée au document présenté aux élèves par Christine Proust

[21] Il s'agit de la langue akkadienne

signes cunéiformes avaient gardés pour valeurs phonétiques et de l'existence desquels on avait inféré d'abord celle des Sumériens. (Bottéro , 1994, p.XI)

C'est finalement grâce aux fouilles de Tello, dans le Sud, et de la découverte de quantité d'inscriptions « sur argile et sur pierre, quelques unes fort longues » (Bottéro, 1994, p.XII), que le sumérien apparait comme une langue à part entière et non plus seulement comme une liste de mots. La cité de Nippur à la période paléo-babylonienne est « le lieu par excellence de la transmission de l'héritage culturel sumérien » selon Proust (2007, p.19) :

> jusqu'à une époque assez tardive, on y apprend le sumérien, alors qu'il a disparu comme langue vivante au profit d'une langue sémitique venue du nord et de l'ouest, l'akkadien. Les écoles de scribes de Nippur jouissaient d'un grand prestige dans toute la Mésopotamie antique, et elles nous ont laissé la majeure partie des sources qui nous permettent aujourd'hui d'avoir accès à la littérature sumérienne. La formation des scribes est un domaine de recherche qui s'est considérablement développé en assyriologie ces dernières années. L'intérêt s'est notamment porté sur un type de sources qui n'avait été que très partiellement pris en considération auparavant : les tablettes d'écoliers. Ces brouillons d'argile sont des témoins de la vie quotidienne des écoles et permettent d'en reconstituer des éléments essentiels : l'organisation du cursus, les méthodes et le contenu de l'enseignement. M. Civil, A. Cavigneaux, S. Tinney ont montré l'intérêt d'établir une typologie des tablettes pour comprendre la fonction de ces textes. Exploitée de façon systématique dans son étude de textes lexicaux, cette typologie a permis à N. Veldhuis de reconstituer le cursus d'enseignement du sumérien dans les écoles paléo-babyloniennes. Proust (2007, p.19)

A Nippur, période paléo-babylonienne (ca. 1900-1600 B.C.E), l'école des scribes se fait donc en sumérien, comme si aujourd'hui en France, elle se faisait en latin.

L'école des scribes

> Edubbâ 1 (5.1.1)
> 1 Ecolier, dépêche-toi, où es-tu (donc) allé?
> 2 — Je suis allé à l'école.
> 3 — Qu'as-tu fait à l'école?
> 4 — J'ai récité ma tablette et j'ai mangé mon casse-croûte.
> 5 J'ai formé ma tablette, je l'ai écrite et je l'ai achevée. [...] (Attinger, 2002)

Ce texte littéraire en sumérien, écrit pour l'enseignement, porte sur la vie dans les écoles. Il fait partie du genre de texte baptisé « textes edubba » par les assyriologues. Le texte en question apporte beaucoup d'informations concrètes. Pourtant, l'image de l'école portée par ce texte est remise en question, notamment par la confrontation avec les données archéologiques, qui font état de très petites écoles.

> L'image de l'école qui émane de ce texte est celui d'une institution académique de grande envergure :
> - L'enseignement se déroule dans un lieu dédié, distinct du domicile des écoliers : l'écolier va de son domicile à l'école et revient de l'école (lignes 2, 22).
> - Le personnel est nombreux et spécialisé : 13 fonctions différentes sont énumérées dans les lignes 23-41.
> - Le maître est un professionnel qui semble payé par la famille des élèves, ou, au minimum, profite de ses cadeaux (lignes 47 et ss.).

> - La discipline est stricte et codifiée par les « règles de l'école » (ligne 28). Les horaires (23), la place (31), le bavardage (34-35), le maintien (29, 36), les allées et venues (36-38), etc. sont sévèrement contrôlés, et les manquements à ces règles sont punis.
> C'est cette image qui, on le verra, est remise en question aujourd'hui par plusieurs historiens. (Proust, 2015, p.21)

Proust (2015) revient sur le statut de « jours d'école ». L'enjeu serait peut-être pour les scribes de former un « esprit de groupe » et même davantage, une certaine stabilité du pouvoir.

> Dans un premier temps, les textes *edubba* ont été considérés par les historiens comme des témoignages sur les écoles paléo-babyloniennes, et les réalités décrites dans ces textes ont été prises pour des faits historiques. Dans un deuxième temps, il a été souligné qu'il s'agissait de textes écrits pour l'enseignement et que leur fonction première était idéologique. Il s'agissait de forger un esprit de « caste » dans le but de souder derrière le roi une couche de scribes de haut rang, et sans doute aussi, au-delà de la transmission de « l'art du scribe », d'asseoir une certaine vision de la politique, des élites, de l'histoire des dynasties royales, propres à assurer la stabilité du pouvoir. La vision des écoles de scribes dans la littérature semblait dès lors volontairement idéalisée. [...] (Proust, 2015, p.22-23)

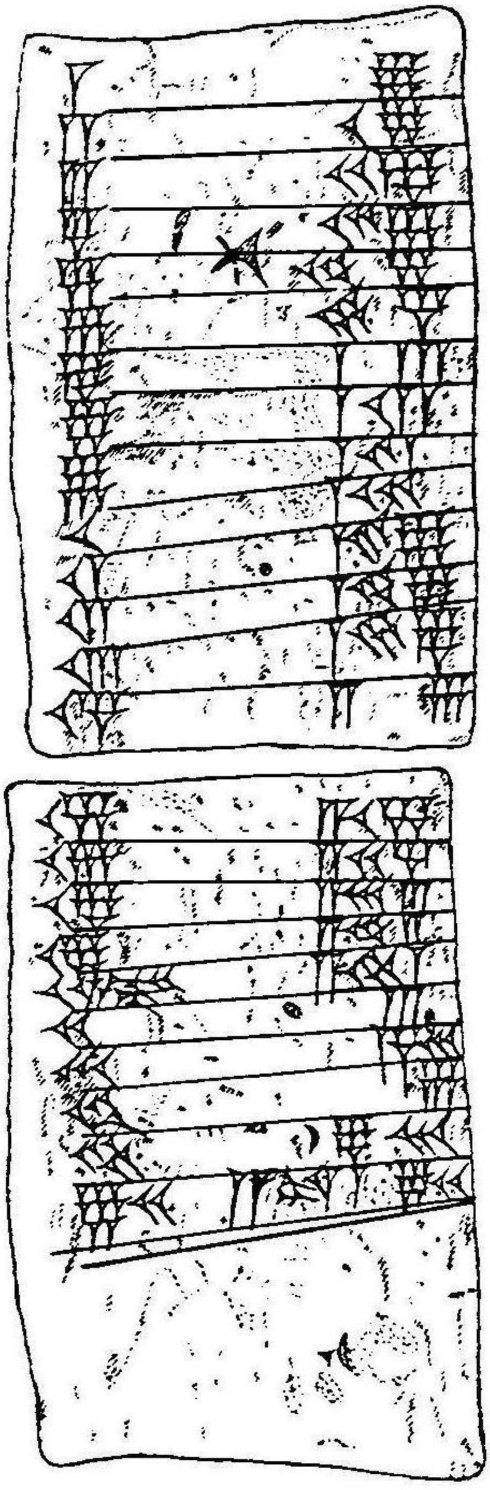
Ces éléments de contexte amènent à parler du cursus scolaire, tel qu'il a été reconstitué pour Nippur à la période paléo-babylonienne, et de son contenu. Le cursus sera présenté plus loin (voir 2.1.4, p.40). Je passe maintenant à l'un des aspects clé pour la compréhension de mon travail : je vais détailler le fonctionnement du système numérique sexagésimal positionnel flottant utilisé à cette période.

2.1.3 Le système numérique SP : comprendre grâce à une tablette

Pour introduire le système numérique sexagésimal positionnel flottant, que j'appellerai par la suite système « SP » pour « sexagésimal positionnel » [22], j'incite le lecteur à étudier pendant plusieurs minutes cette tablette (photographie et copie, page suivante) et à essayer de la traduire, afin de se placer dans la situation la plus proche possible de celle qui a été proposée aux élèves (voir l'expérimentation, en classe, Chapitre III). Ce développement me permettra d'expliquer les termes « flottant », « positionnel » et « sexagésimal »[23].

Voir : Photographie 2-1 : tablette HS 217a (face et revers) (CDLI, s.d.)
https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254585

[22] En anglais « SPVN » pour « sexagesimal place value notation » ou « notation positionnelle sexagésimale ».
[23] Première publication : Hilprecht 1906, n°15, pl.7. Voir aussi : Proust (2008, pl.56, p.61)
https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254585
Photographie : Proust (2016, p.4) avec l'accord de l'Université d'Jena



Représentation 2-3 : copie (face et revers) tablette HS 217a (face et revers) (CDLI, s.d.)

Le lecteur aura peut-être repéré les signes (colonne de gauche) représentant 1, 2, 3, etc. En regardant la colonne de droite, le lecteur devinera peut-être la nature de cette tablette. Cette notation apparaît dès ca. 2200-2000 B.C.E dans les sources et se retrouve jusqu'au début de notre ère.

Premier élément d'observation : Colonne de droite. En regardant la colonne de droite, le lecteur repèrera les nombres suivants : 9, 18, 27, 36, etc. Il s'agit donc… d'une table de multiplication par 9. Maintenant, en regardant plus précisément la translittération de la tablette[24], il est possible de repérer quelques particularités. J'utiliserai toujours le signe « : » pour séparer les chiffres dans les nombres, j'en donnerai la justification par la suite. J'incite le lecteur à observer le Tableau 2-2 : translittération de la tablette.

FACE		REVERS	
1	9	15	2:15
2	1 8	16	2:24
3	2 7	17	2:33
4	3 6	18	2:42
5	4 5	20-1	2:51
6	5 4	20	3
7	1: 3	30	4:30
8	1:12	40	6
9	1:21	50	7 :30
10	1:30	8:20 a-ra$_2$	1 8:20
11	1:39		
12	1:48		
13	1:57		
14	2: 6		

Tableau 2-2 : translittération de la tablette[25]

Deuxième élément d'observation : le lecteur sera peut-être étonné par la valeur « 7 × 9 » qui n'est pas « 63 » mais « 1:3 ». Ici, en lisant comme sur un lecteur vidéo ou un radioréveil (en lisant 1 puis 3) il est possible de reconnaître, par exemple, une soixantaine et trois. Mais la comparaison avec la base 60 et les radioréveils s'arrête ici, car en allant plus loin dans la table, par exemple « 20 × 9 », le lecteur s'interrogera peut-être à nouveau.

Troisième élément d'observation : comment savoir si le « 3 » est positionné plus à gauche que le 9 de « 1 × 9 » ? Dans les sources, rien n'indique si 3 vaut effectivement 3, ou bien 3×60, ou encore 3×60^2, 3×60^3 etc., ni même 3×60^{-1}. Ce qui est important, c'est la position relative : dans « 2:6 » chaque clou du « 2 » est bien soixante fois supérieur à chaque clou du « 6 ». Mais l'ordre de grandeur n'est pas représenté dans l'écriture cunéiforme du système SP. Houzel (dans Proust 2007, p.12) en explique l'intérêt pour la souplesse de calcul.

> Le système de numération sexagésimal est positionnel, mais il ne comporte pas de zéro et la place de l'unité n'est pas marquée. Cela n'est pas trop gênant car 60 est un nombre suffisamment grand pour que le contexte permette de rétablir l'ordre de grandeur. En accord avec les textes, et contrairement à d'autres auteurs, Christine Proust considère que l'absence d'une place fixée pour l'unité fait partie de la conception même du nombre dans les mathématiques babyloniennes ; elle adopte une transcription cohérente avec cette conception et fidèle à la documentation cunéiforme. Le niveau d'abstraction de ces nombres est donc très élevé, puisque même leur ordre de grandeur n'est pas fixé d'une manière absolue ; seul l'ordre de

24 Hilprecht (1906, n°15, pl. 7)

25 J'ai effectué la translittération pour cette thèse afin de conserver les positions des nombres les plus conformes possibles à la tablette.

> grandeur relatif des divers nombres intervenant dans un même calcul est déterminé. Cette circonstance donne une grande souplesse aux méthodes de calcul babyloniennes, analogues aux calculs en virgule flottante de nos ordinateurs modernes. Les tables d'inverses (chapitre 5) mettent en évidence ce caractère des nombres abstraits babyloniens. (Houzel, dans Proust 2007, p.12)

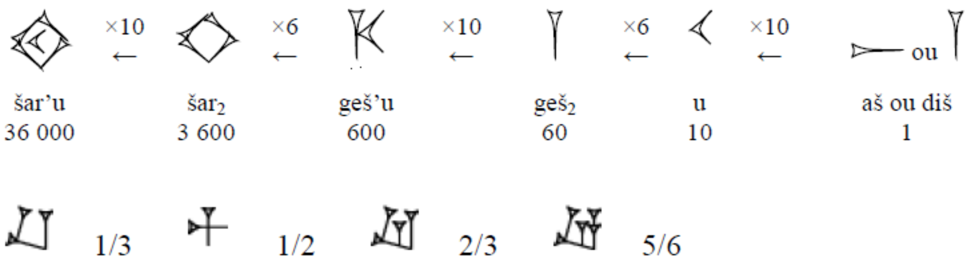
Plus haut, j'ai utilisé le terme de « flottant » en parlant de ce système SP, utilisé pour calculer. En effet, cela vient de l'interprétation de Proust (2013), selon laquelle l'ordre de grandeur n'est pas conservé pour ce système numérique.

> [...] derrière l'apparente similarité entre le calcul sexagésimal ancien et le système sexagésimal que nous connaissons bien, se cachent des différences subtiles mais profondes. Pour souligner l'importance de ces différences, je me limiterai à deux aspects de la notation ancienne : 1) la position des unités dans le nombre n'est pas indiquée ; 2) les nombres sexagésimaux positionnels anciens servaient essentiellement aux multiplications et aux inversions. Le premier de ces deux aspects est sans doute le plus déroutant pour le lecteur moderne. En effet, il nous est nécessaire de connaître la position des unités dans un nombre de façon à savoir quelle quantité est représentée par ce nombre. Par exemple, dans notre système décimal, nous souhaitons distinguer « un » de « mille » ou de « un dixième ». La tentation est donc grande de remédier à l'incertitude de la notation cunéiforme par l'ajout, dans les traductions et les commentaires, de marques telles que virgule ou zéro en position finale – et c'est ce que font tous les spécialistes [...] (Proust, 2013, p.24-25)

Le système SP est « flottant » en opposition avec d'autres systèmes numériques (non « flottants ») qui, servant à mesurer et compter, conservent les ordres de grandeur.

Le système numérique « S »

Par exemple, le « système S » est un système numérique additif. Le nombre « 662 » s'écrirait dans ce système « 1 + 1 + 60 + 600 »[26]. Pour une présentation du système S, voir Proust (2007, p.70) ou (Proust, s.d.).



Représentation 2-4 : le système S (Proust, 2013, p.23)

[26] C'est un système numérique en notation sexagésimale non positionnelle. http://culturemath.ens.fr/materiaux/nombres/nombres-systemeS.htm. Un autre système numérique répandu est appelé « système G ».

Le système SP, aussi appelé « notation sexagésimale positionnelle », daterait de 2000-2200 BCE. Sa date d'apparition est discutée, voir par exemple : Friberg[27] (2005), Ouyang et Proust (*à paraître*). En résumé, le système SP est bien positionnel : la position du symbole « un rang plus à gauche » indique une puissance de 60 supérieure à la position « un rang plus à droite ». L'écriture des nombres inférieurs à 60 est additive, en revanche (par exemple, 12 s'écrit 10 + 2 ; 3 s'écrit 1 + 1 + 1).

Le système est « flottant » puisque l'ordre de grandeur (la puissance de 60) n'est pas fixé. Dans la table de multiplication par 9, on lit que le produit de 9 par 7 est 1:3 (un clou, espace, trois clous), ce qui signifie que le clou placé dans la position de gauche vaut 60 fois plus que ceux qui se trouvent dans la position de droite (et qui composent le chiffre 3). Mais l'écriture cunéiforme n'indique pas quelle est la position des unités dans le nombre.

Le système est « sexagésimal » car les échanges positionnels se font à 60, le nombre qui suit 59 est 1. Maintenant que des éléments ont été donnés sur les systèmes numériques, je vais pouvoir présenter le cursus scolaire général à Nippur. Je me reposerai sur ce cursus pour mon analyse des « petites variations ».

2.1.4 Le cursus scolaire à Nippur

Proust (2007) a proposé une reconstitution du cursus scolaire à Nippur, en fonction d'indices précis trouvés dans les tablettes. C'est sur cette reconstitution que je vais m'appuyer pour certaines hypothèses de mon analyse historique. Le fait que certaines tablettes comportent des mathématiques et du sumérien a été également un point d'appui important pour la reconstitution (Proust, 2007, p.262). En voici le résumé selon la reconstitution de Proust (2007, p.57-58), à partir des tablettes qui ont été retrouvées[28].

> En ce qui concerne le sumérien, le cursus élémentaire de Nippur se déroule en plusieurs phases :
>
> - Les listes élémentaires (syllabaires) permettent l'apprentissage des signes cunéiformes les plus simples. Elles sont suivies de listes de noms propres.
>
> - Six listes thématiques énumèrent le vocabulaire sumérien organisé par thèmes [...] Chaque liste thématique est composée de 500 entrées en moyenne, et l'ensemble représente plusieurs milliers d'entrées à mémoriser par les jeunes scribes. L'ordre des listes thématiques est à peu près sûr.
>
> - Six listes acrographiques sont des listes de signes cunéiformes classés principalement selon leur forme, mais ce principe est combiné localement avec des associations phonétiques et thématiques. Le nombre d'entrées des listes acrographiques est comparable à celui des listes thématiques.
>
> - Deux listes de phrases (modèles de contrats et proverbes) sont les premiers textes sumériens. Leur ordre et leur position à la fin du cursus élémentaire sont sûrs. Quant aux listes et tables métrologiques et numériques, elles ont été insérées à la fin du cursus élémentaire par N. Veldhuis et E. Robson, à des positions légèrement différentes (tableau 5)[29]. (Proust, 2007, p.57-58)

[27] Il y présente plusieurs autres systèmes numériques, de principe additif.

28 Le lecteur retrouvera l'explication d'une partie des termes du Dialogue 1 (voir p.128). comme par exemple (lignes 13-14): « J'ai écrit toutes les lignes depuis (la liste de noms propres) *Inanna-teš*, jusqu'à (la série) *lu = šū*, même les formes désuètes. »

[29] Voir aussi Robson (2002, p. 39), Veldhuis (1997, p. 41, p.132-133) et Draffkorm Kilmer (1992, p.100)

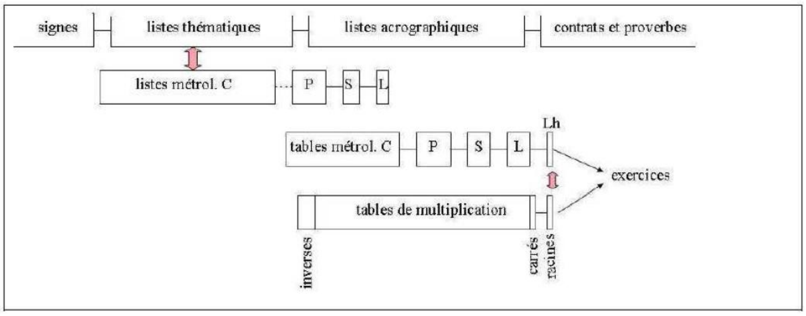


Tableau 2-3 : reconstitution du cursus (Proust, 2013, p.28)

Pour le niveau avancé, reconstitué dans ses premières étapes, voici la synthèse de Proust (2007, p.60-61) :

> Le cursus de niveau avancé a été reconstitué en partie dans ses premières étapes à Nippur. Il comprend un premier groupe de 4 hymnes, puis un deuxième groupe de 10 hymnes et mythes ; E. Robson[30] a identifié un troisième groupe de 14 textes incluant 4 compositions Eduba. La place de la langue sumérienne dans l'éducation scribale à Nippur, à une époque où elle a été supplantée comme langue vivante par l'akkadien, est tout à fait particulière. Les archives scolaires de Nippur, en particulier celles de la Maison F, fournissent une part très importante des sources de la littérature sumérienne actuellement connues. Dans la Maison F par exemple, un seul texte littéraire est écrit en akkadien. (Proust, 2007, p.60-61)

Du point de vue mathématique, il était nécessaire de connaître par cœur un certain nombre de listes ou tables, servant ensuite à des calculs plus complexes : listes et tables métrologiques, tables numériques.

> Ces listes sont :
> - des listes métrologiques : ce sont des énumérations de mesures de capacité, poids, surface et longueur qui permettent d'apprendre les systèmes d'unité de mesure, leur écriture, les facteurs qui les définissent par rapport aux multiples et sous-multiples, les systèmes numériques associés.
> - des tables métrologiques, qui permettent de transformer les différentes mesures en nombres sexagésimaux positionnels. Ces listes permettent d'introduire la numération sexagésimale positionnelle.
> - les tables numériques (inverses, multiplications, carrés, racines carrées et cubiques). (Proust, *à paraître*, p.27)

Le tableau suivant donne les détails des listes et tables métrologiques.

[30] Robson (2001b, p. 55)

> On trouve à Nippur toutes les catégories de tables numériques attestées en Mésopotamie ; ces tables forment un ensemble composé des catégories suivantes :
> - une table d'inverses,
> - 38 tables de multiplication,
> - une table de carrés,
> - une table de racines carrées,
> - une table de racines cubiques.
>
> (Proust, 2007, p.117)

séries	sections
listes métrologiques	liste C (capacités) liste P (poids) liste S (surfaces) liste L (longueurs)
tables métrologiques	table C (capacités) table P (poids) table S (surfaces) table L (longueurs)
tables numériques ordinaires	table d'inverses tables de multiplication table de carrés

Tableau 7 : unités de textes

Tableau 2-4 : listes et tables apprises par les scribes (Proust, 2007, p.92)

Ensuite, un niveau plus avancé demandait d'utiliser la multiplication, l'inversion de nombres, la division, et de calculer des surfaces et volumes.

> A un niveau plus avancé encore, les exercices portaient sur des problèmes linéaires et quadratiques. Parmi les problèmes de géométrie les plus courants, figurent les problèmes de partage du trapèze, probablement inspirés des pratiques d'arpentage et d'héritage. (Proust, 2015, p.27)

C'est en croisant différentes informations : « typologie des tablettes, contenu des textes, disposition des textes sur la tablette, éléments de structuration tels que en-têtes et colophons » Proust, *à paraître*, p.27) que les chercheurs ont pu reconstituer avec précision l'ordre chronologique du cursus de formation, du moins la partie dont les traces sont accessibles[31]. Il faut rajouter de la prudence quant au cursus. D'une part, « ces sources ne nous informent que sur la part écrite de l'enseignement, car c'est la seule qui ait laissé des traces parvenues jusqu'à nous » (Proust, *à paraître*, p.25). Mais selon Proust (2007, p.25), il est possible par exemple que « la musique et le théâtre aient aussi fait partie de la formation des scribes[32]. »

[31] Proust remarque que le cursus correspond à celui évoqué dans le Dialogue 1 :

> Il est à noter que le curriculum de Nippur ainsi reconstruit correspond bien à la description des études contenue dans le texte « Dialogue 1 », ce qui confère une certaine crédibilité à ce genre de textes. Les sources littéraires et les tablettes scolaires dessinent un portrait relativement cohérent du cursus de formation dans les écoles, tout au moins à Nippur. (Proust, 2015, p.27)

[32] Note de Proust (2015, p.25) :

De plus, connaître l'ordre des listes ne dit pas quel était leur usage, ni si elles étaient mémorisées. Connaître la présence d'un exercice ne dit pas s'il était conçu pour être résolu ou comme support d'enseignement, avec des détails oraux, etc.

Les listes et tables métrologiques

Le cursus mentionné ci-dessus cite des « listes métrologiques » et des « tables métrologiques » de « capacités[33] », « poids », « surfaces », « longueurs ». Ces listes et tables sont importantes pour mon propos.

En ce qui concerne les listes métrologiques, il s'agit de listes de mesures, en ordre croissant, sur un thème (capacités, poids, surfaces, longueur), en colonnes (Proust, 2007, p.98).

Ni 2782*

Face

1/3 sila$_3$ še
1/2 sila$_3$ še
5/6 sila$_3$ še
1 sila$_3$ še

Revers

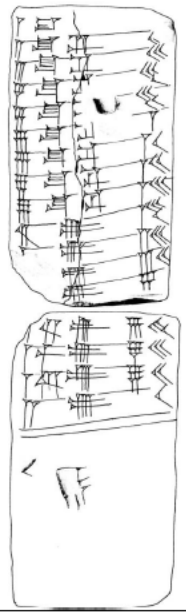
1 1/3 sila$_3$ še
1 1/2 sila$_3$ še
1 5/6 sila$_3$ še
2 sila$_3$ še
3 sila$_3$ še

Tableau 2-5 : liste métrologique (Proust, 2007, p.115)

Les tables métrologiques diffèrent quelque peu. En face de chaque unité de mesure (à gauche) se trouve un nombre (à droite). L'interprétation de ces tables sera discutée plus loin. Voici ce dont il s'agit.

Michalowski met en doute le fait que la musique ait été enseignée dans les « edubba » (Michalowski 2010). Il pense que cette formation appartenait plus au domaine de la liturgie qu'au monde laïc des écoles. A Ur et à Nippur, la musique semble avoir été enseignée dans des établissements séparés et spécialisés, portant un nom spécifique (conservatoire). L'apprentissage de la musique pouvait commencer très jeune (Ziegler, 2007)

[33] Les capacités sont associées à la mesure du volume, et donnent un nombre de grain pour une jarre de volume donné, par exemple.



1 *šu-si*	10
2 *šu-si*	20
3 *šu-si*	30
4 *šu-si*	40
5 *šu-si*	50
6 *šu-si*	1
7 *šu-si*	1:10
8 *šu-si*	1:20
9 *šu-si*	1:30
1/3 *kuš*	1:40
1/2*kuš*	2:30
2/3 *kuš*	3:20
5/6 *kuš*	4:10
1 *kuš*	5
1 1/3 *kuš*	6:40
1 1/2*kuš*	7:30
1 2/3 *kuš*	8:20
2 *kuš*	10

Tableau 2-6 : table métrologique des longueurs, HS 241 (Proust, 2016, p.8)[34]

Les historiens ont reconstitué, grâce à plusieurs tablettes, un système d’unités de mesure de cette période : ils ont fait ce que l’on appelle des « tables (métrologiques) composites ». Elles permettent de connaitre, par exemple, les facteurs entre différentes unités de mesure d’une grandeur donnée (longueurs par exemple). Proust (2007, p.311) a établi les tables métrologiques composites pour Nippur, période paléo-babylonienne, sur la base des collections conservées à Istanbul, Philadephie, Iéna.

> Il est constitué des éléments (signes et items) présents au moins une fois dans ces sources, et non pas des éléments statistiquement les plus fréquents: c’est une version maximale et non une version moyenne. (Proust, 2007*,* p.310)

Il faut noter que les tables métrologiques des mesures de poids et des surfaces commencent de la même façon (jusqu’au *ma-na*). Par la suite, ce sera donc la table métrologique des poids qui sera utilisée pour les mesures de surfaces inférieures au *sar*.

L’extrait de la table métrologique des longueurs (composite) ci-dessous est une traduction qui correspond à plusieurs tablettes. L’extrait correspond à la tablette présentée ci-dessus.

[34] Voir aussi le site du CDLI : http://www.cdli.ucla.edu/P388160, première publication : Hilprecht 1906, n°42, pl.27

1 *šu-si*	10
2 *šu-si*	20
3 *šu-si*	30
4 *šu-si*	40
5 *šu-si*	50
6 *šu-si*	1
7 *šu-si*	1:10
8 *šu-si*	1:20
9 *šu-si*	1:30
1/3 *kuš*	1:40
[…]	

Tableau 2-7 : table métrologique de longueurs (composite) (Proust, 2007, p.314)

Les tables numériques

Comme cela a été mentionné ci-dessus, d'autres tables étaient apprises dans le cursus scolaire : les tables d'inverses, de multiplication, de carrés, de racines (carrées et cubiques). Je vais donner ici quelques détails, puisque ces tables permettent d'appréhender le calcul en système SP et seront mentionnées occasionnellement dans mon analyse des « petites variations ».

Les tables d'inverses, les nombres « réguliers »

Les tables d'inverses sont des tables qui font correspondre pour un nombre donné en notation SP, son inverse en base 60. C'est-à-dire le nombre qui, multiplié par le nombre donné, donne une puissance de 60 (c'est-à-dire « 1 »). Pour imaginer les inverses en « base 60 », on peut penser à notre système de mesure du temps : 2 fois 30 minutes donnent 1 heure.

L'inverse de 3 est 20. Cela est noté « igi 3 20 » dans la table.

3 × 20 donne 1 (3 fois 20 minutes donnent 1 heure)

Voici un extrait de table d'inverses :

[…]	
igi 3	20
igi 4	15
igi 5	12
igi 6	10
igi 8	7:30
igi 9	6:40
igi 10	6
igi 12	5
igi 15	4
igi 16	3:45
igi 18	3:20
igi 20	3
igi 24	2:30
igi 25	2:24

Tableau 2-8 : table d'inverses : ERM 14645 (Koslova, s.d., p.470)[35]

La table d'inverses est placée en premier dans les tables numériques (Proust, 2007, p.118). Le calcul de division utilisant la multiplication par l'inverse est un outil rendu possible par le système SP, du fait de ses caractéristiques.

En système SP, « 7 » par exemple, n'apparaît pas car il ne possède pas d'inverse ayant une écriture en système SP finie. Il est « non régulier ».

> 60 étant riche en diviseurs, les nombres réguliers en base 60 sont plus « nombreux » qu'en base 10 : entre 1 et 10, tous les nombres sont réguliers en base 60 sauf 7 (en base 10, seuls 2, 4, 5 et 8 le sont) ; entre 1 et 60, il y a 25 nombres réguliers en base 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54. Les nombres non réguliers en base 60, par exemple 7, portent en sumérien le nom « igi nu », c'est-à-dire « sans inverse ». (Proust, 2007, p.119)

La division de deux nombres, dans le système SP, est effectuée en général en multipliant le premier nombre par l'inverse du deuxième. Dans les cas où le diviseur n'est pas régulier, le problème est traité par certains textes (c'est un autre problème).

Les tables de multiplication

Les tables de multiplication en système SP, comme la tablette HS 217 (voir 2.1.3, p.36), sont au nombre de 38 dans le cursus de Nippur (et non 59, comme on s'y attendrait). Les voici[36] : tables de 50, 45, 44:26:40, 40, 36, 30, 25, 24, 22:30, 20, 18, 16:40, 16, 15, 12 :30, 12, 10, 9, 8:20, 8, 7:30, 7:12, 7, 6:40, 6, 5, 4:30, 4, 3:45, 3:20, 3, 2:30, 2:24, 2, 1:40, 1:30, 1:20, 1:15. En dehors de ces tables, il est possible d'imaginer que le calcul mental ou l'usage d'un abaque était utilisé pour multiplier en base 60 (Proust, 2015, p.27).

> Pour effectuer toutes les multiplications en base 60, il faudrait en théorie mémoriser tous les produits élémentaires (soit 59 tables de 50 produits). Mais l'existence de la base 10 intermédiaire dans l'écriture des chiffres sexagésimaux permet de réduire considérablement le nombre des produits à mémoriser : il suffit

[35] Voir aussi le site du CDLI : http://www.cdli.ucla.edu/P211991

[36] Voir aussi Proust (2007, p.130-131) pour les hypothèses liées aux choix des nombres.

que seules les unités et les dizaines figurent dans ces tables (nombres principaux et multiplicateurs 1 à 10, puis 20, 30, 40, 50), soit 14 tables de 14 produits.

Par exemple, la multiplication de deux nombres à une place sexagésimale telle que 25 fois 32 peut se décomposer en quatre produits partiels figurant dans ces tables réduites :

			25
			32
2×20	→		40
2×5	→		10
30×20	→	10	
30×5	→	2	30
25×32	→	13	20

(Proust, 2007, p.130-131)

Pour multiplier des nombres dont le produit n'est pas donné dans des tables[37], il faut nécessairement faire appel à un algorithme multiplicatif (multiplication par étapes). Il est possible d'imaginer l'usage d'un abaque pour multiplier en base 60 (multiplier un nombre par lui-même, par exemple), (Proust, 2015, p.27). Il pourrait aussi s'agir dans les cas simples, d'une composition mentale des tables mémorisées précédemment.

Les tables de carrés et de racines

Voici un extrait de tables de carrés :

1	1	[1]
2	2	4
3	3	9
4	4	16
5	5	25
6	6	36
[…]		

Tableau 2-9 : table de carrés, HS 224 (TMH[38] Proust 2008, p.64)

Il existe également des tables de racines cubiques ainsi que des calculs de racine (Proust, 2007, p.141)

Mémorisation et autres méthodes

La question de la mémorisation a été étudiée par plusieurs auteurs. Velhuis (1997, p.132) s'est intéressé aux textes lexicaux et Delnero (2012) aux textes littéraires. Ils ont observé les variantes et erreurs dans des duplicata (tablettes de même contenu). Selon ces auteurs, les textes scolaires étaient mémorisés et reproduits de mémoire. Pour d'autres auteurs, ces textes étaient dictés ou copiés sur un modèle. Veldhuis et Delnero s'appuient sur des travaux de

[37] De fait, ces 14 tables à 14 produits sont bien incluses dans la série des tables numériques. Mais il existe beaucoup plus de tables et beaucoup plus d'entrées que cet ensemble minimum. […] En conclusion, plusieurs critères semblent guider le choix des tables de multiplication ; mais l'un d'entre eux est nettement prépondérant : c'est la présence du nombre principal dans la table d'inverses. (Proust, 2007, p.130-131)

[38] Tablettes mathématiques de la collection de Hilprecht (Proust, 2008)

neurosciences pour faire le lien entre les aspects cognitifs et la reproduction de textes mémorisés. Proust (2017) abonde en ce sens.

Je n'utiliserai pas ici le caractère mémorisé des multiplications pour mes conclusions sur le calcul d'aire. Je ferai seulement référence aux tables de multiplication lorsqu'elles existent et préciserai si les nombres choisis dans le cadre du calcul d'aire font appel à des valeurs présentes dans ces tables. Le fait qu'elles soient mémorisées, ou bien laissées à la portée de l'élève par exemple, ne change pas *a priori* le recours aux autres tâches mathématiques effectuées par l'élève, dans le cadre du calcul d'aire. En revanche, l'utilisation de multiplications qui ne figurent pas dans ces tables pouvait appeler un algorithme multiplicatif ou un abaque. Je signalerai donc simplement si la multiplication figurait dans les tables (j'utiliserai le terme « produits élémentaires ») ou si elle nécessitait vraisemblablement l'usage d'un algorithme (il aurait pu s'agir d'un abaque, d'un calcul posé, de calcul dans la poussière, etc.).

Je note que Proust (2007, p.165) expose des tablettes faisant uniquement état d'une multiplication. La mise en forme suit une règle uniforme, mais le calcul algorithmique n'apparaît pas explicitement. On y voit seulement le multiplicateur, le multiplicande et le résultat. La factorisation (décomposition d'un nombre en produit de nombres plus simples) est aussi attestée (Proust, 2007, p.170).

Les exercices

Les exercices de calcul d'aire que j'expose dans les sections suivantes (2.2 et 2.3) correspondent dans la reconstitution du cursus de Nippur, à un niveau intermédiaire (entre le niveau élémentaire et le niveau avancé). Les tablettes sur lesquelles les exercices de ce niveau intermédiaire sont écrits, sont carrées ou lenticulaires[39]. Ces exercices intermédiaires portent sur le calcul de surfaces et de volumes qui utilisent des tables (qui ont été mémorisées au niveau précédent, voir UM 29-15-192) ainsi que l'inversion, par factorisation. Des problèmes de niveau plus avancé : problèmes de volume (ou recherche de l'arête connaissant le volume), de suites géométriques, etc. ont aussi été retrouvés à Nippur. Les problèmes de rapports de proportionnalité entre dimensions de prismes de même forme, ou transformés par affinité, interviennent également au niveau avancé (Proust, 2007, p.243-244).

2.2 Comprendre l'utilisation des tables métrologiques dans le calcul d'aire du carré : La tablette UM 29-15-192[40]

2.2.1 Introduction

Le cursus des scribes, ainsi que les textes mathématiques servant à comprendre la suite de la discussion, ont été présentés. Je vais maintenant décrire une tablette : UM 29-15-192. Elle est représentative de la série d'exercices à laquelle je m'intéresse. Cette série de tablettes sur l'aire du carré a été choisie principalement pour l'intérêt particulier qu'elle présente dans

[39] Elles sont de type IV selon la typologie proposée par les assyriologues et adoptée par Proust (2007, p.21)

[40] Numéro CDLI : P254900

l'équilibre entre le calcul (en système SP, voir 2.1.3, p.36) et les mesures (les mesures de longueur, les mesures d'aires). Ces-dernières sont exprimées chacune dans des systèmes numériques « non flottants »[41]. J'expliquerai comment un outil particulier permet de passer d'un système numérique à l'autre : les tables métrologiques (voir p.43).

Les solutions proposées par la tablette afin d'effectuer un calcul d'aire dans le cadre d'un système métrologique différent du nôtre me paraissent intéressantes. La situation multiplicative[42] choisie, l'aire du carré, est ici liée au cadre particulier de la bidimensionnalité (voir p.49). J'expliciterai comment la tablette questionne la représentation des objets mathématiques que nous utilisons aujourd'hui (nombre, multiplication, grandeur, mesure, unité de mesure, etc.), à chaque étape de l'algorithme de calcul d'aire. Je reviendrai sur ces éléments (voir 2.4 p.111), après avoir présenté le texte (voir 2.2 p.48).

J'utiliserai par la suite les explications données sur cette tablette pour analyser une série d'exercices similaires et les « petites variations » entre ces exercices (voir 2.3 p.62). Du point de vue de l'enseignement actuel, cette tablette a servi dans l'analyse historico-épistémologique pour constituer une grille d'analyse des manuels scolaires (voir Chapitre II, section 4, p.230), mais aussi en classe lors de l'expérimentation utilisant l'histoire des sciences (voir Chapitre III).

La transcription, la traduction et la majorité des explications liées à cette tablette cunéiforme sont tirés de Proust (2007, p.190-197). Il est important de noter, comme je le précise en introduction (voir p.179), que j'ai fait le choix d'une interprétation historique pour ce travail. Il en existe d'autres : voir par exemple Robson (2008).

Je vais présenter le texte (photographies et copie de la tablette) et sa traduction, je donnerai une explication du calcul d'aire (voir 2.2.4) et résumerai les étapes du calcul (voir 2.2.5) puis j'instaurerai le vocabulaire (voir 2.2.6) qui sera réutilisé dans l'étude historique des « petites variations » et je ferai le lien entre le calcul d'aire et le système métrologique sous-jacent (voir 2.2.7), dans la perspective de l'analyse historico-épistémologique.

2.2.2 Le texte

Photographie 2-2 : P254900 - Photographie de la tablette sous toutes ses faces[43] *(CDLI, s.d.)*

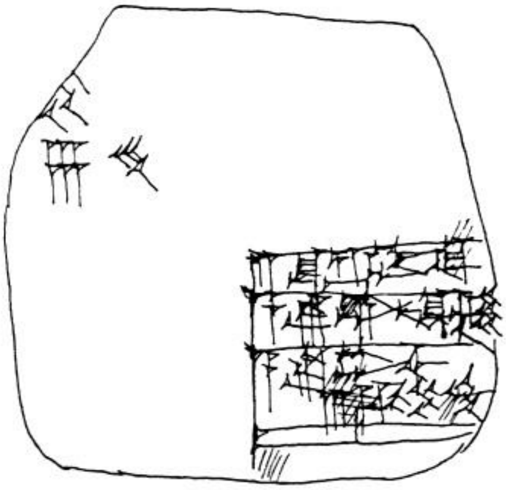
https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254900

Photographie 2-3 : UM 29-15-192 ou P254900 - Photographie agrandie de la tablette de face (CDLI,s.d.)

https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254900

[41] Il n'y a pas de perte de l'ordre de grandeur, voir le système S, p.39.
[42] Voir p.15
[43] Première publication : Neugebauer & Sachs 1984, p. 250-251.
Voir aussi https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254900

UM 29-15-192, obv.



Représentation 2-5 : copie de la face de la tablette[44] (CDLI, s.d.)

2.2.3 La traduction[45] (d'après Proust, 2007, p.193)[46]

⌜20⌝
20
6:40

2 *šu-si* le côté (du carré).
Quelle est sa surface ?
Sa surface est
1/3 *še*

2.2.4 Commentaire : observation guidée

<u>Une situation multiplicative bidimensionnelle de calcul d'aire du carré</u>

[44] https://cdli.ucla.edu/dl/lineart/P254900_ld.jpg
[45] D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1894, p.251, cité dans Proust, 2007, p.193).
[46] Je rappelle que les demi-crochets indiquent un signe abîmé mais identifiable. Je me suis permis de modifier la notation 6.40 en 6:40 pour garantir une cohérence avec mon propos.

Je propose de découvrir la tablette par une forme discursive particulière : une observation guidée (sous forme de questions, ci-dessous) et des réponses différées. Je choisis un registre de discours particulier ici, puisqu'il n'est pas habituel dans le cadre d'une thèse (sous la forme de questions et réponses). Deux arguments principaux me conduisent à adopter cette forme discursive :

-placer le lecteur dans la situation la plus proche possible de celle qui a été proposée aux élèves (voir l'expérimentation, Chapitre III), afin que les questions que suscite le texte soient mises en évidence, amènent un temps de réflexion et puissent être exploitées. Ce sont sur ces questions que repose une partie de l'analyse *a priori* de l'expérimentation en classe.

-pouvoir présenter ensuite le décalage entre la lecture qui peut être faite ici et celle qu'en font les élèves dans l'expérimentation.

Ainsi, il me paraîtrait profitable que le lecteur prenne le temps de formuler des hypothèses pour répondre aux questions proposées. Les réponses que je donne sont celles de l'interprétation historique de Proust (2007, p.193)

1. Observez les deux zones (le coin en haut à gauche et le coin en bas à droite) de cette tablette. A quoi peut correspondre la zone de gauche ?

<u>Réponse</u> : il s'agit d'une multiplication en système SP (voir 2.1.3, p.36). La multiplication « 20 × 20 » donne 6:40 en base 60.

2. Observez à nouveau les deux zones de cette tablette. Quel peut être le lien entre-elles ? Un élément vous intrigue-t-il ?

<u>Réponse</u> : le lecteur est peut-être interpelé par le calcul qui se trouve dans le coin gauche de cette tablette. L'énoncé semble indiquer un calcul d'aire du carré. Pourtant, si la tablette annonce « 2 *šu-si* le côté » du carré[47], pourquoi le calcul n'est-il pas de type « 2 × 2 », ou « 2 *šu-si* × 2 *šu-si* »?

3. Le lecteur pourra prendre le temps de formuler des hypothèses, grâce aux tableaux ci-dessous. Je le conseille: cela permettra également de mieux comprendre la démarche proposée aux élèves dans l'expérimentation en classe.

1 *šu-si*	10
2 *šu-si*	20
3 *šu-si*	30
4 *šu-si*	40
5 *šu-si*	50
6 *šu-si*	1
7 *šu-si*	1:10
8 *šu-si*	1:20
9 *šu-si*	1:30
1/3 *kuš*	1:40

Tableau 2-11 : extrait de la table métrologique des longueurs HS 241 (Proust, 2016, p.8)

1/2 *še* d'argent	10
1 *še*	20
1 1/2 *še*	30
2 *še*	40
2 1/2 *še*	50
3 *še*	1
4 *še*	1:20
5 *še*	1:40
6 *še*	2
7 *še*	2:20

Tableau 2-10 : extrait de la table métrologique des surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

[47] Pour HS 241, voir http://www.cdli.ucla.edu/P388160. première publication : Hilprecht 1906, n°42, pl.27
Pour MS 2186, voir http://www.cdli.ucla.edu/P250902, première publication : Friberg, 2007, MSCT (A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts) 1, 119

Réponse : Selon Proust (2007, p.193), il faut traduire la mesure de longueur 2 *šu-si* en système SP à l'aide d'un dictionnaire appelé « table métrologique » (voir p.43). Le Tableau 2-11 comporte un extrait d'une « table métrologique de longueurs[48] ». Il fait correspondre 2 *šu-si* au nombre 20 en système SP. Dans la suite, cette correspondance sera notée 2 *šu-si* → 20. La flèche est un artefact qui ne fait pas partie du texte historique.

4. Quelles sont les étapes de l'algorithme de calcul d'aire du carré ?

Réponse : Selon Proust, il faut multiplier 20 par 20, en base 60, ce qui donne 6:40. Je ne traduirai pas ce résultat par « 400 » puisque selon l'interprétation de Proust (voir 2.1.3 p. 36), l'ordre de grandeur n'est pas connu. 6:40 pourrait ainsi correspondre à 400, à $6 \times 60^2 + 40 \times 60$ soit 24 000, à $6 \times 60^3 + 40 \times 60^2$ etc. La multiplication n'est donc pas directement opérée sur la mesure de longueur « 2 *šu-si* ». C'est le nombre en système SP « 20 » qui a été mis en correspondance avec la mesure de longueur « 2 *šu-si* », qui est l'objet de la multiplication.

Ensuite, il faut faire correspondre le résultat de la multiplication, soit le nombre 6:40 en système SP, en « mesure d'aire » à l'aide d'une « table métrologique des surfaces ». Le Tableau 2-10, un extrait d'une « table métrologique de surfaces », établit la correspondance entre le nombre 6:40 en système SP et la mesure d'aire 1/3 *še*[49]. Je le note ainsi : 6:40 → 1/3 *še*.

J'appelerai « mise en correspondance » l'action qui consiste à associer un nombre en système SP à une mesure de longueur ou d'associer une mesure d'aire à un nombre en système SP.

Le calcul (multiplication de 20 par lui-même) et les mesures (de longueur, de surface ; comme « 2 *šu-si* » ou « 1/3 *še* ») ne font pas appel au même système numérique (voir p.39). Je rappelle que selon Proust, les mesures utilisent des systèmes numériques « non flottants », qui indiquent les ordres de grandeur. L'ordre de grandeur est logiquement nécessaire pour compter des objets concrets ou mesurer[50]. Une trace de l'utilisation de systèmes numériques différents pour mesurer et calculer peut être observée directement sur cet exemple. En effet, ici, la mesure d'aire « 1/3 *še* » témoigne de l'utilisation d'une fraction. Ces dernières n'existent pas en système SP, du fait même du caractère « flottant » : dans ce système, 20 peut représenter 1/3, ou 20, ou 1200, et ainsi de suite pour tous les nombres de la forme 20×60^n où « n » est un entier relatif.

5. Comment choisir la bonne mesure dans la table métrologique des surfaces ?

Réponse : Comment choisir la bonne valeur dans les tables métrologiques, où la mesure (à gauche) est associée à un nombre en système SP (à droite) ? En observant la table métrologique des surfaces en Annexe, on voit qu'un nombre en système SP (à droite),

---

48 Voir aussi la table complète en Annexe. Telle qu'elle a été reconstituée à partir de plusieurs tablettes (table composite) par Proust (2007, p.309).

49 En effet, si 20 correspond à 1 *še*, alors 6:40 correspond bien à 1/3 *še* puisque 6:40 × 3 donne 20 en système SP. L'entrée « 1/3 *še* → 6:40 » a en fait été insérée artificiellement dans la table métrologique donnée aux élèves.

50 J'évite la référence classique au comptage de moutons, qui induit une vision historique particulière et discutable, liée au comptage « primaire » du berger mésopotamien qu'on trouve souvent dans les ouvrages de vulgarisation actuels. Cette vision résume la Mésopotamie au comptage de 4 ou 5 pierres, qui ne font qu'une petite partie de 4000 ans d'histoire, et sont peut-être associés abusivement au berger.

justement par son caractère flottant (perte de l'ordre de grandeur), revient cycliquement (voir p.68 pour la définition de « cycle »). Alors que les mesures (à gauche) ne font qu'augmenter régulièrement. Le scribe aurait donc très bien pu associer d'autres mesures au nombre en système SP « 6:40 », comme par exemple la mesure « 20 *še* ».

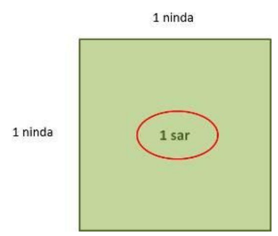
C'est ici que l'ordre de grandeur intervient. Il est nécessaire de contrôler l'ordre de grandeur attendu du résultat. La mesure de longueur 2 *šu-si* correspond à un ordre de grandeur un peu plus petit que la longueur d'une tablette ou d'une brique (la longueur d'une tablette correspondant plutôt à « 6 *šu-si* ») ; le résultat attendu est donc d'ordre de grandeur plus petit qu'une tablette. La mesure d'aire 20 *še*, par exemple, est trop grande car elle correspond approximativement à une demi-table. Le scribe doit sélectionner la partie de la table métrologique qui correspond à la mesure attendue, soit la partie qui précède 1/2 *še* (approximativement une tablette). J'appellerai cette action « sélectionner le cycle pertinent » (voir p.69).

Dans le cas précis de cette tablette, l'entrée n'existe pas dans la table. L'ensemble des tablettes arrivé jusqu'à nous ayant servi à constituer la table métrologique composite ne possède pas de valeurs aussi petites (ici 1/3 *še*). Pourtant, les tablettes sont très redondantes et ne commencent pas avant 1/2 *še*. J'appelerai « extrapolation » le fait de donner une valeur de mesure d'aire qui n'appartient pas à la table métrologique des surfaces (voir p.72). L'extrapolation consiste à utiliser une entrée se situant en-deça de la plus petite des entrées de la table métrologique[51], mais pas entre deux entrées existantes de la table. Elle n'est pas spécifique à la table des surfaces, une telle action peut se présenter dans toutes les tables. L'extrapolation peut aussi concerner la mise en correspondance d'une mesure de longueur avec un nombre en système SP.

Dans certains cas, la mesure d'aire s'obtient en deux étapes, correspondant à deux entrées dans la table. J'y reviendrai (voir p.67). Alors la mesure d'aire est exprimée avec plusieurs unités de mesure, par exemple 1/3 *gin* et 15 *še*. Je dirai que la mesure est « composée ».

6. Comment comprendre l'articulation des deux systèmes numériques ?

Réponse : Les facteurs entre unités de mesure d'aire ne correspondent pas aux carrés des facteurs entre unités de mesure de longueur. Le carré de côté 1 *ninda* correspond au nombre 1 en système SP. La mesure d'aire correspondant à ce carré vaut 1 *sar*, elle aussi est donc associée au nombre 1 en système SP. C'est ce que j'appellerai un « pont » : il y a une relation directe entre l'unité de mesure de longueur *ninda* et l'unité de mesure d'aire *sar*[52].



Représentation 2-6 : le sar

[51] Ou au-delà de la plus grande, mais ce cas de figure ne se présente pas dans les sources considérées ici.
[52] A ma connaissance, l'expression « pont » vient de Christine Proust. Voir par exemple Proust, (*à paraître*).

De même, le carré de côté 2 *ninda* correspond au nombre « 2 » en système SP, et la multiplication de 2 par lui-même donne 4, donc le carré de côté 2 *ninda* correspond à la mesure d'aire 4 *sar*. Ainsi, pour cette unité de mesure de longueur, la multiplication se fait sur des nombres qui pourraient être assimilés à la valeur numérique de l'aire[53]. Mais lorsqu'une autre unité de mesure est donnée, il devient clair que les nombres sur lesquels porte la multiplication ne sont pas les mêmes que ceux qui servent de valeur numérique de grandeur (de longueur ou d'aire)[54].

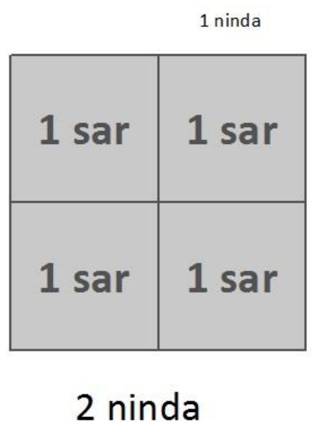
1 ninda	1
1 ½ *ninda*	1:30
2 *ninda*	2
2 ½ *ninda*	2:30
3 *ninda*	3
3 ½ *ninda*	3:30
4 *ninda*	4
4 ½ *ninda*	4:30
5 *ninda*	5

Tableau 2-12
extrait de la table métrologique des longueurs MS 3869/11
(Friberg, 2007, p.119)

1 *sar*	1
1 1/3 *sar*	1:20
1 1/2 *sar*	1:30
1 2/3 *sar*	1:40
1 5/6 *sar*	1:50
2 *sar*	2
3 *sar*	3
4 *sar*	4
5 sar	5

Tableau 2-13 :
extrait de la table métrologique des surfaces (composite), (Proust, 2007, p.311)

En termes géométriques, il est possible d'imaginer un carré de côté 2 *ninda* et, à l'intérieur, 4 petits carrés de côté 1 *ninda*, dans une « représentation grille[55] » conforme à l'habitude actuelle, pour le cm^2.



Représentation 2-7 : 4 sar

[53] J'emprunte ce terme au VIM (vocabulaire international de la métrologie). Il s'agit du nombre dans l'expression de la valeur d'une grandeur (pas le nombre utilisé comme référence). Par exemple « pour une fraction molaire égale à 3 mmol/mol, la valeur numérique est 3 et l'unité est mmol/mol. L'unité mmol/mol est numériquement égale à 0,001, mais ce nombre 0,001 ne fait pas partie de la valeur numérique qui reste 3 ». (VIM, 2008, p.13)

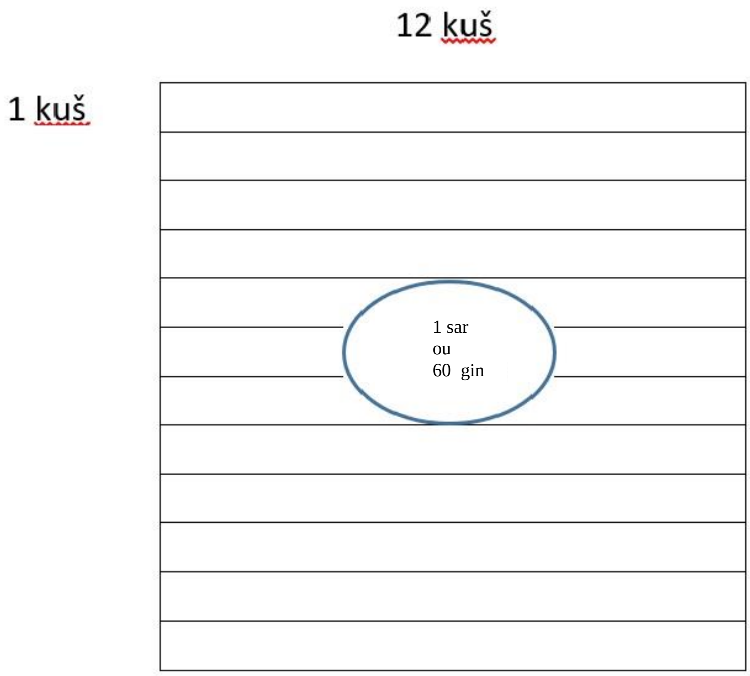
[54] Voir aussi https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P252942. Première publication : Friberg, 2007, MSCT 1, 129. La provenance est incertaine, mais cette séquence se trouve dans les tablettes de Nippur. Il n'y a pas de texte disponible en suffisamment bon état pour servir directement d'illustration ici. J'ai adapté la traduction pour qu'elle soit conforme à mes notations.

[55] Il s'agit du pavage ou maillage d'une surface en carreaux d'un centimètre de côté (centimètres carré).

Le facteur entre l'unité de mesure de longueur *ninda* et l'unité suivante, le *uš*, est 60 ; alors que le facteur entre l'unité de mesure d'aire *sar* et l'unité suivante, 1 *iku gan*, vaut 100, et non 60^2 soit 3600. L'unité de mesure d'aire 1 *iku gan* n'est plus représentable naturellement comme un carré (ayant pour côté l'unité de mesure de longueur correspondante). Il est possible de voir notre système métrique actuel, ayant des facteurs 10 entre unités de mesure de longueur et 100 entre unités de mesure d'aire, comme construit pour qu'il soit toujours possible d'utiliser la représentation de l'unité de mesure d'aire comme un carré (de côté correspondant à l'unité de mesure de longueur associée) ; et en conséquence pour pouvoir effectuer la multiplication des nombres qui sont les mêmes que ceux qui servent à exprimer la mesure de longueur : les valeurs numériques de la grandeur (voir note 53, p.54)

Dans le système métrologique utilisé par la tablette UM 29-15-192, dès que l'unité de mesure suivant (ou précédent) le *ninda* est utilisée, le nombre en système SP redevient « nécessaire » pour faire la transition entre longueurs et aires (les facteurs ne se correspondent plus). Le nombre en système SP apparaît donc comme une construction arbitraire[56]. En partant de la mise en correspondance du « 1 » (exprimé en système SP) avec le *ninda*, il découle ensuite une construction logique. Cette construction dépend des facteurs entre unités de mesure.

Du fait des facteurs « non coordonnés » entre unités de mesure de longueur et d'aire, l'unité de mesure d'aire n'a pas toujours naturellement la forme d'un carré. En prenant les unités de mesure *kuš* (précédant le *ninda*) et *gin* (précédant le *sar*), le carré de côté 1 *ninda* (12 *kuš*) vaut 1 *sar* (60 *gin*). Si l'on imaginait la forme naturelle de l'unité de mesure, le carré pourrait comporter 12 bandelettes rectangulaires, une bandelette rectangulaire ayant un côté de 1 *kuš* et l'autre de 12 *kuš*. La bandelette a pour mesure d'aire 5 *gin*[57].



[56] C'est une construction « arbitraitre » (au sens où elle a fait l'objet d'un choix) mais qui a un caractère astucieux du fait des nombreux diviseurs de 60.

[57] Dans chaque bandelette de 5 *gin* d'aire (de 12 *kuš* sur 1 *kuš*) il peut y avoir 12 carreaux de 1 *kuš* sur 1 *kuš* (et non 5 carreaux pour 5 *gin* comme dans notre système). Ou bien pour obtenir 1 *gin* de mesure d'aire, il faudrait des petits rectangles de 1 *kuš* sur 12/5 *kuš* (soit 2,4 *kuš*, notation artificielle de ma part).

Représentation 2-8 : kuš et bandelettes

Les images que j'utilise ne sont pas historiques, mais permettent de comprendre les conséquences géométriques des systèmes métrologiques sous-jacents, sur la représentation géométrique de l'unité de mesure (voir 2.2.7, p.59).

La tablette cunéiforme datant d'une période antérieure, que je présenterai dans l'analyse historico-épistémologique (voir VAT 12-593, 2.4.2 p.111) permettra d'approfondir la question des formes données aux unités de mesure.

<u>Alternatives historiques</u> : J'ai précisé au début du sous-chapitre 2.2 et dans l'introduction générale du chapitre I, que le choix avait été fait, pour ce texte, de partir d'une interprétation historique (celle de Proust). Je vais néanmoins donner quelques indications quant à une hypothèse alternative. En effet, un autre type d'interprétation possible de la méthode de calcul d'aire consiste à envisager les nombres en système SP comme non flottants (ils auraient un ordre de grandeur fixe) et servant plutôt à exprimer d'une autre façon la mesure de longueur : dans une autre unité de mesure, qui serait le *ninda*. Cette interprétation est possible, puisque la notation des nombres entiers[58] entre 1 et 60 est la même dans les systèmes SP et les systèmes non flottants. Le *ninda* est choisi pour correspondre au nombre 1 en système SP. Elle est associée à l'unité de mesure d'aire *sar* (le seul « pont », voir p.53). Selon cette interprétation, il faudrait convertir la longueur en *ninda* pour calculer une aire. Cette interprétation donne lieu à des traductions du nombre en système SP en termes de « fractions de *ninda* ». Par exemple, la mesure 1/2 *šu-si* peut être convertie en 1/720 *ninda*, elle est associée au nombre « 5 » en système SP. En effet, cette fraction, 1/720, peut aussi s'écrire $5/60^2$ ou encore 5×60^{-2}. C'est 5/3600, car 720 × 5 = 3600. Ce type d'interprétation relativement répandu donne lieu à des traductions différentes, puisqu'il faut exprimer les nombres en système SP en fractions de *ninda*, par exemple ainsi : « 0 ; 00 05 » ; voir par exemple Robson (2008, p.9), ou Friberg (2007, p.102), etc. Ce qui traduit le fait que le nombre en système SP « 5 » corresponde à un exposant négatif, de position 2, ici 60^{-2}. Je n'ai pas choisi ce type d'interprétation, celle de Proust me semblant mieux correspondre aux traces écrites de la documentation cunéiforme. Cette relation aux traces écrites en histoire est importante puisqu'elle est conforme à l'idée d'entrer dans le système de pensée mathématique ancien et donc dans la diversité (voir p.25). La notation précédente impliquerait par exemple de fixer un ordre de grandeur au nombre en système SP, ce qui n'apparaît pas dans la documentation. De plus, retrouver l'ordre de grandeur à la fin, selon une estimation de la taille de la surface attendue, me semble plus facile pour l'exercice mental que de chercher à quelle position de la notation le nombre en système SP se situe, en fonction de la fraction de *ninda*.

Je récapitule maintenant les étapes de l'algorithme de calcul d'aire selon l'interprétation de la tablette cunéiforme.

[58] Et même entre 1 et 600, car en pratique dans le système non flottant le mot « soixante » est généralement omis ; 70 s'écrivant 1:10.

2.2.5 Résumé des étapes du calcul

A. énoncé et donnée d'un côté (système non flottant) avec unité de mesure[59]

2 *šu-si* le côté (du carré).

B. question

Quelle est sa surface ?

C. procédure

1. Mise en correspondance de la mesure de longueur avec le nombre en système SP grâce à la table métrologique des longueurs:

2 *šu-si* → 20
(l'ordre de grandeur est à garder en tête, ou à évaluer à la fin ; le côté est plus petit que celui d'une brique, donc une mesure d'aire inférieure à celle d'une brique est attendue)

2. Multiplication

20 × 20 = 6:40 (utilisation de la table de multiplication par 20 qui fait partie du cursus)

3. Mise en correspondance du nombre en système SP avec la mesure d'aire grâce à la table métrologique des surfaces :

3.1 : sélection du cycle pertinent (voir sélection du cycle pertinent, p.69)
Utilisation de la table métrologique des surfaces ; ordre de grandeur recherché: plus petit qu'une brique[60].

3.2 : extrapolation de la correspondance recherchée

Hypothèse[61] : sachant que

1 *še* → 20

alors,

1/3 *še* → 6:40

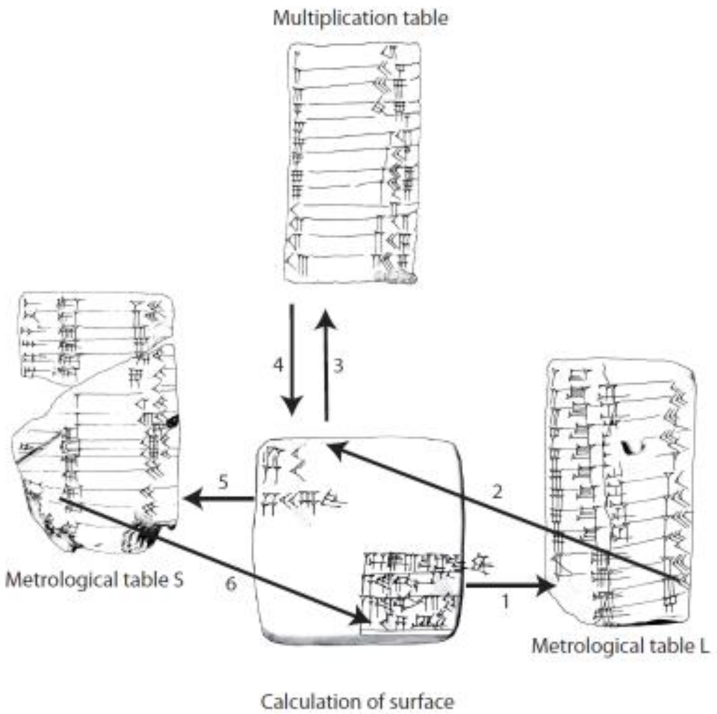
D. réponse

---

[59] Voir aussi Proust (2007, p.251).
[60] Je ne parle pas ici du minorant ou majorant de l'ordre de grandeur. Etant donné la taille des cycles, la sélection du nombre en système SP est facile avec cette seule information.
[61] Voir extrapolation, p.67

Sa surface est 1/3 *še*

Le schéma ci-dessous représente les tablettes d'argile associées à ces étapes, dans les cas simples. La table métrologique des longueurs est utilisée pour la première mise en correspondance de la mesure de longueur avec un nombre en système SP. La table de multiplication (mémorisée ou mise à disposition) est utilisée pour le calcul (multiplication du nombre en système SP par lui-même). Ensuite, la table métrologique des surfaces est utilisée pour la mise en correspondance du nombre (en système SP) obtenu par multiplication, avec la mesure d'aire.



Représentation 2-9 : tablettes utilisées pour le calcul d'aire (Proust, 2010, p.31)

2.2.6 Notion de tâche, tâches principales

L'explication des étapes de l'algorithme de calcul d'aire ancien m'a permis de distinguer différents types de tâches nécessaires à sa résolution. J'y ai associé un vocabulaire précis. Je récapitule ici l'ensemble de ces tâches. J'appellerai ces tâches : « tâches principales » par la suite. En effet, elles sont nécessaires à la résolution de ce type d'exercice, quel que soit le choix de la mesure de longueur du côté donnée dans l'énoncé. Ces distinctions seront utilisées dans l'analyse historique. Selon les tablettes du corpus paléo-babylonien, d'autres tâches, qui ne sont pas principales, seront rencontrées. Elle ne sont nécessaires que dans certains cas : la mesure de longueur du côté du carré choisie influe sur leur présence ou non dans la résolution, (voir 2.3.2, p.66).

Mise en correspondance : désigne la mise en correspondance d'une mesure (ici, de longueur) avec un nombre en système SP ou d'un nombre en système SP avec une mesure (ici, d'aire).

Multiplication : désigne la multiplication de nombres en système SP

Sélection du cycle pertinent : désigne le choix de la portion de table métrologique utilisée en fonction de l'ordre de grandeur attendu. Je reviendrai plus en détail sur cet aspect, voir p.69

J'ai également mentionné l'extrapolation ici, cette tâche ne fait pas partie des tâches principales, puisqu'elle est liée au cas particulier de la mesure de côté choisie ici pour le carré : j'y reviendrai. L'aspect suivant aura aussi des implications sur le nombre d'étapes nécessaires à la résolution dans l'algorithme :

Mesure simple ou composée : une mesure de longueur ou d'aire peut être exprimée avec une (mesure simple) ou plusieurs (mesure composée) unités de mesure.

2.2.7 Système métrologique sous-jacent et implications

Dans cette partie je présenterai le système métrologique sous-jacent à la tablette, afin de détailler les liens entre le système métrologique, l'algorithme de calcul d'aire et la représentation géométrique éventuelle de l'unité de mesure[62].

Le Tableau 2-14 représente les unités de mesure de longueur (en haut) et d'aire (en bas). Elles ne sont pas toutes utilisées dans la tablette, ce sont les unités de mesure qui figurent dans les tables métrologiques attestées à la période paléo-babylonienne.

La cohérence entre les deux systèmes d'unités de mesure (longueur et aire) est assurée par le fait que le *sar* est l'unité de mesure correspondant à la mesure d'aire du carré de côté 1 *ninda*, voir p.53. Cette relation ou « pont » entre unités de longueur et d'aire est représentée dans le diagramme du Tableau 2-14 par une double flèche verticale.

[62] La représentation vient de Proust (*à paraître*, p.13)

Système métrologique dépendant ou semi-indépendant

Dans le Tableau 2-14, les facteurs entre unités de mesure sont donnés entre chaque unité. Les nombres en système SP correspondants sont précisés pour information, sous les unités de mesure. Ici, les facteurs entre unités de mesure d'aire (180, 60 et 100) ne sont pas le carré des facteurs entre unités de mesure de longueur (30, 12, 60 et 30). Le système d'unité de mesure de longueur n'est pas, semble-t-il, conçu en fonction des unités de mesure d'aire, mais il y a un pont. Ainsi, j'ai qualifié le système métrologique de « <u>semi-indépendant</u> ». Ce système métrologique « semi-indépendant » est peut-être dû à une construction autonome des deux systèmes de mesure (longueur et aire) par le passé[63].

Unités de longueur :	danna ←30	uš ←60	ninda ←12	kuš ←×30	šu-si
	30	1	1	5	10
			↕		
Unités de surface :		GAN ←100	sar ←60	gin ←180	še
		1:40	1	1	20

Tableau 2-14 : système métrologique ancien (Nippur paléo-babylonien)

Unités de longueur :	km ←10	dam←10	hm←10	m←10	dm← 10	cm
	↕	↕	↕	↕	↕	↕
Unités de surface :	km^2←100	dam^2←100	hm^2←100	m^2←100	dm^2←100	cm^2

Tableau 2-15 : système métrologique actuel : le système métrique

Quelles sont les conséquences du système métrologique sous-jacent sur le fonctionnement de la procédure ? Ici, le nombre en système SP apparaît comme un outil technique, utile pour faire communiquer les mesures de longueur et les mesures d'aire. Une autre solution technique au problème posé par le caractère semi-indépendant d'un système métrologique semble avoir été élaborée avant l'invention du système SP. Je le présenterai avec une tablette plus ancienne (voir p.111).

En résumé : quatre aspects de la métrologie ont un impact sur la méthode de calcul de l'aire du carré. Premièrement, les systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire existent indépendamment, ils ne sont pas construits complètement l'un en fonction de l'autre. Géométriquement, les unités de mesure ne seraient pas toutes carrées si elles étaient représentées. Les noms des unités de mesure d'aire ne sont pas dérivés de ceux des unités de mesure de longueur. Le vocabulaire utilisé peut facilement se représenter visuellement : doigt, coude, verger… Ainsi les unités d'aire peuvent davantage faire écho, dans ce contexte, au report d'un étalon lié à une surface de dimension 2 (et donc au mesurage), qu'à l'unité de mesure de longueur.

---

[63] C'est une hypothèse de Christine Proust, qu'elle a par exemple soulevée lors d'exposés (Proust, 2016) et dans un article à paraître (Proust, *à paraître*)

Deuxièmement, le système métrologique semi-indépendant a des conséquences sur la possibilité d'utiliser les mêmes nombres pour mesurer (valeur numérique de grandeur) et multiplier (nombres, en système SP). Les nombres qui servent à exprimer la valeur de grandeur peuvent être différents des nombres sur lesquels est menée l'opération (ici la multiplication). Ici, les nombres en système SP peuvent ne représenter ni une quantité, ni un résultat de mesure.

Troisièmement (selon l'interprétation historique de Proust), il y a des conséquences sur les choix techniques mathématiques, provoquant l'invention d'un système numérique pour passer de mesures de longueurs aux mesures d'aire. C'est intéressant du point de vue historique, d'autant que ce n'est pas la seule réponse technique au même problème qui soit attesté dans les sources parvenues jusqu'à nous.

De ce fait, la multiplication peut opérer sur des nombres (ici en système SP) qui n'ont pas de lien explicite avec la mesure. L'algorithme de calcul d'aire prend une mesure en entrée et en sortie, mais l'algorithme multiplicatif, lui, opère sur des nombres qui ne représentent pas conceptuellement de quantité (perte de l'ordre de grandeur en système SP). La multiplication peut exister (ou sembler exister) indépendamment de l'acte de mesurage, dans l'algorithme. Elle se retrouve liée à un contexte qui semble sans dimension. De plus la mise en correspondance par les tables métrologiques implique que l'algorithme de calcul d'aire opère sur des objets conceptuellement éloignés du cadre géométrique et du report d'un étalon (ici les nombres en système SP).

Quatrièmement, la mesure d'aire ou de longueur peut être composée, par exemple : « 1/3 *gin* et 15 *še* », utilisant plusieurs entrées de la table métrologique des longueurs ou surfaces.

Enfin, pourquoi calculer l'aire d'une surface? Le contexte est celui de l'école de scribes. Pourquoi les mesures présentes dans une série de tablettes de même type (de même période et provenance) sont-elles « petites » (de l'ordre de grandeur d'une tablette ou d'une table) contrairement à d'autres contextes où il s'agit d'évaluer de vastes terrains ? Le sous-chapitre 2.3 permettra de s'intéresser à cette question.

A la lecture de ce texte ancien, des éléments à observer et des questions surviennent. Je les utiliserai pour construire la suite de l'analyse historico-épistémologique (voir 2.4, p.111).

-quelles sont les conséquences de l'existence du système d'unités de mesure d'aire indépendamment (ou non) des unités de mesure de longueur sur la façon dont elles sont conceptualisées (et sur la mise en valeur de l'idée de report d'un étalon) ?

-quelles sont les conséquences du système métrologique sur le concept de nombre ? Et sur la relation conceptuelle entre nombre, multiplication et mesurage ?

-à quoi la multiplication est-elle reliée ? A une opération sur des mesures ? un nombre d'étalons ? autre chose ?

-qu'implique la conversion (la mise en correspondance par les tables métrologiques, ici) sur la conceptualisation des objets qui entrent en jeu dans l'algorithme de calcul d'aire ? L'algorithme de calcul d'aire reste-t-il compatible avec l'idée de mesurage (report d'un étalon) ?

La lecture des textes anciens d'autres périodes va permettre d'apporter un autre regard sur ces points et d'affiner la grille d'observation lors de l'analyse historico-épistémologique. Il est intéressant de voir que dans cette tablette, le système métrologique indépendant permet toutefois la multiplication, par le biais du système SP. Il faut recourir à ce biais (nombres en système SP ou conversions en *ninda* selon l'interprétation historique adoptée) du fait du système métrologique. Cette utilisation de la multiplication rend le texte assez proche de notre algorithme pour permettre de le questionner en profondeur (voir Chapitre III, p.256).

Quelles seront les conséquences d'un algorithme lié au cadre géométrique, sur la conceptualisation des objets entrant en jeu dans l'algorithme dans un contexte métrologique semi-indépendant ? L'étude de la tablette VAT 12-593 (voir 2.4.2, p. 112) va permettre de s'intéresser à la conceptualisation des unités de mesure lorsque l'algorithme porte directement sur le registre des figures.

Cependant, avant cette deuxième phase de l'analyse historico-épistémologique, je propose une analyse historique qui permet d'entrer plus en détail dans le mécanisme de calcul que j'ai détaillé : l'étude des « petites variations » dans les tablettes du même type que la tablette UM 29-15-192.

2.3 Analyse historique : variations numériques dans les tablettes de même type

2.3.1 Introduction

Dans cette partie, j'analyserai les conséquences en termes de tâches, des différences entre les mesures de longueur choisies (ce que j'appelle les petites variations) dans les autres tablettes de calcul d'aire du carré de même type que UM 29-15-192 (voir 2.2 p.48). Cette démarche a été inspirée par le regard didactique porté sur les textes, ici la notion de variable didactique (Brousseau, 1998). Ces notions ne peuvent être directement transposables à l'histoire. J'en dis quelques mots en préalable, en me basant sur la présentation de Perrin-Glorian (2017), lors du séminaire que j'ai organisé entre histoire et didactique sur le thème des petites variations. Ensuite, je préciserai certaines précautions liées à l'interprétation d'un texte historique en termes de choix éducatifs.

Les variables didactiques

L'idée de *variable didactique* est née dans les débuts de la recherche en didactique, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (T.S.D) de Brousseau (1998). Le contexte est celui de l'ingénierie, méthodologie créée pour provoquer et/ou observer des phénomènes dans la classe, dans des conditions acceptables pour l'enseignement (voir p.16). L'idée de « situation » y est liée : il s'agit d'une forme d'organisation du travail des élèves, en relation avec un problème à résoudre. Les variables didactiques de cette situation correspondent aux choix qui peuvent être faits, dans les données du problème (par exemple les valeurs numériques), le matériel fourni (calculatrice ou non, instruments de géométrie ou non), l'organisation du travail (en groupe, individuel), etc. Elles rassemblent tous les choix que fait l'enseignant, sur lesquels il peut agir (il ne s'agit pas des contraintes) et qui ont un effet sur les connaissances que les élèves doivent mettre en jeu pour résoudre le problème. Le choix des variables est fait en fonction des connaissances supposées disponibles, des connaissances que l'on veut enseigner, des procédures erronées connues, etc.

En simplifiant, la T.S.D s'est surtout intéressée aux situations permettant d'acquérir un savoir nouveau par l'interaction de l'élève avec un milieu organisé par le professeur. Ainsi le professeur doit traduire le savoir à enseigner en un problème (construire une situation) dans lequel l'élève va devoir mettre en œuvre des connaissances. L'élève apprend en résolvant le problème pour s'adapter au milieu. Le milieu comprend tous les éléments matériels et éventuellement humains, rassemblés par l'enseignant pour que l'élève ait à produire des actions, formulations, preuves, afin d'agir sur ce milieu[64]. Je commenterai en conclusion ce qu'a apporté la notion de variable didactique au travail historique. Quoiqu'il en soit, elle impulse ici le travail d'histoire, poussant à étudier les effets des choix des mesures de longueur du côté.

Les assortiments didactiques

Lors de la journée d'étude sur les petites variations, Perrin-Glorian (2017) a eu l'idée de présenter la notion d'assortiment, qu'elle trouvait mieux appropriée aux « petites variations ». La notion d'*assortiment* est née avec la thèse d'Esmenjaud (Genestoux-Esmenjaud, 2000) et est liée à l'idée d'entraînement. Je vais la présenter ici et je discuterai en conclusion de la pertinence de cet outil d'observation de l'enseignement pour l'étude historique que j'ai menée.

Esmenjaud a été amenée à introduire l'idée d'assortiment dans le cadre d'une étude sur le travail à la maison des élèves, et à l'aide éventuelle apportée par les parents pour faire ce travail. Les devoirs à la maison se font dans le cadre de l'entraînement, plutôt que des connaissances nouvelles à enseigner. Esmenjaud distingue des niveaux : de la première rencontre à la maîtrise, jusqu'à savoir réutiliser la notion sans aide, dans des problèmes.

> Un assortiment didactique est une suite ordonnée de « questions » réunies selon une même intention didactique et réalisable dans une unité de temps didactique.
> L'exercice est un objet institutionnel souvent considéré comme banal. L'assortiment est un modèle didactique de cet objet (qui extrait seulement certaines composantes). Il a pour fonction d'en problématiser la construction, de faciliter certaines comparaisons, de permettre des prévisions et de suggérer des améliorations. (Genestoux-Esmenjaud, 2001)

Comme le précise Perrin-Glorian (2017), les exercices donnés sont un moyen d'influer sur la nature des interactions que les élèves vont avoir avec les savoirs visés. L'agencement des exercices peut être vu comme une manière de continuer le travail didactique. Il s'agit de regarder comment assortir des questions, selon les objectifs que l'on a. Les critères de constitution de l'assortiment sont liés à la *classification* des questions (suivant les connaissances qui entrent en jeu). L'assortiment est donc proche de la série d'exercices, regardée du point de vue du savoir à enseigner. Je discuterai en conclusion la possibilité et l'intérêt d'utiliser la notion d'assortiment dans mon travail historique. Ce travail sera lié à la question du corpus historique étudié, à la possibilité de l'envisager comme une série de problèmes et aux critères de constitution d'une telle série.

Maintenant que j'ai présenté les notions de didactique liées à cette étude, je dis quelques mots sur l'historique de ma démarche et les précautions historiques qu'il faut prendre en compte.

Mon intérêt pour les variations numériques dans les tablettes cunéiformes est d'abord venu d'une réunion de travail avec Nicolas Décamp en début de thèse, pendant laquelle il m'a fait remarquer que les textes anciens étudiés, liés à une forme de transmission (encore davantage peut-être, dans le cas du corpus en cunéiforme, du fait d'un contexte explicitement scolaire), pourraient être intéressants à envisager du point de vue des effets sur l'élève[65]. Après discussion avec le groupe SAW, j'ai d'abord mis de côté ces réflexions qui paraissaient

[64] Voir par exemple Brousseau, (1998, p.59) ou Margolinas, (1998, p.3).

[65] L'historien de l'Antiquité Glenn Most s'intéresse aux intentions pédagogiques dans les commentaires. Voir aussi le livre édité par Karp et Schubring : Handbook on the History of Mathematics Education (2014).

s'éloigner du sujet principal de la thèse. C'est finalement en fin de thèse, grâce à un travail de traduction de Yang Hui (voir 4.1.2, p.159), qui présentait des « petites variations » dans des exercices similaires de multiplication en lien avec l'aire du rectangle, que j'y suis revenue. Christine Proust m'a demandé de regarder un ensemble de tablettes similaires, de la même période, sur l'aire du carré : c'est l'objet du présent sous-chapitre.

Il s'agit donc d'étudier les variations de mesures de longueur du côté du carré dans les exercices proposés aux élèves scribes. Je me demanderai si par le choix de certaines mesures, les connaissances mobilisées par l'élève sont affectées. Pour cela, j'adopterai une démarche descriptive : pour chaque exercice, je détaillerai point par point les tâches à effectuer pour sa résolution. Certaines tâches étaient peut-être évidentes à ce stade de la scolarité. La description met toutes les tâches sur le même plan, sans les hiérarchiser du point de vue de leur possible difficulté, ou par ordre d'enchaînement chronologique. Par la suite, j'essayerai de dégager des hypothèses concernant l'ordre possible dans le cursus, en m'appuyant sur la reconstitution du cursus des scribes faite par Proust (2007). Avant tout cela, je vais exprimer quelques précautions historiques introductives, que je vais mettre en relation avec les outils de didactique : la notion de variable didactique et d'assortiment.

Les précautions historiques

Le travail sur une série d'exercices similaires présente l'intérêt de pouvoir s'inscrire dans le débat plus large des séries de problèmes. Celui-ci a l'avantage d'avoir été largement étudié par les historiens. En ce qui concerne mon sujet, certaines précautions ont déjà été émises, j'en expose une sélection ici.

Premièrement, tout texte écrit peut obéir à de nombreux objectifs, et souvent plusieurs en même temps. Ainsi, une série de problèmes réunis dans un même ouvrage peut obéir à une logique particulière, comme la mémorisation à l'oral, par exemple. Les exercices pourraient être écrits de façon très similaire, pour permettre une meilleure mémorisation de leur structure. La logique peut être celle du recueil de problèmes, qui circulent par tradition (à l'oral ou non), et présenter ainsi de plus ou moins « grandes » variations. La série peut également obéir à des idéaux, liés à la tradition écrite, etc. En résumé, l'objectif éducatif n'est qu'une hypothèse parmi d'autres, dans l'étude d'une série, et il peut prendre plusieurs formes. Le travail édité par Bernard et Proust (2014) conduit à se méfier des interprétations spontanées de textes comme liés automatiquement à l'enseignement, à l'image des manuels modernes. L'étude montre que l'on ne sait rien de l'usage de certains textes qui semblent peut-être à tort, avoir été écrits pour enseigner (ou du moins selon un certain idéal didactique).

Deuxièmement, peut-on considérer cet ensemble de tablettes comme une série présentant une logique d'enseignement ? La sélection de tablettes provient de la même période à Nippur. Ainsi, il est légitime de comparer ces textes étant donné leur grande proximité historique. La notion d'assortiment ou de variable dépend d'une logique d'ensemble pour la conception d'une forme de progression s'appuyant sur des acquis. Il faudra se demander ce qu'implique méthodologiquement le fait de chercher des intentions pédagogiques pour des textes qui ont peut-être été conçus par des usagers différents, à des dates différentes. Dans cette perspective, l'appui sur le cursus des scribes tel qu'il a été reconstitué, permettra d'interroger le lien qui peut unir (ou non) ces textes du point de vue d'une éventuelle progression.

Troisièmement, l'idée de variables didactiques obéit à une logique d'enseignement. Ici, les variations observées ont des conséquences sur les tâches des élèves pour résoudre le problème. Les auteurs des exercices avaient-ils réfléchi à ces conséquences ? Rien n'exclut en effet une forme de hasard, une tradition d'apprentissage d'exercices liés à une forme de culture générale ou à d'autres objectifs. Il est encore possible d'envisager que les auteurs aient eu d'autres projets liés à des apprentissages qui dépendent d'autres enseignements. Je tenterai d'apporter des arguments pour traiter ce point. Il est possible aussi que les tâches aient toutes le même niveau de complexité pour l'élève, à ce stade de sa scolarité. On se demandera dans quelle mesure ces variations pourraient être interprétées comme le résultat d'intentions pédagogiques liées à une forme de « complexification ».

Quatrièmement, l'utilisation de ces tablettes n'est pas exactement connue. Si le caractère scolaire est attesté et si elles ont été interprétées comme des exercices, il n'est pas exclu qu'elles aient servi différemment, par exemple comme des supports d'enseignement pour le maître, qui aurait construit un discours sur des exemples choisis. L'analyse des tâches impliquées par le choix des valeurs numériques de l'énoncé permettra peut-être d'apporter des arguments sur l'utilisation qui en était faite.

Présentation des tablettes

Je travaillerai sur le groupe de huit tablettes d'évaluation de surfaces carrées, constitué par Proust (2007, p.190-197). J'ai expliqué en détails les étapes de l'algorithme du calcul d'aire sur l'exemple de la tablette UM 29-15-192 (voir 2.2 p.48). La mise en correspondance des mesures de longueur avec des nombres en système SP est faite au moyen de la « table métrologique des longueurs » (voir p.52). Je me baserai sur l'interprétation de Proust (voir 2.2 p.48), concernant l'articulation de deux systèmes numériques, l'un pour mesurer et l'autre pour calculer avec des « nombres en système SP ». Je prendrai également en compte l'interprétation de Proust lorsque des erreurs sont détectées ou des reconstitutions de parties endommagées du texte sont proposées.

Tablette	Numéro
CBS 11318	1
UM 29-15-192	2
Ni 18	3
UM 55-21-076	4
IM 57846	5
IM 57828	6
NBC 8082	7
NCBT 1913	8

Tableau 2-16 :
numérotation des tablettes étudiées

L'intérêt de ce corpus est la similarité du contenu, le caractère scolaire attesté, la période qui est la même pour toutes les tablettes (période paléo-babylonienne) et la provenance, puisque les six premières tablettes sont de Nippur. Les tablettes 1 à 6 sont de type IV et carrées[66]. La tablette 3 est publiée par Proust (2007, p.193). Les cinq autres ont été publiées pour la première fois par Neugebauer et Sachs (1984, p. 246-251).

Les deux dernières tablettes paléo-babyloniennes[67], analogues par le contenu à celles de ce groupe, sont les seules tablettes similaires de provenance incertaine. Elles sont publiées pour la première fois par Neugebauer et Sachs (1945, p. 10) puis Nemet-Nejat (1995, p. 260).

Dans les six premières tablettes, le texte est divisé en deux parties. Dans la première partie, en haut à gauche, se trouvent les nombres en système SP. Dans la deuxième partie, en bas à

[66] Tablette carrée ou ronde (6 à 8 cm de côté ou de diamètre environ), liée dans le cursus aux exercices de niveau avancé à Nippur. Voir aussi Falkowitz (1984).
[67] Il s'agit des tablettes NBC 8082 (cdli P254774) et NCBT 1913 (cdli P254777), voir le tableau.

droite, se trouvent l'énoncé avec la mesure de longueur du carré et le résultat avec la mesure d'aire. Les tablettes 7 et 8, provenant d'autres sites, sont analogues à celles de ce groupe. La tablette 7 est de type IV et carrée, la tablette 8 est lenticulaire (la seule de ce corpus). Pour la tablette 7, le contenu est de même type qu'à Nippur mais la disposition est un peu différente et les ordres de grandeur sont plus grands. Pour tablette 8, la disposition est différente, l'énoncé est omis, l'ordre de grandeur est nettement supérieur.

Je commencerai par analyser en détail les tâches nécessaires pour calculer l'aire du carré donné, à l'aide de l'exemple que constitue la tablette 6. Ensuite, je détaillerai chaque tablette, puis je récapitulerai avec un tableau qui servira ma conclusion.

2.3.2 Description des tâches en fonction de la mesure de longueur choisie

Je vais maintenant instaurer le vocabulaire lié aux différentes tâches qui peuvent être nécessaires pour calculer l'aire du carré, sur la base de la tablette 6. Je donne ici sa traduction[68] (Proust, 2007, p.194). Je reprendrai pour cela une partie du vocabulaire que j'ai déjà présenté (voir 2.2.6, p.59)

Traduction de la tablette 6 (d'après Proust, 2007, p.194)[69]

1:45

1:45

<3:3:45>

1/3 *kuš* 1/2 *šu-si* de chaque côté (du carré).

Quelle est sa surface ?

Sa surface est*

9 *še* 1/5 + 3 *še*

68 IM 57828. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1894, p.246, cité dans Proust, 2007, p.194) pas de copie (la disposition est ici reconstituée). Numéro CDLI : P254368

Note* Le résultat écrit sur la tablette semble être 1/4, et le résultat arrondi attendu est 1/3 gin$_2$ 10 še.

69 Note* D'après Neugebauer et Sachs (1984, p. 246-248) et une photographie (Steele 1951, p. 25), Proust (2007, p.194) restitue la ligne (a-ša$_3$-bi) qui est manquante dans Neugebauer et Sachs (1984) et de confirme la fin du texte (*še-kam* étant indiqué comme incertain dans leur édition).

Mesure « simple » ou « composée »

La mesure de longueur du côté du carré est donnée au moyen d'un système numérique « non flottant » (la valeur numérique de longueur n'est pas exprimée dans le système SP). La mesure est donnée avec une unité de mesure (mesure simple) ou plusieurs (mesure composée). Par exemple, la mesure de longueur 1 *kuš* serait « simple[70] » alors qu'ici, la mesure de longueur : 1/3 *kuš* 1/2 *šu-si* est « composée ».

Nombre de positions sexagésimales

Le nombre « 1:45 » en système SP présente deux positions sexagésimales, le nombre « 3:3:45 » en présente trois, etc.

Mise en correspondance d'une mesure de longueur avec un nombre en système SP

Grâce à la table métrologique des longueurs (voir 2.2, p.48) la mesure de longueur, ici 1/3 *kuš* 1/2 *šu-si* est « mise en correspondance » avec un nombre en système SP, « 1:45 » dans cet exemple.

Mise en correspondance : « directe » ou interpolation

Lorsque la correspondance pour la mesure de longueur et le nombre en système SP se fait en une étape, parce que l'entrée pertinente existe déjà dans la table métrologique des longueurs[71] (l'entrée est directement donnée par la table), j'ai utilisé cette annotation : « (direct) ».

Pour la tablette 6, la correspondance entre la mesure de longueur et le nombre en système SP n'existe pas directement dans la table. Dans ce cas il faut procéder à ce que j'appellerai une « interpolation ». Par exemple ici la mesure de longueur est 1/3*kuš* 1/2 *šu-si*, qui n'est pas une entrée disponible dans la table métrologique des longueurs. Il faudra trouver la correspondance pour 1/3 *kuš* (soit 1:40) puis pour 1/2 *šu-si* (soit 5) et additionner les deux en respectant les positions.

1:40
   5

Le résultat est 1:45.

8 *šu-si*	1:20
9 *šu-si*	1:30
1/3 *kuš*	1:40
1/2 *kuš*	2:30
2/3 *kuš*	3:20
5/6 *kuš*	4:10

Tableau 2-17 :
extrait de la table métrologique des longueurs
HS 241 (Proust, 2016, p.8)

[70] Mesure donnée dans CBS 11318, tablette 1 de ce corpus.
[71] Pour HS 241, voir http://www.cdli.ucla.edu/P388160. première publication : Hilprecht 1906, n°42, pl.27

Je préciserai aussi si le nombre en système SP est régulier ou non : c’est-à-dire, s’il admet un inverse exact en base 60 (voir p.45).

Multiplication élémentaire ou par étapes

Certaines des multiplications sont fournies par les tables de multiplication du cursus, voir p.46. En ce sens, elles sont « élémentaires ». Lorsque les multiplications ne sont pas fournies dans ces tables (en supposant qu’il n’y ait pas d’autres tables que celles parvenues à notre connaissance) il faut nécessairement faire appel à un algorithme multiplicatif (multiplication par étapes), voir p.46. Par exemple pour multiplier le nombre 58:20 (en système SP) par lui-même, il pourrait y avoir une utilisation successive des tables de multiplication par 50, par 8 et par 20, ou bien par 50 et par 8:20 (ce sont des tables qui font partie du cursus). Dans la tablette 6, la multiplication porte sur « 1:45 ». La table de multiplication par « 45 » fait partie des tables du cursus. Je préciserai si la table de multiplication fait partie de celles du cursus ou non, selon les sources parvenues jusqu’à nous (en me basant sur Proust, 2007, p.243).

Notion de cycle

Les nombres en système SP qui correspondent aux mesures, dans la table métrologique, reviennent cycliquement. Selon ma définition de cycle, ils vont de 1 à 59, puis le cycle recommence[72]. Je considère un cycle comme un ensemble d’entrées pour lesquelles les nombres en système SP vont de 1 à 59[73]. Je représente ci-dessous un cycle par les valeurs comprises entre deux traits horizontaux. L’extrait de la table métrologique composite a été représenté ici sur deux colonnes pour gagner de l’espace[74].

1/2 *še* d’argent	10	24 *še*	8
1 *še*	20	25 *še*	8:20
1 1/2 *še*	30	26 *še*	8:40
2 *še*	40	27 *še*	9
2 1/2 *še*	50	28 *še*	9:20
3 *še*	1	29 *še*	9:40
4 *še*	1:20	1/6 *gin*[75]	10
5 *še*	1:40	1/6 *gin* 10 *še*[76]	13:20
6 *še*	2	1/4 *gin*[77]	15
7 *še*	2:20	1/4 *gin* 5 *še*[78]	16:40
8 *še*	2:40	1/3 *gin*	20
9 *še*	3	1/3 *gin* 15 *še*	25
10 *še*	3:20	1/2 *gin*	30
11 *še*	3:40	1/2 *gin* 10 *še*	33:20
12 *še*	4	1/2 *gin* 15 *še*	35

[72] Cette définition est arbitraire, il pourrait s’agir du nombre « 2 » en système SP jusqu’au « 2 » suivant, ou autre nombre jusqu’à ce qu’il apparaisse à nouveau dans la table.
[73] Arbitrairement, d’autant que l’entrée 59 n’est pas dans les tablettes, en pratique.
[74] Pour MS 2186, voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P250902 première publication : Friberg, 2007, MSCT 1, 119. La mention indique qu’il s’agit d’argent, c’est une précision commune en début de table métrologique.
[75] Il est écrit : « igi-6- gal$_2$ gin$_2$ » (translittération), soit *igi*-6-*gal*
[76] Il est écrit : « *igi*-6-*gal gin* 10 *še* »
[77] Il est écrit : « *igi*-4-*gal gin* »
[78] Il est écrit : « *igi*-6-*gal gin* 5 *še* »

13 *še*	4:20	2/3 *gin*	40
14 *še*	4:40	2/3 *gin* 15 *še*	45
15 *še*	5	2/3 *gin* 25 *še*	48:20
16 *še*	5:20	5/6 *gin*	50
17 *še*	5:40	5/6 *gin* 15 *še*	55
18 *še*	6	1 *gin*	1
19 *še*	6:20		
20 *še*	6:40		
21 *še*	7		
22 *še*	7:20		
23 *še*	7:40		

Tableau 2-18 : extrait de la table métrologique des poids utilisée pour les surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

Sélectionner le cycle pertinent pour mettre en correspondance un nombre en système SP et une mesure d'aire

Il faut ensuite sélectionner le cycle pertinent (voir p.69) de la table métrologique des surfaces pour trouver la correspondance du nombre en système SP obtenu par la multiplication. Pour le cas où le nombre n'a qu'une seule position sexagésimale, comme « 25 » en système SP[79], il faut choisir le « bon » cycle : il y en a plusieurs (car 25 revient cycliquement). Pour choisir le bon, un contrôle de l'ordre de grandeur est effectué. Une fois le bon cycle sélectionné, il faut trouver la mesure d'aire correspondante à ce « 25 » par mise en correspondance directe si l'entrée existe dans la table ; ou par interpolation, en composant des entrées de la table (voir ci-dessous) ; ou encore par extrapolation.

Dans le cas de la tablette 6 étudiée pour cet exemple, l'ordre de grandeur attendu est celui d'une petite brique.

Mise en correspondance : directe ou interpolation

Dans la tablette 6, il faut sélectionner le cycle pertinent correspondant au nombre « 3:3:45 » en système SP. L'ordre de grandeur attendu est celui d'une petite brique. La table métrologique des surfaces ne comporte pas d'entrée pour « 3:3:45 ». Il faut obtenir la mesure d'aire indirectement par linéarité additive, grâce aux nombres « 3 », « 3 », et « 45 ».

Ici, le premier « 3 » est de l'ordre de grandeur d'une petite brique[80], le « 3 » suivant est choisi « plus petit », dans le cycle précédent, et de même pour « 45 ». Dans ce cas précis, les valeurs ne sont pas dans la table, il faut « extrapoler » voir p.72.

Un autre cas de figure peut se présenter pour la mise en correspondance par interpolation. Par exemple, si le nombre en système SP était « 6:20 » pour l'ordre de grandeur d'une petite brique, il faudrait ici utiliser la correspondance pour 5 et la correspondance pour 1:20 dans le même cycle. C'est-à-dire, ici, les mesures d'aire 15 *še* et 4 *še* soit 19 *še*[81].

---

[79] Voir par exemple la tablette 1.
[80] Pour MS 2186, voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P250902 première publication : Friberg, 2007, MSCT 1, 119. La mention indique qu'il s'agit d'argent, c'est une précision commune en début de table métrologique des poids.
[81] L'exemple est factice.

1/2 *še* d'argent	10
1 *še*	20
1 1/2 *še*	30
2 *še*	40
2 1/2 *še*	50
3 *še*	1
4 *še*	1:20
5 *še*	1:40
6 *še*	2
7 *še*	2:20
8 *še*	2:40
9 *še*	3
10 *še*	3:20
11 *še*	3:40
12 *še*	4
13 *še*	4:20
14 *še*	4:40
15 *še*	5

Tableau 2-19 : extrait de la table métrologique des surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

Circuler d'un cycle à celui qui précède, circuler dans un cycle

Dans certains cas, je l'ai mentionné, la mesure d'aire s'obtient indirectement. Il faut décomposer additivement les nombres en système SP, en « utilisant le cycle précédent », ou en naviguant « plus haut » dans le cycle (voir p.43). Prenons l'exemple du nombre en système SP : « 1:46:40 » présent dans la tablette 7.

La correspondance du nombre 1:40 (le plus à gauche) doit être faite avec la mesure d'aire 1 2/3 de *sar* (du fait de l'ordre de grandeur attendu). Alors le nombre en système SP « 6 », qui suit plus à droite, doit être recherché dans la table métrologique des surfaces, dans le même cycle, plus haut dans la table. Cela permet d'associer la mesure d'aire « 6 *gin* » au nombre 6.

2/3 *gin*	40
2/3 *gin* 10 *še*	43:20
2/3 *gin* 15 *še*	45
2/3 *gin* 25 *še*	48:20
5/6 *gin*	50
5/6 *gin* 10 *še*	53:20
5/6 *gin* 15 *še*	55
5/6 *gin* 25 *še*	58:20
1 *gin*	1
1 1/3 *gin*	1:20
1 1/2 *gin*	1:30
1 2/3 *gin*	1:40
1 5/6 *gin*	1:50
2 *gin*	2
3 *gin*	3
4 *gin*	4
5 *gin*	5
6 *gin*	6
7 *gin*	7
8 *gin*	8
9 *gin*	9
10 *gin*	10
11 *gin*	11
12 *gin*	12
13 *gin*	13
14 *gin*	14
15 *gin*	15
16 *gin*	16
17 *gin*	17
18 *gin*	18
19 *gin*	19
1/3 *sar*	20
1/2 *sar*	30
2/3 *sar*	40
5/6 *sar*	50
1 *sar*	1
1 1/3 *sar*	1:20
1 1/2 *sar*	1:30
1 2/3 *sar*	1:40
1 5/6 *sar*	1:50

Tableau 2-20 : extrait de la table métrologique des surfaces (composite), (Proust, 2007, p.311)

Ensuite, le nombre 40 qui suit plus à droite, doit encore être recherché dans la table métrologique des surfaces au « cycle précédent » celui du nombre 6. Cela permet d'associer la mesure d'aire 2/3 de *gin* au nombre 40. Il y a bien ici la preuve d'une compétence engagée, nécessaire pour pouvoir mener à bout l'exercice : celle de savoir circuler d'un cycle à celui qui précède.

Pour mieux le faire comprendre, j'ai matérialisé les changements de cycle dans le tableau par une ligne noire. La mesure d'aire finale est « 1 2/3 sar 6 gin 2/3 gin ». Pour mieux comprendre s'il faut ou non changer de cycle, il est possible de décomposer ainsi le nombre en système SP, ce qui met en évidence les différences d'ordre de grandeur entre les parties du nombre en système SP :

1 40
6
40

Dans cet exemple, le changement de cycle est naturel et se fait donc « sans y penser ». En remontant simplement « plus haut dans la table » pour trouver la correspondance pour le nombre 6, puis pour le nombre 40, il n'y a pas de difficulté.

Dans certains cas plusieurs valeurs seront possibles pour le nombre en système SP en remontant la table, et il faudra bien se repérer à la position sexagésimale dans le nombre en système SP pour la mise en correspondance (et sauter une valeur en système SP par exemple) : voir ci-dessous.

Positionnement

J'appellerai « positionnement » l'attention particulière donnée par le scribe à la position à l'intérieur du nombre en système SP. Elle se matérialise par le choix de circuler vers le cycle précédent ou de rester dans le même cycle. Le scribe peut se baser pour cela sur les positions sexagésimales du nombre en système SP.

Extrapolation

Si les valeurs sont inférieures à l'entrée initiale de la table telle quelle a été reconstituée par les historiens, il faut extrapoler (par exemple, pour des petites fractions de *še*).

Il est très probable que la plus petite valeur (entrée initiale) ait été 1/2 *še*. En effet, il y a une grande stabilité des tablettes parvenues jusqu'à nous et présentant des tables métrologiques de surfaces (qui considèrent cette portion de table métrologique) ; elles commencent généralement à 1/2 *še* ou 1 *še* (Proust, 2007, p.157).

Pour trouver la mesure d'aire qui correspond à 3:20 dans l'exemple de la tablette 6, je cherche un ordre de grandeur plus petit qu'une petite brique. Il ne figure pas dans la table, le résultat (1/6 *še*) est obtenu par une manipulation particulière à ce cas de figure.

Plusieurs hypothèses sont possibles : soit ces parties de la table métrologique ne sont pas parvenues jusqu'à nous, soit il faut utiliser un calcul, soit arrondir, tronquer cette partie du résultat. Les tablettes 3, 4 et 6 permettent de constater que la valeur n'est pas toujours négligée, et que pour certaines fractions de *še* au moins, le résultat est donné effectivement.

1/48 *še*	25
1/24 *še*	50
1/12 *še*	1:40
1/6 *še*	3:20
1/5 *še*	4
1/4 *še*	5
1/3 *še*	6:40
1/2 *še*	10
1 *še*	20

Tableau 2-21 : proposition de technique d'extrapolation

Pour obtenir cette table extrapolée, j'ai divisé 20 par 2, pour obtenir la correspondance pour 1/2 *še*. La division de 20 par 3 donne 6:40 en système SP (3 fois 6:40 donne 20) et permet d'obtenir la correspondance pour 1/3 *še*, etc.

Les tablettes pourraient avoir été conçues par l'enseignant pour faire travailler l'élève sur le calcul du résultat dans la table métrologique des surfaces, résultat qui n'apparaît pas directement mais demande une « extrapolation ». Il faut noter que si les tables ne commencent qu'à 1/2 *še*, il est possible que cet exercice d'extrapolation ne soit pas un exercice « pratique » mais plutôt un exercice à visée mathématique. On ne peut exclure toutefois le fait que la portion de table « manquante » ait pu exister. C'est peu probable (puisque les tablettes sur lesquelles est basée la table composite ne comportent pas d'entrées inférieures) mais cela remettrait en cause l'hypothèse d'un travail mathématique d'extrapolation.

L'extrapolation consiste à utiliser une entrée se situant en-deça de la plus petite des entrées de la table métrologique[82], mais pas entre deux entrées. Elle n'est pas spécifique à la table des surfaces, une telle action peut se présenter pour toutes les tables. L'extrapolation peut aussi concerner la mise en correspondance d'une mesure de longueur avec un nombre en système SP.

Maintenant que j'ai présenté les tâches possibles et précisé le vocabulaire, je détaille pour chaque tablette du corpus les tâches mobilisées, du fait du choix de la mesure de longueur du côté du carré.

2.3.3 Détails pour chaque tablette de Nippur

Je donne ici les détails pour chaque tablette étudiée, et j'en propose un récapitulatif dans le Tableau 2-31.

Tablette 1

Traduction de la tablette 1 (Proust, 2007, p.191)[83]

5
5
25

1 *kuš* le côté (du carré).
Quelle est sa surface ?
Sa surface est
1/3 *gin* 15 *še*

Du fait du choix des valeurs[84], la tablette 1 témoigne de l'ensemble des tâches que j'ai appelées « principales », au sens où elles sont communes à *tous* les exercices (voir p.59). Je

[82] Ou au-delà de la plus grande, mais ce sas de figure ne se présente pas dans les sources considérées ici.

[83] Selon Proust (2007, p.191) le calcul placé dans le coin supérieur gauche devait être une multiplication de 5 par 5 ; la dizaine qui figure sur la copie de Neugebauer et Sachs est probablement due à une erreur du scribe. Je ne la fais pas figurer ici dans la traduction.

[84] Tablette 1 : CBS 11 318. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1894, p.251). La traduction de Proust conserve ici les indices pour la notation des unités de mesure.

vais souligner les tâches principales ci-dessous. Je noterai les sous-tâches ; les tâches qui ne sont pas principales, en italique. L'ordre de grandeur de départ est celui de la longueur d'une grande brique.

1. Mise en correspondance de la mesure de longueur 1 *kuš* avec un nombre en système SP. Dans la table métrologique des longueurs, l'entrée existe dans la table métrologique. C'est ce que j'ai appelé la recherche « directe » (en une seule étape). Elle donne le nombre 5 en système SP. La recherche « directe » est l'une des tâches que j'ai qualifiées de « principales ».

2. Multiplication élémentaire de 5 par lui-même. La table de multiplication par 5 fait partie des tables du cursus[85]. Il n'est pas nécessaire d'utiliser un algorithme multiplicatif. La multiplication est « élémentaire ». Je remarque que cette tablette est la seule du corpus qui propose un produit comportant une seule position sexagésimale.

3. *Mise en correspondance directe par interpolation* du nombre 25 en système SP avec la mesure d'aire.

Hypothèse 1 : mise en correspondance par interpolation : c'est une « sous-tâche » puisque cela se fait probablement en deux étapes, la mise en correspondance directe pour 20, puis la mise en correspondance directe pour 5.

Hypothèse 2 : mise en correspondance directe pour 25 : c'est une tâche principale.

Je note quelques détails sur ces hypothèses : la tablette paléo-babylonienne MS 2186[86] qui est de provenance incertaine comporte une table métrologique des surfaces. L'entrée pour 25 existe directement dans la table. Or la table métrologique composite sur laquelle je me base a été constituée exclusivement avec les tablettes de Nippur, conservées à Istanbul et Iéna. Dans la table composite, il n'y a pas d'entrée pour 25. Des tablettes de Nippur conservées à Philadelphie et Chicago ou des tablettes perdues pourraient faire état de pas plus petits entre les entrées de la table, comme l'indique MS 2186 (qui n'est pas pris en compte dans la table composite parce que sa provenance est inconnue).

28 *še*	9:20
29 *še*	9:40
1/6 *gin*	10
1/6 *gin* 10 *še*	13:20
1/4 *gin*	15
1/4 *gin* 5 *še*	16:40
1/3 *gin*	20
1/3 *gin* 15 *še*	25
1/2 *gin*	30

Tableau 2-22 : extrait de la table métrologique des surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

Sélection du cycle pertinent : c'est l'une des tâches principales. L'ordre de grandeur pour 20 est celui d'une grande brique. Ainsi, le cycle choisi sera celui des fractions du *gin*. En suivant l'hypothèse 1 il faut :

[85] Il y a 38 tables de multiplication, voir p.42

[86] Pour MS 2186, voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P250902 première publication : Friberg, 2007, MSCT 1, 119. La mention indique qu'il s'agit d'argent, c'est une précision commune en début de table métrologique.

Circuler à l'intérieur du cycle. L'ordre de grandeur pour 5 doit être plus petit que celui de 20. Il faut circuler dans le *même* cycle[87].

1/2 *še* d'argent[88]	10	28 *še*	9:20
1 *še*	20	29 *še*	9:40
1 1/2 *še*	30	1/6 *gin*[89]	10
2 *še*	40	1/6 *gin* 10 *še*	13:20
2 1/2 *še*	50	1/4 *gin*	15
3 *še*	1	1/4 *gin* 5 *še*	16:40
4 *še*	1:20	1/3 *gin*	20
5 *še*	1:40	1/2 *gin*	30
6 *še*	2	1/2 *gin* 10 *še*	33:20
7 *še*	2:20	1/2 *gin* 15 *še*	35
8 *še*	2:40	1/2 *gin* 25 *še*	38:20
9 *še*	3	2/3 *gin*	40
10 *še*	3:20	2/3 *gin* 10 *še*	43:20
11 *še*	3:40	2/3 *gin* 15 *še*	45
12 *še*	4	2/3 *gin* 25 *še*	48:20
13 *še*	4:20	5/6 *gin*	50
14 *še*	4:40	5/6 *gin* 10 *še*	53:20
15 *še*	5	5/6 *gin* 15 *še*	55
16 *še*	5:20	5/6 *gin* 25 *še*	58:20
17 *še*	5:40	1 *gin*	1
18 *še*	6	1 1/3 *gin*	1 : 20
19 *še*	6:20	1 1/2 *gin*	1 : 30
20 *še*	6:40	1 2/3 *gin*	1 : 40
21 *še*	7	1 5/6 *gin*	1 : 50
22 *še*	7:20	2 *gin*	2
23 *še*	7:40	3 *gin*	3
24 *še*	8	4 *gin*	4
25 *še*	8:20	5 *gin*	5
26 *še*	8:40	6 *gin*	6
27 *še*	9		

Tableau 2-23 : extrait de la table métrologique des surfaces (composite) traduite, (d'après Proust, 2007, p.311)

Chercher la correspondance pour le nombre 5 en système SP correspond donc à circuler dans le même cycle. L'ordre de grandeur est celui d'une petite brique.

Positionnement : en se basant simplement sur les positions sexagésimales du nombre 25 en système SP, il est possible de déduire qu'il faudra choisir le *même* cycle pour 5 que pour 20, la position sexagésimale n'ayant pas changé.

[87] Je remarque qu'il n'est pas imaginable de proposer un autre équivalent pour le nombre 5 en système SP, comme par exemple 5 gin_2. En effet, l'ordre de grandeur est alors celui d'une demi-cour (il s'agit du cycle suivant dans la table, qui correspond aussi au nombre 5 en système SP). Une autre possibilité, plus petite, correspondrait au nombre 5 en système SP (soit ¼ še). Cela ne convient pas non plus, puisqu'alors l'ordre de grandeur est beaucoup plus petit (petite tablette).

[88] Il est inscrit « ku_3babbar » (translittération).
[89] Il est inscrit « igi-6-gal_2 » (translittération).

La mise en correspondance est directe pour 20 (qui donne 1/3 *gin*), c'est une entrée de la table métrologique des surfaces.

La mise en correspondance est directe pour 5 (qui donne 15 *še*), c'est une entrée de la table métrologique des surfaces

La mesure d'aire exprimée est composée : 1/3 *gin* 15 *še*

Sur cet exemple, je peux maintenant récapituler la distinction entre trâches principales et sous-tâches qui ont été rencontrées. Voici les tâches que j'ai appelées « principales » :

-mise en correspondance directe d'une mesure de longueur

-multiplication élémentaire : la multiplication figure sur les tables du cursus (produit élémentaire)

-sélection du cycle pertinent (en fonction de l'ordre de grandeur)

-mise en correspondance directe d'un nombre sexagésimal avec une mesure d'aire

J'ai appelé les autres tâches rencontrées « sous-tâches ». Ces sous-tâches nécessitent de connaître les tâches principales, pour être réalisées. Elles ne sont pas rencontrées dans toutes les tablettes. Voici les sous-tâches hypothétiquement rencontrées dans cette tablette si l'on suit l'hypothèse 1 (en se basant donc sur la table métrologique composite) :

-mise en correspondance par *interpolation* (ici, du nombre 25 avec une mesure d'aire)

et par conséquence :

-*circuler dans un cycle* (ici, à l'intérieur d'un *même* cycle), en utilisant éventuellement

-le positionnement

La tablette 1 propose presque uniquement des tâches principales. Ici toutes les entrées utilisées sont déjà présentes dans les tables métrologiques. La multiplication est élémentaire. La recherche de la correspondance de la mesure de longueur 1 *kuš* dans la table métrologique des longueurs est directe (une étape).

Une hypothèse de choix pédagogiques pourrait être que cette tablette permettait de faire travailler les scribes sur l'*interpolation* dans la table métrologique des surfaces. Cela peut être fait sans que les étapes précédentes ne soient trop complexes (mise en correspondance directe de la mesure de longueur, multiplication élémentaire). Il faut noter que si de plus, la mise en correspondance est directe pour obtenir la mesure d'aire (hypothèse 2), alors la mesure de longueur choisie n'implique que des tâches principales.

Tablette 2

Traduction de la tablette 2[90] (Proust, 2007, p.193)

[2]0

20

6:40

2 *šu-si* le côté (du carré).

Quelle est sa surface ?

Sa surface est

1/3 še

La tablette 2 permet de mettre en évidence une « sous-tâche » différente de la tablette 1 (voir p.94). Cette tablette ne propose qu'une seule « sous-tâche », la mise en correspondance (directe) de 6:40, qui se fait par « *extrapolation* ».

L'ordre de grandeur de départ est celui de la longueur d'un doigt. La mise en correspondance de la mesure de longueur 2 *šu-si* est directe, l'entrée existe dans la table. Elle donne le nombre 20 en système SP. La multiplication de 20 par 20 est élémentaire. Le nombre obtenu, 6:40, comporte deux positions sexagésimales.

Pour la sélection du cycle pertinent, l'ordre de grandeur recherché pour 6:40 est plus petit qu'une tablette. Ainsi, le cycle choisi correspondra à celui des fractions du *še*, il ne sera pas dans la table. En effet, l'entrée initiale de la table métrologique des surfaces est la correspondance ½ *še* → 10, alors que la mesure d'aire recherchée est d'ordre de grandeur inférieur.

Une hypothèse serait donc que cette tablette permet de faire travailler sur l'*extrapolation*, dans la table métrologique des surfaces. Cela est possible sans que les étapes précédentes ne soient trop complexes (mise en correspondance directe pour obtenir le nombre en système SP, multiplication élémentaire). La correspondance pour 6:40 donne 1/3 *še* par *extrapolation* (voir p.72).

[90] UM 29-15-192. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1894, p.251)

Tablette 3

Traduction de la tablette 3 (Proust, 2007, p.193)[91]

2:10

2:10

4:26[sic]:40

1/3 *kuš* 3 *šu-si* le côté (du carré).

Quelle est sa surface ?

Sa surface est

13 *še* 1/4[sic] *še*.

La tablette 3 témoigne de la mise en œuvre de plusieurs « sous-tâches » (voir p.94), du fait du choix des valeurs numériques. L'ordre de grandeur est celui de la longueur d'une brique.

1. La mise en correspondance directe par *interpolation* (deux étapes) pour la mesure de longueur composée 1 *kuš* (longueur d'une brique) dans la table métrologique des longueurs. Les entrées existent déjà dans la table métrologique.

3 *šu-si*	30
4 *šu-si*	40
5 *šu-si*	50
6 *šu-si*	1
7 *šu-si*	1:10
8 *šu-si*	1:20
9 *šu-si*	1:30
1/3 *kuš*	1:40

Tableau 2-24 : extrait de la table métrologique des longueurs HS 241 (Proust, 2016, p.8)[92]

L'addition des nombres en système SP intermédiaires en prêtant attention au *positionnement* est nécessaire, c'est une conséquence logique de l'utilisation de la correspondance pour 3 *šu-si* qui correspond au cycle précédent celui de 1/3 *kuš*.

1 40

30

[91] Ni 18. Selon Proust (2007, p.193), il y a une erreur pour la mesure d'aire (1/4 *še* au lieu de 1/3 *še*) et le scribe a aussi fait une erreur dans la multiplication, qui s'est répercutée sur la surface. Elle rappelle que ce détail montre que cet exercice est un calcul réel, et non lié à un apprentissage par cœur.
« sic » signifie que le signe identifié est erroné ; il est laissé non corrigé dans la traduction.

[92] Voir aussi le site du CDLI : http://www.cdli.ucla.edu/P388160, première publication : Hilprecht 1906, n°42, pl.27

Le résultat est 2:10. Ce repérage des positions relatives découle directement de l'organisation des tables métrologiques par cycles.

2. La table de multiplication par 2:10 n'existe pas (dans les sources à notre disposition). *Un algorithme* est nécessaire, passant peut-être par l'abaque, et l'utilisation des tables élémentaires de 10 puis de 2 (voir p.68). Il y a même une erreur du scribe qui trouve 4:26:40 au lieu de 4:41:40.

3. Sur la base du « calcul correct » supposé, la mise en correspondance de 4:41:40 dans la table métrologique des surfaces se fait par *interpolation* en deux étapes : probablement la correspondance directe pour 4:40 et la correspondance directe pour 1:40.

Sélection du cycle pertinent : l'ordre de grandeur pour 4:40 est celui d'une brique. Ainsi, le cycle choisi sera celui du *še*.

Circulation d'un cycle à l'autre : l'ordre de grandeur pour 1:40 doit être plus petit. Il s'agit alors de sélectionner le cycle précédent, dans la table métrologique. Se basant sur le *positionnement* : les positions sexagésimales du nombre 4:41:40 en système SP, il faudra choisir le cycle précédent de 4:40.

4	40		
	1	40	

Je remarque qu'il y a une possibilité éventuelle de se tromper si l'on ne saute pas de cycle[93]. L'entrée juste au-dessus fait correspondre au nombre 1:40 la mesure d'aire 5 *še*, de l'ordre de grandeur d'une tablette de taille moyenne.

2 1/2 *še*	50
3 *še*	1
4 *še*	1:20
5 *še*	1:40
6 *še*	2
7 *še*	2:20
8 *še*	2:40
9 *še*	3
10 *še*	3:20
11 *še*	3:40
12 *še*	4
13 *še*	4:20
14 *še*	4:40
15 *še*	5
16 *še*	5:20
17 *še*	5:40
18 *še*	6
19 *še*	6:20

Tableau 2-25 : extrait de la table métrologique des surfaces (composite) traduite, (d'après Proust, 2007, p.311)

[93] Entre le 4 de « 4:40 » et le 1 de « 1:40 » il y a bien eu changement de position sexagésimale.

2 1/2 *še*	50
3 *še*	1
4 *še*	1:20
5 *še*	1:40
6 *še*	2
7 *še*	2:20
8 *še*	2:40
9 *še*	3
10 *še*	3:20
11 *še*	3:40
12 *še*	4
13 *še*	4:20
14 *še*	4:40
15 *še*	5
16 *še*	5:20
17 *še*	5:40
18 *še*	6
19 *še*	6:20

Tableau 2-26 : extrait de la table métrologique des surfaces (identique à cet endroit) MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

La correspondance pour 4:40 (qui donne 14 *še*) est une entrée de la table métrologique des surfaces, en revanche pour 1:40 (qui donne 1/12 *še*) elle doit être *extrapolée*.

L'expression de la mesure d'aire est composée : 14 *še* 1/12 *še*. Il faut noter que si 1/12 *še* est *négligé*, alors cette étape est supprimée. Comme le calcul comporte une faute, il n'est pas possible de savoir si cette valeur aurait été négligée ici[94].

En résumé, cette tablette permet de rencontrer plusieurs nouvelles « sous-tâches » par rapport aux précédentes tablettes. La mise en correspondance de 1 *kuš* 3 *šu-si* se fait par *interpolation* en deux étapes et implique de faire attention au *positionnement* des nombres en système SP obtenus. L'utilisation d'une multiplication non élémentaire implicant *un algorithme* n'avait pas non plus été rencontrée. La mise en correspondance de 4:41:40 se fait par *interpolation* en deux étapes et implique la *circulation d'un cycle à celui qui précède*, se basant sur les positions sexagésimales (*positionnement*). Celle-ci comporte un risque d'erreur, ce qui est nouveau pour cette sélection.

Une hypothèse serait que cette tablette implique davantage de sous-tâches liées aux mesures composées, et les subtilités que cela induit sur la circulation dans les tables métrologiques.

[94] Remarque : sur la base du calcul du scribe, pour 4:26 :40 le résultat devrait être 13 *še* 1/3 *še*. Il est en fait noté 13 *še* 1/4 *še*.

Tablette 4

Traduction de la tablette 4 (d'après Proust, 2007, p.194) [95]

[5:20
5:20
28:26:40]

1 *kuš* 2 *šu-si* de chaque
côté (du carré).
Quelle est sa surface ?
Sa surface est
1/3 *gin* 25 1/3 *še*

Examinons les sous-tâches qu'implique la résolution du présent exercice sur la tablette 4, du fait du choix des valeurs numériques. L'ordre de grandeur de départ est celui de la longueur d'une grande brique.

La mesure de longueur du côté est composée. La mise en correspondance (directe) de la mesure de longueur avec le nombre en système SP se fait donc par *interpolation* (deux étapes). Les entrées existent dans la table. La multiplication de 5:20 par 5:20 n'est pas élémentaire (elle ne fait pas partie des tables du cursus), *un algorithme* est donc nécessaire.

La mise en correspondance de 28:26:40 dans la table métrologique des surfaces, se fait par *interpolation*, en trois étapes : probablement la correspondance pour 20, la correspondance pour 8:20 et la correspondance pour 6:40. L'ordre de grandeur pour 20 est celui d'une grande brique. Ainsi, le cycle pertinent choisi sera celui des fractions de *gin*. L'ordre de grandeur pour 8:20 doit être plus petit. Il s'agit alors de *circuler dans le même cycle*.

20
8 20

L'ordre de grandeur pour 6:40 doit être encore plus petit. Les positions sexagésimales indiquent qu'il faudra *circuler vers le cycle précédent* celui de 8:20 (avec risque d'erreur).

20
8 20
6 40

[95] UM 55-21-076. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1984, p. 246) Voir aussi Robson (2000, p.25). Cités dans Proust (2007, p.194). Il est écrit « 1/3 gin_2 25 2/3 še » (translittération) sur la tablette ; la correction « 1/3 » est proposée par la traduction. Middeke-Conlin (*à paraître*, p.218) remarque que la différence entre la valeur attendue et celle qui est écrite est de 0,33%. Il conclut qu'il est difficile de statuer s'il s'agit d'une erreur d'épigraphie et/ou de mise en correspondance. L'erreur est en tous cas selon lui, moins clairement liée à une erreur de calcul que pour la tablette 3, Ni 18 (l'auteur identifie 5,32% de différence avec la valeur attendue, et l'erreur est liée au résultat de la multiplication).

Il y a à nouveau une possibilité éventuelle d'erreur si l'on ne change pas de cycle. L'entrée juste au-dessus fait correspondre la mesure d'aire 20 *še* au nombre 6:40 en système SP[96]. L'attention donnée au *positionnement* sexagésimal peut permettre de ne pas se tromper.

1/2 *še* d'argent[97]	10	28 *še*	9:20
1 *še*	20	29 *še*	9:40
1 1/2 *še*	30	1/6 *gin*[98]	10
2 *še*	40	1/6 *gin* 10 *še*	13:20
2 1/2 *še*	50	1/4 *gin*	15
3 *še*	1	1/4 *gin* 5 *še*	16:40
4 *še*	1:20	1/3 *gin*	20
5 *še*	1:40	1/2 *gin*	30
6 *še*	2	1/2 *gin* 10 *še*	33:20
7 *še*	2:20	1/2 *gin* 15 *še*	35
8 *še*	2:40	1/2 *gin* 25 *še*	38:20
9 *še*	3	2/3 *gin*	40
10 *še*	3:20	2/3 *gin* 10 *še*	43:20
11 *še*	3:40	2/3 *gin* 15 *še*	45
12 *še*	4	2/3 *gin* 25 *še*	48:20
13 *še*	4:20	5/6 *gin*	50
14 *še*	4:40	5/6 *gin* 10 *še*	53:20
15 *še*	5	5/6 *gin* 15 *še*	55
16 *še*	5:20	5/6 *gin* 25 *še*	58:20
17 *še*	5:40	1 *gin*	1
18 *še*	6	1 1/3 *gin*	1 : 20
19 *še*	6:20	1 1/2 *gin*	1 : 30
20 *še*	6:40	1 2/3 *gin*	1 : 40
21 *še*	7	1 5/6 *gin*	1 : 50
22 *še*	7:20	2 *gin*	2
23 *še*	7:40	3 *gin*	3
24 *še*	8	4 *gin*	4
25 *še*	8:20	5 *gin*	5
26 *še*	8:40	6 *gin*	6
27 *še*	9		

Tableau 2-27 : extrait de la table métrologique des surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

Les correspondances pour 20 (qui donne 1/3 *gin*) et pour 8:20 (qui donne 25 *še*) sont des entrées de la table métrologique des surfaces.

La correspondance pour 6:40 doit être *extrapolée*. Elle donne 1/3 *še*. Il faut noter que la tablette 2 utilise la même valeur (voir p.77). Il est très intéressant de voir à nouveau cette valeur utilisée ici. L'expression de la mesure d'aire est composée, 1/3 *gin* 25 *še* 1/3 *še*.

[96] Pour MS 2186, voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P250902 première publication : Friberg, 2007, MSCT 1, 119. La mention indique qu'il s'agit d'argent, c'est une précision commune en début de table métrologique.

[97] Il est inscrit « ku$_3$babbar » (translittération).

[98] Il est inscrit « igi-6-gal$_2$ » (translittération).

En résumé, cette tablette propose les mêmes « sous-tâches » que la précédente (Ni 18). Mais ici, la mise en correspondance par *interpolation* du nombre en système SP avec la mesure d'aire se fait en trois étapes. Il est intéressant de noter que le nombre « 6:40 » en système SP a déjà été rencontré lors de l'étude de la tablette 2. Il nécessite une *extrapolation*. Il faut remarquer également que la mesure d'aire obtenue par extrapolation, « 1/3 *še* », n'est pas négligée. Elle ne l'était pas non plus dans la tablette 2. En revanche dans la tablette 2, la mesure était simple, et la tronquer impliquerait de ne pas donner de résultat. Ici la mesure d'aire est composée. Ainsi, il pourrait davantage être envisageable de tronquer 1/3 *še*, or ce n'est pas le cas.

Tablette 5

La traduction de la tablette 5 (d'après Proust, 2007, p.194) [99]

5 ? 10

2/3 *kuš* 9 *šu-si* de chaque
côté (du carré).
Quelle est sa surface ?
Sa surface est
1/3 [*gin* 10 *še*]*

Examinons les sous-tâches qu'implique la résolution du présent exercice. L'ordre de grandeur de départ est celui de la longueur d'une brique. La mise en correspondance de la mesure de longueur composée, 2/3 *kuš* et 9 *šu-si,* nécessite deux étapes, pour l'*interpolation*. Les entrées existent dans la table métrologique. L'entrée 2/3 *kuš* correspond au nombre 3:20 en système SP. L'entrée 9 *šu-si* correspond au nombre 1:30 en système SP.

Cette fois, le *positionnement* nécessite une addition des nombres en système SP intermédiaires, avec une attention particulière aux positions.

3 20
1 30

Le résultat est 4:50. Il faut noter l'addition de deux nombres non nuls. La multiplication de 4:50 par lui-même nécessite un *algorithme multiplicatif* pour aboutir à 23:21:40. La mise en correspondance de 23:21:40 avec la mesure d'aire nécessite ici aussi une *interpolation* en trois étapes : probablement la correspondance pour 20, la correspondance pour 3:20 et la correspondance pour 1:40. Cette dernière a été détaillée dans le cas de la tablette 3 (voir p.78).

La sélection du cycle pertinent fait appel à l'ordre de grandeur pour 20 qui est celui d'une grande brique et donne 1/3 *gin*. Ainsi, le cycle choisi sera celui des fractions de *gin* (comme la tablette précédente)[100].

[99] IM 57846. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1894, p.246, cité dans Proust, 2007, p.194). Il n'y a pas de copie (la disposition est donc ici reconstituée). Numéro CDLI : P254368

*Note : Le résultat écrit sur la tablette semble être 1/4, et le résultat arrondi attendu est 1/3 *gin* 10 *še*.

[100] Pour MS 2186, voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P250902 première publication : Friberg, 2007, MSCT 1, 119. La mention indique qu'il s'agit d'argent, c'est une précision commune en début de table métrologique.

1/2 *še* d'argent	10
1 *še*	20
1 1/2 *še*	30
2 *še*	40
2 1/2 *še*	50
3 *še*	1
4 *še*	1:20
5 *še*	1:40
6 *še*	2
7 *še*	2:20
8 *še*	2:40
9 *še*	3
10 *še*	3:20
11 *še*	3:40
12 *še*	4
13 *še*	4:20
14 *še*	4:40
15 *še*	5

Tableau 2-28 : extrait de la table métrologique des surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

L'ordre de grandeur pour 3:20 nécessite de *circuler vers le cycle précédent* celui de 20 et donne 10 *še*. L'ordre de grandeur pour 1:40 correspond au cycle précédent celui de 3:20 (comme pour la tablette 3, p.78).

20
3 20
1 40

Il y a à nouveau une possibilité éventuelle d'erreur si l'on ne change pas de cycle. Prêter attention au *positionnement* permet d'éviter cette erreur. L'entrée précédente pour le nombre 1:40 en système SP, fait en effet correspondre au nombre 1:40 la mesure d'aire 5 *še*.

C'est intéressant, l'entrée correcte n'est pas dans la table[101] et doit être *extrapolée* pour trouver 1/12 *še*. Cette étape est peut-être supprimée, si le résultat est négligé. C'est ce que suggère en effet la reconstitution de l'historien pour cette tablette. Il est possible de se référer à la tablette 3 qui utilise la même valeur (voir p.77). Malheureusement, comme le scribe y a fait erreur, il n'est pas possible de savoir si le résultat aurait été négligé.

En résumé, cette tablette nécessite plusieurs « sous-tâches » à la fois. Elles sont similaires à celles des deux tablettes précédentes.

Cette tablette a la particularité de proposer, pour l'une des trois étapes de mise en correspondance, une *extrapolation* (entrée correcte non présente dans la table), avec risque d'erreur (entrée incorrecte présente dans la table) si l'on ne prête pas attention au *positionnement*. Cette étape d'extrapolation n'était peut-être pas réalisée si la mesure d'aire 1/12 *še* était négligée.

Il faut noter aussi l'utilisation de valeurs identiques dans la tablette 1 et la tablette 4 (pour 1/3 *gin*) ainsi que la tablette 3 (pour 1/12 *še*).

[101] Dans la table composite, telle qu'elle a été reconstituée à partir de nombreuses tablettes.

Tablette 6

Traduction de la tablette 6 (d'après Proust, 2007, p.194)[102]

1:45

1:45

<3:3:45>

1/3 *kuš* 1/2 *šu-si* de chaque
côté (du carré).
Quelle est sa surface ?
Sa surface est*
9 *še* 1/5 + 3 *še*

Examinons les tâches que le choix des valeurs numériques implique. L'ordre de grandeur de départ est celui de la longueur d'une brique.

Cette fois-ci il y a une particularité liée à la mise en correspondance par *interpolation* (deux étapes) de la mesure de longueur composée. Il faut aussi noter que la mesure de longueur 1/3 *kuš* (de l'ordre de la longueur d'une brique), apparaît dans la tablette 3.

L'entrée 1/3 *kuš* existe dans la table métrologique. Elle correspond au nombre 1:40 en système SP.

En revanche, l'entrée 1/2 *šu-si* n'existe pas dans la table métrologique. Il faut *extrapoler*. Une hypothèse est que la correspondance qui associe 1 *šu-si* à 10 permet de d'associer 1/2 *šu-si* à 5. La mesure 1/2 *šu-si* correspond au nombre 5 en système SP.

1 *šu-si*	10
2 *šu-si*	20
3 *šu-si*	30
4 *šu-si*	40
5 *šu-si*	50
6 *šu-si*	1
7 *šu-si*	1:10
8 *šu-si*	1:20
9 *šu-si*	1:30
1/3 *kuš*	1:40

Tableau 2-29 : extrait de la table métrologique des longueurs HS 241 (Proust, 2016, p.8)

[102] IM 57828. « 9 *še igi*-5 3 *še-kam* », d'après Proust (2007, p.194).
Note* D'après Neugebauer et Sachs (1984, p. 246-248) et une photographie (Steele 1951, p. 25), Proust (2007, p.194) restitue la ligne (*a-ša-bi*) qui est manquante dans Neugebauer et Sachs (1984) et confirme la fin du texte (la lecture de *še-kam* était indiqué comme incertaine dans leur édition).

La multiplication de 1:45 par lui-même nécessite un *algorithme multiplicatif* pour aboutir à produire le résultat 3:3:45.

La mise en correspondance de 3:3:45 dans la table métrologique des surfaces, se fait par *interpolation* en trois étapes. Il s'agit probablement de la correspondance pour 3 (qui donne 9 *še*, c'est une entrée de la table métrologique des surfaces) la correspondance pour 3:20 (qui donne 1/6 *še*) et la correspondance pour 25 (qui donne 1/48 *še*). L'ordre de grandeur pour 3 est celui d'une brique. Ainsi, le cycle sélectionné sera celui des *še*.

1/2 *še* d'argent	10
1 *še*	20
1 1/2 *še*	30
2 *še*	40
2 1/2 *še*	50
3 *še*	1
4 *še*	1:20
5 *še*	1:40
6 *še*	2
7 *še*	2:20
8 *še*	2:40
9 *še*	3
10 *še*	3:20

Tableau 2-30 : extrait de la table métrologique des surfaces MS 2186 (Friberg, 2007, p.110-112)

L'ordre de grandeur pour 3:20 nécessite de *circuler vers le cycle précédant* celui de 3. Cela fait penser à l'exemple précédent, mais ici il ne s'agit pas du même ordre de grandeur : l'entrée qui fait correspondre 3:20 en système SP à la mesure d'aire 10 *še* ne convient pas. Cette étape est peut-être supprimée si le résultat est négligé. L'ordre de grandeur pour 25 correspond au cycle précédant celui de 3:20. Cette étape est peut-être à nouveau supprimée si le résultat est négligé[103].

3
　3　20
　　(25)

L'expression de la mesure d'aire est composée, et devrait être 9 še 1/6 še et 1/48 še[104]. Il faut noter que le résultat réellement exprimé sur la tablette est en fait difficile à comprendre. Il traduit par Proust de cette façon : 9 *še* 1/5 + 3 *še*. Middeke-Conlin (*à paraître*, p.218) explique que le résultat pourrait être théoriquement exprimé sous cette forme : 9 *še* un 6ème de *še* + un 8 ème d'un 6 ème de *še*[105]. Il s'agirait alors ici de la même forme d'expression, mais avec des valeurs adaptées : 9 *še* un 5ème de *še* (d'un) tiers de *še*[106]. Middeke-Conlin calcule un pourcentage d'écart de 1,32% avec la valeur attendue, qu'il attribue au fait d'arrondir[107]. En

[103] Je mets cette partie du nombre en système SP entre parenthèses car cette étape n'a peut-être pas lieu.
[104] Ou encore 9 še 3/16 še.
[105] Bien que ce ne soit pas régulier, la tendance semble aller vers ce système de partitionnement. En effet, avec le problème 1 de la tablette 2, UM 29-15-481, l'unité de mesure še apparaît entre le nombre entier et la fraction de še alors que ce n'est pas le cas dans le problème 2. L'inconsistance peut être comprise comme une erreur épigraphique; l'auteur omet simplement un graphème prévu. (Middeke-Conlin, *à paraître*, p.218)
[106] Le texte 9(diš) še igi 5(diš) 3(diš) še-kam", est traduit par Middeke-Conlin en anglais comme « 9 *še* one-5th (of) a 3rd is of *še* »
[107] Les statistiques sur les pourcentages d'écart dans les textes lui servent à étayer ses hypothèses.

tous cas aujourd'hui, l'inscription demeure peu compréhensible, et il n'y a ni copie, ni accès à l'original pour cette tablette.

En résumé, cette tablette a plusieurs particularités. Les « sous-tâches » sont similaires aux trois tablettes précédentes mais la mise en correspondance par *interpolation* de 1/3 *kuš* 1/2 *šu-si* nécessite une extrapolation. Il y a donc *extrapolation* de deux dernières correspondances, ou bien les mesures d'aire sont négligées.

Je vais maintenant résumer ces informations, pour chaque tablette.

2.3.4 Tableau récapitulatif pour chaque tablette

Pour les six tablettes de Nippur ainsi que les deux tablettes supplémentaires du corpus hors Nippur (2.3.6, p.99), je détaillerai les points suivants :

1. Je donnerai l'ordre de grandeur de la mesure de longueur du côté
2. Je préciserai le type de nombre en système SP obtenu par utilisation de la table métrologique des longueurs. J'indiquerai également si la mise en correspondance du nombre en système SP avec la mesure d'aire est directe, donnée par une entrée de la table (par le terme : « direct ») ou s'il a fallu combiner plusieurs entrées de la table (par le terme : « interpolation »)
3. Je dirai quel est le type de multiplication : j'indiquerai si elle est élémentaire (si elle fait partie des tables du cursus) ou s'il s'agit d'un algorithme multiplicatif : « non élémentaire ».
4. En ce qui concerne la mesure d'aire obtenue par utilisation de la table métrologique des surfaces, j'indiquerai si la mesure d'aire est simple (1/3 *kuš*) ou composée (1/3 *kuš* 3 *šu-si*) (voir p.43). J'indiquerai également si la mesure d'aire est donnée directement ou indirectement (interpolation), et/ou par « extrapolation » (dans le cas d'une entrée non présente dans la table)
5. Je préciserai l'ordre de grandeur du résultat

Tableau pour les tablettes du corpus de Nippur

	Ordre de grandeur du côté	**Type de nombre en système SP**	**Type de multiplication**	**Obtention de la mesure d'aire**	**Ordre de grandeur du résultat**
Tablette 1	1 kuš ordre de grandeur de la longueur d'une grande brique[108]	5 Direct (nombre régulier)	Table de 5, élémentaire	25 → 1/3 *gin* 15 *še* Interpolation, en deux étapes : 20 → 1/3 *gin* et 5 → 15 *še* Ou direct, en une étape, selon la table métrologique adoptée.	1/3 *gin* 15 *še* Recherche[109] du cycle pertinent : ordre de grandeur[110] de 20 (grande brique) puis circulation dans le même cycle, plus haut, pour 5
Tablette 2	2 šu-si ordre de grandeur de la longueur d'un doigt[111]	20 Direct (nombre régulier)	Table de 20, élémentaire	Extrapolation 6:40 → 1/3 *še*	1/3 *še* Recherche du cycle pertinent : ordre de grandeur (plus petit qu'une tablette) Absent de la table métrologique

108 Voir le tableau donné en Annexe et le livre de Proust (2007, p.162). De 12 *šu-si* à 1 *kuš* (20 à 50 cm). Voir aussi les tables métrologiques.
109 Ordre de grandeur d'une grande brique, environ 250 dm²
110 De 12 1/2 *še* à 1/3 *gin* (4 à 250 dm²)
111 De 2 *šu-si* à 1/2 *kuš* (3,4 à 25 cm)

Tablette 3 Sur la base du calcul corrigé	Mesure composée : 1/3 *kuš* 3 šu-si ordre de grandeur de la longueur d'une brique	2:10 Interpolation, en deux étapes : 1/3*kuš* → 1:40 et 3 *šu-si* → 30) (non régulier)	Non élémentaire	Sur la base du calcul « correct » 4:41:40 Interpolation, en deux étapes 4:40 → 14 *še* 1:40 → 1/12 *še* pour ce dernier il faut extrapoler et/ou arrondir	Sur la base du calcul « correct » 14 *še* 1/12 *še* Sélection du cycle pertinent : ordre de grandeur d'une brique puis cycle précédent (avec risque d'erreur)
Tablette 3 Sur la base du calcul du scribe	Idem	Idem	Idem avec erreur	Sur la base du calcul du scribe 4:26:40 Interpolation, en deux étapes 4:20 → 13 *še* et 6:40 → 1/4 *še* pour ce dernier il faut extrapoler	Sur la base du calcul du scribe 13 *še* 1/4 *še* Recherche du cycle pertinent : ordre de grandeur d'une brique puis cycle précédent
Tablette 4	Mesure composée : 1 *kuš* 2 *šu-si* ordre de grandeur de la longueur d'une grande brique (voir les valeurs des tablettes 1 et 2)	[5 :20] Interpolation, en deux étapes 1 *kuš* → 5 2 *šu-si* → 20 (régulier)	Non élémentaire	28:26:40 Interpolation, en trois étapes : 20 → 1/3 *gin* 8:20 → 25 *še* 6:40 → 1/3 *še* (le scribe a écrit 2/3 au lieu de 1/3) pour ce dernier il faut extrapoler	1/3 *gin* 25 *še* 1/3 *še* Recherche du cycle pertinent C1 : ordre de grandeur d'une grande brique puis cycle précédent, C2 puis cycle précédent, soit C3, (avec risque d'erreur)

Tablette 5	Mesure composée : 2/3 *kuš* 9 šu-si ordre de grandeur de la longueur d'une brique[112] (voir les valeurs des tablettes 1, 2, et 3)	4:50 Interpolation, en deux étapes 2/3 *kuš* → 3:20 9 *šu-si* → 1:30 (non régulier)	Non élémentaire	23:21:40 Interpolation, en trois étapes : 20 → 1/3 *gin* 3:20 → 10 *še* 1:40 → 1/12 *še* pour ce dernier il faut extrapoler et/ou arrondir	1/3 [*gin* 10 *še*] Recherche du cycle pertinent C1 : ordre de grandeur d'une grande brique puis cycle précédent, C2 puis cycle précédent, soit C3 (avec risque d'erreur)
Tablette 6	Mesure composée : 1/3 *kuš* 1/2 *šu-si* ordre de grandeur d'une petite brique voir la tablette 3 pour 1/3 *kuš*	1:45 Interpolation, en deux étapes : 1/3 *kuš* → 1:40 1/2 *šu-si* → 5 il faut extrapoler (non régulier)	Non élémentaire	3:3:45 Interpolation, en trois étapes : 3 → 9 *še* 3:20 → 1/6 *še* (il faut extrapoler) 25 → 1/48 *še* (il faut extrapoler) + notion d'arrondi	9 *še* 1/5 + 3 *še* Recherche du cycle pertinent C1 : ordre de grandeur d'une tablette ou petite brique puis cycle précédent, C2 puis cycle précédent, soit C3

Tableau 2-31 : Tablettes 1 à 7 - CBS 11318, UM 29-15-192, Ni 18, CBS 11318, IM 57846, IM 57828, NBC 8082 et NCBT 1913

[112] De 12 *šu-si* à 1 *kuš* : 20 à 50 cm

Tableau pour les tablettes du corpus hors Nippur

A la suite du tableau récapitulatif pour les sources de Nippur, je présente ici par souci de commodité, celui qui concerne les tablettes 8 et 9, qui sont présentées plus loin (voir 2.3.6, p.99) ; afin que le lecteur puisse retrouver l'ensemble des informations synthétisées au même endroit.

Tablette 7	Mesure simple 4 kuš ordre de grandeur de la longueur d'une cour	Direct, en une étape : 4 *kuš* → 20 PUIS étape exceptionnelle liée à l'agrandissement : 4 × 20	Table de 1:20, connue	1:46:40 Interpolation, en trois étapes 1:40 → 1 2/3 [*sar*] 6 → 6 *gin* 40 → 2/3 *gin*	1 2/3 *sar* 6 *gin* 2/3 *gin* Recherche du cycle pertinent C1 : ordre de grandeur 16 fois une cour puis cycle précédent, C2 puis cycle précédent, soit C3

Tablette 8	Inconnu Ordre de grandeur donné oralement ?	Absence	Table de 58:20 Non élémentaire	56:42:46:40 (quatre positions) Interpolation, en six étapes 50 → 1 (*bur*) 2(*eše*) 6:40 → 4 (*iku*) *GAN* 2 → 2 *sar* 40 → 2/3 *sar* 6 → 6 *gin* 40 → 2/3 *gin*	1 (*bur*) 2(*eše*) 4 (*iku*) *GAN* 2 2/3 *sar* 6 2/3 *gin*. Recherche du cycle pertinent C1 : ordre de grandeur de parcelles de terrain puis même cycle, C1 puis cycle précédent, C2 puis cycle précédent, C3 puis même cycle, C3 puis cycle précédent, C4

Tableau 2-32 : Tablettes 8 et 9 - NBC 8082 et NCBT 1913

2.3.5 *Récapitulatif des tâches et sous-tâches*

Le corpus des six tablettes de Nippur a permis d'identifier des tâches et sous-tâches. Ces-dernières ne sont pas présentes dans toutes les tablettes, elles dépendent du choix de la mesure de longueur du côté du carré. Je représente les sous-tâches par des flèches, et les souligne.

- 1. Tâche principale : <u>mise en correspondance directe</u> d'une mesure de longueur avec un nombre en système SP

    - ➢ Sous-tâche possible : *mise en correspondance par interpolation* d'une mesure (composée) avec un nombre en système SP. Il y a deux étapes maximum dans ce corpus.

  Cette sous-tâche implique *le positionnement* : ne pas se tromper de position sexagésimale lors de l'addition des nombres en système SP intermédiaire. Alors il y *addition simple (un nombre et zéro) ou addition de deux nombres non nuls.*

    - ➢ Sous-tâche possible : *Extrapoler* une correspondance si la mesure de longueur se trouve hors table métrologique.

- 2. Tâche principale : multiplication élémentaire d'un nombre en système SP par lui-même (la multiplication et le produit appartiennent aux tables du cursus)

    - Sous-tâche possible : *Algorithme multiplicatif* : multiplier un nombre en système SP par lui-même (produits non élémentaires)

- 3. Tâche principale : mise en correspondance d'un nombre en système SP et d'une mesure d'aire

  Tâche principale : sélectionner le cycle pertinent grâce à l'ordre de grandeur

    - Sous-tâche possible : *Extrapoler* la table pour une à deux valeurs inférieures à celle de l'entrée initiale, par exemple pour les fractions de *še* ; OU *tronquer/arrondir* les valeurs trop petites.

    - Sous-tâche possible : *Mise en correspondance par interpolation* d'un nombre en système SP avec une mesure d'aire (en deux à six étapes dans ce corpus)

  Circuler dans la table métrologique d'un cycle à celui qui le précède

  Positionnement : utiliser les positions sexagésimales pour choisir le cycle précédent (avec parfois risque d'erreur si l'on reste dans le même cycle)

Une autre compétence éventuelle est envisageable : savoir que le début de la table métrologique des surfaces correspond au début de la table des poids pour les *še* et les *gin*. En effet, j'ai proposé en Annexe une table métrologique des surfaces, mais toute la première partie est commune à celle des poids. Dans les sources à notre disposition, cette partie de la table métrologique des surfaces ne figure que sur la table métrologique des poids. La table métrologique des surfaces commence avec des valeurs supérieures (à l'écrit en tous cas). Il est difficile de dire si pour le scribe, le début de la table des surfaces est appris individuellement ou si lorsqu'il l'apprend, la table lui est présentée comme celle des poids.

Récapitulatif des tâches et sous-tâches par tablette et variations numériques :

Maintenant que j'ai explicité quelles sont les tâches et sous-tâches, je présente un récapitulatif des variations dans les valeurs numériques, constatées dans le corpus de Nippur (tablettes 1 à 6) à chaque étape de l'algorithme. Cette forme de présentation me permet de comparer les valeurs choisies et de mettre en évidence des redondances ou des différences. Cela me permet également de récapituler, dans le Tableau 2-33, les tâches et sous-tâches présentes pour chaque tablette.

1. Expression de la mesure de longueur :

Pour les tablettes 1 et 2 la mesure est simple. Pour les tablettes 3, 4, 5 et 6, la mesure de longueur est composée.

Les unités de mesure qui entrent en jeu dans les six tablettes sont les *kuš* et *šu-si*.

On remarque pour la tablette 4, l'utilisation de la mesure de longueur 1 *kuš* déjà présente dans la tablette 1 ainsi que la mesure 2 *šu-si*, déjà présente dans la tablette 2. Pour la tablette 4 une partie des valeurs est présente dans les tablettes 1, 4 (pour 1/3 *gin*) et 3 (pour 1/12 *še*).

Pour la tablette 6, on remarque l'utilisation dans sa composition de la mesure 1/3 *kuš* déjà présente dans la tablette 3.

2. Mise en correspondance de la mesure de longueur avec un nombre en système SP :

Pour les tablettes 3,4,5,6 de Nippur, on trouve des nombres en système SP exprimés avec deux positions sexagésimales, obtenus par interpolation en deux étapes. Les nombres en système SP sont respectivement 2:10, 5:20 (selon la reconstitution de l'historien), 4:50 et enfin 1:45.

Pour le dernier nombre, il faut même extrapoler car l'entrée faisant correspondre 1/2 *šu-si* à 5 n'apparaît pas dans les tables métrologiques à notre disposition.

3. Multiplication :

Ce sont encore les quatre dernières tablettes de Nippur qui ressortent du lot puisque les tables de multiplication correspondantes n'existent pas d'après les documents à notre disposition. Pour ces tablettes, le nombre en système SP obtenu comporte trois positions sexagésimales.

4. Mise en correspondance du nombre en système SP avec la mesure d'aire :

Pour la tablette 1, l'obtention de la mesure d'aire, par interpolation, nécessite deux étapes (ou une seule, selon la table métrologique adoptée). Ces étapes se font sans extrapolation (puisque les entrées sont présentes dans la table métrologique), et sans changement de cycle. Pour la tablette 2, il y a une seule étape mais avec une extrapolation possible.

Pour la tablette 3, il y a extrapolation également, mais ici, il y a en plus, une interpolation en deux étapes (recherche de la correspondance pour 4:40 avec la table et pour 1:40 par extrapolation) ainsi qu'une possibilité de se tromper (il ne faut pas oublier de sélectionner le cycle précédent, le cycle actuel proposant aussi une entrée pour le nombre 1:40).

Pour les trois dernières tablettes (tablettes 4, 5, 6) la décomposition se fait en trois étapes maximum. Les deuxième et troisième correspondances nécessitent de sélectionner le cycle précédent, avec parfois un risque d'erreur. Il faut toujours extrapoler au moins l'une des correspondances, voire deux pour la dernière tablette de Nippur. Certaines valeurs, « trop petites », sont peut-être négligées ou arrondies plutôt qu'extrapolées.

Tableau récapitulatif des tâches et sous-tâches par tablette

Je récapitule dans ce tableau, les tâches et sous-tâches par tablette à chaque étape de l'algorithme. La dernière colonne comptabilise les sous-tâches par tablette.

Il faut noter que cette dernière colonne a le défaut de lisser un peu les différences entres les tablettes. En effet, j'ai fait le choix de ne faire apparaître que les sous-tâches suivantes dans le décompte. Elles me paraissent pouvoir relever plus particulièrement d'un apprentissage spécifique :

-interpolation du nombre en système SP

-interpolation de la mesure d'aire

-extrapolation (qui est probablement une sous-tâche, étant donné la stabilité du corpus de tablettes comportant des tables métrologiques) de la mesure d'aire

-extrapolation du nombre en système SP

-algorithme multiplicatif

L'interpolation et l'extrapolation impliquent d'autres sous-tâches (circulation dans les cycles, positionnement) que je n'ai pas comptabilisées. D'autre part, la tâche peut être répétée un certain nombre de fois : je n'ai pas utilisé cette information dans cette colonne récapitulative. J'ai fait ces choix pour ce décompte, afin de permettre la mise en évidence des différences sur des points qui me paraissent pouvoir relever d'apprentissages clé. Cependant, il faut noter que la présence qu'un plus grand nombre d'étapes pourrait aussi faire l'objet d'un hypothétique choix pédagogique.

	Mesure de longueur du côté	**Ordre de grandeur**	**Obtention du nombre en système SP**	**Type de multiplicati-on**	**Obtention de la mesure d'aire**	**Récapitulatif**
Tablette 1	Simple	Longueur d'une grande brique[113]	Tâche principale Directe 1 position sexagésima-le	Tâche principale Élémentaire Résultat : 1 position sexagésimale	Tâche principale et sous-tâches éventuelles Par interpolation (ou direct) 2 étapes Sans changement de cycle (ou une seule)	Une seule sous-tâche, ou aucune : Obtention (interpolation?) de la mesure d'aire
Tablette 2	Simple	Longueur d'un doigt[114]	Tâche principale Directe 1 position	Tâche principale Élémentaire Résultat : 2 positions	Tâche principale et sous-tâches 1 étape 1 extrapolation (probable)	Une à deux sous-tâches : interpolation de la mesure d'aire extrapolation (probable)
Tablette 3 Sur la base du calcul corrigé[115]	Composée	Longueur d'une brique	Tâche principale et sous-tâches Interpolati-on 2 étapes 2 positions	Tâche principale et sous-tâche Algorithme multiplicatif Résultat : 3 positions	Tâche principale et sous-tâches Interpolation 2 étapes 1 extrapolation 1 changement de cycle avec risque d'erreur	Quatre sous-tâches[116] : 1. interpolation du nombre en système SP 2. algorithme multiplicatif 3. interpolation de la mesure d'aire 4. extrapolation (probable)

[113] Voir le tableau donné en Annexe ainsi que dans le livre de Proust (2007, p.162). De 12 *šu-si* à 1 *kuš* (20 à 50 cm). Voir aussi les tables métrologiques.

[114] De 2 *šu-si* à 1/2 *kuš* (3,4 à 25 cm)

[115] Seul le calcul corrigé intervient puisqu'il traduit une (éventuelle) intention du concepteur de l'exercice, alors que le calcul effectué réellement ne peut traduire que les capacités du scribe. Ces dernières donnent tout de même des informations sur ce qui lui a été enseigné.

Tablette 3 Sur la base du calcul du scribe	Idem		Idem	Idem avec erreur	Indirect 2 étapes 1 extrapolation 1 changement de cycle	
Tablette 4	Mesure composée (voir les valeurs des tablettes 1 et 2)	Longueur d'une grande brique	Tâche principale et sous-tâches Interpolati-on 2 étapes 2 positions	Tâche principale et sous-tâches Algorithme multiplicatif Résultat : 3 positions	Tâche principale et sous-tâches Interpolation 3 étapes 1 extrapolation 2 changements de cycle 1 risque d'erreur	Quatre sous-tâches (voir ci-dessus)
Tablette 5	Mesure composée (voir les valeurs des tablettes 1, 3 et 4)	Longueur d'une brique[117]	Tâche principale et sous-tâches Interpolati-on 2 étapes 2 positions	Tâche principale et sous-tâches Algorithme multiplicatif Résultat : 3 positions	Tâche principale et sous-tâches Interpolation 2 à 3 étapes 1 extrapolation ou partie négligée 2 changements de cycle 1 risque d'erreur	Quatre sous-tâches (voir ci-dessus)
Tablette 6	Mesure composée (voir la tablette 3, pour 1/3 *kuš*)	Longueur d'une petite brique	Tâche principale et sous-tâches Interpolati-on 2 étapes 2 positions 1 extrapolati-on	Tâche principale et sous-tâches Algorithme multiplicatif Résultat : 3 positions	Tâche principale et sous-tâches Interpolation 1 à 3 étapes 2 extrapolations ou partie(s) négligée(s) 2 changements de cycle	Quatre sous-tâches (voir ci-dessus) + une extrapolation dans le cadre de la mise en correspondance avec le nombre en système SP

Tableau 2-33 : Récapitulatif des tâches et sous-tâches par tablette

Tableau récapitulatif des tâches et sous-tâches par tablette (hors Nippur)

A la suite du tableau de tâches les sources de Nippur, je présente ici encore, celui qui concerne les tablettes 7 et 8, qui sont présentées ci-dessous (2.3.6, p.99), afin que le lecteur puisse retrouver l'ensemble des informations synthétisées au même endroit.

---

116 Je ne fais pas figurer dans ce compte, les sous-tâches impliquées par l'obtention indirecte de la mesure d'aire. Pourtant, j'ai distingué des nuances qui ont peut-être leur importance (risque d'erreur dans le changement de cycle, nombre de positions sexagésimales, par exemple).

117 De 12 *šu-si* à 1 *kuš*$_3$: 20 à 50 cm

Tablette 7	Mesure simple	Longueur d'une cour	Tâche principale Direct 2 positions	Tâche principale Élémentaire Résultat : 3 positions	Tâche principale et sous-tâches Interpolation 3 étapes 2 changements de cycle	Une sous-tâche : interpolation de la mesure d'aire
Tablette 8	INCONNU		Aucune tâche Déjà obtenu 2 positions	Tâche principale et sous-tâches Algorithme multiplicatif Résultat : 4 positions	Tâche principale et sous-tâches Interpolation 6 étapes 3 changements de cycle	Deux tâches principales inexistantes Deux sous-tâches : 1. algorithme multiplicatif 2.interpolation de la mesure d'aire

Tableau 2-34 : Récapitulatif des tâches et sous-tâches par tablette

2.3.6 Le corpus hors Nippur

Tablette 7

Traduction de la tablette 7 (d'après Proust, 2007, p.196)[118]

20	1:20
4	1:20
1:20	1:46:40
	16

1 *ninda* 4 *kuš* le côté (du carré).

Quelle est sa surface ?

Sa surface est 1 2/3 [*sar* 6 2/3 *gin*]

La tablette 7 témoigne de certaines des « sous-tâches » communes à celles du corpus de Nippur (voir p.94), alors que d'autres ne sont pas utilisées.

L'ordre de grandeur de départ est différent, de l'ordre de la longueur d'une cour. C'est le plus grand ordre de grandeur de ce corpus. Cette tablette est particulière : il s'agit selon Proust (2007, p.196) d'une question d'agrandissement. La mesure de longueur est composée : 1 *ninda* 4 *kuš*. Le carré effectivement utilisé dans le calcul est de 4 *kuš* et il sera quadruplé. En effet, le facteur entre le *kuš* et l'unité de mesure de longueur suivante (le *ninda*) est de 12. Ainsi un carré de côté 1 *ninda* 4 *kuš* est un carré de côté 16 *kuš*, soit quatre fois 4 *kuš*. Voici les tâches identifiées :

Mise en correspondance de la mesure de longueur simple 4 *kuš* (longueur d'une cour) avec un nombre en système SP.

[118] NBC 8082. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1945, p.10) et une photographie (Nemet-Nejat 1995, p.260), cités dans Proust (2007, p.196)

L'entrée 4 *kuš* existe dans la table métrologique. Elle correspond au nombre 20 en système SP.

L'agrandissement supposé par Proust, implique ici que le nombre obtenu en système SP (ici, c'est 20) soit multiplié par 4. En système SP le résultat est 1:20. Il est intéressant de noter que sur cet exemple, l'agrandissement se fasse avant élévation au carré (mais sur le nombre en système SP).

Multiplication (élémentaire) du nombre 1:20 en système SP par lui-même pour aboutir à 1:46:40.

Mise en correspondance (par interpolation) de 1:46:40 en trois étapes : probablement la correspondance pour 1:40, la correspondance pour 6 et la correspondance pour 40.

Sélection du cycle pertinent : l'ordre de grandeur pour 1:40 est celui de « seize fois une petite cour ». Il y a une erreur possible ici si l'on attend l'ordre de grandeur d'une petite cour – il faut se souvenir que l'on a multiplié par 4 le côté. Ainsi, le cycle choisi sera celui du *sar*, soit l'ordre de grandeur d'une grande cour (ou petite maison).

L'ordre de grandeur pour 6 correspond au cycle précédent celui de 1:40.

1 40
6

L'ordre de grandeur pour 40 correspond au cycle précédent celui de 6.

1 40
6
40

La correspondance pour 1:40 (qui donne 1 2/3 *sar*) est une entrée de la table métrologique des surfaces. La correspondance pour 6 (qui donne 6 *gin*) est également une entrée de la table métrologique des surfaces. La correspondance pour 40 (qui donne 2/3 *gin*) est encore une entrée de la table métrologique des surfaces. L'expression de la mesure d'aire est composée, 1 2/3 *sar* 6 *gin* 2/3 *gin*.

En résumé, cette tablette utilise une sous-tâche (et sous-tâches impliquées par cette dernière) similaire à celles du corpus de Nippur. La recherche de la correspondance de 4 *kuš* est directe. La table de multiplication de 1:20 est élémentaire. La mise en correspondance, elle, est indirecte. Elle nécessite trois étapes pour le nombre 1:46:40 en système SP. Il n'y a pas d'extrapolation. L'expression de la mesure d'aire est composée.

Une hypothèse serait que cette tablette permet de faire travailler sur la relation mesure de longueur et mesure d'aire par agrandissement. Par conséquent, elle se concentrerait moins sur une partie des sous-tâches identifiées pour les tablettes précédentes. C'est aussi en partie dû au fait que l'ordre de grandeur choisi étant plus grand, la plus petite valeur est encore dans la table métrologique (pas d'extrapolation nécessaire). Mais trois étapes sont nécessaires pour trouver la mesure d'aire, et ainsi la circulation dans les cycles, elle, est inévitable.

Tablette 8

Traduction de la tablette 8 (d'après Proust, 2007, p.196) [119]

[119] NCBT 1913. D'après une transcription de Neugebauer et Sachs (1945, p.10) et Nemet-Nejat (1995, p. 260) cités dans Proust (2007, p.196)

58:20

58:20

56:42:46:40

Quelle est sa surface ?

Sa surface est 1 (*bur*) 2(*eše*) 4(*iku*)

GAN 2 2/3 *sar* 6 2/3 *gin*

Dans la tablette 8, la longueur n'est pas donnée. L'ordre de grandeur attendu du résultat (parcelles de terrain) est peut-être donné oralement, ou bien est-ce l'ordre de grandeur de la longueur qui est donné oralement.

La multiplication de 58:20 par lui-même permet de produire un nombre en système SP à quatre positions sexagésimales 56:42:46:40. Elle ne fait pas partie des tables du cursus (non élémentaire).

La mise en correspondance pour le nombre 56:42:46:40 en système SP est indirecte, en quatre étapes : la correspondance pour 50, la correspondance pour 6:40, la correspondance pour 2:40 et la correspondance pour 6:40. La correspondance pour 50 (qui donne 1 (*bur*) 2(*eše*)) est une entrée de la table métrologique des surfaces.

Sélection du cycle pertinent : il est peut-être donné oralement

L'ordre de grandeur pour 6:40 correspond au même cycle, un peu plus haut. La correspondance donne 4 (*iku*) *GAN* : c'est une entrée de la table métrologique des surfaces.

50
6 40

L'ordre de grandeur pour 2 correspond au cycle précédent 6:40 et donne 2 *sar*, c'est une entrée de la table métrologique des surfaces.

L'ordre de grandeur pour 40 correspond au cycle précédent de 2 et donne 2/3 *sar*, c'est une entrée de la table métrologique des surfaces.

50
6 40
2 40

L'ordre de grandeur pour 6 correspond au cycle de 2:40, un peu plus haut et donne 6 *gin*, c'est encore une entrée de la table métrologique des surfaces.

L'ordre de grandeur pour 40 correspond au cycle précédent 6, et donne 2/3 *gin*. C'est encore une fois une entrée de la table métrologique des surfaces.

50
6 40
2 40
6 40

L'expression de la mesure d'aire est composée : 1 (*bur*) 2(eše) 4 (*iku*) *GAN* 2 2/3 *sar* 6 2/3 *gin*.

En résumé, cette tablette utilise deux « sous-tâches » (et les sous-tâches impliquées par ces dernières) similaires à celles du corpus de Nippur. Sa particularité est de ne pas proposer de mesure de longueur, mais directement un nombre en système SP. Le résultat est un nombre en système SP à quatre positions sexagésimales, 56:42:46:40. La recherche est indirecte en six étapes, pour la correspondance en mesure d'aire.

Une hypothèse serait que cette tablette permet de faire travailler sur les sous-tâches liées à la recherche indirecte de correspondance en mesure d'aire, dans l'extrémité *haute* de la table métrologique. L'obtention d'un nombre en système SP semble être une étape qui n'est pas travaillée ici (il est probablement donné directement).

Se basant sur les sources qui sont parvenues jusqu'à nous, cet exercice oblige à utiliser deux tables métrologiques, puisque le début de la table métrologique des surfaces coïncide avec celui des poids. Si les tables étaient mémorisées par les scribes, cet effet n'était probablement pas ressenti.

Pour la tablette 7, la longueur est une mesure simple, pour la tablette 8 elle n'est pas donnée. Le premier donne la mesure de longueur 4 *kuš*, plus grande (ordre de grandeur d'une longueur de cour) mais moins éloignée encore que la tablette 8 ne l'est (ordre de grandeur d'une longueur de terrains) des six tablettes de Nippur.

Pour les deux tablettes non attestées à Nippur, les mesures de longueur correspondent à des nombres en système SP à deux positions sexagésimales. L'obtention du nombre en système SP est directe pour la tablette 7, puis ce dernier est multiplié par 4 pour agrandissement. Le nombre en système SP est donné directement dans la tablette 8 (sans besoin pour l'élève de passer par la mesure de longueur et la table métrologique).

Ce sont encore les quatre dernières tablettes de Nippur et la tablette 8 qui ressortent du lot puisque les tables de multiplication correspondantes n'existent pas d'après les documents à notre disposition. Pour ces cinq tablettes, le nombre en système SP obtenu comporte trois à quatre (pour la tablette 8) positions sexagésimales.

Pour les deux tablettes non attestées à Nippur, l'obtention de la mesure d'aire se fait en trois à six étapes. L'extrapolation n'est pas nécessaire si l'on en croit la table métrologique composite. Il faut parfois sélectionner le cycle précédent, mais pas toujours (voir la tablette 8).

2.3.7 Conclusion et liens avec la didactique

Conclusion historique

Pour finir, je propose une conclusion historique détaillée, ensuite résumé en une courte synthèse. Ensuite, je donnerai des conclusions méthodologiques et des hypothèses historiques, liées à l'utilisation d'outils didactiques dans l'étude historique.

Je me suis basée sur l'analyse d'une sélection de six tablettes d'évaluation de surfaces carrées, constituée par Proust (2007, p.190-197)[120], provenant de Nippur. L'étude des exercices de ces tablettes permet de distinguer des tâches « principales » et des « sous-tâches ». J'ai appelé « sous-tâche » une tâche qui s'impose du fait du choix de la mesure dans l'énoncé, mais n'est pas commune à toutes les tablettes.

Les tâches principales sont : la mise en correspondance d'une mesure avec un nombre en système SP, la multiplication (élémentaire, c'est-à-dire présente dans les tables du cursus des

[120] Il s'agit des tablettes CBS 11318, UM 29-15-192, Ni 18, UM 55-21-076, IM 57846, IM 57828, NBC 8082 et NCBT 1913.

scribes), la mise en correspondance d'un nombre en système SP avec une mesure d'aire, impliquant la sélection du cycle pertinent.

Les « sous-tâches » qui sont présentes dans certains tablettes, sont l'extrapolation d'une mesure de longueur, l'interpolation (en deux étapes maximum dans ce corpus) pour la mise en correspondance d'une mesure de longueur avec un nombre en système SP (avec attention au positionnement), une multiplication non élémentaire, l'interpolation pour la mise en correspondance d'un nombre en système SP avec une mesure d'aire (en trois étapes maximum dans ce corpus), la circulation d'un cycle au cycle précédent avec attention au positionnement, l'éventuelle extrapolation (impliquant ou non d'arrondir) ; et/ou le choix de tronquer ces valeurs.

Au regard de cette analyse en termes de tâches principales et sous-tâches qui dépendent du choix des valeurs numériques de l'énoncé, je propose les regroupements suivants :

1. La tablette 1, qui ne propose qu'une sous-tâche (obtention indirecte de la mesure d'aire) ou aucune selon la table métrologique en vigueur, et la tablette 2 qui ne propose qu'une sous-tâche (extrapolation).
2.

2.1 Les tablettes 3, 4 et 5, qui proposent de nombreuses sous-tâches : interpolation pour la mise en correspondance indirecte du nombre en système SP, utilisation d'un algorithme multiplicatif, obtention de la mesure d'aire par interpolation (en plusieurs étapes), extrapolation (ou choix de tronquer une partie du résultat de la mesure), changements de cycles avec ou sans risques d'erreur, positionnement.

Il faut noter que le risque d'erreur (que j'ai signalé du fait de l'existence d'entrées intermédiaires correspondant au nombre en système SP recherché, mais qu'il ne faut pas sélectionner), n'en est peut-être pas un : si le changement de cycle est une tâche très automatique, ces « faux-amis » ne sont peut-être pas du tout pris en compte dans les éventuelles intentions pédagogiques du maître.

2.2 La tablette 6 qui présente les mêmes sous-tâches que le groupe de tablettes précédent mais aussi une mesure de longueur dont le nombre en système SP correspondant est trouvé par extrapolation, puisque 1/2 *šu-si* n'est pas dans les tables métrologiques de longueur qui sont parvenues jusqu'à nous.

Les tablettes du corpus hors Nippur :

La tablette 8 présente deux sous-tâches, qui impliquent d'autres sous-tâches (circulation d'un cycle à celui qui précède, positionnement). La multiplication nécessite un algorithme, l'obtention de la mesure d'aire nécessite six étapes (le maximum rencontré) et trois changements de cycle. Ce qui est intéressant c'est que les sous-tâches d'extrapolation et d'interpolation du nombre en système SP n'y figurent pas.

L'ordre de grandeur diffère grandement des tablettes précédentes.

Deux tâches principales n'y figurent pas, du fait du nombre donné en système SP. Sur ce point, il ne faut pas exclure la possibilité que ces tâches aient été effectuées en dehors de la tablette. Le contrôle de l'ordre de grandeur reste nécessaire pour sélectionner le cycle pertinent.

La tablette 7 présente une sous-tâche d'interpolation pour la mesure d'aire, qui implique d'autres sous-tâches (circulation d'un cycle à celui qui précède, positionnement), mais pas toutes : la mesure de longueur est simple, la multiplication est élémentaire. Il n'y a pas d'interpolation du nombre en système SP, ni d'extrapolation.

La tablette présente surtout un focus différent, sur l'agrandissement, qui provoque un risque d'erreur dans la sélection de l'ordre de grandeur final (multiplié par 16). L'ordre de grandeur diffère là aussi grandement des tablettes du corpus de Nippur.

Est-il possible de conclure quelque chose du regroupement de tablettes de Nippur? Une première remarque est que le premier groupe (tablettes 1 et 2) se distingue nettement du deuxième (tablettes 3, 4, 5, 6). Sur ce point, l'hypothèse de choix pédagogiques se dessine.

Avant de conclure, il faut noter qu'il est concevable que certaines sous-tâches que j'ai distinguées ne soient pas considérées comme difficiles ou nouvelles. Par exemple, si l'algorithme multiplicatif est bien acquis, cette sous-tâche pourrait n'avoir aucun impact sur le choix (hypothétique) du concepteur de l'exercice. L'erreur du scribe confirme pourtant pour la tablette 3, que les multiplications non élémentaires ne sont pas toutes « évidentes ».

Le choix des valeurs numériques, qui implique plusieurs étapes (pour l'obtention de la mesure d'aire) dans le deuxième groupe, est tout de même frappant par rapport au premier groupe. De même que l'attention nécessaire à porter aux changements de cycle, qui est moindre dans le premier groupe de Nippur. Grâce aux informations sur le cursus qui sont à notre disposition, il est de plus imaginable que cette navigation dans les cycles, qui dépend de la présence d'une mise en correspondance des nombres avec des mesures, soit intrinsèquement liée à cette étape du cursus scolaire. En effet les tables métrologiques sont liées à l'apprentissage du calcul d'aire. Ceci rend envisageable un objectif d'enseignement, éventuellement progressif, lié à ces sous-tâches.

En termes de choix des valeurs numériques, il y a sur ce petit corpus des valeurs clairement communes. La tablette 4 utilise des mesures en commun pour certaines des mesures qui composent l'expression d'une mesure composée. Une partie de ces mesures est principale (mesures simples) pour les tablettes 1 et 2. La tablette 6 utilise des valeurs en commun avec la tablette 3. Il est encore trop tôt pour comprendre avec certitude ces similarités, pour lesquelles il faudrait un corpus plus vaste. Mais elles permettent de conclure sur l'existence d'un choix et/ou d'une tradition, dont on peut faire l'hypothèse qu'il est lié à une volonté pédagogique de travail sur certaines des techniques mathématiques que j'ai relevées dans les « sous-tâches ».

Ce choix indique peut-être aussi un désir de travailler sur l'extrapolation, sous-tâche commune à cinq des six tablettes de Nippur. La table métrologique pourrait n'être pas connue dans son entier aujourd'hui, mais c'est peu probable (il existe une grande stabilité des tablettes concernées). L'hypothèse d'un travail sur l'extrapolation est donc à mon avis, envisageable. A moins que d'autres raisons ne conduisent à s'intéresser à ces petites valeurs qui figurent « hors table », il pourrait s'agir d'un objectif d'apprentissage. Certaines fractions de *še* étaient peut-être aussi négligées ou arrondies. L'extrapolation ou l'approximation pourraient faire partie des sous-tâches enseignées ici.

Les deux tablettes non attestées à Nippur permettent de formuler d'autres hypothèses. La tablette 7 ajoute un travail sur l'agrandissement. Une attention particulière est à porter à la recherche de l'ordre de grandeur (la surface étant multipliée par 16). Ainsi, le fait que d'autres sous-tâches soient écartées (la mesure de longueur est simple, la multiplication est élémentaire) pourrait témoigner d'un choix de ne pas faire travailler l'élève sur « tout en même temps » ; ou simplement, du choix de ne pas s'intéresser aux tâches liées aux tables métrologiques, ou aux mêmes portions de la table (en particulier, il n'y a pas d'extrapolation).

De même, la tablette 8 présente six étapes pour l'obtention de la mesure d'aire, ce qui est nouveau, avec des changements de cycle à effectuer. Mais les autres sous-tâches sont simplifiées et le nombre en système SP est donné directement.

Mais au contraire, on pourrait argumenter que ces deux tablettes signifient que les groupes de Nippur que j'ai constitués (1 et 2) sont arbitraires, et que les sous-tâches dépendent d'un choix de valeurs initiales, dû davantage au hasard qu'à une décision pédagogique. Il n'en est pas moins vrai que les sous-tâches ont dû faire l'objet d'un apprentissage à ce stade du cursus et que les portions de table choisies diffèrent entre le corpus de Nippur et les tablettes 7 et 8. De plus, ces deux dernières tablettes qui ne sont pas attestées à Nippur, pourraient simplement obéir à une logique différente, voire à un niveau scolaire un peu différent. C'est ce que la technique d'agrandissement pourrait corroborer. Ainsi, en termes de « série de tablettes ayant des petites variations », les tablettes 7 et 8 se distinguent un peu, factuellement. De même, la logique (encore hypothétique) de progression d'enseignement que l'on peut y rattacher paraît différer.

Il semble intéressant méthodologiquement de s'appuyer sur le cursus tel qu'il a été reconstitué pour Nippur à cette période, afin de réfléchir à l'appartenance des tablettes du corpus à une « même série de problèmes ». Voir les tablettes de Nippur comme appartenant à une série me paraît cohérent, si l'on considère que le point commun qui les rassemble est celui d'une progression sur les tables métrologiques. Ainsi les tablettes pourraient ne pas appartenir à une même série temporelle, les enseignants et élèves peuvent être distincts ; mais les tablettes pourraient appartenir à une même série historique en termes de progression sur le cursus scolaire. Bien sûr il faut nuancer, puisque le cursus a pu évoluer pendant la période paléo-babylonienne, et que la progression que je propose en distingant les groupes 1 et 2, est encore formulée comme des hypothèses.

En résumé, une conclusion importante de ce travail est que le regroupement (groupes 1 et 2) permis par l'étude des petites variations, a au moins le mérite de révéler, d'expliciter, l'importance des sous-tâches liées à la navigation dans les tables métrologiques dans le cadre du calcul de l'aire du carré. Ces tâches qui créent des distinctions fortes entre les tablettes d'aspect similaire, n'apparaissent pas sans faire de travail de regroupement.

Il est frappant aussi de constater que les six exercices de Nippur font appel à même une partie (basse) de la table métrologique ; contrairement aux deux tablettes non attestées à Nippur. Ce choix de valeurs numériques indique au moins, clairement, l'intention ou l'habitude de travailler avec des petites mesures d'aires (autour de l'ordre de grandeur d'une brique) pour certains exercices (les six de Nippur). Les raisons hypothétiques sont multiples : les tailles de surfaces peuvent être utilisées dans un contexte inconnu aujourd'hui, les surfaces peuvent servir d'étalons de base pour calculer des surfaces plus grandes.

Etant donné la place de ces exercices dans le cursus, et les sous-tâches décrites ici, l'hypothèse d'exercices permettant de travailler sur une partie de la table métrologique me semble envisageable, peut-être autour de l'extrapolation. Il est alors intéressant de constater que derrière ce qui semble être un seul objectif d'apprentissage (calculer l'aire d'un carré), s'en cachent d'autres.

Je vais maintenant orienter ma conclusion vers les outils de didactique que j'ai mobilisés pour l'analyse historique, et ceux qu'il me paraît intéressant d'utiliser à l'avenir. Je proposerai ensuite un résumé de ces conclusions.

Conclusion historique et méthodologique, liée aux outils didactiques

Les variables didactiques

Les variables didactiques ont permis d'engager ce travail historique, ce point est déjà intéressant en soi. Il n'est pas possible de conclure avec certitude à l'existence ou non d'un jeu intentionnel sur les variables didactiques (au sens élargi que j'ai proposé en introduction). Cependant, les observations permettent de distinguer ce qui pourrait en tenir lieu. C'est-à-dire que l'analyse permet de constater des variations, qui pourraient être des variables didactiques si elles étaient liées à des intentions pédagogiques.

Il est vraisemblable que le travail sur la table métrologique ait effectivement été visé, étant donné le lien entre l'exercice de calcul d'aire et le cursus des scribes. Alors, les sous-tâches qui sont liées aux cycles dans la table métrologique, pourraient constituer un objectif d'apprentissage. En ce sens, le choix des mesures de longueur pourrait être une variable didactique, puisqu'il a un effet sur l'existence ou non de « sous-tâches » ; les différentes techniques que les élèves doivent mobiliser pour résoudre le problème. En tous cas, il est possible de les décrire. Cela met en évidence le fait que selon les choix de valeurs numériques, ces sous-tâches soient nécessaires ou non.

Ouverture à la théorie anthropologique du didactique

Une idée proche de la théorie anthropologique du didactique (T.A.D) se retrouve ici. Je n'ai pas pu investir assez longuement ces rapprochements, mais je souhaite présenter quelques pistes. Jusque là, j'ai parlé de tâches sans employer le vocabulaire de la T.A.D. La T.A.D, avec la notion de praxéologie, fournit un outil de description et d'analyse des ressources cognitives humaines. Dans la TAD, l'activité mathématique présente dans différentes institutions est décrite à l'aide de différents « types de tâches », accomplis grâce à une « technique », le tout étant justifiable par une « théorie » (je ne me servirai pas ici de la notion de technologie). Cette description permet entre autres, de décrire l'activité mathématique, lorsqu'elle se trouve présente dans différentes institutions. Je pense qu'il doit être possible de se servir des outils didactiques d'analyse des tâches pour émettre des hypothèses sur les objectifs pédagogiques et didactiques des tablettes. Une tâche est unique et contextualisée (un exercice par exemple). Un type de tâches est un regroupement de tâches autour, d'un problème à résoudre (ou de caractéristiques communes). Trouver la solution à un calcul d'aire peut correspondre à une tâche (problème précis pour l'arpentage par exemple). Mais ici, l'ensemble d'exercices étudié, comportant des petites variations qui répondent à une intention didactique, correspond probablement davantage à la construction d'un type de tâches.

> En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches T*, accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique* τ. Le couple [T/τ] constitue, par définition, un *savoir-faire*. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un *environnement technologico-théorique* [θ/Θ], ou savoir (au sens restreint), formé d'une *technologie*, θ, « discours » rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclairé par une *théorie* Θ, généralement évanouissante. (Chevallard 1997, p.31)[121]

Par exemple, ces caractérisations peuvent servir à décrire les mathématiques dans des contextes non scolaires, comme celui des mathématiques chez les ouvriers agricoles mexicains (Solares, 2016). Dans le cadre qui m'intéresse, le type de tâches (principal) pourrait être « calculer l'aire du carré de côté… » et ce que j'ai appelé dans la thèses « sous-tâches », comme « mettre en correspondance » ou « circuler dans les cycles de la table métrologique » pourraient correspondre à des « sous »-types de tâches, en T.A.D. Il y a une relation d'inclusion, qui pourrait je crois, se décrire ainsi :

Il y a un premier type de tâches (principal) : calculer l'aire d'un carré.

[121] Pour plus de détails, voir Chevallard, 1998.

Il implique les (sous)-types de tâches : se servir d'une table métrologique (des longueurs, des surfaces), multiplier, et éventuellement exprimer le résultat.

Ensuite, se servir d'une table métrologique des surfaces par exemple, implique des (sous)-types de tâches comme : sélectionner le cycle pertinent, mettre en correspondance.

Lorsque l'entrée ne figure pas dans la table, un (sous)-type de tâches « interpoler » peut encore émerger, correspondant par exemple à l'interpolation : circuler d'un cycle à celui qui précède, utiliser le positionnement, et éventuellement, extrapoler.

L'un des points qui me paraissent intéressants dans le rapprochement entre la T.A.D et l'histoire, c'est la possibilité d'utiliser des outils pour observer les spécificités des exercices et le choix des types de tâches parmi ceux qui sont disponibles selon les exercices donnés.

Premièrement, je l'ai déjà dit, certains (sous)-types de tâches (correspondant à ce que j'ai appelé « sous-tâches ») ne sont pas mobilisés du tout, selon les valeurs initiales choisies pour le côté du carré. Si l'on définit la technique de calcul de l'aire du carré selon des étapes de la technique, elle peut par exemple se définir comme :

-mettre en correspondance (une mesure de longueur avec un nombre en système SP), utiliser le résultat d'une multiplication élémentaire, sélectionner le cycle pertinent, mettre en correspondance (un nombre en système SP avec une mesure de longueur)

Auquel cas, certaines étapes appartiennent au type de tâches « utiliser une table métrologiques » mais aucune étape n'appartient au sous-type de tâche « interpoler » ni « utiliser un algorithme multiplicatif ».

Pour d'autres valeurs initiales du côté du carré, la technique en revanche, peut se définir par les étapes suivantes : mettre en correspondance (une mesure de longueur avec un nombre en système SP), utiliser le résultat d'une multiplication élémentaire, sélectionner le cycle pertinent, mettre en correspondance (un nombre en système SP avec une mesure de longueur), circuler d'un cycle à celui qui précède, mettre en correspondance (un nombre en système SP avec une mesure de longueur), utiliser le positionnement. Auquel cas, certaines étapes appartiennent au sous-type de tâche « interpoler ».

Deuxièmement, l'apprentissage de certains types de tâches peut être l'objet principal de l'apprentissage et peut devenir plus tard, une « sous-type de tâches » pour l'apprentissage d'une technique différente. Par exemple, l'algorithme de multiplication peut être un objet principal d'apprentissage à un certain stade du cursus. Ensuite, il est utilisé comme un (sous)-type de tâche dans la résolution du calcul d'aire, selon la mesure de longueur initiale choisie.

Il est possible d'envisager un jeu sur les « variables » pour faire mobiliser (ou non) certains types de tâches. Par exemple, la mesure de longueur pourrait être choisie afin de faire (ou non) mobiliser la multiplication par algorithme, par les élèves. Cet effet peut peut-être être mis en lien avec le concept de chaînes trophiques. Par exemple, une technique graphique peut faire vivre une propriété géométrique, mais aussi tout un savoir-faire graphique, qui appelle des propriétés géométriques.

> Selon une image empruntée à l'écologie biologique, se créent – et se rompent, au cours notamment des mouvements transpositifs – des chaînes trophiques, où une praxéologie « se nourrit d'une autre » – et, paradoxalement, par cela, la fait exister dans l'institution qui lui sert d'habitat. Supposons que l'on veuille obtenir une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre, par exemple de 14,2. On pouvait utiliser autrefois – le souvenir s'en est largement perdu – une technique graphique $\tau^{\#}$ consistant en ceci [...] une telle technique fait vivre non seulement une propriété géométrique clé [...] mais encore tout un savoir-faire graphique – comment, par exemple, tracer de la façon la plus précise [...] qui lui-même appelle des propriétés géométriques, etc. (Chevallard, 2007, p.716)

Surtout, les étapes de la technique peuvent faire vivre et motiver un type de tâches classiques.

> J'ajoute ceci : soit par exemple à extraire la racine carrée de 34,5 ; si l'on sait que 345 = 3 × 5 × 23, on peut envisager d'écrire 34,5 sous la forme (3 × 2,3) × 5, soit encore 5 × 6,9. La technique $\tau\#$ peut faire vivre ainsi, en la motivant, un type de tâches classique en mathématiques élémentaires : la décomposition d'un nombre en un produit de facteurs, et en particulier la décomposition d'un entier en facteurs premiers. (Chevallard, 2007, p.716)

Dans le cas du calcul d'aire avec agrandissement du carré, il est aussi possible que le (sous)-type de tâches lié aux tables métrologiques ne soit plus l'objet principal d'apprentissage. On pourrait considérer que ce nouveau type de tâches (calculer l'aire du carré agrandi) fait vivre un ensemble de types de tâches plus classiques, les types de tâches liées au calcul de l'aire du carré de côté donné, mais pas forcément tous les sous-types de tâches liés aux tables métrologiques.

Ce qui va être important et délicat à l'avenir, c'est de distinguer les tâches, les techniques, les types de tâches et sous-types de tâches. Une piste suggérée par Corine Castela (dont je reprends les termes ici), qu'il faudra prendre en compte pour un travail futur en lien avec la T.A.D, est de considérer la portée de chaque technique. J'ai expliqué que les étapes, donc la technique, change en fonction de la mesure de longueur du côté du carré. La technique peut faire appel ou non à un (sous)-type de tâches du type de tâches principal. Chaque (sous)-type de tâche correspond alors au domaine d'efficacité de la technique sollicitée. Alors se crée une dynamique depuis les sous-types de tâches vers la création d'une technique adaptée (ou à l'inverse l'étude d'une technique fait naître un sous-type de tâches). Fait intéressant, les variables peuvent jouer un rôle dans cette dynamique, en provoquant la distinction des sous-types de tâches[122].

Il y a des (sous)-types de tâches qui sont motivés par le choix d'une valeur du côté du carré. Le (sous)-types de tâches lié à la table métrologique peut être étudiés séparément, il n'est pas uniquement lié au type de tâche principal de calcul d'aire du carré. Par exemple, il peut être étudié dans le cadre d'un calcul lié à la règle de trois. L'apprentissage de certains (sous)-types de tâches pourrait motiver le choix d'une mesure de longueur du côté du carré, qui jouerait le rôle d'une variable. Pour certains exercices, le réel apprentissage ne serait donc pas à proprement parler la technique de calcul d'aire du carré, mais le (sous)-type de tâches lié aux tables métrologiques.

Ainsi, les distinctions apportées par la T.A.D me semblent déjà fructueuses pour mettre en valeur des dynamiques, en lien avec le choix de la mesure de longueur du côté. Qu'est-ce qui est réellement visé par l'apprentissage ?

Les assortiments

Je reviendrai à la T.A.D en ouverture, lorsque je présenterai les textes en cunéiforme pour d'autres périodes. En termes de réflexion sur les assortiments, certaines notions peuvent être mobilisées à profit ici, à mon avis.

> Un répertoire est une agrégation fonctionnelle de connaissances ou de savoirs (soit en vue d'une résolution, soit en vue d'un apprentissage). Un répertoire peut être :

[122] Il existe aussi des techniques dont plusieurs étapes consistent à se ramener à sous-type de tâches plus simple à traiter.

-effectivement mobilisé par un assortiment ;

-construit a priori.

Une formule est un savoir scolaire qui, avec d'autres savoirs formellement semblables, est désigné aux élèves comme devant être directement utilisable dans un calcul, un raisonnement, un algorithme, une démonstration. Une formule peut être :

-activée par une (ou plusieurs) question(s) dans un assortiment ;

-présente dans le milieu de l'élève (par exemple dans l'énoncé d'une question) ;

-transitoirement et volontairement écartée du répertoire mobilisé. (Genestoux-Esmenjaud, 2001)

Ici, le corpus donne une idée de ce que pourrait être un assortiment destiné aux scribes. Je pense que dans le corpus de tablettes, la multiplication élémentaire pourrait correspondre par exemple, à ce qui est appelé ici « formule ». Cet assortiment peut aussi (ou non) mobiliser le « répertoire » de connaissances liées, par exemple, à l'algorithme multiplicatif (multiplication non élémentaire), ou le répertoire lié à l'extrapolation (s'il existe), ou encore celui lié à la circulation dans les tables et au positionnement sexagésimal, etc.

Fait important, il est possible de constater que le répertoire lié à la circulation dans les tables est clairement mobilisé, ou non, selon les groupes de tablettes (1 et 2) que j'ai constitués.

J'ai déjà expliqué qu'une difficulté historique clé est de ne pas connaître la proportion entre ce qui est « nouveau » et ce qui est « déjà connu » dans ces exercices. Malgré tout, il me semble intéressant de faire le lien avec les caractéristiques d'un assortiment destiné à l'entraînement du « déjà appris » ou « destiné à apprendre du nouveau ». Les caractéristiques proposées par Esmenjaud (Genestoux-Esmenjaud, 2001, p.181) sont les suivantes :

Caractéristiques d'un assortiment destiné à l'entraînement du « déjà appris » :

une redondance moyenne ;

une insertion progressive de perturbations pour éprouver de manière sélective la robustesse des savoirs et des connaissances ;

une variété des questions qui porte sur les conditions d'application des formules (plonger le répertoire su dans un univers plus vaste, mimer l'issue du projet didactique) ;

une modulation de la difficulté par le biais de l'organisation séquentielle interne (rythme).

Caractéristiques d'un assortiment destiné à l'entraînement destiné à apprendre du nouveau :

une forte redondance ;

une forte réduction de la taille du répertoire mobilisé (pas trop de nouveauté à la fois) ;

forte hiérarchisation entre les connaissances (organisation spécifique) ;

milieu très charge en connaissances didactiques pour bien cibler les interactions ;

plongement dans un déjà connu (non problématique).

Même s'il n'est pas possible d'avoir accès à la proportion réelle d'exercices portant sur des tâches principales et la proportion d'exercices portant sur des sous-tâches dans le cursus réel, des questions se posent. Ces questions sont liées à l'hypothèse d'un travail à visée pédagogique qui réponde à une logique différenciant les tâches principales et sous-tâches.

-Quelles sont les perturbations pour cet exercice de calcul d'aire paléo-babylonien ? Par exemple, étant donné le positionnement dans le cursus, il est probable que la multiplication non élémentaire ait déjà été travaillée, mais qu'il puisse s'agir d'une sous-tâche visant plutôt la perturbation.

-Les sous-tâches liées à la table métrologique permettent-elles de plonger le répertoire dans un univers plus vaste que celui, plus restreint, des tablettes 1 et 2 ?

-Les tablettes 1 et 2 pourraient-elles correspondre à un assortiment destiné à apprendre du nouveau, du fait du peu de sous-tâches qui sont mobilisées ? Il y aurait en effet réduction de la taille du répertoire mobilisé, plongement dans un « déjà connu », non problématique. De même, la tablette 7 portant sur l'agrandissement de l'aire, qui correspond à une forte réduction du répertoire en termes de sous-tâches, correspondrait-elle à un focus sur cet élément (agrandissement), qui serait alors nouveau ?

Il me semble que ces caractéristiques fournissent des outils objectifs d'observation et permettent de nommer des distinctions fines. Ces outils d'observation renforcent l'idée que les groupements de tablettes que j'ai constitués (basés sur les sous-tâches), puissent être représentatifs d'assortiments de natures différentes[123]. Ils seraient peut-être destinés à des étapes distinctes de l'apprentissage du calcul d'aire et des techniques qui lui sont associées.

Pour conclure du point de vue méthodologique, je rappelle que l'analyse des petites variations inspirée par la notion de variable didactique (et le regroupement qui s'ensuit) ont permis d'identifier des tâches principales, présentes et nécessaires à chaque fois, et des sous-tâches présentes dans certaines tablettes uniquement. L'analyse a montré des différences dans ces exercices, d'apparence homogène. J'ai relevé des arguments permettant de penser que l'apprentissage de certaines sous-tâches liées aux tables métrologiques pouvait être visé. Ainsi, le choix des valeurs numériques pourrait correspondre à la notion (élargie) de variable didactique.

Les interprétations pédagogiques ne peuvent qu'être formulées comme des hypothèses, mais elles me paraissent intéressantes. Elles pourraient être croisées avec d'autres types d'analyses sur le niveau des élèves.

La question de la place du travail sur les cycles et l'extrapolation ressort particulièrement de cette étude. Le positionnement du calcul d'aire dans le cursus en relation avec les sous-tâches et leur propre positionnement dans le cursus (aisance dans l'algorithme multiplicatif par exemple), est importante pour pouvoir continuer la réflexion.

Il faudrait aussi connaître les valeurs susceptibles d'être négligées ou arrondies (par exemple ici, 1/12 *še*). Le travail de Middeke-Conlin (*à paraître*) semble signifier que les petites fractions de *še* pouvaient en effet être tronquées ou arrondies. Ces éléments permettraient de savoir si l'extrapolation existe systématiquement et ainsi, de savoir si cette sous-tâche ((sous)-type de tâche ici, pour la T.A.D) pourrait ou non résulter d'une variable didactique (au sens élargi).

Les outils de la T.A.D (voir p.102) semblent intéressants pour observer les dynamiques créées par le choix des mesures de longueur du côté du carré. Ils mettent en valeur pour les tablettes du groupe 2, la possibilité d'un objectif d'apprentissage lié explicitement à un sous-type de tâches (pour circuler dans les tables métrologiques), avec le calcul d'aire du carré en arrière-plan. Pour le groupe 1 cet ensemble n'est pas ou peu mobilisé. Enfin, pour la tablette 7 liée à l'agrandissement, ces techniques pourraient devenir secondaires.

En tous cas, l'hypothèse d'un choix de valeurs numériques qui n'impliquent pas de travailler sur *toutes* les sous-tâches (lorsqu'un élément d'enseignement potentiellement nouveau est amené) pourrait laisser penser à des intentions pédagogiques. On peut citer par exemple l'introduction du calcul d'aire du carré lui-même ou le travail d'agrandissement. Ceci est corroboré par les distinctions entre les groupes 1 et 2, qui pourraient être des groupes

[123] Si l'on fait la supposition que les critères pédagogiques actuels liés à l'idée d'une progression nécessaire, soient plus ou moins partagés à l'époque.

de « niveau ». Comment sont enseignées les sous-tâches liées au choix du cycle pertinent et à la navigation d'un cycle à celui qui précède ; quand intervient cet enseignement ? Est-ce de cet enseignement précisément, qu'il s'agit ici ?

Si le choix de regroupements de type 1 et 2 que j'ai proposé était confirmé, cela favoriserait l'hypothèse que l'enseignement de ces sous-tâches liées aux tables métrologiques est en cours, ou fraîchement acquis. L'outil de didactique qu'est « l'assortiment » (Genestoux-Esmenjaud, 2001) permet d'obtenir des critères qui semblent objectiver l'idée d'une différence entre l'entraînement du déjà appris et l'apprentissage du nouveau. La mesure de longueur pourrait alors constituer une forme de variable didactique, étant donné l'implication qu'elle a sur les sous-tâches ((sous)-types de tâches pour la T.A.D) qui entrent en jeu dans la résolution, en lien avec une idée de progression. L'ouverture vers la T.A.D invite également à creuser les effets de ces dynamiques liées aux choix de variables et aux types de tâches mobilisées.

2.4 Analyse historico-épistémologique : une sélection d'autres textes en cunéiforme

2.4.1 Introduction à la démarche

La démarche précédente relève d'une analyse historique inspirée par les outils de didactique. Je vais maintenant réaliser une analyse historico-épistémologique. Il s'agit d'un travail de mise en évidence de la diversité des concepts liés à l'aire : surfaces, unités de mesure, multiplication, nombres, etc. Pour cela j'ai sélectionné des textes en cunéiforme, sur le thème du calcul de l'aire du carré, afin de compléter mon propos. Ces textes proviennent d'autres périodes et d'autres lieux. Cette fois-ci je m'appuierai entièrement sur l'analyse historique qui a été faite au préalable par Christine Proust, pour conduire une analyse motivée par des questions conceptuelles. C'est en ce sens, que j'ai qualifié cette partie d'analyse historico-épistémologique.

Cependant le fait d'analyser une sélection de textes sous l'angle particulier du calcul d'aire pose des questions historiques également, du point de vue des concepts et sur d'autres points que j'exposerai en conclusion. De même, l'analyse historique des petites variations pourrait être exploitée sous l'angle conceptuel à l'avenir.

La tablette UM 29-15-192 (voir p.48), de la période paléo-babylonienne (ca. 1900-1600 BCE), sera prise en compte dans la présente démarche. Après l'analyse de cette tablette, différentes questions se posent. Existe-t-il des calculs d'aire dans des situations d'unidimensionnalité, liés plus explicitement au cadre géométrique, dans le contexte d'un système métrologique semi-indépendant (voir p.60) ? Qu'est-ce que la présence d'un système métrologique semi-indépendant implique sur les concepts qui entrent en jeu dans l'algorithme de calcul d'aire ? S'intéresser à un texte plus ancien permettrait-il d'avoir accès à une autre forme d'adaptation à un système métrologique semi-indépendant que celle qui a été rencontrée avec la création du système SP ? Cela peut-il informer sur la façon dont l'algorithme de calcul d'aire explicite ou non les objets sur lesquels il opère ?

Est-ce qu'il est possible d'avoir accès à la conversion d'une unité de mesure à l'autre ; et à ses aspects conceptuels ? Peut-on témoigner d'une transformation dans les tâches liées au calcul d'aire, dans un texte plus récent ? Des tâches qui étaient au cœur de l'apprentissage peuvent-elles devenir secondaires ? Quelles sont les conséquences sur les objets mathématiques qui entrent en jeu dans l'algorithme ?

Existe-t-il des formes d'utilisation de nombres en système SP qui soient liées au registre des figures, sans être liées explicitement à des mesures ? Qu'est-ce que cela implique conceptuellement, sur les nombres, sur les surfaces ?

Pour tenter de répondre à ces questions, je vais d'abord présenter brièvement les textes choisis ainsi que l'interprétation historique ou les hypothèses sur lesquelles je m'appuierai. Ensuite, je récapitulerai dans un tableau ce que chaque texte a de particulier, au regard des unités de mesure de longueur et d'aire, du système métrologique (semi-indépendant ou non), des nombres qui entrent en jeu (valeurs numériques des grandeurs et nombres sur lesquels porte l'opération). Je regarderai également le type d'opération nécessaire, le lien éventuel avec la géométrie ; la forme que l'on pourrait considérer comme naturelle à l'unité de mesure, si elle était représentée (au regard du système métrologique), le lien entre le système numérique et le système métrologique, l'ordre de grandeur de la surface dont l'aire est mesurée. Enfin le rôle du diagramme (supposé, car il relève d'hypothèses des historiens) sera étudié également.

Je vais m'appuyer sur trois tablettes : une tablette de la période des Dynasties Archaïques (ca. 2700-2500 BCE)[124], de Šuruppak, VAT 12-593[125] ; une tablette de la période achéménide (547-331 BCE) provenant d'Uruk, W 23 291 ; et une tablette de la période hellénistique (323-63 BCE) provenant d'Uruk également, AO 6484.

Je souligne le fait que j'ai construit les critères d'analyse qui servent de grille d'observation pour ces textes (récapitulés dans le tableau 2.4.5, p.140), petit à petit, grâce aux textes et aux allers-retours avec les lectures de didactique. Cette élaboration de critères pas à pas constitue je crois, l'essence de mon travail d'épistémologie.

Je note que le fait de mettre ces textes dans un même tableau ne permet pas de conclure quoi que ce soit concernant les objectifs des acteurs anciens, ou l'évolution du calcul d'aire. En revanche, la sélection m'a permis de mieux décortiquer les concepts liés à notion d'aire et de mettre en valeur leur diversité. Pour faire dialoguer ces textes, j'ai dû mettre en place un vocabulaire commun. J'ai choisi de m'inspirer du V.I.M, vocabulaire international de la métrologie (2008). Ce vocabulaire m'a permis de présenter mes analyses et de les comparer dans le tableau qui rassemble tous les textes en cunéiforme étudiés (voir tableau 2.4.5, p.140). J'ai utilisé la même démarche pour une première approche à des textes anciens en chinois et sanskrit (voir ouverture, 4.1.4, p.165).

L'aspect essentiel qui a motivé cette sélection est celui de la diversité. Le fait d'essayer de comprendre en profondeur les nuances conceptuelles de l'approche des unités de mesure, des nombres, de la multiplication est lié au projet SAW. Cependant, la sélection permet aussi de faire connaitre ces finesses afin de représenter au mieux ce qu'est la diversité, et ainsi de participer au travail de complexification du mot « culture ». L'ensemble des textes montre qu'il existe plusieurs approches mathématiques et conceptuelles de la notion d'aire au sein d'une même zone géographique, ici la Mésopotamie.

2.4.2 La tablette VAT 12-593

[124] Périodisation : voir p.26

[125] voir Carte géographique 2-1. Il s'agit de la moderne Fara.

Introduction

J'ai souhaité traiter de cette tablette parce qu'elle offre des éclairages différents sur la notion d'unité de mesure et de calcul d'aire. En effet, selon l'interprétation de Proust (*à paraître*), il s'agit cette fois de découper la surface en unités et sous-unités de mesure, non forcément carrées. Cette tablette permet aussi de mieux comprendre comment les nombres en système SP (voir 2.1.3, p.36) non utilisés ici, sont une réponse technique parmi d'autres à l'utilisation d'un système métrologique semi-indépendant. D'autre part, cette fois le cadre est additif, unidimensionnel (voir p.21).

La transcription, la traduction et la majorité des explications liées à cette tablette cunéiforme sont tirées de Proust (*à paraître*). Comme je le précise en Introduction (voir 2.4.1, p.111), j'ai ici encore, fait le choix d'une interprétation historique pour ce travail.

Cadre historique

VAT 12-593 est une tablette[126] de la période des Dynasties Archaïques IIIa (période Fara, c.a. 2700 – 2500 BCE, voir p.28) provenant de Šuruppak (Fara) qui appartient à l'ensemble "Schultexte aus Fara" publié par Deimel (1923). Selon les informations archéologiques enregistrées par l'équipe en charge des fouilles les plus anciennes à Fara, il est très probable que la tablette VAT 12-593 ait été produite dans le milieu scolaire de cette ville, avec « un riche ensemble de listes lexicales et de compositions en sumérien » (Proust, *à paraître*, p.10)[127].

> Cet ensemble inclut aussi des textes mathématiques, qui montrent un engagement fort des scribes érudits pour les mathématiques. Les textes de Šuruppak "révèlent des changements fondamentaux dans l'attitude du scribe envers les problèmes arithmétiques" (Nissen, Damerow, and Englund 1993, p.137). [...] Les textes lexicaux et mathématiques de Šuruppak sont communément considérés par les historiens comme étant des "textes scolaires", comme l'a souligné le titre de la publication de Deimel. Cependant, comme l'a pointé Biggs (1974, p.29), cette caractérisation peut porter à confusion et ces textes pourraient être considérés comme une production érudite plutôt que comme des exercices de jeunes élèves. (Proust, *à paraître*, p.10)

La tablette examinée fait partie d'un ensemble de cinq tablettes de la période des Dynasties Archaïques, qui sont considérées par les historiens comme les textes mathématiques les plus anciens connus (VAT 12-593, MS 3047, Feliu 2013, A 681, CUNES 50-08-001)[128]. La tablette VAT 12-593 fait partie des trois tablettes de l'ensemble qui sont organisées sous forme tabulaire, alors que les tablettes A 681 et CUNES 50-08-001[129] sont organisées sous

---

[126] Voir p.9, numéro CDLI P010678

[127] Selon Proust (*à paraître*, p.10), « les premières fouilles de Fara (anciennement Šuruppak) ont été conduites par Robert Koldewey et Walter Andrae pour la Deutsche Orient-Gesellschaft en 1902-1903, et par Erich Smith, par la suite, pour University Museum of Philadelphia en 1931. Les fouilles allemandes se sont intéressées au contexte archéologique du matériau épigraphique, mais le numéro de fouille de nombreuses tablettes a été perdu (Robson 2003, p.27 ; Krebernik, 1998). » Les traductions en français de cet article sont de l'auteur.

[128] « Bien sûr, décider ce qu'est le texte mathématique "le plus ancien" est une question d'appréciation de ce qu'est un texte mathématique. Par exemple, selon le CDLI Wiki (http://cdli.ox.ac.uk/wiki/), le "texte mathématique le plus ancien connu" correspond au calcul d'une surface, il a été trouvé à Uruk et est daté de la période Uruk IV (ca. 3350-3200 BC) maintenant préservé à l'Université d'Heidelberg, sous le numéro W 19408,76 (+ fragments). » (Proust, *à paraître*, p.1 note de bas de page 2)

[129] Ce sont les textes 4 et 5 de son article.

forme de listes. VAT 12 593 et MS 3047 datent probablement de la période des Dynasties Archaïques IIIa (ca. 2700-2500) et viennent de Šuruppak (Fara), tandis que les trois autres datent de la période des Dynasties Archaïques IIIb (ca. 2500-2340), provenant d'Adab et peut-être de Zabalam (voir Feliu, 2013, p.219), voir la Géographie (p.31).

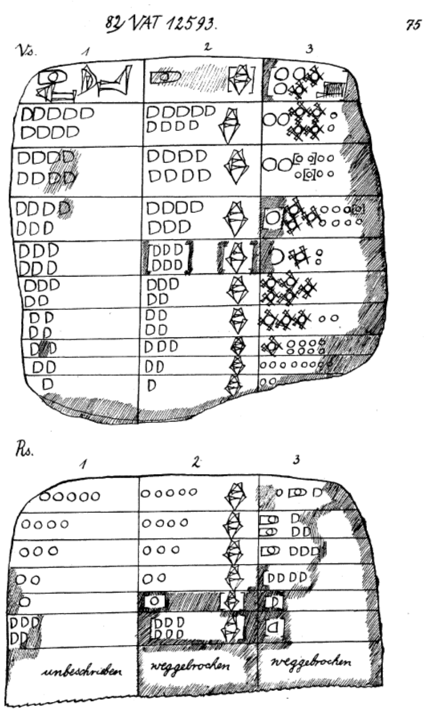
> Même si la provenance n'est pas toujours claire, certaines étant issues de collections privées d'origine inconnue, les cinq tablettes semblent provenir d'une zone relativement petite, localisée entre Nippur et Girsu en Mésopotamie du Sud. (Proust, *à paraître*, p.8)

Je n'irai pas plus loin pour ce texte dans la description du contexte[130].

Le texte

Photographie 2-4 : Tablette[131] P010678
face, revers et fragments (CDLI, s.d.)

Voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P010678



Représentation 2-10 : Copie de la face de la tablette (Deimel, 1923)

[130] Powell (1972, 1973) traite la question de la notation des valeurs numériques et unités de mesures au troisième millénaire. La taille des champs et le contexte sont traités, pour d'autres périodes, par Lecompte (*à paraître*) et Liverani (1996). La table numérique comme sujet d'étude en histoire des sciences est traitée en détail (Tournès et al., *à paraître*). Le lecteur intéressé par les textes littéraires de Šuruppak (Fara) peut consulter les publications de Jestin (1937, 1957). Pomponio et Visicato (1994) ainsi que Visicato (1995) proposent des éléments d'histoire générale de Šuruppak (Fara).

[131] Voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P010678

La traduction (inspiré de Proust, à paraître, p.12)

.Face

Col. I	Col. II	Col. III
1 × 600[132] *ninda*[133] de front[134]	1 × 600 [côté égal]	[3 × 1080 + 2 × 180 *GAN*]
9 × 60	9 × 60 côté égal	2 × 1080 + 4 × 180 + 2 × 18
8 × 60	8 × 60 côté égal	2 × 1080 + 8 × 18
7 × 60	7 × 60 côté égal	[1080] + 3 × 180 + 8 × 18
6 × 60	[6 × 60 côté égal]	1080 + 180 + 2 × 18
5 × 60	5 × 60 côté égal	5 × 180
4 × 60	4 × 60 côté égal	3 × 180 + 2 × 18
⌜3 × 60⌝	3 × 60 côté égal	180 + 8 × 18
2 × 60	2 × 60 côté égal	⌜8 × 18⌝
1 × 60	1 × 60 côté égal	2 × 18

Tableau 2-1 : Traduction de la face

.Revers

Col. I	Col. II	Col. III
50[135]	50 côté égal	18 + 6 + 1

---

[132] Le système de notation, non flottant, représente la valeur 600 (traduite, ici) par un signe :  qui se prononce « geš'u ». Plus bas, il en est de même pour la valeur « 60 ».

[133] L'unité de mesure « *ninda* » a déjà été évoquée plus haut (voir p.45).

[134] Le signe précise que cette longueur fait référence au côté d'un champ carré :  sag, de front, ou au sens technique : « largeur ».

[135] La translittération est 5 (u), 4 (u) etc. La traduction 5 × 10, 4 × 10, etc. est aussi possible.

40	40 côté égal	2 × 6 + 4
30	30 côté égal	6 + 3
20	20 côté égal	[4]
⸢10⸣	[10 côté égal]	[1]
5	⸢5⸣ [côté égal]	[1/4]
Blank[136]	[Blank]	[Blank]

Tableau 2-2 : Traduction du revers

Commentaire

<u>Une situation unidimensionnelle de calcul d'aire, dans le cadre géométrique</u>

Ce texte est différent de la tablette UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) sur plusieurs aspects. Il n'est pas énoncé comme un problème mais comme un tableau, à trois colonnes. Il propose : dans la première colonne, la mesure de longueur du côté d'un carré (une mesure différente par ligne) ; dans la deuxième colonne, la mesure de longueur du second côté (identique puisqu'il s'agit d'un carré) et enfin dans la troisième colonne, la mesure d'aire correspondante.

Par exemple, pour un carré de « 4 × 60 » de côté, il sera donné en troisième colonne la valeur « 3 × 180 + 2 × 18 ». Cette notation particulière du résultat dans la troisième colonne et l'absence d'unités de mesure dans le tableau (excepté pour la première ligne) est intrigante, différente de la tablette précédente où elles étaient explicitées.

1. Première colonne : la première case de la première colonne contient l'expression « complète » : 1 × 600 *ninda* de front[137]. 600 est représenté par un signe  et se prononce *geš'u*. Le système numérique additif utilisé, en effet, comporte des signes différents pour les valeurs 1, 10, 60, 600, 3600, 36 000, etc. Ce système est appelé, par convention, système S[138]. Le système SP n'est pas attesté à cette période. En système S, on compte donc le nombre de « six-centaines » ou le nombre de « soixantaines ». Il est de principe additif : car par exemple, 663 se dirait « une six-centaine, une soixantaine et trois unités ».

Les colonnes qui suivent ne comportent que des valeurs numériques, sans unité de mesure explicite, comme 9 × 60 ou 4 × 60. L'unité de mesure de longueur *ninda* donnée dans la première ligne, est donc sous-entendue dans les lignes suivantes. Les tailles des côtés des

[136] La tablette est cassée, ensuite.

[137] Le premier côté est appelé « sag » soit « front » en anglais, selon Proust (*à paraître*, p.13) en référence au front (du visage).

[138] Le système S de la période des dynasties archaïques se comporte un peu comme celui décrit à la période paléo-babylonienne, voir p.36. Pour une présentation du système S de la période des dynasties archaïques, voir Proust (*à paraître*, p.5)

carrés varient de 600 *ninda* (environ 3600 m) à 5 *ninda* (environ 30 m), qui sont de l'ordre de grandeur de grandes terres et de domaines.

2. Deuxième colonne: elle reproduit les valeurs de la première colonne dans le même système numérique et avec la même unité de mesure, mais précise toujours "côté égal", comme s'il s'agissait d'un cas spécifique de rectangle.
3. Troisième colonne: le résultat est donné en unité de mesure *GAN* et dans un système numérique non positionnel appelé système G[139]. Ce-dernier fonctionne comme le système S sur un principe additif, mais comporte des signes pour les valeurs 6, 18, 180, 1080, 10800, etc.

Le résultat de la troisième colonne : Comment a pu être obtenue la troisième colonne ? Une première hypothèse serait par exemple que pour chaque carré ou champ[140], le nombre de *ninda* (en système S, additif) mesurant le côté (le « front ») (N) était multiplié par le nombre de *ninda* (en système S) mesurant le « côté égal » (M). Le résultat « $N \times M$ » aurait donné le nombre de *sar* et aurait dû être alors convertit en système G.

L'hypothèse du recours à la multiplication pose cependant des problèmes.

Problèmes posés par l'hypothèse multiplicative : Il n'y a pas de trace de l'utilisation de l'unité de mesure « *sar* » dans ces textes, ni aucune trace d'une telle conversion en système G. La difficulté de calculer la mesure d'aire en utilisant une *multiplication*, vient du fait que les systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire sont semi-indépendants. Ils sont basés respectivement, sur des systèmes numériques non positionnels, le système S (utilisé pour exprimer les mesures de longueurs) et le système G (utilisé pour exprimer les mesures d'aire[141]). Par exemple, le carré de côté « 5 soixantaines de *ninda* » pourrait donner lieu à la multiplication 5×5. Il faudrait rendre le résultat comme « 25 trois-mille-six-centaines de *sar* » (le carré d'un *ninda* de côté vaut 1 *sar*). Mais d'une part, le *sar* n'est pas utilisé dans le texte, le résultat est en *GAN* ; d'autre part les systèmes d'unité de mesure sont indépendants.

De fait, selon Proust (*à paraître*, p.20) les calculs étaient probablement d'une autre nature. Une hypothèse a été suggérée à Proust, par papier de Duncan Melville sur le calcul des ratios dans les textes de Šuruppak (Melville, 2002). Melville examine un texte donnant la quantité totale de farine à distribuer à 40 hommes, chaque homme recevant 2 *ban* de farine. Il souligne que notre culture mathématique moderne nous conduirait à imaginer que l'opération impliquée est la multiplication de 2 *ban* par 40. Cependant, cette multiplication produit un résultat qui n'est pas directement exprimable dans les anciens systèmes métrologiques. Melville argumente qu'en fait, résoudre un tel problème ne requiert pas de multiplication, et que les additions itérées mènent facilement au résultat, en utilisant seulement des mesures attestées.

> En suivant l'approche de Melville, nous pouvons examiner les méthodes possibles utilisées pour trouver les surfaces données dans la tablette de Šuruppak. (Proust, *à paraître*, p.20)

Voici les facteurs entre unités de mesure présumées pour ce texte. Pour les mesures de longueurs : 10, 6, 10, 6, etc. Pour les mesures d'aires : 6, 3, 10, 6, etc. Ces facteurs viennent directement des facteurs qui régissent les systèmes numériques S et G. Pour le système S, les symboles représentent : 1, 10, 60, 600, 3600, 36 000 etc. Les facteurs associés sont donc : 10, 6, 10, 6, 10, etc. Pour le système G, les symboles représentent 1, 6, 18, 180, 1080, 10800, etc.

---

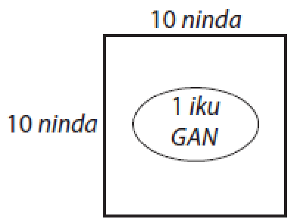
[139] Voir Proust (*à paraître*, p.7 ; 2007, p.70)
[140] Proust traduit « champ ».
[141] Proust préfère le terme de « surfaces » dans sa traduction, pour coller au texte.

Les facteurs associés sont donc : 6, 3, 10, 6, 10, etc. Ainsi, l'interprétation de Proust (*à paraître*, p.19) consiste à considérer les facteurs régissant les systèmes numériques S et G comme facteurs liés aux facteurs des systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire, respectivement.

Aire du carré de 5 × 60 *ninda* de côté en système G et unité de mesure *GAN* : Selon cette interprétation, le carré de côté « 5 soixantaines de *ninda* » donnerait alors non pas une mesure d'aire du type « 25 trois-mille-six-centaines de *sar* » mais serait exprimé directement en *(iku) GAN*[142], unité de mesure visible dans le texte. Cela donne soit « 5 cent-quatre-vingtaines de *GAN* » qui se prononce 5 *bur'u GAN*. Le résultat est valable, parce que le carré de côté 10 *ninda* vaut 1 *GAN*. Ainsi le carré de côté 5 × 60 *ninda* qui est de côté 5 × 6 × 10 *ninda* vaut 30 × 10 *ninda* de côté, soit 900 *GAN*. Ce calcul est artificiel et non historique, mais (comme 900 divisé par 5 donne 180) il donne bien 5 × 180 *GAN*, si l'on veut l'exprimer au moyen du système G. C'est la valeur qui se trouve réellement dans la tablette.

Proust (*à paraître* p.21) va plus loin. Partant du texte (le résultat est exprimé en *GAN* et non en *sar*), elle déduit deux points importants : a) et b).

a) La relation *ninda - GAN* : La relation « *ninda-sar* » n'est pas le pont (voir p.53). La relation entre le *ninda* et 1 *GAN* devient fondamentale. La tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 analysée précédemment (voir 2.2, p. 48) était en effet basée sur la connexion du *ninda* au *sar* (le carré de côté 1 *ninda* vaut 1 *sar*) qui constituait le seul pont entre les systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire. Ici, par contre, elle se base sur le carré de côté 10 *ninda* qui vaut 1 *GAN* d'aire.



Représentation 2-11 : le carré de côté 10 ninda

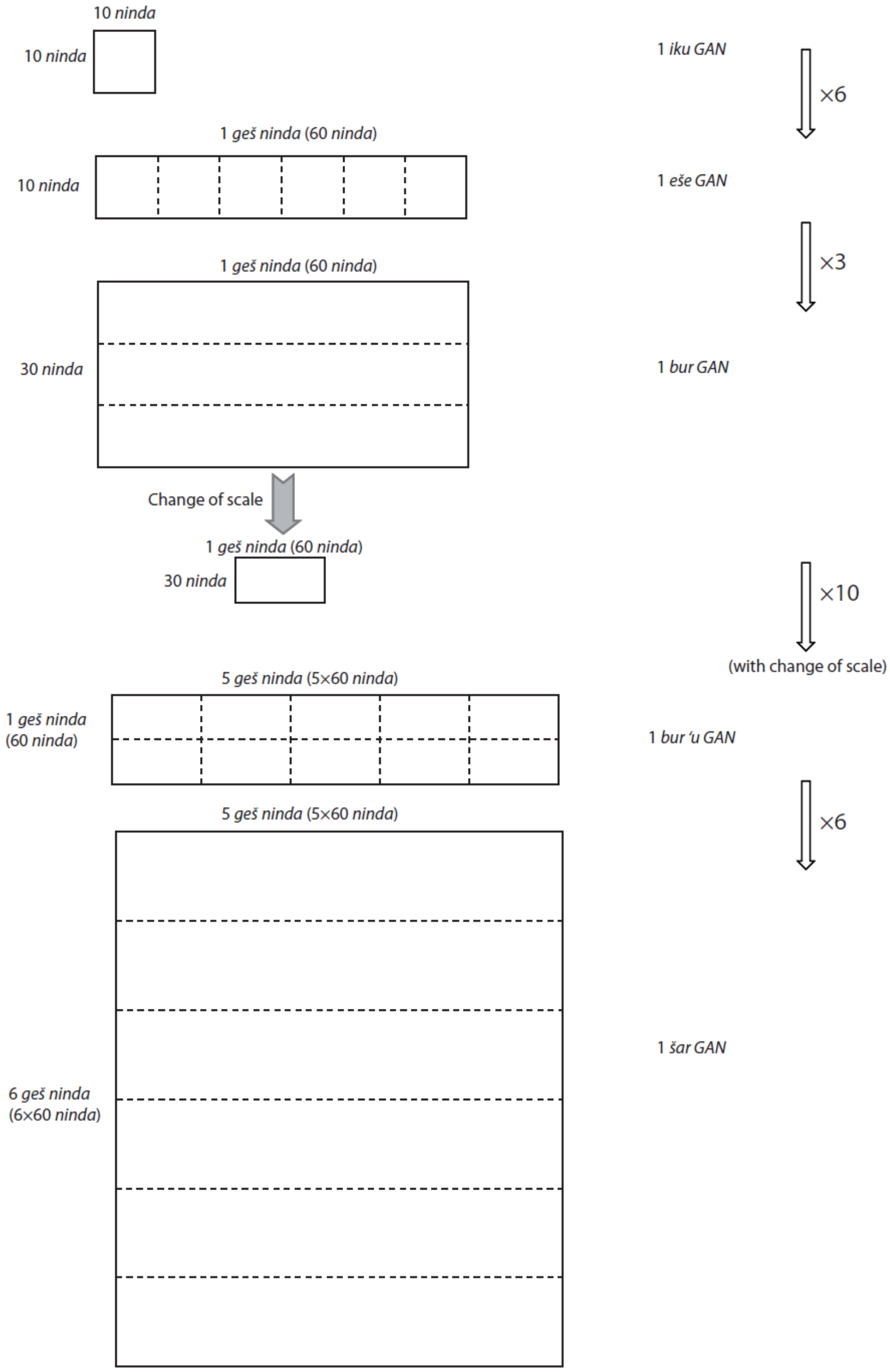
b) Représentation géométrique : Ensuite, partant de ce carré, Proust utilise les facteurs qui régissent le système G (soit les facteurs : 6, 3, 10, 6) pour représenter géométriquement[143] les sur-unités de mesure : valant 6, 18, 180, 1080 *GAN* d'aire (ils se prononcent : 1 e*še GAN*, 1 *bur GAN*, 1 *bur'u GAN* et 1 *šar GAN*). Alors chaque élément de surface résulte d'une simple combinaison des plus petits éléments (voir Représentation 2-1, p.33). Bien sûr, les unités de mesure ainsi obtenues ne sont pas toutes carrées. En adoptant un point de vue géométrique plutôt qu'arithmétique, les facteurs entre unités de mesure produisent des éléments de surface qui sont plus simples à utiliser et qui permettent une utilisation effective des deux systèmes semi-indépendants pour exprimer les mesures de longueur et d'aire. Ici ce ne sont donc pas les nombres en système SP (voir 2.1.3, p. 36) qui permettent cette « communication » mais les unités de mesure représentées par des surfaces diverses.

---

[142] Le terme *iku* fait référence à l'unité, il peut être omis dans la traduction et le lecteur peut lire *GAN*. En système G, 6 iku sont appelés 1 *eše*; donc 6 *iku GAN* peuvent se lire 1 *eše GAN* etc. Ici, les termes sont traduits par 6, 18, 180, 1080, etc. L'expression « ninda-DU » est traduite par *ninda*, de sorte que par exemple : « 1 (geš'u) ninda-DU sag » est traduit par « 600 *ninda* de front ».
[143] Powell (1987-1990, p.479-481, cité dans Proust, *à paraître*), a déjà proposé des représentations géométriques pour les relations entre unités de mesure de longueurs et surfaces en Mésopotamie.

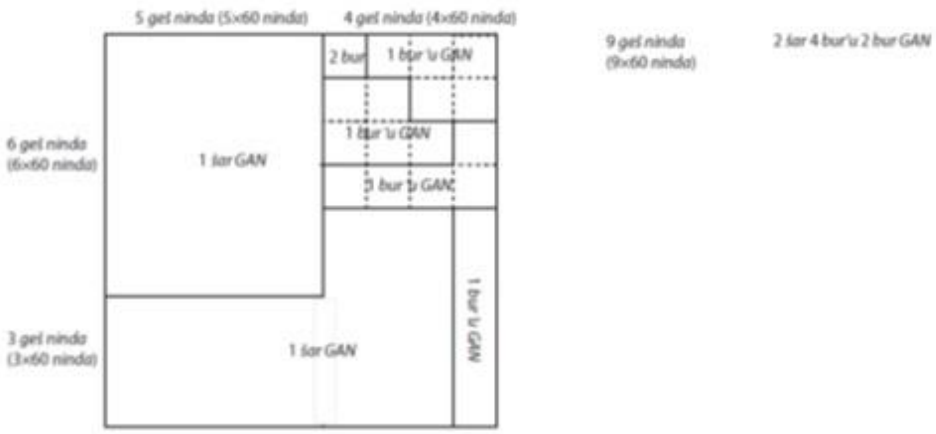
Calcul de l'aire du carré de 5 × 60 *ninda* de côté, selon cette interprétation : selon Proust, il ne s'agit pas uniquement de comprendre le système de facteurs entre unités de longueur de manière géométrique, mais également d'utiliser cette représentation pour calculer. Sur notre exemple de 5 × 60 *ninda* de côté, il est maintenant possible de procéder de manière beaucoup plus naturelle que la multiplication de 30 × 10 *ninda* et la division de 900 par 180, pour exprimer le résultat écrit sur la tablette en système G. En utilisant les facteurs : 6, 3, 10 du système numérique G, Proust dessine les unités de mesure correspondant à 1 e*še GAN*, 1 *bur GAN*, 1 *bur'u GAN*. Pour calculer le carré de côté 5 × 60 *ninda*, il suffit alors d'assembler 5 rectangles (voir Représentation 2-12) valant 1 *bur'u GAN* d'aire (ils font 5 × 60 *ninda* sur 60 *ninda*), soit au total 5 *bur'u GAN* (qui se traduit par 5 × 180 *iku gan*). Le résultat est ainsi obtenu par simple juxtaposition de « sous-surfaces » et addition des aires associées.

Proust propose une représentation géométrique permettant d'interpréter toutes les valeurs du tableau de VAT 12-593. Cette représentation est basée sur une tentative de couvrir un carré de côté *n-ninda* avec les unités de mesure qu'elle a représenté géométriquement. Ces opérations consistant à recouvrir le carré ne requièrent pas d'opération arithmétique. Par exemple, pour le carré de côté 9 *geš ninda*, Proust propose d'utiliser un rectangle et une surface complexe, tous deux d'aire 1 *šar GAN* ; ainsi que trois surfaces complexes et un rectangle d'aire, tous trois d'aire 1 *bur'u GAN* ; et enfin un carré de 2 *bur GAN*. Voir en Annexe, pour la totalité des calculs d'aire de la tablette selon Proust.



Représentation 2-12 : Relations entre longueurs et surfaces utilisées dans VAT 12-593 selon la figure 9 de Proust (à paraître, p.22)[144]

[144] Note : Proust introduit un changement d'échelle de la surface 1 *bur GAN*, afin de pouvoir représenter toutes les unités sur la même page.



Représentation 2-13 : calcul du carré de côté 9 *geš* ninda

Système métrologique sous-jacent et implications

Dans cette partie je présenterai le système métrologique sous-jacent à la tablette, afin de détailler les liens entre systèmes métrologiques, les choix techniques mathématiques du texte et la représentation de l'unité de mesure, comme indiqué plus haut. Le système métrologique utilisé par cette tablette présente des facteurs 6, 10, 6, 10 entre unités de mesure de longueur et 6, 3, 10, 6 entre unités de mesure d'aire. Pour le *ninda*, il est possible de considérer qu'il y a une seule unité de mesure, avec des sur-unités de mesure *ninda* (comme le kilomètre, qui peut aussi être vu comme le « 1000 mètres »). Pour les mesures d'aire, la situation est ambigüe. L'unité de mesure pourrait être le *GAN* et les signes avant le *GAN* peuvent être interprétés comme des multiples du *GAN* ou des unités de mesure propres (auquel cas le *GAN* ne serait pas une unité de mesure mais une indication). Ce qui est important pour moi ici est le système de facteurs suivant :

Unités de longueur :	36 000 *ninda*	←10	3600 *ninda*	←6	600 *ninda*	←10	60 *ninda*	← 6	10 *ninda*
									↕
Unités de surface :	1080 *GAN*	← 6	180 *GAN*	←10	18 *GAN*	←3	6 *GAN*	← 6	1 *GAN*

Tableau 2-35 : système métrologique sous-jacent

Ce système métrologique est lui aussi « semi-indépendant ». C'était le cas de la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192. Les facteurs entre unités de mesure d'aire ne sont pas le carré des facteurs entre unités de mesure de longueur, les deux systèmes semblent construits indépendamment. Un pont (voir p.53) possible entre les systèmes est celui, représenté par la flèche verticale, du lien entre 10 *ninda* et 1 *GAN*. Le carré de côté 10 *ninda* a pour mesure d'aire 1 *GAN*. Le carré de côté 60 *ninda* ayant pour aire 2 *bur GAN* (18 *GAN*) est un autre pont possible. Les autres unités de mesure ne seraient pas représentées par des carrés de façon naturelle.

Le système SP (voir 2.1.3, p.36) n'est pas utilisé dans les sources à notre disposition pour cette période. Il ne représente donc pas ici une solution technique pour cette situation. Selon l'interprétation de Proust, le système métrologique donne lieu à des recouvrements de surfaces carrées par des unités de mesure et sous-unités de mesure, qu'elle représente par des carrés et des rectangles. La forme peut aussi être adaptée selon les besoins de la surface à recouvrir comme pour le carré de 9 *geš ninda* de côté (voir Représentation 2-13, p.121). Cette solution technique différente des nombres SP, (voir 2.1.3, p.36) pour une situation similaire (système métrologique indépendant), colle plus naturellement au texte ancien qu'une multiplication suivie d'une conversion, passant par l'unité de mesure *sar* pour ensuite exprimer le résultat dans le système G et en unité de mesure *GAN*.

En résumé : premièrement, la solution technique au problème posé par des systèmes métrologiques partiellement déconnectés est différente de la tablette UM 29-15-192, voir 2.2, p.48)

Deuxièmement, le contexte est additif unidimensionnel (voir p.21).

Troisièmement, la semi-indépendance du système métrologique a des conséquences (explicites ici) sur la forme de l'unité de mesure adoptée, qui peut être rectangulaire, voire même adaptée aux besoins du découpage de la surface en sous-surfaces, liées aux unités et sous-unités de mesure d'aire. Il est intéressant de voir que la mesure d'aire associée à une unité de mesure est distinguée de sa forme (distinction aire/surface pour l'unité de mesure elle-même).

De plus, les dénominations sont toujours très différentes pour les unités de mesure de longueur et d'aire, ces dernières étant conçues indépendamment des mesures de longueur dans le fonctionnement du système métrologique, mais dans le registre des figures également. Cette fois, deux unités de mesure seulement entrent en jeu : le *ninda* et le *GAN*. Les sur-unités de mesure ne diffèrent que par un nombre apposé devant le nom *ninda* ou *GAN*.

Quatrièmement, l'unité de mesure ne se représente pas seule dans l'expression du résultat (par exemple, 2 *šar* 4 *bur'u* 2 *bur GAN*), comme cela pouvait arriver avec la tablette paléo-babylonienne. La raison est évidente ici, du fait de l'utilisation du découpage de la surface à mesurer en sous-surfaces liées aux unités et sur-unités de mesure. L'expression du résultat rappelle directement le mesurage (report d'étalons de plus en plus petits).

De plus ici, la décomposition se fait en fonction du système numérique utilisé. Si le côté égal est « 9×60 » alors la mesure d'aire donne « $2 \times 1080 + 4 \times 180 + 2 \times 18$ » en *GAN*. Ainsi il y a un lien entre la valeur numérique de la mesure et le système numérique adopté.

Cinquièmement, et contrairement à la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192, la valeur numérique de la grandeur permet d'utiliser les mêmes nombres que ceux qui sont pris en compte dans l'algorithme additif. Par exemple, si quatre surfaces mesurant 1 *bur'u* sont utilisées, l'addition se fait sur les nombres « 1 » : $1 + 1 + 1 + 1 = 4$. Les nombres utilisés correspondent à la prise en compte de surfaces de dimension 2.

Enfin, du point de vue historique, le contexte est celui de grandes propriétés (30 m à 3600 m de côté) contrôlées par des gouverneurs, les tablettes ayant probablement été produites par les élites intellectuelles de Šuruppak. Ces tables, systématiques, pourraient avoir servi concrètement pour les personnes devant évaluer les grandes propriétés, afin de les habituer à l'utilisation de la décomposition géométrique, à moins d'être des exercices systématiques. Ce texte alimente différemment du précédent la question « pourquoi évaluer une surface ». D'une part, il semble plus proche de la pratique, l'enjeu est réel et complexe (grandes tailles) tout en offrant une approche mathématique originale. D'autre part, il est frappant (comme le précédent) du point de vue du système métrologique : il suggère l'hypothèse d'une possible constitution indépendante des unités de mesure de longueur et de surface.

En conclusion, cette tablette de la période des Dynasties Archaïques présente des calculs d'aire du carré dans une situation d'unidimensionnalité, dans le cadre géométrique et additif. Le système métrologique est semi-indépendant. La réponse technique adoptée est celle de l'utilisation d'unités de mesure représentées par des sous-surfaces adaptables à la surface dont l'aire est à évaluer. La surface du carré est découpée en des sous-surfaces ayant pour aire celle des unités et sur-unités de mesure. Celles-ci ont une existence indépendante des unités de mesure de longueur et leur représentation par une forme peut varier.

Plusieurs aspects sont intéressants à relever du point de vue des concepts, et il faudra se demander quelles peuvent en être les conséquences :

-la distinction entre surface et aire-nombre pour l'unité de mesure elle-même (voir 2, p.182) ;

-l'expression de la mesure en unités et sur-unités de mesure, géométriquement représentables ;

-un algorithme qui suit un développement en parallèle dans le registre des figures et ce, en lien avec le mesurage (report d'un étalon) ;

-un contexte unidimensionnel additif ;

-un lien entre le système numérique et le système métrologique d'unités de mesure ;

-des sur-unités de mesure liées à une unité de mesure « de référence » ;

-l'adoption d'un même nombre pour la valeur numérique (associée au nombre d'unités de mesure d'aire représentées par des surfaces) et le nombre sur lequel porte l'addition. Le lien conceptuel entre le nombre qui entre en jeu dans l'algorithme additif et celui qui est lié au mesurage (report d'étalons) est préservé.

Grâce au texte suivant, je vais maintenant m'interroger sur les aspects conceptuels liés à la conversion. De plus, du point de vue historique, je me demanderai si des tâches qui étaient au cœur de l'apprentissage peuvent devenir secondaires, question qui a des implications conceptuelles également.

2.4.3 La tablette W 23-291

Introduction

Cette tablette, datant d'une période beaucoup plus récente que la période paléo-babylonienne[145] qui concernait UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) montre comment le système SP (voir 2.1.3, p.36) et sa relation au système métrologique (en lien avec les tables métrologiques), peut devenir l'objet du travail mathématique.

La transcription, la traduction et la majorité des explications liées à cette tablette cunéiforme sont tirées de Proust (*à paraître*). Comme je le précise en Introduction (voir p.179), j'ai ici encore, fait le choix d'une interprétation historique pour ce travail.

Cadre historique

La tablette W 23 291[146] est une tablette de la période achéménide (c.a. 547-331 BCE, voir p.28) provenant d'Uruk, qui appartient à l'ensemble des textes trouvés dans la « maison des āšipus », avec d'autres textes d'érudition de contenus astronomique, d'astrologie médicale,

[145] c.a. 1900-1600 BCE

[146] https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P348768, numéro CDLI P348768

lexicaux, etc. Onze textes mathématiques ont été découverts dans cette maison, provenant de périodes différentes selon les niveaux d'excavation. Selon Proust (*à paraître*)[147,]

> Les systèmes métrologiques pour la longueur, la surface et la capacité dans les textes mathématiques et administratifs diffèrent sur plusieurs aspects aux périodes paléo-babylonienne et babylonienne tardive[148]. Les textes mathématiques de la période Achéménide font écho à plusieurs cultures métrologiques, celles qui résultent d'une longue transmission de connaissances mathématiques de générations en générations pendant plusieurs siècles, les autres développés en Mésopotamie tardivement pour des besoins administratifs ou judiciaires. Proust (*à paraître*, p.1)

La maison a été trouvée par l'équipe allemande *Deutschen Archäologischen Instituts* dirigée par Schmidt en 1969-1972[149]. Les sources achéménides proviennent du niveau stratigraphique IV, alors que le niveau III contient un mélange (achéménide et hellénistique), et le niveau II contient des sources hellénistiques.

> Dans la maison, des textes érudits variés, copiés, compilés, créés ou simplement possédés par une famille d'*āšipus* [médecins exorcistes] ont été trouvés, et cette collection peut être considérée comme une bibliothèque. La bibliothèque était active au moins durant la vie professionnelle de Šamaš-iddin et ses fils Anu-ikṣur et Rīmūt-Anu[150]. Après une interruption, la maison a été occupée à nouveau par des *āšipus* à la période hellénistique. Proust (*à paraître*, p.2)

Selon Friberg[151], les tablettes W 23273, W 23283 et W 22905 (deux fragments d'une même tablette) et W 23 291 étaient conservés dans une jarre[152]. Voir aussi Clancier (2009, p. 139).

> La dernière tablette [W 23 291] a été trouvée dans une jarre d'argile avec deux autres textes mathématiques importants de la période babylonienne tardive sous la forme de tablettes d'argile, la grande table métrologique W 23 273 et la grande table d'inverses multi-positionnelle W 23 283. Friberg (1997, p.252) cité dans Proust (*à paraître*, p.2)

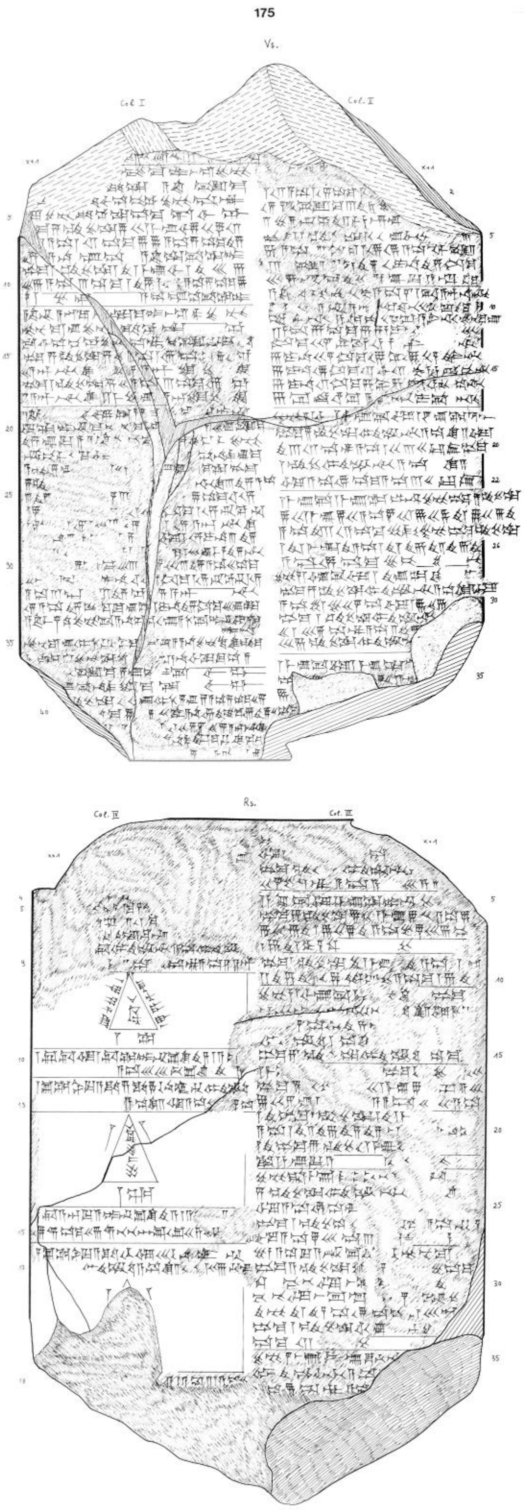
Friberg ajoute que « le fait que trois spécimens si intéressants soient trouvés ensemble, un véritable trésor mathématique, suggère qu'ils étaient considérés comme importants déjà à l'Antiquité. » (Friberg, 1997, p.252)[153]. Je n'irai pas plus loin pour ce texte dans la description du contexte[154].

---

[147] La traduction en français est de l'auteur.
[148] 547-63 BCE. La période « babylonienne tardive » (celle qui concerne les tablettes d'Uruk en question) inclut l'époque achéménide (547-331) et l'époque hellénistique (323-63). Voir Périodisation, p.27
[149] Dans le *locus* UE XVIII, Von Weiher (1993) (numéros de publication SpTU IV 172-177).
[150] (Clancier 2009, p.59). Clancier (*Ibib*) estimates that the library was in use approximately from 445 to 385 BCE.
[151] Sur la base d'une communication personnelle avec Weiher.
[152] Chambre 4 du niveau IV, *locus* UE XVIII
[153] Voir aussi Robson (2008, p.230).
[154] Pour les textes mathématiques de la maison des *āšipus,* voir Friberg, Hunger et Al-Rawi (1990), Friberg (1993, 1997) et Robson (2008, 2008a, p.227-240; p.240-260). Neugebauer et Sachs (1945 p.143-145) ont travaillé sur la métrologie paléo-babylonienne tardive sur la base de VAT 7848. Voir aussi Powell (1984, 1987-1990, p.482-484) et Baker (2004, 2011). Pour une étude des objectifs des *āšipus* et de leur implication mathématique, voir Clancier (2009), dans le cadre d'une recherche sur l'organisation des bibliothèques et Ossendrijver (*à paraître*) pour une discussion sur les tablettes mathématiques à attribuer (ou non) à la bibliothèque des *āšipus* pendant la période hellénistique.

La tablette est conservée au musée National d'Iraq à Bagdad, Fonds Anu-ikṣur. Elle propose 22 problèmes de mesure d'aires de carrés, rectangles, triangles. La première traduction, translitération, interprétation est proposée par Friberg (1997, p. 251-366) ; copie de Von Weiher (1993). Voir aussi GKAB (http://oracc.org/cams/gkab/sptu_4,_175) pour une autre traduction.

Le texte



Représentation 2-14 : P348768 - Copie de la tablette[155] (face, revers) (CDLI, s.d.)

[155] https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P348768

La traduction du problème 9 (Proust, à paraître, p.7)

cent *kuš* est la longueur, cent *kuš* est la largeur. Combien est la graine ? Si 5 est votre *ammatu,*
8:20 est cent *kuš*. 8:20 par 8:20 (multipliez, c'est) 1:9:26:40. 1:9:26:40
par 43:12 multipliez, c'est 50. 5 *ban* est la graine. Si <1> est votre *ammatu*
1:40 est cent *kuš*. 1:40 par 1:40 (est) 2:46:40. 2:46:40
par 18 multipliez, c'est 50. 5 *ban* est la (surface)-graine.

Commentaire

Une situation de navigation entre plusieurs systèmes de tables métrologiques

Il s'agit du calcul de l'aire d'un carré de côté 100 *kuš* pour deux systèmes de tables métrologiques existants (voir le fonctionnement de la table métrologique expliqué pour la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 en 2.2, p. 48). Dans le premier système, la table métrologique des longueurs donne, pour 100 *kuš*, la correspondance 100 *kuš* → 8:20. La table métrologique est en effet construite sur la base de 1 *kuš* → 5. Les autres valeurs en découlent. Comme dans la tablette de l'école des scribes de Nippur UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48), le nombre en système SP trouvé grâce à la table métrologique des longueurs est multiplié par lui-même. Le résultat de la multiplication de 8:20 par lui-même donne[156] bien 1:9:26:40. Le résultat n'est pas ensuite converti directement à l'aide d'une table métrologique des surfaces, j'y reviendrai.

La seconde « option » : La seconde partie du texte consiste en un nouveau calcul de l'aire pour un carré de côté 100 *kuš* mais cette fois-ci, une autre table métrologique des longueurs est utilisée. Elle est construite sur la base de la correspondance 1 *kuš* → 1. Elle donne pour 100 *kuš*, la correspondance 100 *kuš* → 1:40. Ce résultat est multiplié par lui-même et donne 2:46:40. A nouveau le résultat n'est pas immédiatement converti grâce à la table métrologique des surfaces. Je vais maintenant détailler cette étape supplémentaire.

La surface-graine attendue (surface exprimée en capacité de semences) nécessite de compléter la multiplication du nombre en système SP par lui-même, par une autre opération : la multiplication par un coefficient donné. Dans le premier cas, il s'agit de 43:12. Dans le second cas, il s'agit de 18. Cette seconde étape sera détaillée ci-dessous. Il s'agit d'une étape supplémentaire, qui correspond à une demande supplémentaire de l'énoncé du problème par rapport à la tablette paléo-babylonienne de l'école de scribes de Nippur, UM 29-15-192, voir 2.2, p. 48.

Multiplier par un coefficient (de la surface-graine) : Voici les détails de l'étape supplémentaire: avec la première méthode, correspondant à 1 *kuš* → 5, la multiplication du nombre en système SP par lui-même donnait 1:9:26:40. Ce résultat était alors multiplié par le « coefficient de la graine », soit 43:12. Dans le second cas, correspondant à 1 *kuš* → 1, la multiplication du nombre en système SP par lui-même donnait 2:46:40. Ce résultat était alors multiplié par le coefficient de la graine, 18.

[156] Il est possible de le vérifier, par exemple avec MesoCalc.

Pourquoi ces coefficients, 18 et 43:12 ? Une fois le résultat multiplié par le coefficient de la surface-graine, l'étape suivante est presque celle que le lecteur connaît. Cette fois la table métrologique des surfaces n'est pas utilisée pour la mise en correspondance, il s'agit de la table métrologique des capacités. Dans le premier cas, la multiplication de 1:9:26:40 par 43:12 donne 50. La table métrologique des capacités donne 50 → 5 *ban*. Dans le second cas, le résultat de la multiplication de 2:46:40 par 18 est 50 également, et 50 → 5 *ban*.

La table métrologique des capacités utilisée peut ainsi être la même, dans les deux cas, grâce au coefficient de la surface-graine. Le choix du coefficient de la graine adapté permet d'obtenir le même nombre en système SP, avant la conversion en mesure de capacité ; et ce, quelle que soit la table métrologique des longueurs adoptée au début. La multiplication par le coefficient de la surface-graine permet de produire la surface-graine, c'est-à-dire la mesure d'aire exprimée comme une quantité de semences (avec des unités de mesure de capacités).

<u>Le coefficient de la graine</u> : Partant de la mesure de base qui fixe pour le carré de cent *kuš* sur cent *kuš*, une surface de 5 *ban* 3 *sila* 3 1/3 *ninda* (mesure de capacité) de *še-numun* (graine), alors le ratio entre le *kuš*-carré et la surface-graine est équivalent à 30 *kuš*-carré par *GAR*. C'est la mesure de la graine commune adoptée en Mésopotamie du Sud babylonienne tardive (par exemple Borsippa, Babylone); mais pas à Uruk (Powell 1984, p.35 cité dans Proust, *à paraître,* p.16).

En prenant le standard de 30 *kuš*-carré par *GAR*, le coefficient de la surface-graine est adapté selon la table métrologique des longueurs choisie. Pour celle qui prend pour base 1 *kuš* → 5 (celle que le lecteur connaît depuis UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) et qui associe le carré d'un *ninda* de côté à 1 *sar*), alors le coefficient de la surface-graine est 48. Pour celle qui prend pour base 1 *kuš* → 1 alors le coefficient de la surface-graine est 20. Dans le problème 9, la table métrologique 1 *kuš* → 5 est d'abord utilisée; mais le coefficient de la surface-graine est différent. Il s'agit de 43:12. De même, pour 1 *kuš* → 1, le coefficient est 18 et non 20. Il s'agit d'une mesure commune différente, qui prend pour ratio entre le *kuš*-carré et la surface-graine la valeur 33 1/3 *kuš*-carré par *GAR*. Elle est utilisée dans d'autres cités.

Cette tablette présente une liste de problèmes d'évaluation de surfaces de carrés, rectangles, triangles. Le problème 9 a été sélectionné comme exemple parce qu'il propose un calcul d'aire du carré (exprimé en mesure de capacité). Il s'agit du premier exemple de calcul de surface de la tablette (le problème 1 est détruit). Il fait intervenir plusieurs tables métrologiques de longueurs. La tablette propose plusieurs possibilités, selon les problèmes, voir Tableau 2-36.

Premièrement les facteurs entre unités de mesure de longueur diffèrent selon les problèmes. La métrologie babylonienne tardive est utilisée pour les problèmes 1 à 15. Le problème 17 montre l'utilisation des métrologies paléo-babylonienne et tardive, les problèmes 19 à 21 utilisent la métrologie paléo-babylonienne traditionnelle. Cela signifie que l'unité de mesure de longueur *kuš* est liée différemment au *šu-si* selon les métrologies. 1 *kuš* = 30 *šu-si* pour le système paléo-babylonien, 1 *kuš* = 24 *šu-si* pour le système babylonien tardif.

Deuxièmement, la relation entre unités de mesure de longueur et nombre en système SP diffère selon les problèmes ou dans un même problème. L'exercice 9 demande de réaliser le calcul dans deux cas (pour la table métrologique basée sur 1 *kuš* → 5 et pour la table basée sur 1 *kuš* → 1). Dans la tablette entière, le calcul est basé sur quatre tables métrologiques de longueurs différentes (1 *kuš* correspond à 5 puis à 1, puis à 36 et peut-être à 6).

Enfin, cinq exemples de ratios différents entre la surface en *kuš*-carré et la surface-graine sont donnés, donnant des coefficients de la surface-graine différents pour les problèmes 1 à 7 (système de Mésopotamie du Sud), 8-9, 10-11 (système d'Uruk), 12-13, 14-15. Voir Tableau 2-36 : problèmes de W 23-291.

#	1 *kuš* → 5	1 *kuš* → 1	*Kuš*-carré par *GAR*	
1-7	48	20	30	Système de surface-graine de Babylone, Borsippa, et d’autres endroits (sauf Uruk)
8-9	43:12	18	33 1/3	Système surface-graine d’Uruk
10-11	51:50:24	21:36	27 7/9	Système surface-graine d’Uruk
12-13	57:36	24	25	
14-15	41:40	36	16 2/3	

Tableau 2-36 : problèmes de W 23-291, table métrologique et coefficient de la surface-graine (Proust, à paraître, p.16)

Système métrologique sous-jacent et implications

Dans cette partie je présenterai les systèmes métrologiques sous-jacents à la tablette. Je m’appuierai pour les tableaux, sur une présentation des systèmes métrologiques par Proust (*à paraître*). Je rappelle que la métrologie babylonienne tardive est utilisée pour les problèmes 1 à 15. Le problème 17 montre l’utilisation des métrologies paléo-babyloniennes et babylonienne tardive, et les problèmes 19 à 21 utilisent la métrologie paléo-babylonienne. Je vais m’intéresser maintenant aux connections entre unités de mesure de longueur et d’aire qui constituent des ponts entre les deux systèmes (voir p. 53). Le premier tableau (Tableau 2-37) représente le système métrologique sous-jacent aux problèmes 1 à 7. En dehors de l’unité de mesure intermédiaire *gi*, il est tout à fait similaire à celui qui a été présenté pour UM 29-15-192 (période paléo-babylonienne, voir 2.2, p. 48).

Il faut noter que les nombres en système SP associés aux unités de mesure sont précisés (sous celles-ci) pour la correspondance 1 *kuš* → 5 (qui est aussi celle de UM 29-15-192). Il faut noter que la correspondance 1 *kuš* → 1 est aussi utilisée dans ces problèmes.

Unités de longueur :	uš ←60	ninda ←2	gi ←6	kuš ←×30	šu-si
	1	1	30	5	10
		↕			
Unités de surface :	GAN ←100	sar ←60	gin ←180	še	
	1:40	1	1	20	

Tableau 2-37 : système métrologique sous-jacent aux problèmes 1 à 7

Dans les problèmes 8 à 17 par contre, l’unité de mesure de longueur *gi* a un équivalent en unité de mesure d’aire, c’est là que se situe la connexion entre unités de longueur et de surfaces. Dans les diagrammes des tables suivantes, je représente ce pont par une double flèche verticale (↕).

Unités de longueur :	ninda	←2	gi	←6	kuš
	1		30		5
			↕		
Unités de surface :			gi		

Tableau 2-38 : système métrologique sous-jacent aux problèmes 8 à 17

De même dans le problème 19, la connexion entre unités de longueur et de surfaces (pont) se fait également au *gi* (unité de mesure de longueur et d'aire). Les facteurs entre les autres unités de longueur ont changé (métrologie tardive).

Unités de longueur :	ninda	←2	gi	←7	kuš	←24	šu-si
			↕				
Unités de surface :			gi				

Tableau 2-3 : système métrologique sous-jacent au problème 19

Enfin dans le problème 20, le système d'unités de mesures de longueur est le même que précédemment (métrologie tardive) mais le pont varie selon les parties du problème. Il est d'abord au *gi*, puis au *kuš* puis au *šu-si*, qui sont des unités de mesure de longueur et d'aire. Le système d'unités de mesure d'aire porte le même nom et les mêmes facteurs (et non leur carré) que les unités de mesure de longueur.

Unités de longueur :	ninda	←2	gi	←7	kuš	←24	šu-si
			↕		↕		↕
Unités de surface :	ninda	←2	gi	←7	kuš	←24	šu-si

Tableau 2-4 : système métrologique sous-jacent au problème 20 et ponts successifs

Ce qui est intéressant ici, c'est que plusieurs systèmes métrologiques sont en vigueur. Les variations portent sur les facteurs entre unités de mesure, la place du pont qui relie les unités de mesure de longueur et d'aire. Les relations entre mesure d'aire (implicite) et mesure de capacité, sont affectées par le choix du système métrologique, le coefficient de la surface-graine est donc adapté. La tablette propose de « naviguer » dans plusieurs systèmes métrologiques en vigueur, dont aucun n'est entièrement « dépendant ».

Il s'agit peut-être d'un exercice qui vise à travailler le passage d'un système métrologique à l'autre. L'une des conséquences de l'utilisation successive de plusieurs systèmes métrologiques dans une même tablette est la possibilité d'obtenir un nombre en système SP différent pour une même mesure de longueur. Par exemple, pour 100 *kuš* le nombre en système SP obtenu peut être soit 8:20 soit 1:40, selon que la table métrologique des longueurs choisie est celle qui fait correspondre 1 *kuš* → 5 ou 1 *kuš* → 1. Grâce au coefficient de la surface-graine, la mesure de capacité finale est la même. Plusieurs nombres en système SP différents peuvent être obtenus, après multiplication, pour une même mesure de longueur initiale (selon la table adoptée). Cela n'affecte pas la mesure de capacité finale en quantité de graine.

Une autre conséquence est la connaissance explicite d'une multiplicité de choix des scribes dans la constitution de la métrologie, qu'ils affectent les facteurs entre unités de mesure, le nombre en système SP associé, ou le coefficient de surface-graine en *kuš*-carré par *GAR*. Conséquence nouvelle, la mesure d'aire est exprimée par une mesure de capacité.

La technique nécessite les connaissances mises en œuvre dans la tablette UM 29-15-192 (sauf pour l'expression finale de l'aire en mesure de capacité). Mais ici, le travail mathématique ne porte pas uniquement sur la tâche d'évaluation de surface. Les tâches principales et sous-tâches que j'avais identifiées : mise en correspondance, multiplication, circulation dans les tables, etc. (voir 2.3.2, p. 66) ne semblent pas être l'objet principal du travail. Il porte essentiellement sur la capacité des usagers de la tablette à s'adapter aux différents systèmes métrologiques et facteurs donnés. Il faudrait une étude plus approfondie des tâches impliquées en fonction des mesures initiales choisies. Les différents systèmes de tables métrologiques deviennent l'objet d'un travail mathématique spécifique.

J'avais mentionné un premier rapprochement avec la T.A.D en ouverture (voir p.106) dans la façon dont certaines tâches motivaient ou non la présence de (sous)-types de tâches ; et comment certains énoncés impliquaient de mettre en œuvre des types de tâches qui devenaient dans certains contextes plus classiques, n'étant pas l'objet principal d'enseignement ; certains sous-types de tâches pouvaient alors être mobilisés ou non, plus aléatoirement que dans un corpus où ils feraient l'objet d'un apprentissage principal. Ceci a été rapproché de la notion d'assortiment didactique (Genestoux-Esmenjaud, 2000).

Ici encore il semble y avoir un effet qui puisse être rapproché de ceux décrits par la T.A.D ; ce travail reste de rapprochement reste à faire, j'en donne uniquement les traits en ouverture, ici. Un premier type de tâche (calculer l'aire d'un carré) semble être étendu à de nouveaux types de tâches. Premièrement, exprimer un calcul d'aire dans plusieurs systèmes métrologiques ; les techniques et sous-types de tâches, ne changent pas ici. Deuxièmement, exprimer les différents résultats d'un calcul d'aire obtenu dans plusieurs systèmes de tables métrologiques dans une même mesure de capacité. Ce nouveau type de tâche motive l'utilisation de nouveaux (sous)-types de tâches, liés à l'utilisation du coefficient de la surface-graine. Il y a peut-être aussi un déplacement du centre d'intérêt. Par rapport à une tablette où le calcul d'aire serait le type de tâche central, ici il semblerait qu'il soit devenu une type de tâche secondaire ou peut-être un sous-type de tâche, pour un exercice où le point central est celui de l'expression dans plusieurs systèmes, d'une même mesure d'aire.

Je vais maintenant résumer les points qui me paraissent intéressant pour l'analyse épistémologique et conclure. Premièrement, le système métrologique et les choix de construction des tables métrologiques ont des conséquences très explicites, qui deviennent l'objet même du travail mathématique. Les tâches que j'ai décrites comme ce qui était probablement un objectif d'apprentissage dans la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) deviennent ici secondaires[157]. Du point de vue historique, le contexte pourrait être celui du commerce des propriétés urbaines et agricoles ; les ordres de grandeurs des surfaces sont celles de maisons ou de champs. Il s'agit peut-être aussi d'un travail à visée mathématique sur les métrologies en circulation. Les deux semblent compatibles, puisque naviguer entre les métrologies est probablement un besoin créé par la réalité de la pratique d'évaluation de surfaces, tout cela dans le cadre d'une nécessité de conservation des données

[157] Il ne s'agit pas d'assimiler l'ensemble de la période paléo-babylonienne à un apprentissage élémentaire, en opposition avec la période achéménide concernée, plus récente. Un tel déplacement des objectifs de résolution du calcul d'aire a pu exister au sein d'une même période. D'autre part les contextes sont différents (école de scribes dans le premier cas, contrôle de propriétés dans le second).

existantes, dans une bibliothèque. Ainsi, ce texte donne encore accès à de nouvelles réponses (ou hypothèses) possibles à la question « pourquoi évaluer une surface ».

Deuxièmement, plusieurs nombres en système SP peuvent être obtenus pour une même mesure de longueur. Conceptuellement, il y a peut-être une forme de distinction entre le concept d'aire et le nombre. Avec l'aide du coefficient de la graine, la mesure de capacité finale n'est pas affectée, et quel que soit le système de tables métrologiques adopté, la mesure finale est la même. Cette troisième grandeur qui intervient devient alors unificatrice, et ce autour d'un même nombre final (la valeur numérique de capacité).

Troisièmement, la mesure d'aire est exprimée par une mesure de capacité. Conceptuellement, l'aire est donc ici associée à une autre grandeur, ainsi qu'à un nombre de graines par surface.

Quatrièmement, la métrologie est explicitement connue par les scribes comme le fruit de choix humains abritraires, dont il existe plusieurs versions possibles.

En conclusion, cette tablette de la période achéménide présente des calculs d'aire du carré dans une situation de bidimensionnalité, dans le cadre multiplicatif. Plusieurs systèmes métrologiques semi-indépendants sont mobilisés. Les techniques qui étaient au cœur de la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) deviennent secondaires.

Du point de vue conceptuel, plusieurs points sont intéressants à relever dont il faudra s'interroger sur les conséquences conceptuelles : la distinction aire/nombre[158] qui est provisoire, du fait de plusieurs systèmes de tables métrologiques adoptés ; le caractère unificateur lié à la conversion et à l'utilisation d'une grandeur externe (le résultat est exprimé en mesure de capacité), le lien entre l'aire et le nombre de graines, ainsi que le caractère explicite du choix abritraire d'un système métrologique.

Grâce au texte suivant, je vais maintenant m'intéresser à l'utilisation de nombres en système SP, dans le registre des figures, cela sans lien explicite à la mesure.

2.4.4 La tablette AO 6484

Introduction

Cette tablette, comme la précédente, a été choisie dans le cadre d'une deuxième étape de sélection de textes anciens, notamment par rapport à la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) et la tablette des Dynasties Archaïques, VAT 12-593 (voir 2.4.2 p. 112). Elle propose une relation différente de cette dernière tablette, entre l'aire du carré, les nombres en système SP (voir 2.1.3 p.36) et la géométrie, cela avec une absence quasi-totale des unités de mesure. La relation entre multiplication et surface d'aire donnée entre en jeu dans le problème 14 qui sera analysé[159]. Le calcul d'aire n'est pas l'objectif du problème, il s'agit seulement d'une étape intermédiaire.

C'est sur le problème 14 que portera l'analyse. La transcription, la traduction et la majorité des explications liées à cette tablette cunéiforme sont tirées de Steele et Proust (*à paraître*).

---

[158] Il s'agit d'une distinction entre l'aire et sa mesure (qui elle, dépend de l'unité de mesure choisie). La distinction surface/aire existe aussi. Voir Perrin-Glorian (1990) ou les détails donnés p.172

[159] L'approximation entre en jeu dans le problème 8, que je n'ai finalement pas eu le temps de traiter.

Comme je le précise en Introduction (voir p.179), j'ai ici encore, fait le choix d'une interprétation historique pour ce travail.

Cadre historique

La tablette AO 6484160 est une tablette de la période hellénistique (c.a. 323-63 BCE, voir Périodisation, p.28) provenant d'Uruk[161]. Elle appartient à l'ensemble des textes du propriétaire, Anu-ab-utêr, astrologue. Il était propriétaire ou copiste de nombreux autres textes connus d'astronomie.

Elle est probablement issue des fouilles clandestines de Warka (Thureau-Dangin, 1938, p.76). La première publication a été proposée par Thureau-Dangin (1922) puis Neugebauer (1935, p. 96-99) et à nouveau Thureau-Dangin (1938, p 76).

Elle contient une liste de 17 problèmes de suites (géométriques, carrés et cubes) ; d'aires et de volumes, et de recherche d'inverse. La tablette est conservée au Louvre. U 180(21) a été jointe à AO 6484 par Steele et Proust (*à paraître*) et complète les problèmes 7-10[162]. Cette dernière est conservée au Musée Archéologique d'Istanbul.

Le texte

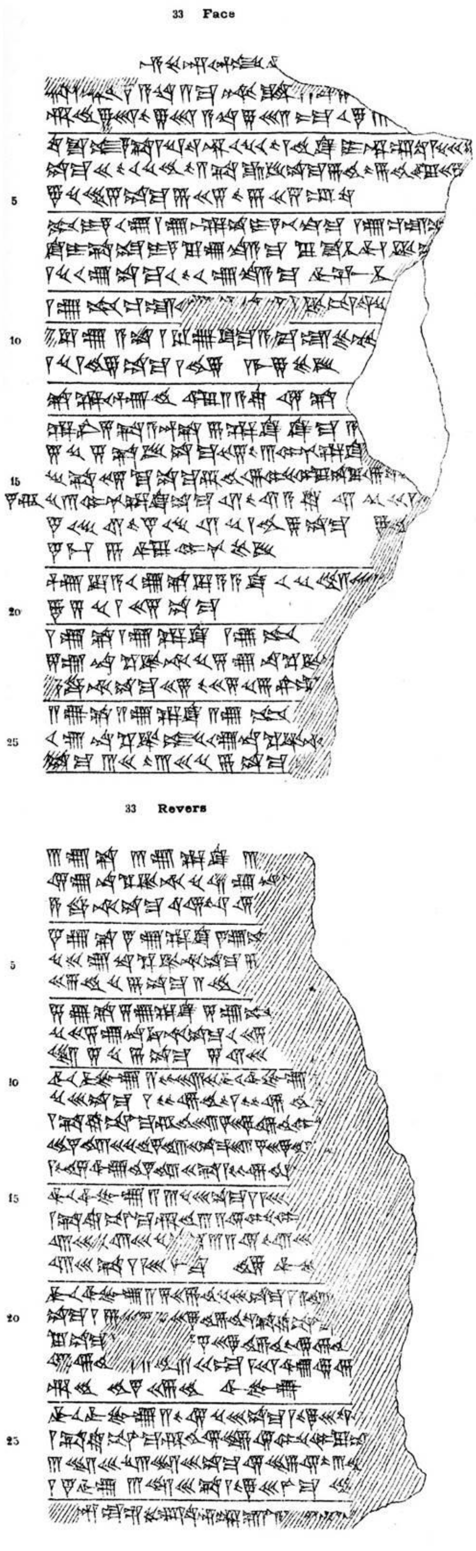
Photographie 2-5 : Photographie de la tablette sous toutes ses faces (CDLI, s.d.)

Voir https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254387

[160] https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254387, numéro CDLI P254387

[161] Probablement *Bīt Rēš,* secteur de l'un des temples principaux

[162] Pour plus d'information, voir Proust et Steele (*à paraître*), Robson (1999), Høyrup (1999, p.390), Powell 1984 (p.38) pour les unités de mesure, Friberg (2005), Steele (2016). Et pour les problèmes 7-10, voir Thureau-Dangin (1932, p.131-132; 1936, p.163-165), Neugebauer et Waschov (1932, p.292-295).



Représentation 2-15 : Copie de la tablette (face et revers) (CDLI, s.d.)

La traduction du problème 14 (Proust et Steele, à paraître, p.4)

L'*igû* et l'*igibû* sont 2:0:0:33:20. Le *igû* et l'*igibû* 2:0:0:33:20

les multiplier par 30, c'est 1:0:0:16:40 // 1:0:0:16:40 [par 1:0:0:16:40 multiplier, c'est 1:0:0:33:20:4:37:46:40]

1 de son intérieur soustraire, le reste est 33:<20>:4:37:46:40. Quoi par quoi dois-tu multiplier pour que ce soit 33:20:4:37:46:40 ?

44:43:20 par 44:43:20 multiplier, c'est 33:<20>:4:37:46:40. [// 44:43:20 à 1:0:0:16:40 ajouter :]

1:0:45 est l'*igû*. 44:43:20 de 1:0:0:16:40 soustraire, [c'est 59:15:33:20 est l'*igibû.*

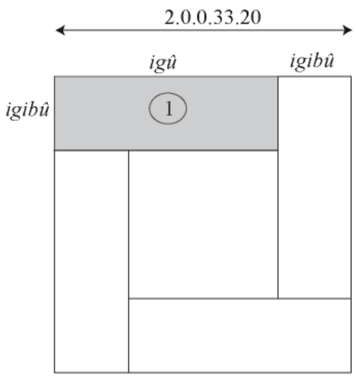
Commentaire au problème 14

Une situation de calcul d'aire sans unités de mesure

Igû et igibû : La recherche d'igû et igibû correspond à celle de nombres inverses l'un de l'autre ; c'est-à-dire que igû × igibû = 1. Selon l'interprétation de Proust (Proust et Steele, *à paraître*, p.14), la première ligne :

L'*igû* et l'*igibû* sont 2:0:0:33:20.

pourrait être représentée par le diagramme suivant, par analogie avec des problèmes similaires trouvés dans des textes paléo-babyloniens. Ici, l'igû et l'igibû forment la longueur et la largeur d'un rectangle dont l'aire totale donne 1, par définition. L'addition de l'igû et de l'igibû donne 2:0:0:33:20 selon l'énoncé. La représentation géométrique consiste à représenter cette addition comme la juxtaposition de segments de longueur donnée, formant le côté d'un grand carré qui sera utile par la suite[163].



Représentation 2-16 : igû et igibû (Proust et Steele, à paraître, p.14)

[163] Cependant, Proust nuance :

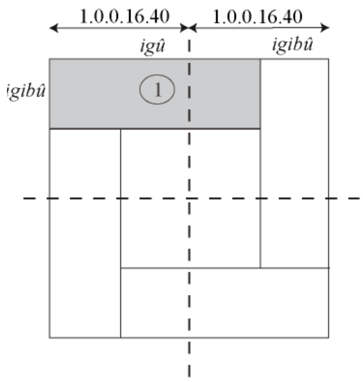
cependant, alors que les textes paléo-babyloniens clarifient la nature géométrique de l'addition de l'igû et de l'igibû (dans BM 13901 #1, l'addition du côté du carré est indiquée par le verbe kamārum, accumuler, LWS 50 ; dans MS 3971 #3, l'addition de l'igû et de l'igibû est indiquée par gar-gar, (Friberg, 2007, p.252)), cette opération est simplement indiquée ici par la conjonction « et » (u). Proust et Steele (*à paraître*, p.14)

Multiplication par 30 : Selon l'interprétation de Proust, les lignes :

L'*igû* et l'*igibû* sont 2:0:0:33:20.

les multiplier par 30: c'est 1:0:0:16:40 //

peuvent être interprétées comme une manipulation géométrique. La multiplication par 30 correspondrait à couper le côté du grand carré en deux parts égales (30 est l'inverse de 2 en base 60)[164]. La multiplication par l'inverse ou division par deux correspond à la prise en compte de la moitié de la longueur du côté.



Représentation 2-17 : multiplication par 30 (Proust et Steele, à paraître, p.14)

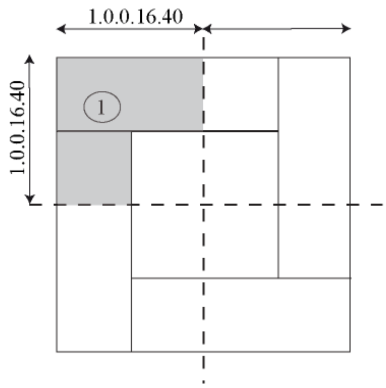
Multiplication de 1:0:0:16:40 par lui-même : Selon l'interprétation de Proust, les lignes

1:0:0:16:40 [par 1:0:0:16:40 multiplier : c'est 1:0:0:33:20:4:37:46:40]

reviennent à un calcul d'aire : celui d'un quart du grand carré, puisque 1:0:0:16:40 correspond à la moitié d'un côté du grand carré. Ici la multiplication est associée à la prise en compte d'une surface d'aire donnée.

[164] Là encore il faut nuancer : l'opération est simplement indiquée par une multiplication.

cependant, alors que les textes paléo-babyloniens clarifient la nature géométrique de cette coupe (dans BM 13901 #1, *ba-ma-at* 1 *te-he-pe* : la moitié d'un tu casses, LWS 50 ; dans MS 3971 #3, « 1/2 1.45 gaz », (Friberg, 2007, p.252)), cette opération est simplement indiquée ici par une multiplication arithmétique. Proust et Steele (*à paraître,* p.14).



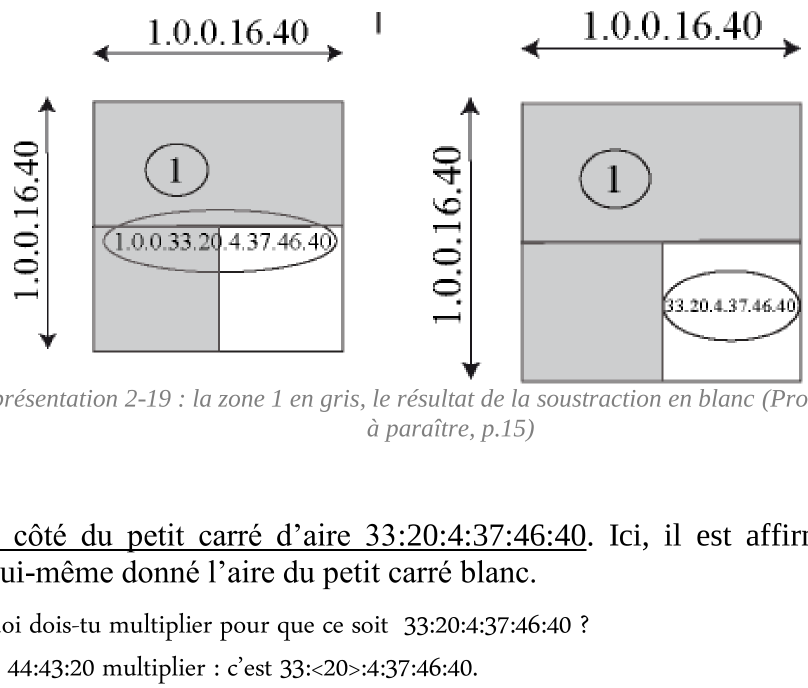
Représentation 2-18 : sous-partie (Proust et Steele, à paraître, p.14)

<u>La soustraction</u> : Voici comment Proust et Steele (*à paraître*, p.15), représentent cette soustraction. Si 1:0:0:33:20:4:37:46:40 est l'aire d'un quart de grand carré, le rectangle gris initial représente ce qu'il faut soustraire : 1.

En effet par définition, le rectangle igû × igibû a pour aire 1. Ici, le « morceau » de rectangle gris qui « dépassait » du quart de grand carré a été comptabilisé en-dessous, ainsi l'aire de la zone grise vaut 1. L'aire de la zone blanche qui reste est 1:0:0:33:20:4:37:46:40 moins 1, soit 33:20:4:37:46:40.

La soustraction est associée au découpage d'une surface d'aire donnée.

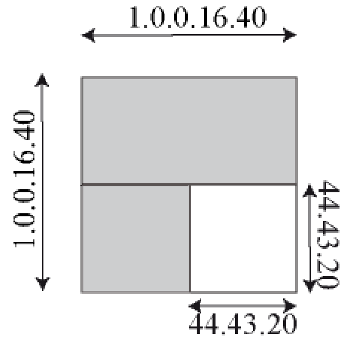
> 1:0:0:16:40 [par 1:0:0:16:40 multiplier : c'est 1:0:0:33:20:4:37:46:40]
>
> 1 de son intérieur soustraire, le reste est 33:<20>:4:37:46:40.



Représentation 2-19 : la zone 1 en gris, le résultat de la soustraction en blanc (Proust et Steele, à paraître, p.15)

<u>Recherche du côté du petit carré d'aire 33:20:4:37:46:40</u>. Ici, il est affirmé que 44:43:20 multiplié par lui-même donné l'aire du petit carré blanc.

> Quoi par quoi dois-tu multiplier pour que ce soit 33:20:4:37:46:40 ?
>
> 44:43:20 par 44:43:20 multiplier : c'est 33:<20>:4:37:46:40.

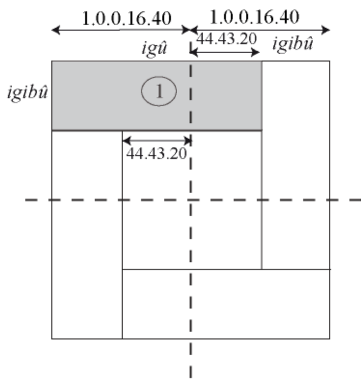


Représentation 2-20 : côté du petit carré blanc restant (Proust et Steele, à paraître, p.15)

Trouver l'igû : Maintenant que le petit carré blanc est connu, l'addition de 44:43:20 à 1:0:0:16:40 donne bien la longueur du rectangle, soir l'igû. Ici l'addition est associée au recollement de deux segments de longueur donnée.

[// 44:43:20 à 1:0:0:16:40 ajouter :]

1:0:45 est l'*igû.* 44:43:20 de 1:0:0:16:40 soustraire [: 59:15:33:20 est l'*igibû.*



Système métrologique sous-jacent

Je ne détaillerai pas ici le système métrologique sous-jacent à la tablette, puisque le travail se fait majoritairement avec des nombres en système SP sur mes exemples. Je mentionne simplement qu'il est indiqué pour le problème 8, la valeur de base de 10 *kuš*, le calcul se faisant sur le nombre 10 en système SP. Cela signifie que la table métrologique des longueurs (voir 2.2, p. 48) qui est utilisée est celle qui est basée sur 1 *kuš* → 1. Je passe maintenant au résumé des points qui me paraissent intéressant pour la suite et à la conclusion.

Premièrement, dans l'exercice 14, les unités de mesure n'apparaissent pas du tout. La valeur qui sera attribuée au nombre en système SP n'a peut-être pas grande importance, pour ces exercices qui restent dans la généralité. Le nombre 10 est effectivement représenté, sur la diagonale, mais il semble qu'il pourrait faire référence à n'importe quelle mesure de longueur associée à 10, sans conséquence. Il prend un statut de valeur numérique « flottante » (voir p.39) puisque l'unité de mesure n'est pas précisée.

Deuxièmement, les opérations comme la multiplication, les additions et soustractions peuvent être représentées de manière géométrique : par exemple, la prise en compte d'une surface d'aire et de côté donné pour la multiplication ; la juxtaposition de segments pour l'addition ; le découpage de surfaces et la prise en compte d'un nombre de sous-surfaces pour l'addition.

Troisèmement, il faut noter aussi que le contexte fait intervenir les deux dimensions, s'intéressant aux grandeurs « aire » et « longueur » qui ont des conséquences sur les proportions du dessin.

Quatrièmement, le lien avec la mesure est flottant, puisque le dessin peut représenter plusieurs contextes de mesures concrètes. Il est intéressant de voir que la semi-indépendance du système métrologique conduit ici à utiliser l'outil de transition, le nombre en système SP, pour représenter une multiplicité de situations dans un seul diagramme (flottant).

Enfin, les auteurs de ce texte mathématique sont aussi auteurs de textes d'astronomie et d'astrologie. Le contexte est celui des grands temples de l'époque hellénistique. Dans le cas du problème 14, le calcul d'aire sert néanmoins un problème mathématique (la recherche d'inverses). Il n'exclut pas non plus un objectif de travail sur les découpages-recollement et le lien géométrie-arithmétique. Il ne s'agit pas, *a priori,* d'évaluer la taille d'un champ. Le retour à la mesure est possible, mais non travaillé explicitement.

En conclusion, cette tablette de la période hellénistique présente un problème de recherche d'inverses, qui fait intervenir des calculs d'aire du carré dans une situation multiplicative, dans le registre des figures.

Là encore les types de tâches qui étaient au cœur de la tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) deviennent secondaires, certains (sous)-types de tâches ne sont pas mobilisés (comme la mise en correspondance dans la table métrologique), ce qui permet une ouverture vers la T.A.D.

Concernant les concepts, la mesure n'est pas utilisée explicitement, mais elle a quand même implicitement des conséquences sur les proportions dans la figure. Du point de vue de l'aire, la distinction aire/surface n'est pas aussi explicite que pour la tablette archaïque VAT 12-593 qui mobilisait différentes formes possibles pour une aire donnée (selon l'hypothèse historique adoptée). La distinction aire/nombre (voir 2, p.182) pouvait être soulignée dans la tablette achéménide W 23-291 par le fait d'obtenir un résultat différent selon la métrologie adoptée. Ici elle n'entre pas en jeu, du fait du système métrologique qui est relativement effacé de la situation, qui ne fait pas intervenir la mesure. Autre fait intéressant l'opération de « découpage » peut avoir lieu, sans qu'il soit question de mesure.

Le nombre, et la figure elle-même peuvent faire référence à plusieurs situations. Les opérations (addition, soustraction) ont un parallèle direct dans le registre des figures. Le découpage-recollement (et le report d'un étalon de surface) pourrait théoriquement faire référence à tout un ensemble de situations concrètes de mesurage, si un nombre en système SP est associé à la figure.

La multiplication a un parallèle dans le cadre géométrique, qui correspond à la construction d'une figure de dimensions données. Elle fait intervenir la bidimensionnalité du point de vue des proportions. Elle n'est pas *a priori* associé à un compte de carrés, par exemple (ce n'est pas conceptuellement, une forme d'addition itérée).

Historiquement, il est intéressant de voir que le système métrologique semi-indépendant semble avoir conduit à l'élaboration d'un système numérique (le système SP) qui a ensuite conduit, probablement, à représenter plusieurs situations de mesure à l'aide d'un seul dessin (et d'un seul nombre). S'il ne faut pas simplifier historiquement (un diagramme faisant référence à une mesure donnée peut très bien faire référence à plusieurs situations, symboliquement), il faut tout de même noter que le système SP donne assez naturellement cette possibilité.

Je vais maintenant croiser les informations que la sélection de textes de différentes périodes en cunéiforme a apportées sur les concepts qui entrent en jeu dans le calcul d'aire du carré.

2.4.5 *Tableau comparatif des concepts entrant en jeu dans les textes cunéiformes des différentes périodes*

Afin de pouvoir comparer ce que l'étude de chaque texte apporte à l'analyse historico-épistémologique, j'ai choisi de présenter certains aspects sous forme d'un tableau. J'ai détaillé ensuite les résultats par ensembles de catégories (lignes du tableau). Dans la partie didactique, je relèverai les questions que l'existence de ces catégories pose à l'enseignement.

Avertissement : ce tableau n'apporte aucune conclusion historique. Il ne s'agit pas de fabriquer une histoire linéaire du calcul d'aire à travers ces quelques exemples. Par exemple, le fait que la tablette la plus ancienne (la tablette archaïque VAT 12-593) présentée ici traite de larges domaines, ne permet pas de conclure que le calcul d'aire est devenu un exercice mathématique extérieur à la pratique, par la suite. Les relations entre théorie et pratique sont bien plus complexes, et méritent d'être traitées à chaque période avec finesse, en contextualisant et en présentant aussi ce qui se passe dans d'autres contextes à la même période. De même, l'extrait de la tablette AO 6484, la plus récente, témoigne d'un travail sur les nombres en système SP uniquement, sans pour autant signifier que ce type de travail n'ait pas existé avant.

Ce tableau a donc une visée uniquement épistémologique. Il s'agit de dégager les aspects qui peuvent ou non, selon les situations, être mis en relation avec le calcul d'aire et les unités de mesure.

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Fara Archaïque VAT 12-593**	**Uruk Achéménide W 23-291**	**Uruk Hellénistique AO 6484**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Mesure de longueur	2 šu-si	9 geš ninda (l'une des entrées, choisie pour ce tableau)	100 *kuš* (l'une des entrées, choisie pour ce tableau)		2 cm
Unités de mesure de longueur	šu-si	geš ninda	kuš	Peut en représenter plusieurs	cm
Valeur numérique de longueur	2	9	100		2
Type d'opération lors du calcul d'aire	Multiplication	Additions	Multiplication	Multiplication	Multiplication
Autre opération nécessaire	Mise en correspondance Sélection du cycle pertinent Pour certaines : Extrapolation Navigation dans les cycles Positionnement	Découpage de surfaces en sous-surfaces (géométriques)	Mise en correspondance Multiplier par le coefficient de la graine Sélection du cycle pertinent	Pour le calcul d'inverse : addition, soustraction et découpages-recollement de surfaces	
Nombres multipliés	20		Cas 1 8:20 Cas 2 1:40	1:0 :0 :16:40	2

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Fara Archaïque VAT 12-593**	**Uruk Achéménide W 23-291**	**Uruk Hellénistique AO 6484**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Autres nombres qui entrent en jeu			1:9:26:40 est multiplié par le coefficient de la graine, 43:12. Cela donne 50 2:46:40 est multiplié par le coefficient de la graine, 18. Cela donne 50		
Nombre de nombres utilisés	4	12	6 (cas 1) 6 (cas 2)	2	2
Nombres additionnés		1 + 1 = 2 1 + 1 + 1 + 1 = 4			
Unités de mesure d'aire	še	sar Bur'u Bur GAN			cm^2
Unités de mesure de capacités			ban		
Nombre obtenu par multiplication ou addition	6:40	2 et 4	1:9:26:40 (cas 1) et 2:46:40 (cas 2) puis 50 (cas 1 et cas 2)	1:0:0:33:20:4:37:46: 40	4
Valeur numérique d'aire (ou de volume)	1/3	2, 4, 2	5 (cas 1 et cas 2)		4

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Fara Archaïque VAT 12-593**	**Uruk Achéménide W 23-291**	**Uruk Hellénistique AO 6484**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Forme de l'unité de mesure induite par la relation entre unités de mesure d'aire et de longueur		Rectangle, carré, ou autre forme			Carré
Présence d'un diagramme	NON	NON	NON	NON	NON
Diagramme supposé	NON	OUI	NON	OUI	OUI
Rôle de la représentati-on géométri-que (existante ou supposée)		Permettre le calcul de l'aire par le découpage en surfaces et sous-surfaces de référence		Calcul d'une aire par découpage de sous-surfaces d'aire donnée	Découpages-recollement d'aires qui accompagnent le raisonnement arithmétique pour l'expliquer (et justifier la formule)
Représenta-tion de l'opération mathémati-que	NON	Registre des figures : l'addition correspond au nombre de sous-surfaces d'aire donnée qui sont juxtaposées	NON Mais il y a une relation implicite avec un nombre de grains que l'on peut étaler sur la surface	NON (pas d'unité de mesure) La multiplication correspond à la prise en compte d'une surface, la soustraction d'aire correspond à la prise en compte d'une sous-surface par découpage	Calcul du nombre de carreaux
Système numérique associé aux mesures de longueur	Système S -additif -sexagésimal	Système S -additif -sexagésimal	Système S -additif -sexagésimal	Système S -additif -sexagésimal	Base 10, positionnel
Système numérique associé aux mesures d'aire	Système G -additif -sexagésimal	Système G -additif -sexagésimal	Système G -additif -sexagésimal	Système G -additif -sexagésimal	Base 10, positionnel

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Fara Archaïque VAT 12-593**	**Uruk Achéménide W 23-291**	**Uruk Hellénistique AO 6484**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Système numérique associé aux nombres qui sont multipliés	Système SP -positionnel -sexagésimal		Système SP -positionnel -sexagésimal	Système SP -positionnel -sexagésimal	Base 10, positionnel
Relations entre unités de mesure de longueur et aire	Semi-indépendant (un pont)	Semi-indépendant (un pont)	Semi-indépendant (un pont)	Semi-indépendant (un pont)	Dépendant
Facteurs entre unités de mesure de longueur : constants ?	NON	OUI entre les multiples du *ninda* (6, 10, 6, 10…)	NON	NON	OUI
Facteurs entre unités de mesure d'aire : constants ?	NON	NON entre les multiples du *GAN*, le cas échéant (6, 3, 10, 6…)	NON	NON	OUI
Système numérique et unité de mesure longueur	Indépendant	Dépendant	Indépendant	Indépendant	Dépendant (facteurs 10)
Système SP	OUI		OUI, deux possibilités prises en compte ici avec un lien entre les deux	OUI	
Système numérique et unité de mesure d'aire	Indépendant	Dépendant	Indépendant	Indépendant	Dépendant (mais facteur 100 entre unités de mesure d'aire)
Système numérique SP et unité de mesure longueur	Indépendant		Indépendant	Indépendant	

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Fara Archaïque VAT 12-593**	**Uruk Achéménide W 23-291**	**Uruk Hellénistique AO 6484**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Unités de mesure d'aire ayant une réalité physique historique	OUI	OUI	OUI	OUI	NON (sauf un « are » par ex.)
Ordre de grandeur du résultat	Plus petit qu'une tablette	Domaine	Une grande maison	Abstrait (correspond à plusieurs situations)	Choisi généralement dans les manuels : cm^2

Tableau 2-39 : tableau comparatif des concepts

Je vais maintenant détailler les aspects du tableau, pour chaque thème abordé.

Mesures de longueur

Je note que la tablette W 23-291 est intéressante puisqu'elle propose, pour la mesure de longueur 100 *kuš,* une valeur numérique de 100, alors que la sur-unité de mesure *ninda* aurait pu être utilisée.

L'extrait de la tablette AO 6484 se distingue par un travail sur les nombres en système SP, représentés sur la figure par un segment de longueur donnée.

La tablette VAT 12-593 fait entrer en jeu le *ninda* et des sur-unités de mesure de longueur qui en dépendent.

Ce qui est le plus frappant est le fait qu'il ne soit pas usuel aujourd'hui d'exprimer une mesure de longueur avec plusieurs unités de mesure (l'expression est simple, non composée), en lien avec l'écriture décimale qui le permet facilement. Il faut tout de même nuancer, puisqu'avant l'apprentissage de l'écriture décimale à l'école, les enseignants sont encouragés à exprimer les mesures de façon composée.

Valeur numérique de la mesure de longueur et nombre utilisé dans l'opération mathématique

Dans le contexte multiplicatif, et dans le contexte d'une métrologie semi-indépendante, les textes UM 29-15-192, W 23-291, AO 6484 n'opèrent pas sur la valeur numérique de la longueur, mais sur des nombres différents, exprimés en système SP.

Dans le cas additif unidimensionnel de VAT 12-593, la mesure de longueur a un effet au début, sur la taille de la surface carrée à mesurer, ensuite l'addition se fait sur les mêmes nombres que les valeurs numériques des mesures d'aires des sous-surfaces. Dans notre système, le même nombre est utilisé (métrologie dépendante).

Type d'opération

Pour calculer l'aire du carré, la multiplication ou l'addition sont utilisées.

Dans le cadre d'une métrologie semi-indépendante, l'addition (tablette VAT 12-593) se fait sur les mesures d'aires de surfaces qui ne sont pas toutes carrées. Les systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire étant semi-indépendants, la forme naturellement associée à l'unité de mesure n'est pas toujours le carré, et peut changer pour s'adapter à un mesurage par découpage de la surface en sous surfaces.

Dans le cadre d'une métrologie semi-indépendante mais associée à la multiplication de nombres en système SP, il ne semble pas qu'il soit fait de lien avec un cadre géométrique.

Aujourd'hui, la métrologie « dépendante » permet de faire le lien entre la multiplication, le compte du nombre d'unités et l'addition itérée : la multiplication correspond implicitement à un calcul « plus rapide » pour l'addition itérée qui permet d'obtenir le nombre de carreaux (découpage de la surface en cm^2, par exemple). En revanche, la forme des unités de mesure est souvent représentée par le carré, uniquement.

Autre opération nécessaire

Dans le cadre de la tablette UM 29-15-192, et d'une manière générale de la sélection de Nippur (voir les « petites variations », p. 62), j'ai montré que le travail de calcul d'aire était lié à un certain nombre de tâches liées aux ordres de grandeur, du fait de la présence de tables métrologiques et de sous-unités de mesure.

La tablette de VAT 12-593 induit un parallèle aux opérations arithmétiques dans le registre des figures, de même pour AO 6484.

Dans le cadre de W 23-291, différents systèmes de tables métrologiques existants impliquent de faire le calcul de plusieurs façons différentes, selon le choix du système de tables métrologiques. Une conversion en capacité, qui permet d'obtenir la même valeur de grandeur dans chaque cas, est effectuée grâce à un coefficient.

Grâce au système métrique actuel, la mise en correspondance entre valeur numérique de grandeur et nombre est automatique. En dehors de la multiplication, il semble ne pas exister d'opération.

Mesure d'aire composée ou non

Dans le cadre de VAT 12-593, la mesure d'aire est généralement exprimée de façon composée (à moins que la surface ne puisse contenir la plus grande unité de mesure donnée un nombre entier de fois).

Dans les tablettes utilisant des tables métrologiques on trouve aussi, souvent, des mesures composées. La mesure est exprimée selon les entrées présentes dans la table métrologique, avec une unité de mesure et des sous-unités de mesure ; une correspondance est faite avec les positions sexagésimales (positionnement).

Aujourd'hui, le système permet l'expression, avec l'écriture décimale, de mesure d'aires dans une seule unité de mesure avec un seul nombre.

Valeur numérique de l'aire et nombre sur lequel porte l'opération

Dans le cadre du système SP, les nombres sur lesquels a porté la multiplication ne sont pas les mêmes que les valeurs numériques d'aire.

Dans le cadre de VAT 12-593 (additif, unidimensionnel), les nombres permettant d'exprimer le nombre d'unités de mesure d'aire liés à une sous-unité donnée sont additionnés et le résultat est présent sous la même forme dans les valeurs numériques d'aire.

W 23-291 témoigne du choix d'exprimer par une même valeur numérique (de capacité) deux calculs différents, en utilisant la conversion en mesure de capacité (à l'aide du coefficient de la surface-graine).

Dans la méthode actuelle et le cadre multiplicatif, du fait du choix du système métrique (dépendant), il est possible d'additionner ou de multiplier sur les mêmes nombres que les valeurs numériques des grandeurs. Il faudra se demander s'ils portent des valeurs conceptuelles différentes selon les étapes.

Forme logique de l'unité de mesure

Dans le cadre de VAT 12-593 (additif, unidimensionnel, système métrologique dépendant), les unités de mesure n'ont pas une forme fixe et peuvent être adaptées à la surface. L'algorithme fait appel à cette possibilité. La forme logique de l'unité de mesure n'est pas forcément le carré, du fait des facteurs entre unités de mesure d'aire. Le diagramme est mobilisé (mentalement ou concrètement), selon les hypothèses d'historiens.

Les tablettes liées à la multiplication et au système SP dans un système métrologique indépendant n'utilisent pas a priori de diagramme (mental ou concret). La représentation de la multiplication en système SP me paraît malaisée du fait de son caractère flottant. Le pont (entre *ninda* et *sar*, par exemple) peut être lié à une unité de mesure carrée.

Dans le système actuel, l'adaptation de la forme à la surface (pour la découper) est possible. La forme le plus souvent adoptée est le carré. Le découpage est rapidement abandonné dans l'enseignement pour laisser place à la multiplication.

Présence d'un diagramme

Dans le cadre de VAT 12-593 (additif, unidimensionnel, système métrologique dépendant), l'hypothèse est celle de diagrammes (probablement visualisés plutôt que matérialisés), liés au découpage en sous-surfaces. Ainsi il est fait un lien entre addition et juxtaposition de sous-surfaces.

Comme mentionné plus haut, les autres textes liés au système SP me semblent difficiles à relier au diagramme. En revanche, AO 6484 témoigne de l'existence de découpages-recollement sans faire appel explicitement à la mesure. La multiplication est liée à la construction d'un rectangle de largeur et longueur données, et d'aire obtenue par le produit de deux valeurs numériques.

Aujourd'hui, le découpage sous forme de carreaux peut accompagner la multiplication. En revanche, le cadre bidimensionnel (voir p.49) de la multiplication fait intervenir plus ou moins explicitement les unités de mesure de longueur.

Rôle de la représentation géométrique et représentation physique de l'opération

Dans le cas de la tablette archaïque VAT 12-593, le rôle de la représentation géométrique est fondamental, puisqu'elle permet le calcul. L'addition est probablement associée à la juxtaposition dans le registre des figures (mentalement). De même pour AO 6484 où le problème est résolu dans le monde des nombres mais où le raisonnement est guidé par des figures géométriques, peut-être imaginées (voir Høyrup, 1999, p.390). La multiplication est associée au fait de prendre en compte un carré de côté donné. Dans cette tablette la mesure n'intervient pas explicitement. Plusieurs situations peuvent donc correspondre à ce qui est dessiné.

La conversion qui apparaît dans la tablette W 23-291 pourrait correspondre à l'idée de couvrir la surface de semences, et de les compter en comparant avec les capacités de jarres standard.

Aujourd'hui, la représentation géométrique sous forme d'une grille[165] fait correspondre l'addition à la juxtaposition de surfaces. La multiplication est associée à la fois à l'addition itérée (pour obtenir le nombre de carreaux) et à la prise en compte d'un carré de côté donné.

Système numérique et systèmes métrologiques

Dans les sources en cunéiforme rencontrées, les facteurs des systèmes numériques S et G qui servent à exprimer les mesures de longueur et d'aire sont différents des facteurs régissant les systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire, sauf pour la tablette VAT 12-593[166]. De même les systèmes d'unités de mesure d'aire et de longueur sont indépendants entre eux, alors que notre système métrique est construit sur cette dépendance.

Dans le cas du système actuel, le système numérique est en base 10. Il est ainsi facilement associable automatiquement aux unités de mesure de longueur, et un peu moins facilement, aux unités de mesure d'aire (facteur 100), qui sont dépendantes des unités de mesure de longueur.

Ordre de grandeur

Les ordres de grandeur influent sur le travail effectué sur les tables métrologiques (par exemple, sur l'extrapolation, voir p.72). Ils influencent les méthodes et dépendent aussi des besoins pour lesquels sont faits ces calculs.

Aujourd'hui la question du contexte d'enseignement impose souvent un premier apprentissage de l'unité de mesure d'aire avec un ordre de grandeur de l'ordre du centimètre.

Différentes expressions de la mesure d'aire

Dans les tablettes utilisant le système SP l'utilisation de tables métrologiques et la référence aux positions sexagésimales pour chercher dans la table influe probablement sur le fait qu'il n'y ait que peu de façons différentes d'exprimer une mesure d'aire (mais elle peut être composée).

La tablette W 23-291 utilise des systèmes de tables métrologiques différents qui impliquent des résultats différents en système SP. Ainsi la tablette présente une forme de distinction aire/nombre. Cependant elle propose une unification de l'expression obtenue, grâce au coefficient de la surface-graine, liant l'aire à la capacité.

Le système lié à la tablette VAT 12-593 offre probablement plusieurs possibilités de découpages. En tous cas, l'expression de la mesure d'aire est composée.

Le système métrique actuel, dépendant, donne lieu au choix automatique de l'unité de mesure d'aire. Il permet aussi l'expression, avec l'écriture décimale, de mesure d'aires dans une seule unité de mesure avec un seul nombre. Ce nombre est lié au nombre sur lequel a porté la multiplication. La distinction aire/nombre peut ne pas être mise en évidence.

---

[165] Il s'agit du pavage ou maillage d'une surface en carreaux d'un centimètre de côté (centimètres carré).

[166] Pour le *ninda*, il est possible de considérer qu'il y a une seule unité de mesure, avec des sur-unités de mesure *ninda* (facteurs 6, 10, 6, 10 entre unités de mesure). Pour les mesures d'aire, la situation est ambigüe. L'unité de mesure pourrait être le *GAN* et les signes avant le *GAN* peuvent être interprétés comme des multiples du *GAN* ou des unités de mesure propres (auquel cas le *GAN* ne serait pas une unité de mesure mais une indication). Le système métrologique utilisé par cette tablette présente des facteurs 6, 3, 10, 6 entre unités de mesure d'aire, le cas échéant.

3 CONCLUSION DU CHAPITRE

3.1 Conclusion épistémologique

En conclusion, cette analyse a permis de mettre en valeur la diversité des concepts liés au calcul d'aire. Je vais d'abord faire une conclusion rapide pour chaque tablette. Ensuite j'expliquerai quels sont les points d'importance qui ont été dégagés grâce à la sélection.

La tablette des Dynasties Archaïques VAT 12-593 (voir 2.4.2 p.112) témoigne d'un contexte additif unidimensionnel.

L'algorithme est associé au registre des figures. Le système métrologique est semi-indépendant. L'unité de mesure est clairement liée à l'action de mesurage par report.

Sa forme peut changer, pour s'adapter à la figure. Ainsi l'unité de mesure de référence elle-même est concernée par la distinction entre surface et aire. L'expression du résultat est composée (l'expression se fait avec une unité et des sous-unités de mesure). Du fait du choix d'unités de mesure successives pour découper la surface à mesurer, il est possible que la situation appuie sur la distinction entre surface et aire. En effet, si l'agencement change, l'aire reste la même alors que la surface à mesurer prend une autre forme.

Les opérations ont un parallèle net dans le registre des figures. L'addition peut être associée à la juxtaposition des surfaces représentant les unités de mesure de référence.

La tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) témoigne d'une situation bidimensionnelle multiplicative, là encore dans le contexte d'une métrologie semi-indépendante.

Les unités de mesure de longueur et d'aire sont probablement issues à l'origine, d'étalons physiques réels, utilisés pour mesurer. Les facteurs entre unités de mesure et les noms des unités de mesure en sont fort emprunts. Ainsi, les unités de mesure restent conceptuellement liées au report et au mesurage. Pour autant, dans l'algorithme, l'opération multiplicative n'a pas *a priori* de parallèle dans le registre des figures.

Les nombres qui servent à exprimer la valeur numérique de la grandeur ne sont pas les mêmes que les nombres qui entrent en jeu dans la multiplication. Ces derniers, en système SP, ne portent pas l'idée de quantité (il y a perte de l'ordre de grandeur). Conceptuellement, les nombres en système SP semblent « faire communiquer » les grandeurs de type différent, mais sans que cela ne corresponde à une réalité physique ou géométrique.

L'étape de mise en correspondance entre les mesures et les nombres en système SP est explicite. La conséquence de cette explicitation est qu'il est clair, à chaque étape dans l'algorithme, sur quel objet mathématique on opère. Du point de vue de la bidimensionnalité, la multiplication apparaît comme « sans dimension » alors que l'entrée et la sortie de l'algorithme sont d'une dimension différente, comme s'il y avait eu transformation. A nouveau cela se fait sans que cela ait eu une réalité physique ou géométrique. Ces considérations sont celles portées par le regard actuel sur un texte ancien.

Dans la tablette achéménide W 23-291 (voir 2.4.3, p.123) le même type d'algorithme est présent. Dans le problème 14 qui a été commenté, le calcul d'aire est mené pour plusieurs systèmes de tables métrologiques. Le nombre en système SP obtenu est donc explicitement différent, selon la table métrologique utilisée. Il s'agit peut-être d'une forme de distinction entre aire et nombre[167].

La conversion grâce au coefficient de la surface-graine a un caractère unificateur puisque la valeur numérique de grandeur obtenue est la même quel que soit le système. Le concept d'aire est alors lié à un nombre fixe, lui-même lié conceptuellement à une autre grandeur : la capacité. Il s'agit dans le cas présent d'une quantité de semences que l'on peut poser sur une surface, ce qui est aussi intéressant ; cette conception est distinguée du concept de surface. Le lien qui est fait entre aire et capacité appuie ainsi peut-être sur la distinction entre aire et surface.

D'autre part le système métrologique apparaît comme un choix explicitement arbitraire, puisque plusieurs options existent.

Dans la tablette hellénistique AO 6484 (voir 2.4.4, p.132), qui présente un problème de recherche d'inverse multiplicatif, le calcul d'aire intervient sans la mesure, dans le registre des figures. La situation fait intervenir implicitement le caractère bidimensionnel, puisque l'aire est affectée par les longueurs et largeurs des rectangles ou carrés.

L'opération multiplication a un parallèle dans le registre des figures, il s'agit de la prise en compte d'un carré de côté donné, dont la place occupée sur la figure peut être mise en parallèle avec le résultat de la multiplication.

Le contexte est celui d'une métrologie semi-indépendante. Le report et les unités de mesure de longueur et d'aire est absent (mais les mesures ont servi à l'origine à dessiner le carré qui représente maintenant plusieurs situations de mesure possibles). Ce sont les nombres en système SP qui sont représentés sur les côtés du carré. Ainsi le diagramme fait référence à tout un ensemble de situations possibles.

Le nombre (ici en système SP) est associé selon les cas, à une aire ou à une longueur. Le nombre représente probablement dans le premier cas, toutes les mesures d'aire qui pourraient être mises en correspondance avec lui ; ou dans deuxième cas, toutes les longueurs qui après utilisation de la table métrologique, auraient ce nombre pour correspondance.

Dans un contexte de mesure, la valeur numérique d'aire ne donnerait pas le même nombre que celui qui est exprimé en système SP. Malgré un contexte non lié à l'expression d'une mesure, la figure peut quand même être associée au nombre en système SP. L'algorithme de calcul d'aire se résume à une multiplication.

Du point de vue de la bidimensionnalité, la multiplication apparaît comme « construisant une dimension » comme s'il y avait eu une transformation physique ou géométrique. Mais ici encore, ces considérations sont celles portées par le regard actuel sur un texte ancien.

La distinction entre aire et surface ou aire et nombre n'entre pas *a priori* en jeu, du fait du système métrologique effacé de la situation qui ne fait pas intervenir la mesure.

En résumé, le croisement des textes a ainsi permis de faire émerger plusieurs points qui peuvent être analysés dans le contexte d'un calcul d'aire. Je liste ici ces points ainsi que les questions qui peuvent y être attachées.

la conception du nombre :

Le nombre exprime-t-il une quantité ? Est-il lié à une grandeur, s'agit-il d'une valeur numérique de grandeur de longueur, ou d'aire ; si oui, est-il composé (dans le cas d'une

[167] Aujourd'hui, cette disctinction se voit si pour une même mesure d'aire, on propose plusieurs expressions de sa mesure (dans plusieurs unités de mesure).

mesure composée) ? Combien de conceptions différentes du nombre entrent-elles en jeu dans l'algorithme ?

le lien entre opération physique et opération sur les nombres

Quel est l'objet représenté par le nombre sur lequel porte l'opération ? Pour l'opération en elle-même : s'agit-il d'une multiplication ou d'une addition ?

L'opération a-t-elle un équivalent dans le registre des figures, comment est-elle conceptualisée ? Le parallèle est-il facile à faire entre l'algorithme et le registre des figures, notamment lorsque de nouvelles opérations (comme la mise en correspondance ou la multiplication) entrent en jeu ?

la bidimensionnalité

La bidimensionnalité entre-elle en jeu avant ou pendant l'algorithme de calcul d'aire ? A-t-elle influé sur une étape qui reste parfois implicite, comme la construction du carré dans le registre des figures ; ou sur une autre étape de l'algorithme (comme la « mise en correspondance » avec les tables métrologiques) ? Influence-t-elle le lien conceptuel entre multiplication et la création d'un carré de côté donné ?

la conception de l'unité de mesure

L'unité de mesure d'aire rappelle-t-elle une situation concrète, liée au mesurage ? L'unité de mesure est-elle liée au mesurage, au report effectif d'un étalon dans le registre des figures ?

A-t-elle une existence conceptuelle propre, indépendamment de l'unité de mesure de longueur ?

Le changement d'unité de mesure (conversion) est-il associé à un changement conceptuel dans le registre des figures, ou dans le monde des grandeurs ?

Comment est menée la distinction surface/aire-nombre, pour l'unité de mesure ?

l'opération

Quelle est l'opération utilisée ? Existe-t-il un parallèle conceptuel de l'opération (multiplication, addition) dans le registre des figures ? La multiplication est-elle associée à la création d'un carré de côté donné ?

le mesurage

Est-ce que le mesurage intervient explicitement dans l'algorithme ? S'il n'y a pas de report d'un étalon, comment l'algorithme fait-il le lien avec le mesurage ?

Le découpage est-il lié à la mesure, dans le registre des figures ?

Si l'unité de mesure d'aire n'a pas une existence indépendante de l'unité de mesure de longueur, est-elle liée au mesurage ? à la multiplication ?

Comment intervient l'absence de recherche d'un ordre de grandeur sur la conceptualisation de l'algorithme, le cas échéant ?

le recours au cadre géométrique

Comment est accompagné l'algorithme conceptuellement, s'il ne passe pas par le registre des figures ?

Comment est fait le lien au mesurage lorsqu'il n'y a pas de report d'étalon ?

Quel est utilisé le diagramme, sert-il à faire des liens entre les registres ? A associer l'opération physique et l'opération sur les nombres ?

l'algorithme

Sur quels objets l'algorithme opère-t-il ? Que représentent les nombres qui entrent en jeu ? Existe-t-il un parallèle avec le registre des figures ? Lorsqu'il n'est pas évident, par exemple avec l'introduction de la multiplication en système SP, ou de la mise en correspondance avec les tables métrologiques, est-on conduit à en inventer un nouveau ?

Quelle est la place du mesurage et de la bidimensionnalité dans l'algorithme ?

les implications du système métrologique

D'une manière générale, le système métrologique semi-indépendant semble avoir des implications sur la conception du mesurage, de l'unité de mesure, sur les choix mathématiques (découpage, utilisation de nombres en système SP) et sur l'algorithme. Quelles sont les implications du système métrologique choisi ? Peut-il créer des implicites ?

Conclusion : résumé des caractères retenus

En résumé, la sélection de textes a permis de mettre en valeur plusieurs points importants. Il faudra étudier les liens entre les éléments suivants :

-la conception du nombre
-le lien entre opération physique et opération sur les nombres
-l'entrée en jeu de la bidimensionnalité
-la conception de l'unité de mesure
-l'opération et son lien avec l'opération physique, ainsi que les objets mathématiques qui entrent en jeu
-le mesurage
-le recours au cadre géométrique
-l'algorithme
-les implications du système métrologique

Il me semble intéressant que la didactique ait permis de nommer certaines distinctions qui émergent par l'histoire, et parfois d'attirer l'attention sur certains points, de les observer.

Ces points me semblent particulièrement bien faire le tour de la question : c'est-à-dire que l'analyse épistémologique a permis de donner une vue d'ensemble sur le grand nombre d'objets concernés par l'aire du carré.

Dans le chapitre II je montrerai comment, pour me permettre de faire cette analyse épistémologique, j'ai été amenée à rassembler des travaux de didactique issus de champs différents et qui s'intéressent à un ou plusieurs liens entre ces points.

Je passe maintenant à la conclusion de ce premier chapitre du point de vue historique.

3.2 Conclusion historique

3.2.1 Conclusion de l'analyse historique des petites variations

Dans la partie « petites variations » (voir 2.3, p.62), j'ai analysé le choix des mesures de longueur initiales dans un groupe de six tablettes[168] d'exercices de calcul d'aire du carré à Nippur, période paléo-babylonienne. Le groupe avait été constitué par Proust (2007, p.190-197).

Cette démarche était inspirée par le regard didactique porté sur les textes, notamment les notions de variable didactique (Brousseau, 1998). Dans un second temps, les notions d'assortiment (Genestoux-Esmenjaud, 2000) et en ouverture, la T.A.D (voir p.106) ont été mis en relation avec cette étude. Du point de vue historique, le travail a bénéficié des analyses faites par les historiens sur les séries de problèmes et des précautions qu'ils ont soulevées.

L'analyse du corpus a permis d'identifier des types de tâches principaux, c'est-à-dire nécessaires dans chaque exemple, et des sous-tâches ((sous)-types de tâches pour la T.A.D) présents ou non en fonction du choix de la mesure de longueur choisie. Il y a donc des différences didactiques profondes dans ces exercices, d'apparence homogène. L'analyse a mené à un classement des tablettes, certaines ne présentant aucune ou très peu de sous-tâches. J'ai relevé des arguments permettant de penser que l'apprentissage de certaines sous-tâches liées à la circulation dans les tables métrologiques ait pu être un objectif d'enseignement. La mesure de longueur pourrait alors constituer une forme de variable didactique (au sens large qui a été précisé), étant donné l'implication qu'elle a sur les sous-tâches qui entrent en jeu dans la résolution. L'outil de didactique qu'est l'assortiment (Genestoux-Esmenjaud, 2001) permet d'obtenir des critères qui semblent objectiver l'idée d'une différence entre l'entraînement du déjà appris et l'apprentissage du nouveau. L'interprétation pédagogique ne peut qu'être exprimée sous forme d'hypothèses, mais la position de ce travail dans le cursus laisse à penser que la circulation dans les tables métrologiques induite par les « sous-tâches » puisse être un objectif d'enseignement. La question de la place du travail sur les cycles des tables métrologiques ressort donc particulièrement de cette étude. Le regroupement permet aussi de signifier certaines différences importantes entre le corpus des six tablettes de Nippur et deux autres tablettes paléo-babyloniennes portant sur le calcul d'aire du carré (hors Nippur).

Du point de vue méthodologique, les outils de la didactique me semblent donc être intéressants pour fournir des grilles d'observation de ce qui pouvait être une situation de transmission, en histoire. La notion de variable didactique, qui s'applique pourtant dans le cadre bien précis de la T.S.D (voir p.62) m'a permis de m'interroger sur les effets des choix de valeurs numériques dans des exercices similaires et m'a conduite à les analyser avec précision. Je l'ai mentionné, la notion d'assortiment donne des clés pour permettre de penser la sélection en termes de la consolidation du « déjà appris » par rapport à l'entraînement destiné à apprendre « du nouveau ». Ici, l'assortiment est forcément arbitraire, les tablettes ne relèvent probablement pas d'un seul enseignant. Rien ne dit quelle est la redondance des exercices, et il n'est pas possible historiquement, de conclure avec certitude sur l'appartenance de certaines tablettes à un groupe plutôt qu'un autre. En revanche, les fortes

[168] Il s'agissait des tablettes CBS 11318, UM 29-15-192, Ni 18, UM 55-21-076, IM 57846, IM 57828, NBC 8082 et NCBT 1913.

différences constatées entre les tablettes du point de vue des sous-tâches, certaines proposant une réduction importante du répertoire mobilisé et un plongement dans ce qui pourrait être déjà connu permet de légitimer l'hypothèse d'une progression. Le cursus constitue un appui qui permet de penser l'ensemble des tablettes du corpus comme une forme de série. Il faut noter que méthodologiquement, cette progression prend appui sur un cursus qui est lui-même le fruit d'une reconstitution historique, et sur l'hypothèse que les maîtres agissaient en pédagogues, en construisant une forme de progression où les difficultés étaient abordées pas à pas.

Enfin, les outils de la T.A.D (voir p.102) semblent intéressants pour observer des dynamiques. Par exemple, la façon dont l'apprentissage de certains sous-types de tâches semble être l'objectif d'apprentissage, pouvant devenir secondaires dans un autre problème ; ou comment une type de tâche principal peut motiver certains types de tâches qui deviennent classiques. Dans l'analyse historico-épistémologique, les outils théoriques de la T.A.D me paraissent aussi fructueux à utiliser à l'avenir pour mieux observer les dynamiques.

3.2.2 Conclusion de l'analyse historico-épistémologique, du point de vue historique

La sélection de textes m'a permis de découvrir la mise en œuvre de solutions techniques différentes aux problèmes posés par des systèmes métrologiques qui ne sont pas complètement coordonnés (semi-indépendants).

La tablette des Dynasties Archaïques VAT 12-593 témoigne du recours à une solution de type additif et unidimensionnel. Le système métrologique semi-indépendant donne probablement lieu à l'utilisation mentale d'unités de mesure représentées géométriquement par des formes diverses et reportées.

Cette décomposition de la surface en sous-surfaces de formes variées donne lieu ensuite (Proust, *à paraître*), à une autre forme de travail mathématique arithmétique, dans le cadre de la composition systématique d'autres tables de carrés.

Le contexte est celui de grandes propriétés (30 m à 3600 m de côté) contrôlées par des gouverneurs. Ces tables pourraient avoir servi concrètement pour les personnes devant évaluer les grandes propriétés. Il peut aussi s'agir d'exercices systématiques.

Ce texte montre qu'il est possible d'être proche de la pratique, (l'enjeu est concret, les tailles sont grandes) tout en ayant une approche mathématique originale, et qui peut faire l'objet d'un travail à visée mathématique.

Les tablettes de type UM 29-15-192 témoignent d'une autre solution technique à l'utilisation d'un système métrologique semi-indépendant, puisqu'un système numérique (le système SP) est créé pour « naviguer » entre mesures de longueur et d'aire.

Cette invention donne naissance à des nombres qui ne représentent pas de quantités (perte de l'ordre de grandeur), ou qui en représentent tout un ensemble. Le contexte est multiplicatif et bidimensionnel.

Le cadre géométrique n'est plus adapté, et l'action de mesurage est à la marge. Alors que le report d'unités de mesure géométriquement représentées était associé aisément à l'addition des mesures d'aires correspondantes, ici l'action physique ne concerne plus que la mesure de longueur initiale, et n'intervient pas dans l'algorithme.

Le contexte est celui de l'école de scribes. Les mesures présentes dans une série de tablettes similaires de Nippur sont relativement petites (de l'ordre de grandeur d'une tablette ou d'une table) contrairement à d'autres contextes où il s'agit d'évaluer de vastes terrains. Il pourrait s'agir d'un objectif de travail sur l'apprentissage de la circulation dans les tables métrologiques, objectif qui n'apparaît pas au premier regard. Ce texte complexifie l'approche des mathématiques scolaires, dont les enjeux ne sont pas évidents ; de plus, il montre que les enjeux d'enseignement ne sont pas forcément ceux de la pratique immédiate.

L'existence de plusieurs systèmes de tables métrologiques en parallèle conduit dans la tablette W 23-291 à une « mise en commun » des résultats de multiplication obtenus, sous forme d'une même mesure de capacité.

Dans cette tablette, le travail principal ne semble pas porter sur le calcul d'aire ni la circulation dans les tables métrologiques, mais sur l'utilisation de plusieurs systèmes de tables simultanément. La conversion (en mesure de capacité) prend une valeur unificatrice. Le système métrologique et les choix de construction des tables métrologiques ont ains des conséquences très explicites, qui deviennent l'objet du travail mathématique. Les tâches décrites dans les tablettes paléo-babyloniennes comme l'objet principal d'enseignement (voir 2.2, p. 48) deviennent ici secondaires.

Du point de vue historique, le contexte pourrait être celui du contrôle (rémunéré) des propriétés urbaines et agricoles ; les ordres de grandeurs des surfaces sont celles de maisons ou de champs. Il s'agit peut-être aussi d'un travail à visée mathématique sur les métrologies en circulation. Les deux semblent compatibles, puisque naviguer entre les métrologies est probablement un besoin créé par la réalité de la pratique d'évaluation de surfaces, tout cela dans le cadre d'une conservation des données existantes dans une bibliothèque. Ce texte montre ainsi la création de nouvelles techniques sur la base de techniques mathématiques qui ont été mises en circulation précédemment. De plus, le texte permet de complexifier l'approche historique de la relation entre pratique et théorie, puisqu'ici la présence (liée à l'utilisation pratique) de différentes tables métrologiques conduit à créer de nouvelles mathématiques et peut-être, de nouveaux liens entre les concepts (ici d'aire et de capacité).

La tablette AO 6484 témoigne de découpages et recollement dans le cadre de la recherche d'une inconnue (inverse multiplicatif), sur des nombres en système SP et sans mesure explicite. Ici le registre géométrique est présent, et représente tout un ensemble de mesures possibles. Il est intéressant de voir que la semi-indépendance du système métrologique conduit à utiliser l'outil de transition, le nombre en système SP, dans la représentation d'une multiplicité de situations dans un seul diagramme (flottant).

Les auteurs de ce texte mathématique sont aussi auteurs de textes d'astronomie et d'astrologie. Le contexte est celui des grands temples de l'époque hellénistique. Dans le cas du problème 14, le calcul d'aire sert néanmoins un problème mathématique (la recherche d'inverses). Il n'exclut pas non plus un objectif de travail sur les découpages-recollement et le lien géométrie-arithmétique. Il ne s'agit pas, *a priori,* d'évaluer la taille d'un champ. Le retour à la mesure est possible, mais non travaillé explicitement.

Ce texte permet ainsi de montrer une approche géométrique liée au nombre en système SP, et ainsi de rencontrer encore une autre utilisation de la perte de l'ordre de grandeur.

La T.A.D pourrait être utilisée, maintenant, pour observer ces dynamiques. Si dans ces textes le recours à certaines techniques ne change pas, comme la multiplication par exemple, des types de tâches sont utilisées ou non (par exemple, les (sous)-types de tâches liées aux tables métrologiques) selon les exercices et les registres mobilisés. Il semblerait qu'un type de tâche principal comme calculer l'aire d'un carré puisse devenir un type de tâche classique, dans un autre exercice. De plus, la T.A.D met en valeur le fait qu'il est possible que derrière un type de tâche qui semble principal (comme calculer l'aire d'un carré de côté donné), ce soit en fait un (sous)-type de tâches (liées aux tables métrologiques) qui soient visé. Il faudra continuer à clarifier quels sont les tâches, les ensembles de tâches et les techniques à l'avenir ; afin de pouvoir utiliser ces outils spécialisés dans l'étude de la transmission, pour mieux caractériser les dynamiques.

Du point de vue de la diversité, la sélection montre bien l'existence de diverses possibilités mathématiques et de divers éclairages des concepts, dans une même zone géographique : au sein des sources issues de Mésopotamie, en cunéiforme. Ces exemples participent bien de plusieurs « cultures mathématiques » et non d'une seule « culture ».

Il est même possible de montrer que des sources de la même période, voire du même lieu, mais de différents milieux (marchand, savant, etc.) témoignent de différents points de vue selon les acteurs (un acteur pouvant aussi appartenir à plusieurs contextes).

Cette sélection permet aussi d'illustrer le fait que, selon les contextes ; que les besoins soient concrets ou théoriques, qu'ils soient scolaire (UM 20-15-192) et portant sur de petites surfaces, ou qu'il s'agisse de grandes propriétés et d'exploitation par les élites (VAT-15-192), d'astronomie (AO 6484) ou encore de contrôle de propriétés (W 23-291) ; le calcul d'aire est lié à un travail mathématique profond, et il en produit (circulation dans les tables, arithmétique et géométrie, calcul d'inverse, recherche d'inconnue et géométrie, travail sur les calculs à partir de plusieurs systèmes de référence, conversions et liens avec d'autres grandeurs, etc.). De plus, les concepts sont profondément affectés par ces évolutions.

4 OUVERTURE VERS LE CHINOIS ET LE SANSKRIT

4.1 Ouverture vers l'aire du rectangle en chinois et sanskrit

Afin de pouvoir alimenter cette étude épistémologique, j'avais entrepris pendant mes années de recherche en doctorat, une sélection plus large de textes. Il s'agissait de sources en chinois et en sanskrit sur le thème de l'aire du rectangle ou du carré. Pour mener cette étude épistémologique avec précision, il faudrait une étude historique approfondie, c'est pourquoi j'ai choisi de présenter ce travail seulement en ouverture. L'analyse historique a été commencée dans le cadre de ma thèse et donnera lieu à des articles ultérieurement. Je donne ici seulement une idée : d'une part, des hypothèses historiques soulevées par l'analyse historico-épistémologique. Pour cela je présenterai des extraits de textes auxquels je me suis intéressée. A ce stade il s'agit donc uniquement d'hypothèses, qui restent à confirmer historiquement. D'autre part (dans un tableau synthétique), je présenterai ce que l'analyse historico-épistémologique de ces textes pourrait donner, en suivant les hypothèses historiques à confirmer, selon les critères d'analyse préalablement retenus (sur les textes en cunéiforme).

Après cette sous-partie sur le chinois et le sanskrit, je traiterai, en ouverture également, d'autres situations multiplicatives. Enfin, je concluerai sur l'ouverture aux textes en chinois et sanskrit.

4.1.1 L'extrait des Neuf Chapitres (Chemla et Guo 2004, p.153-155)

Voici l'extrait choisi pour cette étude, il s'agit du début du premier chapitre, « CHAMP RECTANGULAIRE pour traiter les territoires des terres cultivées ».

(1.1)
SUPPOSONS QU'ON AIT UN CHAMP DE 15 BU DE LARGEUR ET DE 16 BU DE LONGUEUR. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.
RÉPONSE: 1 MU.
(Chemla et Guo 2004, p.153)

Un ensemble d'énoncés sous la forme « supposons » avec d'autres mesures de longueur et des réponses sous la forme de mesures d'aire, sont accompagnés de « procédures ». Voici la procédure qui suit les deux premiers énoncés sous forme de « supposons » (1.1 et 1.2) :

PROCÉDURE DU CHAMP RECTANGULAIRE :
LES QUANTITÉS *(SHU)*[169] DE *BU* DE LA LARGEUR ET DE LA LONGUEUR ÉTANT MULTIPLIÉES L'UNE PAR L'AUTRE, ON OBTIENT LES *BU* DU PRODUIT *(JI).*
(Chemla et Guo 2004, p.153)

Il faut maintenant comprendre pourquoi la réponse est « 1 MU », mesure d'aire exprimée en unité de mesure « MU » alors que la procédure affirme que le résultat sera en unité de mesure « *BU* DU PRODUIT ». La suite de la procédure (Chemla et Guo 2004, p.155) dit en effet qu'il s'agit d'une forme de conversion dans une autre unité de mesure d'aire.

DIVISER CECI PAR LE DIVISEUR DES *MU,* 240 *BU,* DONNE LA QUANTITÉ *(SHU)* DE *MU.* 100 *MU* FONT 1 *QING.*

Le système métrologique (Chemla et Guo 2004, p.0) permet de comprendre. Il est le suivant, pour les unités de mesure de longueur :

$$1\ \textit{zhang} = 10\ \textit{chi} = 10^2\ \textit{cun} = 10^3\ \textit{fen} = 10^4\ \textit{li} = 10^5\ \textit{hao} = 10^6\ \textit{miao} = 10^7\ \textit{hu}$$

toise pied pouce part

Tableau 4-1 : système métrologique (Chemla et Guo, 2004, p.0)

Les *Neuf chapitres* (en dehors des commentaires) utilisent les trois premières unités de mesure, ainsi que deux autres unités de mesure de longueur : les « bu » (qui correspondent à des « pas ») et les « li ». Les autres unités de mesure sont introduites dans les commentaires (Chemla et Guo 2004, p.0).

1 bu = 6 chi

1 li = 300 bu

Les unités de mesure d'aire portent le nom des unités de mesure de longueur. Par exemple, les unités de mesure de longueur « bu » donnent l'unité de mesure d'aire « bu », avec la précision suivante, dans la traduction : « bu du produit »). Ainsi le rectangle ayant pour aire 3 bu, a pour longueur 3 bu, et pour largeur 1. Or, il existe également dans les *Neuf chapitres*, des unités de mesure d'aire qui sont propres aux surfaces uniquement (sans équivalent en mesure de

[169] Le texte entre parenthèses correspond à une précision de traduction, sur le thème employé en chinois, en l'occurrence « shu », traduit ici par « quantités ».

longueur) : le mu, qui vaut 240 bu et le qing qui vaut 100 mu (Chemla et Guo 2004, p.0). J'y reviendrai.

1 mu = 240 bu

1 qing = 100 mu

Je vais d'abord détailler la question du concept d'aire et le lien entre bidimensionnalité et diagramme. Selon une interprétation de Chemla (2017, p.317), liée à une publication de Li Jimin (1998), le calcul d'aire pourrait être lié à une transformation du rectangle en « bande unité », ayant pour largeur une unité de mesure de longueur (dans cet exemple, 1 LI) et pour longueur le produit des valeurs numériques de la largeur et de la longueur (ici 2 × 3 soit 6, en LI du produit[170]). Ce diagramme n'est pas à notre disposition dans les *Neuf chapitres*. Voici ce à quoi il pourrait ressembler.

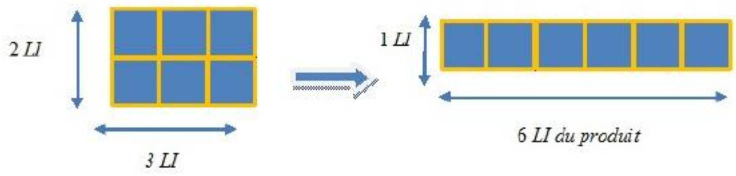


Tableau 4-2 : transformation en « li du produit[171] »

Je vais maintenant donner des indications conceptuelles. Les questions restent ouvertes sur l'interprétation des concepts d'aire et de multiplication. En effet les *Neuf chapitres* donnent lieu à des commentaires et un désaccord entre Li Chunfeng et Liu Hui (les commentateurs). Ceux-ci emploient également le terme « mi » pour aire. Selon le chercheur Li Jimin (1990, p.237-240, cité par Chemla et Guo, 2004, p.960-961), le terme « ji » (déjà utilisé dans les *Neuf chapitres*) désignerait l'aire, du point de vue des *dimensions multipliées* l'une par l'autre. Ainsi « mi » serait, lui, relatif à la surface associée. Selon Li Jimin, les protestations du commentateur Li Chunfeng sont liées au fait qu'il attache « mi » à la forme et au morceau de tissu en son entier, alors que « ji » serait attaché au nombre et à la répétition d'aires unitaires.

> (selon Li Jimin) [...] il pense à mi comme le rectangle constitué par la répétition du fil de la chaîne le long de la trame. Par contraste, ji serait le rectangle en tant qu'il est assemblé d'aires unitaires. Chemla et Guo, 2004, p.960

Selon Li Jimin, le commentateur Liu Hui pense à « mi » comme le produit de la longueur par la largeur en opposition à la définition à partir d'unités d'aire, « ji ». Selon Chemla (Chemla et Guo, 2004, p.960), pour le commentateur Liu Hui, « mi » serait à rattacher aux opérations abstraites (comme celle de multiplier le diamètre d'un cercle par sa circonférence) en

[170] Il faut noter que dans le texte la multiplication donne lieu à une conversion en QING et MU.
SUPPOSONS A NOUVEAU QU'ON AIT UN CHAMP DE 2 *LI* DE LARGEUR ET DE 3 *LI* DE LONGUEUR. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.
RÉPONSE: 22 *QING* 50 *MU*.
PROCÉDURE DU CHAMP EN *LI* :
LES QUANTITÉS *(SHU)* DE *LI* DE LA LARGEUR ET DE LA LONGUEUR ÉTANT MULTIPLIÉES L'UNE PAR L'AUTRE, ON OBTIENT LES *LI* DU PRODUIT *(JI)*. MULTIPLIER CECI PAR 375 DONNE LA QUANTITÉ *(SHU)* DE *MU*. (Chemla & Guo 2004, p.155).
[171] Ce schéma provient de ma propre interprétation de l'article de Karine Chemla.

opposition aux opérations concrètes dont les résultats sont des nombres. Ainsi le concept « mi » serait lié à la production d'aires (dans le sens du déploiement) et non à un résultat purement numérique. En revanche, « ji » serait à rattacher à une quantité.

> la multiplication de deux grandeurs produirait des aires à concevoir sous l'angle du déploiement et non sous leur aspect purement numérique, ce qui serait en adéquation avec la proposition de Li Chunfeng (1.2). Notons que cela permettrait d'expliquer que mi se rattache au domaine de la démonstration d'algorithme, puisqu'on ne le rencontre que dans les commentaires, jamais dans le Classique. Par opposition à cela, ji désignerait l'aire en tant qu'elle est une quantité et renverrait à l'univers des opérations du second type. Cette interprétation donnerait les moyens de rendre compte de la relation privilégiée de mi avec le rectangle, puisque le déploiement dans l'espace du produit de deux longueurs peut toujours s'envisager sous les espèces du rectangle. Mais elle offre également une perspective d'où analyser la réaction de Li Chunfeng (1.2): la distinction de ji et de mi se double du fait de considérer la multiplication sous un double point de vue. Si Li Chunfeng oppose les deux concepts, faut-il comprendre qu'il n'envisage en revanche la multiplication que comme opération numérique, ce qui provoque sa réaction au commentaire de Liu Hui en 1.2 ? Il s'agit là d'une question d'histoire conceptuelle qu'il nous faut laisser ici ouverte.

Ainsi la multiplication de grandeurs produirait des aires (déploiement), en lien avec une opération abstraite et « mi », alors que l'addition d'unités d'aire serait plutôt en lien avec « ji ». Cette discussion pose en elle-même des questions conceptuelles qui me paraissent intéressantes pour l'analyse historico-épistémologique, puisqu'il y a une distinction entre la multiplication de grandeurs et la multiplication qui produit un nombre d'unités d'aire.

De plus, du point de vue historique, c'est également intéressant. En effet, je reviens à la question d'unité de mesure d'aire. Le fait que l'aire soit exprimée avec des unités de mesure d'aire et ensuite convertie en unité de mesure « mu » et/ou « qing » (qui sont des unités de mesure d'aire qui ne correspondent pas à des unités de mesure de longueur), pose la question de la relation conceptuelle avec une « transformation » éventuelle de la multiplication « ji » (lié à la multiplicité) en « mi » (lié à la surface en un seul tenant). La conversion aurait donc peut-être un rôle « accompagnateur » dans cette transformation conceptuelle (c'est une hypothèse qui reste à étudier). Il est intéressant du point de vue méthodologique, que l'analyse épistémologique que j'ai menée en lien avec d'autres textes et la didactique, m'ait conduite à m'intéresser à ce texte en chinois, du point de vue de la conception de la conversion d'une unité de mesure à une autre, dans le cadre d'une distinction des concepts de multiplication dans le cadre du calcul d'aire.

4.1.2 L'extrait de Yang Hui

Je passe maintenant à un autre texte, que j'ai commencé à traduire, avec l'aide de Karine Chemla. Il s'agit d'un texte du XIII^{e} siècle : le Yang Hui Suan Fa, 杨辉算法, « les arts mathématiques de Yang Hui ». Ce travail fera l'objet d'une publication ultérieure[172]. Voici l'extrait choisi pour cette étude, il s'agit du début du premier chapitre, qui s'intitule

[172] J'appelle « m1 » l'édition coréenne de 1433 et « m2 » une version manuscrite : 中国科学技术典籍通汇（数学第1卷). Ce sont les manuscrits sur lesquels je me base.

« CHAMP RECTANGULAIRE ». Je vais donner quelques détails sur le système métrologique, avant d'expliquer quel travail j'ai entrepris sur ce texte.

(1.1)

« Champ rectangulaire »

Méthode[173] : Les quantités de bu de la largeur[174] et de la longueur[175] étant multipliées[176], on obtient les bu du produit. Diviser par 240 pour faire les mu[177] et ce qui n'atteint pas le mu, le reste fait des bu. Ou bien, diviser les bu restants par 24 pour faire des fen et li, ou bien les diviser par 60 pour faire des jiao[178]. Des bu font les parties décimales après les mu.

Maintenant, il y a un champ rectangulaire large de 36 bu et long de 48 bu. On demande combien cela fait pour le champ.

« La réponse dit : » 7 mu 2 fen[179]

Méthode : multiplier les 48 bu de la largeur par les 36 bu de la longueur, donne 1728 bu[180]. Diviser par 240 donne 7 mu 2 fen.

Pour le champ rectangle, la multiplication l'une par l'autre de la longueur et de la largeur s'accorde avec les Dix-mille Phénomènes[181]. La préface de Discussion sur l'Origine des Anciennes Méthodes de Monsieur Liu Yi[182] de ZhongShan dit :

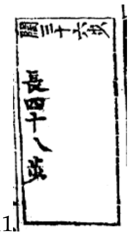
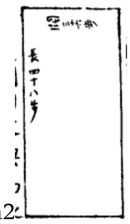
(Pour toutes les procédures mathématiques), quelle que soit la manière dont on les aborde, on se retrouve avec un champ rectangulaire. En effet, il y a cette théorie que le champ rectangulaire a la capacité de s'étendre/se généraliser à tous les usages. Toutes les traditions (dérivant des) canons mathématiques considèrent le champ rectangle comme le premier problème. Ils rejoignent

---

173 Littéralement : « le détail de la méthode ».
174 Dans la direction « est-ouest ».
175 Dans la direction « Nord-sud ».
176 L'une par l'autre. L'algorithme multiplicatif n'est pas représenté dans ce chapitre : voir dès le premier chapitre du traité où sont détaillées « six méthodes de multiplication » (Lay Yong, 1997, p.16 ; m1, p.9)
177 Le nombre de fois où 240 se trouve dans le résultat, donne le nombre de mu (unité de mesure d'aire supérieure au bu). Le reste de la division (euclidienne) par 240 est « laissé » en bu.
178 Une autre solution est de donner les parties décimales de bu (du produit). Ici, les unités de mesure sont les fen (dixième) et li (centième). Ce sont des unités de mesures particulières, qui dépendent de l'unité de mesure supérieure (ici le mu). Le fen vaut un dixième de mu et le li un centième de mu. Le jiǎo lui vaut un quart de mu, est c'est aussi une unité de mesure qui dépend de l'unité supérieure.
179 La réponse est exprimée avec deux unités de mesure (unité de mesure et sous-unité, le mu et le fen). Il s'agit de la division décimale du mu décrite plus haut. En termes de mathématiques d'aujourd'hui, la multiplication donne 1728, soit 7 × 240 et un reste de 48 par division euclidienne. Il est donc possible d'exprimer le résultat comme 7 mu et un reste (je rappelle que diviser les « bu du produit » par 240 donne le nombre de mu). 48 peut s'exprimer comme 2 × 24. Le fen est le dixième du mu, ainsi le reste peut effectivement s'exprimer comme 2 fen.
180 Ici le texte indique la division par 240. Plus tard (voir les alternatives au problème [4]) une autre solution sera proposée.
181 Voir la fin du traité (Lay Yong, p.253) où les équations quadratiques sont associées au rectangle.
182 Yang Hui fait référence à un mathématicien du XIe siècle, Liu Yi de la Dynastie Song, cité comme auteur de ce livre « Discussion sur l'Origine des Anciennes Méthodes » (en chinois : Yi Gu Gen Yuan), aujourd'hui perdu.

également donc tacitement (le point de vue de Liu Yi) / s’accordent tacitement / se rencontrent. 《Avec les trois problèmes suivants on imite le champ rectangulaire. 》

Figures représentées selon les versions à notre disposition :

m1.  m2: 

Légende des figures :

Largeur 36 BU

Longueur 48 BU

Ici aussi, la réponse est donnée en « MU » et « FEN » et non en « *BU* DU PRODUIT ».

Dans les *Neuf chapitres* le système d’unités de mesure de longueur était le suivant :

1 *zhang* = 10 *chi* = 10^2 *cun* = 10^3 *fen* = 10^4 *li* = 10^5 *hao* = 10^6 *miao* = 10^7 *hu*
toise pied pouce part

1 bu = 6 chi

1 li = 300 bu

Le système métrologique (Lam, 1977, p.240-241) est le suivant. Pour les unités de mesure de longueur. C’est le même que dans les *Neuf chapitres* en général, avec la spécificité :

1 *bu* = 5 *chi* = 10 *cun*

1 li = 300 bu

Les unités de mesure d’aire portent ici aussi le nom des unités de mesure de longueur.

L’égalité 1 mu = 240 bu est aussi valable ici[183]. Le système numérique décimal implique l’utilisation de « fen », « li », « liang », « hao », « ssu ». Il s’agit de dixièmes, centièmes, millièmes, etc.

J’ai entrepris de travailler sur ce texte en regardant les « petites variations ». C’est ce texte qui a permis de s’intéresser aux petites variations dans les textes en cunéiforme, ce qui est déjà méthodologiquement intéressant.

En effet, l’auteur propose ensuite, sur des valeurs identiques, des situations de multiplications d’autres grandeurs avec toujours l’accompagnement du diagramme (le

[183] Dans ce texte, le qing n’est pas utilisé.

rectangle). Par exemple « nombre de pesons × poids d'un peson » ou encore « longueur d'un tissu × poids par unité de longueur », etc.

Il semblerait qu'il y ait un déplacement du point d'intérêt. Contrairement au texte précédent issu des *Neuf chapitres,* il ne s'agirait peut-être pas ici d'une illustration géométrique permettant un accompagnement à la bidimensionnalité, ni d'un rapport entre les unités d'aire et la surface, en un seul tenant. Je faisais l'hypothèse que dans le cas précédent, la conversion de l'unité de mesure d'aire (« mu ») ait accompagné un déplacement de l'aire (vue comme une addition d'unités d'aire) en une aire liée à une seule surface donnée.

Le diagramme, donc l'aire du rectangle, ferait plutôt ici un lien d'ordre théorique, par le biais de la géométrie, entre plusieurs multiplications de différentes grandeurs qui sont toujours rapportées à une même aire de rectangle. Ici, l'hypothèse serait que l'unité de mesure est liée à l'expression du nombre en termes de parties décimales (fen, li, liang…)[184]. Cette multiplication accompagnerait donc un travail important sur le nombre. Le travail d'analyse historique reste à faire sur ces points. J'ai tout de même choisi de l'intégrer à cette ouverture, puisqu'il a influencé ma réflexion sur le lien entre le calcul d'aire et les unités de mesure et la conception du nombre.

Je passe maintenant au texte en sanskrit.

4.1.3 L'extrait du commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'Āryabhaṭīya

Voici l'extrait choisi pour cette ouverture, il s'agit d'une glose concernant les « opérations sur les carrés », du commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'Āryabhaṭīya (B.A.B). La traduction est de Keller (2006, p.13-19 vol.1, p.8-10 vol.2). Cet extrait fait immédiatement suite à une discussion sur la définition géométrique du carré. Je vais le présenter, puis expliquer comment l'analyse historico-épistémologique a conduit à s'intéresser particulièrement à l'introduction du traité, en lien avec cet extrait.

Un exemple:

Dis-moi séparément les carrés commençant avec un et finissant avec neuf,
et le carré d'un quart de cent, et aussi <le carré> de cent augmenté de cela.

Disposition: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un quart de cent est 25, cent augmenté de cela, 125.

Les carrés, selon l'ordre des nombres commençant avec un et finissant avec neuf sont obtenus au moyen de « et le résultat du produit des deux mêmes ».

Disposition: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

[184] Il ne faut cependant pas être trop rapide, puis la suite du premier chapitre étudié (champ rectangulaire) des *Neuf chapitres* propose des situations de simplifications de fractions.

> Les carrés des entiers commençant avec un et finissant avec dix doivent être dits par ceux dont les règles caractérisantes sont:
>
> Ayant fait le carré du dernier terme, on doit multiplier deux fois ce dernier terme <respectivement> par les termes restants, se déplaçant encore et encore dans la méthode du carré.
>
> Pourquoi? Parce que lorsque la valeur des carrés est inconnue, on ne peut disposer la valeur du carré du dernier terme. Pour nous cependant, tout est compris au moyen de la caractérisation <d'Āryabhaṭa>.
>
> Le carré du quart de cent est 625; <le carré> de cent augmenté de cela 15 625.
>
> Le carré des fractions est aussi ainsi précisément. Cependant, ayant exécuté l'un après l'autre le carré des deux quantités dénominateur et numérateur ayant été faits identiques (c'est-à-dire réduits au même dénominateur), le résultat de la division du carré de la quantité numérateur par le carré de la quantité dénominateur est le carré de la fraction.

Pour l'analyse historico-épistémologique, il faut noter que l'introduction du traité, qui précède, s'en réfère à la « grille » de carreaux (Keller 2006, p.7-8 vol.1). Je précise que l'enjeu est important, puisque dans le passage que je viens de citer, si le carré est lié textuellement à la géométrie parce que le passage sur la définition du carré précède tout juste celui sur l'élévation au carré, ce sont pourtant subitement de nombres qu'il s'agit. L'introduction de Bhāskara fait référence à la grille de carreaux. Or, les textes en chinois que je viens de présenter incitent justement à s'intéresser avec précaution au lien entre multiplication, aire et conception du nombre. En particulier, l'extrait des *Neuf chapitres* fait référence à la grille par le biais des commentaires. De plus, l'un des enjeux de l'étude historique du présent traité est la compréhension fine de ce que sont les nombres « quantités », et de leur lien potentiel avec la mesure. Je présente donc cette introduction ici. Il s'agit d'une discussion sur la classification des mathématiques en termes « d'additions » et de « soustractions ».

> Les variétés d'accroissement, c'est-à-dire d'additions sont la multiplication et l'involution. Et ceux-ci sont : La multiplication est le produit *(abhyāsa)* de deux quantité différentes, comme vingt est <le produit de> quatre et cinq. L'involution est le produit de <quantités> similaires, <comme> le carré (*varga*) et le cube (*ghana*). Le carré est une double involution, comme seize est <le produit> de quatre et quatre. De la même manière un cube est une triple involution, comme soixante-quatre est <le produit> de quatre, quatre et quatre. (…) Les variétés de la soustraction, c'est à dire du décroissement sont la division et les racines de l'involution. (…) Il en va ainsi dans le traité/dans la discipline et dans le monde il n'y a pas de modes de calcul/genres de mathématiques qui ne soit fait d'accroissement ou de décroissement. (Keller 2006, p.7 vol.1)[185].

Une objection porte sur le fait de voir la multiplication comme quelque chose qui accroît.

> <Objection>

[185] La traduction en français est faite par Agathe Keller pour cette thèse.

> S'il en va ainsi dans ce cas, comment doit-on comprendre le calcul *(prakriyā)* ? Lorsque un quart est multiplié par un cinquième un vingtième est produit. Et cette multiplication a été dite être un type d'addition. Cependant, elle apparaît comme étant un type de soustraction. Lorsque la division d'un vingtième par un quart <est effectuée>, alors un cinquième est vu. Ainsi ce type de soustraction apparait comme un type d'addition. (Keller 2006, p.7 vol.1)[186].

L'exemple de la multiplication portant sur des fractions est donné comme un exemple de multiplication qui « fait décroitre ». C'est à ce moment que l'image de la « grille » est donnée pour réfuter cette objection.

> Dans les deux cas, une réfutation est dite: Dans une figure rectangulaire (*āyatacaturaśra*) de quatre et cinq, il y a vingt figures quadrilatères (*caturaśra*). Dans ce cas la longueur d'un <carré> est un cinquième <de la longueur du rectangle>, la largeur, un quart <de la largeur du rectangle>. Leur produit est l'aire de la figure, un vingtième <de l'aire du rectangle>. Par conséquent 'la division d'un vingtième par un quart' n'est pas fausse. (Keller 2006, p.7-8 vol.1)[187].

Un quart de la largeur multiplié par un cinquième de longueur donne un vingtième de l'aire de la figure. La division d'un vingtième (de l'aire du rectangle) par un quart donne bien géométriquement une « décroissance » puisqu'on passe d'une mesure de surface à une mesure de longueur. Ici, en dehors de la mesure, un lien est pourtant fait entre le nombre la géométrie, et même l'unité d'aire.

Le système métrologique des mesures d'aires est important pour mieux comprendre le concept de nombre. Mais il n'est pas exposé dans le commentaire de Bhāskara. D'autres textes mathématiques évoquent l'existence d'une unité de volume, le *hasta cubique*, qui porte le même nom que celui d'une unité de longueur, le *hasta*. Ainsi, au moins une partie du système, comme dans le système métrique actuel, est dépendant. L'analyse historico-épistémologique m'a donc conduite à me rapprocher d'autres textes (que je présente en partie, dans la partie 4.2) où les unités de mesure sont présentes explicitement. Ces textes soulèvent des questions, l'introduction qui a été présentée apporte des indices. Cela permettra peut-être de participer à mieux comprendre le concept de nombre dans le commentaire de Bhāskara.

Je passe maintenant au tableau récapitulatif. L'analyse de base sur des hypothèses historiques, et précise ce qui n'est pas connu. J'ai utilisé les mêmes critères d'analyse que ceux des sources en cunéiforme. Je présente aussi dans le tableau, le calcul d'aire du carré présent dans UM 29-15-192, ainsi qu'un exemple d'aujourd'hui, en parallèle. Après le tableau, je donne les détails pour chaque point abordé (en ligne).

---

[186] Même remarque.

[187] La traduction en français est faite par Agathe Keller pour cette thèse.

4.1.4 *Tableau d'analyse historico-épistémologique*

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Les *Neuf Chapitres* (extrait choisi)**	**Yang Hui (extrait choisi)**	**Sanskrit B.A.B (extrait choisi)**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Mesure de longueur	2 šu-si	15 bu de largeur 16 bu de longueur	36 bu de largeur 48 bu de longueur (extrait)		2 cm
Unités de mesure de longueur	šu-si	Bu	Bu		cm
Valeur de la mesure de longueur, (longueur, largeur)	2	15,16	36, 48		2
Type d'opération	Multiplication	Multiplication	Multiplication	Multiplication	Multiplication
Autre opération nécessaire	Mise en correspondance Sélection du cycle pertinent Extrapolation	Transformation du rectangle Conversion	Conversion	Disposition	
Nombres à multiplier				-[des nombres] commençant avec un et finissant avec neuf, -un quart de cent, -cent augmenté de cela.	
Nombres multipliés	20 (et 20)	15 et 16	36 et 48	1,2,3,4,5,6,7,8,9, 25 (en chiffres et en tant que quart de 100) 125 (en chiffres et en tant que quart de	2 et 2

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Les *Neuf Chapitres* (extrait choisi)**	**Yang Hui (extrait choisi)**	**Sanskrit B.A.B (extrait choisi)**	**Aujourd'hui** **(exemple choisi)**
				cent « augmenté de cent ») sont élevés au carré (extrait)	
Nombre de nombres utilisés	4	4	5	2 (avec passage par le nombre écrit)	2
Unités de mesure d'aire	še	Bu, Mu	Bu, Mu, Fen		cm^2
Nombre obtenu par multiplicatio n ou addition	6:40	240	1728	Les résultats sont donnés en notant les nombres obtenus. Ceux-ci ne sont pas énoncés en toutes lettres. -1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 -625 -15 625	4
Valeur de la mesure d'aire (ou de volume)	1/3	1	7 (mu) 2 (fen)		4
Forme « logique » de l'unité de mesure		Carré		Carré	Carré
Présence d'un diagramme	NON	« OUI »	OUI	« OUI »	Dans l'initiation au calcul d'aire, oui (manuels)
Rôle de la représentati-on géométrique (existante ou supposée)		Transformati-on Donne du sens à la multiplication	Multiplication d'autres grandeurs par la suite (même diagramme)	Dans l'introduction, et dans le commentaire de la règle qui lie l'aire du carré à un nombre élevé au carré	

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Les *Neuf Chapitres* (extrait choisi)**	**Yang Hui (extrait choisi)**	**Sanskrit B.A.B (extrait choisi)**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Représentati-on « physique » de l'opération mathémati-que	NON	Calcul du nombre de carreaux	« inversée » : multiplication vue comme une aire (quelles que soient les grandeurs en jeu)	Calcul du nombre de carreaux	Calcul du nombre de carreaux
Système numérique associé aux mesures de longueur	Système S -additif -sexagésimal	Base 10	Base 10	Base 10	Base 10
Système numérique associé aux mesures d'aire	Système G -additif -sexagésimal	Base 10	Base 10	Base 10	Base 10
Système numérique associé aux nombres qui sont multipliés	Système SP -positionnel -sexagésimal et décimal				
Système métrologi-que entre unités de mesure de longueur et aire	Indépendant	Indépendant et dépendant	Indépendant et dépendant	Dans l'introduction la valeur numérique de l'aire est donnée en rapport avec les valeurs numériques des longueurs, mais les rapports entre les unités de mesure ne sont pas explicités	Dépendant
Facteurs entre unités de mesure de longueur : constant ?	NON	OUI	OUI	Pas explicité	OUI
Facteurs entre unités de mesure d'aire : constant ?	NON	OUI et NON	OUI et NON	Pas explicité	OUI

	Nippur Paléo-babylonienne UM 29-15-192	**Les *Neuf Chapitres* (extrait choisi)**	**Yang Hui (extrait choisi)**	**Sanskrit B.A.B (extrait choisi)**	**Aujourd'hui (exemple choisi)**
Système numérique et unité de mesure longueur	Indépendant	Dépendant	Dépendant	Le rapport n'est pas explicité	Dépendant
Système numérique et unité de mesure d'aire	Indépendant	Indépendant (facteurs 100 ET facteurs arbitraires)	Indépendant (facteurs 100 ET facteurs arbitraires)	Le rapport n'est pas explicité	Indépendant (facteurs 100)
Existence du système d'unités de mesure d'aire supposée indépendante des unités de mesure de longueur	OUI	OUI et NON	OUI et NON	NON	NON
Ordre de grandeur du résultat	Plus petit qu'une tablette	Champ	Champ	Abstrait (correspond à une classe d'équivalence)	Choisi généralement dans les manuels : cm^2
Ordre de grandeur de la longueur	Plus petit qu'une longueur de bord de tablette	Longueur d'un champ	Longueur d'un champ	Pas donnée	cm^2

Tableau 4-3 : analyse épistémologique : ouverture aux textes en sanskrit et chinois

Mesures de longueur

Ce qui est le plus frappant est le fait que le texte en sanskrit du commentaire de Bhāskara (B.A.B) n'utilise aucune mesure. Il s'agit d'un raisonnement sur des nombres qui peuvent représenter des valeurs numériques de longueur. Dans d'autres textes, nous rencontrons des systèmes métrologiques dépendants, de même que dans notre système. Il faut noter que cela est possible dans le système SP en cunéiforme (par exemple, des valeurs en système SP peuvent être retrouvées sur un diagramme, et représenter « plusieurs possibles »).

Dans les *Neuf chapitres*, l'unité de mesure de longueur sert à exprimer l'unité de mesure d'aire avant conversion dans une autre unité de mesure d'aire, qui n'a pas d'équivalent en unité de longueur.

Valeur numérique de la mesure de longueur et nombre utilisé dans l'opération mathématique

Dans le contexte multiplicatif, et dans le contexte d'une métrologie dépendante, les textes en chinois, en sanskrit et notre méthode actuelle opèrent sur un nombre qui est égal à la valeur numérique de la longueur. En revanche, dans le commentaire de Bhāskara (B.A.B), le nombre utilisé dans l'énoncé, parfois énoncé en toutes lettres (le plus souvent évoqué de manière indirecte) est disposé pour le calcul (en chiffres). Cela pourrait rappeler une « trace » de la distinction entre valeur numérique de grandeur et nombre sur lequel on opère.

Forme logique de l'unité de mesure

Dans le cadre des métrologies dépendantes, la forme logique de l'unité de mesure semble être le carreau. L'extrait des *Neuf chapitres* ainsi que celui de l'introduction de B.A.B font, comme nous, appel à la représentation « grille ».

Présence d'un diagramme

Les nouveaux textes ne nécessitent pas l'usage d'un diagramme pour réaliser l'opération. Dans les *Neuf chapitres*, la « grille » est utilisée dans la discussion conceptuelle sur la multiplication et l'aire.

Dans le commentaire de Bhāskara (B.A.B), la grille est également amenée dans l'introduction, dans une objection liée à l'idée de multiplication comme décroissante. Les nombres ne sont d'ailleurs pas non plus liés à des unités de mesure (ils peuvent représenter des parties de différentes mesures de longueurs ou d'aires) et la discussion porte sur l'algorithme multiplicatif.

Le lien avec le système métrologique « dépendant » permet de ne pas utiliser explicitement l'unité de mesure dans l'algorithme (voir 3.2.3, p.229)

Rôle de la représentation géométrique et représentation physique de l'opération

Dans le cadre des *Neuf chapitres* le diagramme implicite suggéré par l'interprétation historique est fondamental. Il accompagne par une transformation en « bande unité » (voir p.158) le calcul de l'aire du rectangle. Même si le débat sur l'interprétation conceptuelle de l'aire par les commentateurs (« mi » et « ji ») reste ouvert, cette hypothèse a des implications pour la réflexion épistémologique. En effet, l'élaboration d'un système métrique dépendant peut conduire à ne s'intéresser qu'aux mesures de longueur (longueur, largeur) et aux unités de mesure de longueur associées. Il faudra en examiner les implications pour l'enseignement actuel. Ici, la transformation permet de mettre en communication les unités de mesure d'aire (dimension 2) et les unités de mesure de longueur (dimension 1) en fixant la largeur (à 1 bu). D'autre part, l'hypothèse que j'ai soulevée sur l'unité de mesure « mu » s'appuie sur la distinction de deux types d'unités de mesure. Celles qui sont liées aux unités de mesure de longueur (comme les « bu ») dans une métrologie dépendante ; et celles qui sont indépendantes. Les conversions en unités de mesure indépendantes accompagneraient une transformation conceptuelle de la multiplication liée dans le premier cas à une quantité (une multiplicité de surfaces unité) et dans le deuxième cas à une surface en un seul tenant (comme un tissu).

Selon l'hypothèse historique la multiplication se révèlerait être un compte de carreaux, ayant également comme parallèle une transformation géométrique accompagnant la bidimensionnalité en se servant du caractère dépendant du système métrique.

Enfin, même si l'introduction du commentaire de Bhāskara (B.A.B) pose encore beaucoup de questions d'interprétation, la « grille » est associée à une discussion sur le fait de voir la multiplication comme décroissante. La multiplication serait bien liée également à un compte de carreaux. Le vingtième de champ (soit un carreau) divisé par un quart de la largeur, produit une longueur. Cette discussion fait émerger l'hypothèse d'un lien conceptuel qui serait fait entre extension ou diminution avec le passage de la longueur à l'aire et inversement[188].

Système numérique et systèmes métrologiques

Dans les *Neuf chapitres*, le système en base 10 est lié au système d'unités de mesure de longueur (facteurs 10). Le système métrologique est dépendant (« bu du produit », facteurs 100) sauf pour certaines unités de mesure d'aire qui restent « indépendantes ».

Dans le commentaire de Bhāskara (B.A.B), le système métrologique est mal connu.

Ordre de grandeur

Les ordres de grandeur sont ceux de champs (parfois de très petits champs) pour les *Neuf chapitres*. Ils permettent une conversion du « bu » (du produit) en « mu » et du « li » (du produit) en « qing ». Aucun ordre de grandeur n'est donné dans commentaire de Bhāskara (B.A.B).

Expression de la mesure d'aire : plusieurs possibilités ?

Les Neuf chapitres proposent deux possibilités pour la mesure d'aire (une seule est donnée en réponse, l'autre est mentionnée comme transitoire dans la procédure). J'ai déjà évoqué l'hypothèse selon laquelle cette transition a une importance conceptuelle.

Il n'y a pas de possibilité de savoir comment la mesure d'aire serait exprimée avec le commentaire de Bhāskara (B.A.B).

Avant de conclure sur ces textes, je présente dans cette ouverture, d'autres situations multiplicatives que j'ai étudiées en début de thèse.

4.2 Notes sur d'autres situations multiplicatives (cunéiforme, chinois, sanskrit)

Je n'ai pas pu étudier, pour cette thèse, les autres situations multiplicatives, du point de vue de la didactique. Je n'ai pas non plus entamé de travail historique sur ces textes que j'ai découverts en début de thèse (voir la chronologie de ma recherche, p.20). Je n'en parlerai donc que très rapidement, en quelques phrases. J'ai souhaité le faire, parce qu'ils ont participé à la réflexion, du point de vue notamment des unités de mesure.

De plus, ils constituent une bonne ouverture. Ces textes replacent en effet le débat dans un contexte plus large et montrent à quel point ces questions épistémologiques sont à la fois profondes, et touchent à un large domaine.

[188] De façon anachronique, cela fait penser à l'équation aux dimensions, qui conceptuellement semble attachée à une forme de transformation d'une dimension à l'autre par multiplication.

Je ne parlerai pas ici de l'algorithme de multiplication, mais là aussi il y aurait beaucoup à dire. Je présenterai donc en Annexe un travail fait avec Agathe Keller et Catherine Singh sur la multiplication et la règle de trois, pour les lycéens.

La règle de trois : YBC 4698

J'ai rencontré la règle de trois dans les textes en chinois, sanskrit et cunéiforme. Je ne parle ici que d'un texte en cunéiforme, mais j'avais fait en début de thèse, une sélection de textes qui me paraissent intéressants sur ces thèmes, pour les trois zones géographiques citées, notamment dans les *Neuf chapitres*, et pour les textes en sanskrit, dans un ensemble de sources que je présente en Annexe (travail présenté au lycée).

J'évoque simplement la tablette cunéiforme YBC 4698 qui présente des problèmes économiques de la période paléo-babylonienne. L'article que j'ai étudié pour la thèse est celui de Proust et Middeke-Conlin (2014). Le système métrologique et les systèmes numériques sont du type de ceux que j'ai présentés précédemment (voir p.36). C'est-à-dire que les grandeurs sont exprimées dans des systèmes numériques différents des nombres en système SP (voir p.36). Ce qui est particulièrement intéressant pour mon propos, c'est que le système SP est utilisé, là aussi, et fait le lien entre les différentes grandeurs mobilisées par cette situation multiplicative. Ce point donne des informations sur les nombres en système SP, qui pourraient effectivement avoir un rôle conceptuel de mise en communication de grandeurs de type différent.

Le volume : la tablette YBC 4663 et le commentaire de Pṛthūdaka sur le Brahma-sphuṭa-siddhānta

Pour le calcul du volume je me suis intéressée à l'article de Proust (*à paraître*) qui porte entre autres, sur la tablette en cunéiforme, YBC 4663. Les problèmes 1 et 2 montrent comment calculer un volume. Dans le premier problème, il s'agit d'une tranchée de longueur 5 *ninda*, de largeur 1 1/2 *ninda* et de profondeur 1/2 *ninda*. L'implicite est qu'il s'agit d'un prisme à base rectangulaire. Le problème s'intéresse ensuite au volume de terre à enlever et à la paie des employés, par jour. Ce qui m'intéresse ici est que pour évaluer la base, il faille construire un rectangle (Høyrup 2002, p.44) avec la longueur et la largeur. Le résultat est donné en nombre en système SP (ici, 7:30, produit de 5 et 1:30 qui sont les nombres associés à 5 *ninda* et 1 1/2 *ninda* en système SP, avec les tables métrologiques). Puis, 7:30 est "élevé à sa profondeur", selon le vocabulaire employé par le texte, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 6. La table métrologique des hauteurs donne 6 en système SP pour 1/2 *ninda*. Le travail par jour est ensuite calculé.

Dans le problème 2, en revanche, la notion de base élevée selon une profondeur est remplacée par un produit formel de largeur × profondeur qui n'a pas de réalité géométrique, du moins il n'existe pas de table métrologique pour exprimer ce produit en mesure d'aire. Le produit est ensuite multiplié par la longueur.

Il y a donc peut-être une dynamique qui se crée autour du nombre en système SP, qui détache l'algorithme du parallélisme avec la géométrie.

Je me suis également penchée sur le calcul du volume dans le commentaire de Pṛthūdaka (ca. 850) sur le *Brahma-sphuṭa-siddhānta* (628) de Brahmagupta (PBSS), dans le cadre de la sélection de textes en sanskrit qu'Agathe Keller et moi avons faite (travail qui sera présenté ultérieurement). Le texte présente des similitudes avec l'élévation au carré dans le commentaire de Bhāskara (B.A.B) exposé précédemment. Mais ici, un exemple est donné, ainsi que des unités de mesure.

> Un exemple
>
> Une citerne à quatre cotés égaux mesurant le cube de trois *hasta*, il en va de même de sa profondeur. Dis la valeur de sa contenance cubique (*ghanātmaka*).
>
> Disposition: les cotés et la profondeur: 27, 27, 27.
>
> Le produit de ces trois mêmes est 19683.
>
> La valeur en *hasta* cubiques d'un solide ayant douze côtés *(aśri).* Il a été dit (Ab.2.5?) « la multiplication de trois même est le cube c'est a dire un solide de douze côtés ».
>
> Ainsi est déterminée une autre méthode[189].

L'enjeu ici est que ce texte invite à regarder avec précaution le texte de B.A.B qui a été présenté précédemment. Si les unités de mesure sont absentes, cet autre texte (PBSS) montre qu'elles peuvent facilement être implicitées. Conclure à un caractère théorique de B.A.B par absence de mesures « concrètes » serait trop simpliste, d'une part parce qu'historiquement la théorie n'exclut pas forcément les mesures, d'autre part parce que les mesures peuvent être sous-entendues.

De plus, avoir des informations sur le concept de nombre dans B.A.B nécessite de prendre en compte ces précautions issues d'un autre traité. Les mesures peuvent avoir laissé des traces conceptuelles et historiques dans la façon dont sont décomposés les nombres, dans la disposition, etc.

La division

J'ai rencontré la division (en Chine) dans l'article de Karine Chemla (Chemla, *à paraître*) qui s'intéresse au concept de fraction et de division. Récemment, un grand nombre de documents mathématiques ont été trouvés dans des tombes scellées. Karine Chemla soutient qu'ils permettent de percevoir un changement dans la façon dont les divisions ont été faites entre la fin du troisième siècle avant notre ère et le premier siècle avant notre ère. Le point clé est que, tout au long de la procédure, cette exécution de la division accorde une place de choix aux changements d'unités, et en particulier aux divisions d'unités en unités plus petites. Reconstruire cette procédure observable plus ancienne pour exécuter la division a permis à Karine Chemla de faire avancer l'hypothèse selon laquelle le concept de fraction attesté dans les plus anciens documents mathématiques existants en chinois pourrait avoir surgi en relation avec, ou même dans le contexte de, ce mode précédent d'exécution de la division observé dans la Chine ancienne. (Chemla 2014, p.174-176). L'idée générale est que la division était perçue comme un changement d'unité d'un bout à l'autre de l'algorithme.

La dernière phase de la division est une phase clé pour cette hypothèse. Elle peut être interprétée, à l'instar des phases précédentes, comme reposant sur une « dissection » des unités restant dans le dividende et une refonte de ces unités en fonction du diviseur. Cependant, contrairement aux phases précédentes, elle permet de formuler directement le résultat de cette dissection en accordant une nouvelle signification aux unités du reste.

> [...] Dans le texte 2 du livre des procédures mathématiques, phase 4 lit: « Ce qui ne remplit pas le cun (c'est-à-dire le reste du dividende), on nomme les parties (fen) avec le diviseur.» [...] Les unités dans le

[189] Traduction d'Agathe Keller pour cette thèse

> reste sont maintenant appelées "parties", leur nom dérivant du motif appliqué à la dernière unité de mesure considérée dans le quotient. Le terme fen utilisé dans tous ces cas est le même que celui qui se réfère plus haut à « division en parties » ou au « partage ». Enfin, l'idée que nous suggérons conduit à l'introduction de fractions dans le contexte de ce type d'exécution et concorde avec la terminologie utilisée pour désigner les fractions au moins à partir de l'époque des manuscrits [...] Le fait d'avoir effectué des divisions de manière à produire des quotients, petit à petit, en tant que grandeurs mesurées, aurait pu jouer un rôle dans l'introduction des quantités fractionnaires recensées au début de la Chine impériale. Dans le contexte analysé, les quotients ont été produits le long d'une séquence d'unités de mesure. La mise en forme de leur dernier segment répond à la question de savoir quelle unité de mesure doit être utilisée pour terminer l'opération. Ceci peut avoir été réalisé en utilisant les mêmes idées que celles impliquées dans les phases précédentes de l'opération. (Chemla, 2014, p.192-194)[190]

Il y a donc là encore, un lien conceptuel étroit entre le nombre et l'unité de mesure, tissé à travers les étapes de l'algorithme.

Je récapitule maintenant avec un tableau, en me basant sur des hypothèses historiques à renforcer, ce que pourrait apporter un travail épistémologique sur ces situations multiplicatives.

[190] Traduction en français de ma part, pour cette thèse.

4.2.1 Un tableau comparatif des concepts dans diverses situations multiplicatives

Cette étude n'est qu'une ébauche, et nécessiterait pour la poursuivre, des recherches en didactique comme en histoire. J'ai toutefois souhaité donner une idée de ce que la rencontre avec ces articles peut produire comme questionnement épistémologique.

	Règle de trois Paléo-babylonienne	**Volume Paléo-babylonien**	**Division Chine**	**Volume sanskrit PBSS**
Présence de l'unité de mesure pour exprimer les grandeurs	OUI	OUI	OUI 119000 li Divisé par 182 + 5/8 de jour	OUI (*hasta* et *hasta* cubique) Le cube de trois *hasta*
Nombre multiplié ou divisé	Nombre en système SP	Nombre en système SP	sept cent quatre-vingt-dix-huit [parties] du bu divisées en mille quatre cent soixante et une parties	Nombre seul (27)
Valeur numérique de grandeur	Différente du nombre multiplié	Différente du nombre multiplié	Une conversion a été effectuée	Différence lettre/chiffre
Multiplication ou division	Nombre SP	Nombre SP	Nombres	Nombre

	Règle de trois Paléo-babylonienne	**Volume Paléo-babylonien**	**Division Chine**	**Volume sanskrit PBSS**
Autre opération mathématique		Après calcul de la surface en système SP, l'« élévation » permet de calculer le volume. Cette seconde multiplication correspond à l'addition d'unités de volumes de hauteur « 1 ». Mais le « 1 » utilisé est un nombre en système SP		Addition de 19 683 unités de volume C'est le volume du cube d'arête 27
Division			La division transforme le quotient en fonction des unités de mesure	
Lien entre l'expression du nombre et le système d'unités de mesure (avec des facteurs différents de la base de numération)	NON	NON	OUI	NON
Indépendance des facteurs entre unités de mesure des grandeurs concernées	OUI	OUI (entre longueurs et largeurs ; surfaces et hauteurs)		Il semblerait que NON

	Règle de trois Paléo-babylonienne	**Volume Paléo-babylonien**	**Division Chine**	**Volume sanskrit PBSS**
Représentation géométrique, diagramme	NON	NON (mais il semble qu'il y ait des traces de ce raisonnement)	NON	OUI Ceci est la valeur/le volume en *hasta* cubiques c'est à dire qu'il existe dans cette citerne exactement <autant d'> excavations de douze cotés dont la mesure est <un> *hasta*

Tableau 4-4 : comparaison des concepts dans diverses situations multiplicatives

4.3 Conclusion pour cette ouverture vers des exemples tirés de sources en chinois, sanskrit et cunéiforme

Le travail de recherche qui a permis de constituer l'analyse historico-épistémologique a conduit à réunir des textes en chinois, sanskrit et cunéiforme. Ces textes ont suscité des questions qui ont donné lieu à des analyses historiques (elles seront publiées ultérieurement).

En résumé, premièrement, l'ébauche d'analyse du commentaire de Bhāskara (B.A.B), en lien avec l'introduction dans le cadre géométrique, participe à affirmer l'importance d'étudier les nombres ou quantités (les « *r*āśi ») et leur lien au système métrologique. Il existe dans d'autres textes en sanskrit la présence d'un contexte savant et d'unités de mesure, ce qui n'est pas le cas ici. L'existence d'autres équilibres montre que la mesure, même si elle n'est pas explicite, n'est pas absente du débat et peut avoir une influence sur le concept de nombre et ses représentations ainsi que son traitement dans un algorithme[191]. Je n'ai pas beaucoup exploité ces questions dans la partie didactique de la thèse, mais je présenterai des travaux sur le lien entre système métrique et numération. Ce sont des questions qui ont été traitées également par les historiens, par exemple dans le contexte du projet SAW, par Marc Moyon (Moyon, 2016). Cette dernière communication a particulièrement influencé mes questions.

Deuxièmement, enseigne-t-on la distinction surface/aire-nombre pour l'unité de mesure ? Existe-t-il des conversions qui ont un sens conceptuel dans notre système actuel, comme c'est peut-être le cas dans les *Neuf chapitres* entre le « mu » et les « bu du produit » ou dans la tablette cunéiforme W 23-291 (avec la conversion en mesure de capacité)? Les *Neuf chapitres* semblent exploiter les relations du système métrologique (quasi-dépendant) pour accompagner la bidimensionnalité par une transformation du rectangle (bande-unité). Les transformations liées à la forme de l'unité de mesure, les conversions, semblent avoir un sens profond qui incitent à voir l'unité de mesure comme un objet conceptuel à étudier dans les différents registres dans lesquels elle agit.

Troisièmement, le texte en chinois de Yang Hui a été sélectionné parce que l'analyse historico-épistémologique avait orienté mon regard vers l'aire du carré et du rectangle. Ce texte présente des points intéressants liés à des petites variations dans l'utilisation du diagramme pour faire le lien entre les grandeurs, et une vision particulière de la multiplication. Il a ensuite suscité le travail sur les « petites variations » des tablettes en cunéiforme, du fait de son organisation très répétitive, avec une variation dans les grandeurs abordées mais sur les mêmes valeurs numériques. Il incite, comme les *Neuf chapitres* et le système SP en cunéiforme (règle de trois, aires, volumes), à s'interroger sur la valeur

[191] L'ensemble des textes de la sélection invite d'une manière générale, à s'interroger sur les liens entre le système métrologique et le concept de nombre. L'article sur la division en chinois, qui pourrait être vue comme une transformation du nombre en fonction des unités de mesure ; l'influence du système SP sur le parallélisme entre l'algorithme et la représentation géométrique qui n'est plus possible ; la traduction de Yang Hui qui met en relation diagramme, aire, multiplication et système décimal, conduisent à explorer cette relation. Lorsque le parallélisme entre algorithme et représentation géométrique n'est plus aussi évident (que par exemple, dans la tablette cunéiforme VAT 12-593), il semble que de nouvelles conceptions puissent se créer plus ou moins implicitement (par exemple, la construction d'un carré d'aire donné peut être liée conceptuellement à la multiplication).

conceptuelle de la mise en communication de grandeurs de type différents par la multiplication.

Quatrièmement, le commentaire de Bhāskara (B.A.B) n'utilise aucune mesure. Il s'agit d'un raisonnement sur des nombres qui peuvent représenter des valeurs numériques de longueur facilement, du fait du système métrique dépendant, de même que dans notre système. Dans le contexte multiplicatif, et dans le contexte d'une métrologie dépendante, les textes en chinois, en sanskrit et notre méthode actuelle opèrent sur un nombre qui est égal à la valeur numérique de la longueur. En revanche, dans le commentaire de Bhāskara (B.A.B), le nombre utilisé dans l'énoncé, évoqué indirectement, est disposé pour le calcul (en chiffres). Cela pourrait rappeler une « trace » de la distinction entre valeur numérique de grandeur et nombre sur lequel on opère. Cela fait penser à la façon dont la tablette UM 29-15-192 prend une mesure en entrée de l'algorithme et opère sur un nombre (en système SP). Le système métrique dépendant permet ainsi des « raccourcis » dont les conséquences sont à étudier.

Cinquièmement, dans le cadre des métrologies dépendantes, la forme logique de l'unité de mesure semble être le carreau. L'extrait des *Neuf chapitres* ainsi que celui de l'introduction de B.A.B font, comme nous, appel à la représentation « grille ». L'usage d'un diagramme pour réaliser l'opération n'est pas nécessaire. Pourtant il est évoqué dans les textes sélectionnés. Dans les *Neuf chapitres*, la « grille » est utilisée dans le débat entre les commentateurs. Dans B.A.B, elle est également amenée dans l'introduction. Dans le cadre des *Neuf chapitres* le diagramme implicite suggéré par l'interprétation historique est fondamental. Il accompagne par une transformation en « bande unité » (voir p.158) le calcul de l'aire du rectangle. La conversion pourrait aussi avoir un rôle conceptuel important, passant de la multiplicité (d'aires unité) à l'étendue du rectangle en un seul tenant (surface).

Je termine cette ouverture, et donc le Chapitre I, par des questions. Quel rôle donne-t-on au diagramme, dans les textes, aujourd'hui ? Comment l'algorithme est-il accompagné dans le registre des figures, les opérations y ont-elles un parallèle naturel, ou suscitent-elles de nouvelles représentations ?

Avons-nous pensé l'accompagnement, dans le cadre bidimensionnel, entre unité de mesure de longueur et unité de mesure d'aire, comme c'est le cas dans les *Neuf chapitres* ? Comment est négocié le passage du cadre additif au cadre multiplicatif ?

Comment l'unité de mesure d'aire est-elle utilisée du point de vue de la forme ? Enseigne-t-on la distinction surface/aire-nombre, pour l'unité de mesure ? Existe-t-il des conversions qui ont un sens conceptuel dans notre système actuel ?

CHAPITRE II - ANALYSE DIDACTIQUE PREALABLE A L'EXPERIMENTATION EN CLASSE

1 INTRODUCTION

Le travail réalisé dans le premier chapitre a permis, par l'analyse des textes historiques choisis, de faire émerger une diversité d'approches des concepts qui entrent en jeu dans le calcul d'aire. Cette démarche a d'une part, mis en évidence des questions qui se posent sur le calcul actuel (voir 3.1, p.149). Elle a permis d'autre part, de distinguer un certain nombre d'objets mathématiques concernés par le calcul d'aire, dont il faudra étudier comment ils sont présentés aux élèves.

Cette introduction est constituée de deux parties.

- Dans la première partie je vais exposer la façon dont j'utiliserai le présent chapitre dans la démarche expérimentale didactique (mon ingénierie didactique), conduisant à une expérimentation en classe de seconde.
- Dans la deuxième partie de l'introduction je vais préciser les liens entre le premier chapitre et le présent chapitre. En effet, grâce aux allers-retours entre histoire et didactique, l'analyse historico-épistémologique a conduit à dégager les points suivants, qui sont liés au calcul de l'aire du carré :

-la conception du nombre
-le lien entre opération physique et opération sur les nombres
-l'entrée en jeu de la bidimensionnalité
-la conception de l'unité de mesure
-l'opération et son lien avec l'opération physique, ainsi que les objets mathématiques qui entrent en jeu
-le mesurage
-le recours au cadre géométrique
-l'algorithme
-les implications du système métrologique

Le fait de pouvoir nommer ces distinctions, observées dans les textes anciens, doit beaucoup à la recherche en didactique qui a déjà été menée. Je vais maintenant expliciter comment l'analyse historico-épistémologique a conduit à réunir des travaux de recherche en didactique issus de différents champs, atour des points que j'ai cités.

1.1 Situation du présent chapitre dans ma démarche, du point de vue de l'expérimentation en classe

Le présent chapitre me sert d'analyse préalable à l'expérimentation en classe (chapitre III), mais il a aussi d'autres finalités (voir 1.2). Comme mentionné en introduction de cette thèse, la partie didactique s'inscrit dans le cadre de l'ingénierie didactique (Artigue, 1989, p.288), voir p.16. Il s'agit d'une méthodologie de recherche expérimentale en plusieurs étapes.

La première étape : les analyses préalables, consiste en général en une analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement (en l'occurrence, il s'agit du Chapitre I), une analyse de l'enseignement usuel et de ses effets, une analyse des conceptions des élèves (ainsi que des difficultés et obstacles), une analyse du champs de contraintes dans lequel se situe la réalisation effective, et une prise en compte des objectifs spécifiques de la recherche.

Deuxièmement, à la suite des analyses préalables, l'analyse *a priori* précède l'expérimentation qui est alors suivie d'une analyse *a posteriori*.

J'utiliserai ici le premier chapitre de cette thèse (qui a également ses finalités propres pour l'histoire et l'épistémologie), comme analyse épistémologique pour la préparation de l'expérimentation en classe, (voir p.16).

Je récapitule ici les différentes étapes :

-1. les analyses préalables comprenant :

- l'analyse épistémologique (elle utilise les résultats du Chapitre I)

- les autres analyses :

  un récapitulatif des travaux de recherche en didactique, analysant les conceptions des élèves, ainsi que des difficultés et obstacles (Chapitre II)

  une analyse de l'enseignement usuel et de ses effets : elle passe par une analyse de manuels scolaires de CM2 (Chapitre II)

  une analyse du champ des contraintes dans lequel se situe la réalisation effective, et prise en compte des objectifs spécifiques de la recherche (Chapitre III)

-2. une analyse *a priori* (Chapitre III)

-3. une description de l'expérimentation (Chapitre III)

-4. une analyse *a posteriori* (Chapitre III)

Je me suis servi du Chapitre I, dans la présente partie, comme analyse épistémologique des contenus (dans le cadre de mon ingénierie didactique).

Le présent chapitre fournit donc la suite de l'analyse préalable à l'expérimentation en classe de seconde. L'analyse de l'enseignement usuel prend pour moi la forme d'une analyse de manuels scolaires[192], tandis que l'analyse des conceptions des élèves, ainsi que des difficultés et obstacles, se base sur des travaux de recherche antérieurs que je cite, en didactique.

Dans le chapitre III, l'analyse du champ des contraintes dans lequel se situe la réalisation effective, et une prise en compte des objectifs spécifiques de la recherche, seront traités.

Les autres étapes seront détaillées dans le chapitre III également : ce que l'on appelle l'analyse *a priori* consiste en l'exposition des effets hypothétiques de la séance sur les élèves.

---

[192] J'ai précisé que j'ai conscience des limites d'une analyse de manuels au regard d'une analyse des pratiques.

Ce que l'on appelle l'analyse *a* posteriori consiste à confronter cette analyse *a priori* avec les résultats obtenus sur le terrain.

Je note que dans le chapitre II le dialogue entre histoire et didactique va servir à dresser une grille d'analyse de manuels scolaires de CM2, afin d'avoir un accès (certes, indirect et partiel[193]) aux pratiques actuelles d'enseignement du calcul d'aire. Il sert ainsi des aspects qui peuvent avoir une application directe sur le terrain : une expérimentation en classe d'une part, et les premières conclusions de l'analyse de manuels, d'autre part.

1.2 Autres objectifs du présent chapitre

Dans le cadre plus général de ma thèse, ce deuxième chapitre a pour objectif de faire dialoguer les résultats de l'analyse épistémologique avec les travaux de recherche en didactique. Il me donnera la possibilité d'approfondir la réflexion sur la place des unités de mesure dans l'enseignement des mathématiques, dans le cadre de la transition du registre des figures aux registres des nombres et symboles (Duval, 1993, voir aussi 2.2.1, p193).

Plus généralement, cette analyse me permettra d'aborder la question de l'apport du dialogue entre histoire et didactique (Chapitre I), pour la recherche en didactique. En effet, je vais expliciter comment l'analyse historico-épistémologique m'a conduite à réunir des travaux de recherche en didactique issus de différents champs.

1.3 Plan et méthodologie

Le travail épistémologique (Chapitre I) m'a conduite à m'intéresser précisément à la question de la conceptualisation des unités de mesure, au sein du calcul d'aire, et dans les différents registres de représentation des aires (figures, nombres, symbolisme). En CM2, les formules de l'aire du carré et du rectangle sont introduites initialement dans le cadre géométrique, puis amenées dans le cadre algébrique et arithmétique. Certaines questions soulevées par l'analyse épistémologique me serviront à analyser cette transition de la géométrie à l'arithmétique.

Le chapitre est constitué :

- d'une introduction à certaines façons d'enseigner la formule de l'aire du carré et du rectangle en CM2 que j'ai repérées dans les manuels (voir 2, p.182)
- d'une sélection de travaux de référence (qui sont résumés), en recherche en didactique, sur l'aire et la mesure (voir 3, p.193)
- d'une sélection de travaux (résumés) sur le savoir savant à enseigner (voir note 5, p.16), en lien avec l'aire et la mesure (voir 3.2, p.225)
- d'une analyse croisée des informations précédentes avec les points clé soulevés par l'analyse épistémologique (Chapitre I), qui aboutira à une grille d'observation (voir 4, p.230)
- et enfin, d'une analyse de manuels scolaires de CM2, basée sur cette grille d'observation (voir 5, p.238).

Pour la sélection de recherches de référence sur la didactique de l'aire et de la mesure et concernant le savoir savant à enseigner, je me suis basée sur les travaux déjà existants. La présentation de ces travaux est intrinsèquement liée à l'analyse historico-épistémologique, qui a conduit à les sélectionner ; d'autre part les travaux de didactique ont conduit à observer les textes anciens sous un angle particulier et à créer des catégories.

---

[193] Voir page suivante.

Il y a un très grand panel de références sur le sujet de l'aire et la mesure. Parmi les travaux que j'ai rencontrés, j'ai choisi ceux qui apportaient une réflexion spécifique qu'il était possible de mettre en lien avec la question précise de la transition d'un cadre géométrique à un cadre arithmétique et algébrique, autour des unités de mesure (voir aussi 2.2.1, p. 193).

L'analyse de manuels scolaires ne donne bien évidemment pas accès directement aux pratiques réelles des enseignants (voir Gueudet et Trouche (dir.), 2010). Il est aussi possible que pour remédier à des informations incomplètes, ou par une attitude critique devant les choix de certains manuels, les enseignants aient trouvé leur propre façon de combler ou modifier l'information auprès des élèves[194]. Je fais quand même l'hypothèse que l'analyse des manuels scolaires et des guides du maître, dans la mesure où ceux-ci reflètent les programmes officiels, me permettra de donner un aperçu du terrain sur lequel se base l'expérimentation et donc de guider efficacement la conception de l'expérimentation.

2 Introduction de l'aire du carre et du rectangle en CM2 dans les programmes et certains manuels de CM2

Je vais présenter les étapes de l'introduction de la formule de l'aire du carré et du rectangle, en CM2, dans une sélection de manuels scolaires que j'ai consultés. Cela me permettra de pouvoir faire référence à ces étapes par la suite. Je présente ici le type d'introduction qui se retrouve le plus couramment dans les manuels, et qui est en cohérence avec les programmes. Il y a en fait beaucoup de nuances d'un manuel à l'autre. Je les présenterai dans l'analyse des manuels, (voir 5, p.238).

Dans cette présentation, je commencerai à détailler ce qui est précisé aux élèves et ce qui reste implicite, du point de vue conceptuel, notamment autour de l'unité de mesure d'aire.

Ensuite, j'expliquerai comment les questions issues de l'analyse historico-épistémologique se sont transformées pour traiter cette question en particulier.

2.1 Etat des lieux : programmes et manuels

2.1.1 Les grandeurs dans les recommandations officielles

Avant cela, voici la façon dont les programmes, selon Eduscol 2016[195], situent l'enseignement de l'aire dans le cursus scolaire, et les étapes préconisées pour l'enseignement d'une grandeur donnée :

-il est demandé de faire un premier travail sur le concept indépendamment de la mesure, via des comparaisons directes (par exemple l'aire de deux surfaces, par découpage-recollement), puis indirectes à l'aide d'un outil intermédiaire (par exemple, une unité de mesure arbitraire)

---

[194] La présente analyse des manuels scolaires pourrait d'ailleurs, dans un deuxième temps, être confrontée aux pratiques.

[195] On retrouve la même approche en 2008, voir par exemple le B.O hors série 3 du 19 Juin 2008 à l'adresse : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/approndissements.htm

> Il faut prendre le temps de construire chacune des grandeurs étudiées à l'école primaire avec les élèves, ce qui implique de travailler dans un premier temps les grandeurs pour elles-mêmes, indépendamment des mesures, en invitant les élèves à observer un objet ou comparer plusieurs objets selon différents points de vue. Il est important en effet qu'à de multiples occasions les élèves constatent que l'on peut associer plusieurs grandeurs à un même objet : par exemple, pour un objet de forme parallélépipédique, on peut considérer l'aire de l'ensemble ses faces, son volume ou encore sa masse. Un autre objet de forme parallélépipédique peut avoir le même volume, une aire de l'ensemble de ses faces plus grande, et une masse plus petite. La comparaison des deux solides nécessite donc l'identification précise des critères de comparaison. Comparer des solides selon une grandeur donnée développe chez les élèves la capacité à prendre de la distance par rapport à un objet, à mettre de côté certaines données observables pour n'en cibler qu'une seule ; il s'agit là d'une première étape vers l'abstraction et la modélisation. (Eduscol, 2016, p.2)

-puis il y a introduction de l'unité de mesure standard pour mesurer la grandeur

> Dans un deuxième temps, lorsque la grandeur retenue est bien identifiée, il sera alors possible d'introduire une puis plusieurs mesures associées : par exemple, la notion de masse étant acquise on pourra introduire sa mesure en kilogramme. Les apprentissages se construisent progressivement tout au long des quatre cycles de l'école et du collège. (Eduscol, 2016, p.2-3)

Voici le résumé des étapes de l'enseignement de grandeurs, par cycle. Le cycle 1 correspond à la maternelle, le cycle 2 aux niveaux CP, CE1, CE2 (de 6 à 8 ans), le cycle 3 aux CM1, CM2 et 6^{e} (collège), soit de 9 à 11 ans ; le cycle 4 aux classes de 5^{e}, 4^{e}, 3^{e} (collège), soit de 12 à 14 ans.

> • Au cycle 1, les élèves constituent des collections de taille donnée et déterminent des tailles de collections dès la petite section. Par des observations, des comparaisons directes et des tris, les élèves sont amenés à distinguer certaines grandeurs : longueur, masse ou contenance.
>
> • Au cycle 2, les élèves travaillent sur les grandeurs suivantes : taille des collections (nombre cardinal), longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit de prendre conscience qu'un objet peut être considéré selon plusieurs grandeurs : sa longueur, sa masse, sa contenance, etc. Quelques unités usuelles sont progressivement introduites, elles prennent sens en invitant les élèves à déterminer des mesures par report et comptage d'unités élémentaires, puis à l'aide d'instruments simples comme la règle graduée, mais aussi en leur faisant estimer des mesures de grandeurs. Les élèves commencent à se constituer un répertoire de mesures de certaines grandeurs auxquelles ils peuvent se référer pour estimer d'autres mesures.
>
> • Au cycle 3, en plus de la poursuite du travail sur les grandeurs rencontrées au cycle 2, s'ajoutent les grandeurs aire, volume et angle, et des unités de mesure associées sont progressivement introduites. Les préfixes utilisés pour les unités (de milli- à kilo-) doivent être connus des élèves en fin de cycle. L'utilisation de ces préfixes permet, tout au long du cycle, de renforcer le travail sur les nombres entiers et décimaux. L'utilisation des nombres et des opérations arithmétiques permet de résoudre des problèmes impliquant les grandeurs étudiées. Des formules pour calculer des mesures de grandeurs sont progressivement établies et régulièrement utilisées (aire du rectangle, longueur du cercle, volume du pavé droit, etc.).
>
> • Au cycle 4, le travail se poursuit sur les grandeurs étudiées aux cycles précédents. Des formules supplémentaires sont établies pour déterminer les volumes des solides usuels. Les notions de grandeurs produit ou quotient, qui ont pu être rencontrées aux cycles 3 (vitesse, débit, coefficient de

proportionnalité, etc.), sont formalisées. Les élèves étudient l'effet d'agrandissement ou de réduction sur les longueurs, les aires ou les volumes (Eduscol, 2016, p.3)

Ces recommandations font une distinction entre la grandeur, la mesure de la grandeur et l'objet qu'elle caractérise. Cette distinction est faite dans les travaux de recherche, mais généralement pas dans les manuels destinés à l'enseignement, ni dans le vocabulaire de tous les jours. Cette partie du savoir de référence n'est que peu ou pas transposée. Je reviendrai par la suite sur des distinctions supplémentaires qui peuvent être apportées sur ces points.

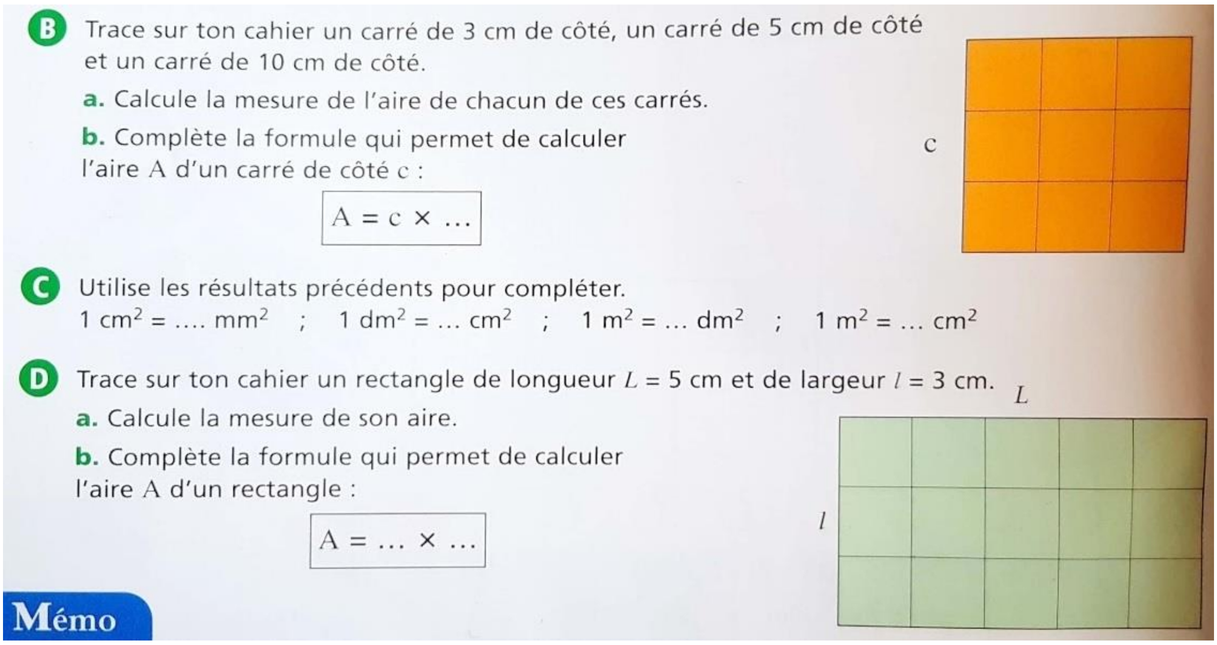
Objet (exemples)	**Grandeur** : (concept, propriété, caractéristique)	**Mesure**[196] : (mesure de la grandeur dans une unité de mesure choisie)
Rectangle	Aire	3 cm^2 (mesure de l'aire de la surface, dans l'unité de mesure cm^2)
Segment	Longueur	3 cm (mesure de la longueur du segment, dans l'unité de mesure cm^2)
Secteur angulaire	Angle	90°
Solide	Volume	3 cm^3

Tableau 2-1 : distinctions dans le vocabulaire concernant les grandeurs

2.1.2 L'aire du carré et du rectangle : la grille

Dans cette partie, je vais donner une idée globale des pratiques qui sont généralement trouvées dans les manuels scolaires. Il s'agit d'un discours général, donc peu précis, qui me permet toutefois de donner une idée de l'ensemble des manuels et des séances que j'ai consultées. Je n'aborderai qu'ensuite l'étude scientifique précise et détaillée de la séance sélectionnée (l'introduction des formules d'aire du carré et du rectangle), pour chaque manuel scolaire. L'exemple qui suit représente assez bien la façon dont l'aire du carré et du rectangle sont introduits dans les manuels scolaires de CM2.

[196] Il faudrait aussi traiter le décalage avec une « mesure physicienne », comportant une indication de l'incertitude sur cette valeur mesurée et des indications sur la manière d'obtenir cette valeur mesurée et son incertitude.



B Trace sur ton cahier un carré de 3 cm de côté, un carré de 5 cm de côté et un carré de 10 cm de côté.

a. Calcule la mesure de l'aire de chacun de ces carrés.

b. Complète la formule qui permet de calculer l'aire A d'un carré de côté c :

A = c × …

c

C Utilise les résultats précédents pour compléter.

1 cm² = …. mm² ; 1 dm² = … cm² ; 1 m² = … dm² ; 1 m² = … cm²

D Trace sur ton cahier un rectangle de longueur L = 5 cm et de largeur l = 3 cm.

a. Calcule la mesure de son aire.

b. Complète la formule qui permet de calculer l'aire A d'un rectangle :

A = … × …

L

l

Mémo

Photographie 2-1 : pour comprendre les maths CM2, p.138 (hachette, 2008)

Il s'agit de compter le nombre de carreaux, pris pour unité de mesure d'aire. Compter ces carreaux amène l'élève à la multiplication « côté × côté » pour le carré, (et longueur × largeur pour le rectangle) et permet de justifier la formule. J'appelle « grille » cette représentation qui permet le compte de carreaux sur la surface du carré ou du rectangle, pour en mesurer l'aire.

Du point de vue de l'unité d'aire, les élèves ont travaillé en amont sur d'autres types d'unité, non standard, je présente cette phase antérieure, ci-dessous.

2.1.3 Travail précédent l'introduction de la formule, dans les manuels de CM2

L'apprentissage de l'aire comme concept indépendant de la surface et du nombre

Le découpage-recollement est souvent mobilisé dans la séance d'introduction de l'aire, qui précède l'introduction des formules, pour comparer les aires. C'est un travail qui a déjà été abordé naturellement lors de la scolarité, mais qui fait ici l'objet d'un travail spécifique. Ce travail se pratique souvent indépendamment et avant la mesure (comparaison directe d'aires par découpage-recollement sans étalon unité d'aire).

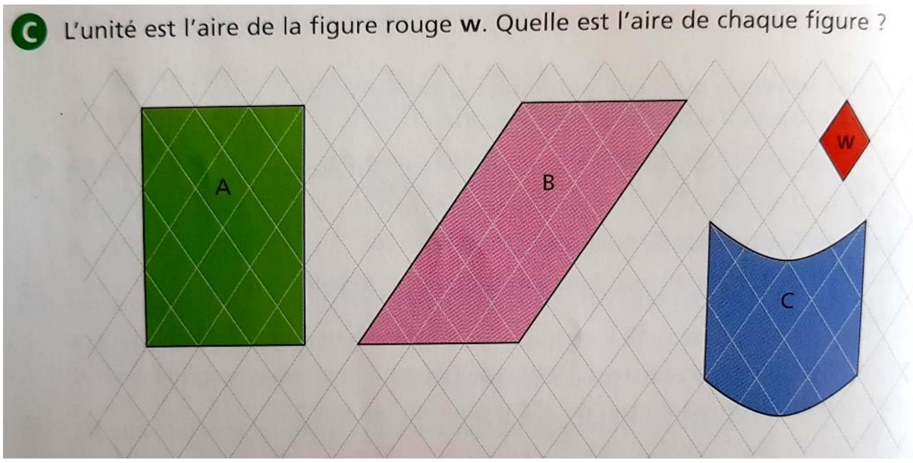
Un travail est généralement proposé aussi sur la distinction aire-périmètre. De plus, des figures de même aire mais ayant différentes formes sont introduites, permettant là encore, distinction entre aire et surface. Tous ces points sont préconisés dans les travaux en didactique. Le fait qu'ils soient tous traités, dans la majorité des manuels, est peut-être le signe d'une relation entre concepteurs de manuels et recherche en didactique. Je reviendrai sur la question de la distinction entre aire et nombre plus tard.

L'introduction de l'unité de mesure d'aire quelconque

Le plus souvent, une unité d'aire d'une autre forme que le carré (ou plusieurs) est généralement introduite, dans le cadre géométrique. Il est demandé d'exprimer le nombre d'unités d'aire que l'on peut compter dans la figure. La mesure d'aire est donc liée à l'addition, dans un cadre unidimensionnel. L'action de mesurage est explicite (report d'un étalon).

Ce passage par une unité d'aire non standard permet de construire l'idée que la valeur numérique de l'aire dépend d'un choix (arbitraire) d'unité d'aire. Ce travail permettrait aussi implicitement de distinguer les aspects « aire » et « nombre » (la valeur numérique associée à la mesure de la grandeur aire dans une unité de mesure donnée), puisque la mesure de l'aire dépend de l'unité choisie. Le passage du calcul d'une même aire avec deux unités de mesure différentes, est parfois explicitement proposé aux élèves.

A ce stade, il n'est pas associé de nombre à l'unité de mesure d'aire. Celle-ci existe dans le registre des figures, et dans le registre symbolique, à travers le nom qui lui est donné, souvent « u ». L'élève peut ainsi exprimer le résultat « 3 u » de la mesure d'aire. L'unité de mesure d'aire existe ici pour l'élève par sa surface, sa forme, en dimension 2.



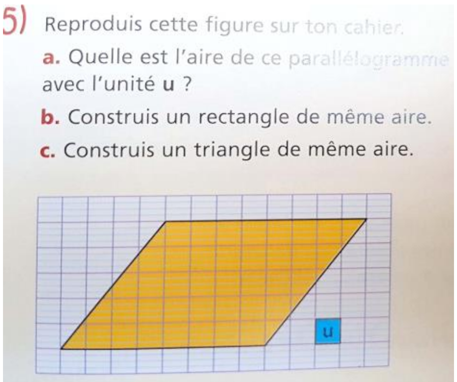
Photographie 2-2 : pour comprendre les maths CM2, p.138 (hachette, 2008)

On note que l'unité de mesure d'aire est parfois tronquée. Ici elle est coupée en deux (figures A et B). Pour la figure C il faut même effectuer un découpage-recollement et obtenir un carré, afin de pouvoir mesurer l'aire.

L'unité de mesure d'aire standard

L'unité standard est généralement amenée ensuite, dans la séance suivante[197], sous la forme du carreau, qui au départ porte encore le nom « u ». Là encore il est demandé d'exprimer le nombre d'unités d'aire (carreaux) que l'on peut compter sur la figure. La mesure d'aire est donc encore liée à l'addition, dans un cadre unidimensionnel. L'action de mesurage est toujours explicite (report d'un étalon). C'est la phase suivante, liée à la multiplication, que je vais étudier en détails.

[197] La séance qui inclut généralement les formules de l'aire du carré et du rectangle.



Photographie 2-3 : pour comprendre les maths CM2, p.54 (hachette, 2008)

Je passe maintenant à la périodisation.

Périodes

Ici, le manuel propose un découpage en 5 périodes. Dans ce manuel, la mesure des aires avec unité arbitraire non standard est proposée en Période 2. Ce travail est toujours proposé avant l'introduction de l'unité de mesure usuelle, dans les manuels.

Dans le présent manuel un travail de mesure d'aire par encadrement à partir de l'unité d'aire « carreau » est proposé en période 3. Un travail de distinction entre aire et périmètre est donné, également. L'introduction officielle des unités usuelles et des formules (ainsi qu'un travail sur l'aire du triangle) sont proposés en période 4.

Période 1 : de la rentrée aux vacances de la Toussaint
Période 2 : des vacances de la Toussaint aux vacances de Noël
Période 3 : des vacances de Noël aux vacances d'Hiver
Période 4 : des vacances d'Hiver aux vacances de Printemps
Période 5 : des vacances de Printemps aux vacances d'été

2.1.4 Introduction du centimètre carré (cm^2)

Le centimètre-carré (cm^2) est alors généralement introduit comme *l'aire* d'un carré d'un centimètre de côté. Dans ce manuel, c'est bien le cas, en période 4. L'élève doit compter les unités d'aire (carreaux) comme il le faisait avant, mais le carreau est particulier, il a une aire de 1 cm^2. J'étudierai en détails comment les manuels présentent l'unité d'aire standard.

A ce stade, l'unité de mesure cm^2 est associée à une aire, mais aussi à un nombre ainsi qu'à une surface. L'unité de mesure existe dans le registre des figures, ainsi que dans le registre symbolique, à travers le nom « cm^2 » ; et dans le registre des nombres, car elle est ici associée conceptuellement à « 1 ».

Enfin, elle est aussi associée à l'addition itérée. L'élève peut ainsi exprimer « 3 u » ou « 3 cm^2 » pour une mesure d'aire. Il y a un parallèle entre le report d'un carreau dans le registre géométrique, et l'addition. Cette addition est par ailleurs associée, dans le registre symbolique, au fait d'apposer « cm^2 » à côté du chiffre, « 3 » (ici). Ainsi, plusieurs raccourcis se produisent, en particulier celui qui associe l'unité d'aire et le carreau.

De plus l'unité de mesure étant liée au carré de côté 1 cm, la bidimensionnalité entre donc en jeu implicitement dans sa conception.

Parfois, un travail de présentation de l'unité de mesure cm^2 est proposé à ce stade, avec une autre forme que le carreau, permettant de distinguer, pour l'unité de mesure, surface et aire. Cependant, il faut noter que le travail ne consiste pas en général en la *mesure* d'une surface à l'aide de cette forme associée au cm^2.

Je passe maintenant à l'introduction de la formule, étape de transition qui se trouve au coeur de cette étude.

2.1.5 Introduction de la formule

Une fois l'unité usuelle introduite, la formule de l'aire du carré et du rectangle peut être amenée, comme c'est le cas en général, et ici, page 138 du manuel (voir Photographie 2-1, p.185).

Ainsi, l'introduction des formules d'aire du carré et du rectangle se fait dans un cadre nouveau. Il s'agit en effet de prendre en compte plus ou moins implicitement le nombre d'unités de mesure de longueur (sur un côté), et d'utiliser la multiplication. J'étudierai en détails comment chaque manuel présente cette transition.

Le cadre qui était unidimensionnel (prise en compte de l'unité de mesure d'aire dans son caractère lié à la surface en 2 dimensions (2D)) devient bidimensionnel (prise en compte de la mesure de longueur pour obtenir une mesure d'aire). L'addition itérée, liée à un compte de sous-surfaces de forme fixe, est remplacée par la multiplication, pour obtenir le nombre de carreaux sur une ligne.

De plus, la lettre est introduite. La lettre « c » pour le carré, les lettres « l » et « L » pour la largeur et la longueur. Pour récapituler, voici la liste des changements imposés par l'introduction de la formule.

	Calcul d'aire avec l'unité « u » ayant une forme quelconque	**Calcul d'aire avec l'unité « u » ayant la forme d'un carreau**	**Calcul d'aire avec l'unité « cm^2 » ayant la forme d'un carreau**
Opération	Addition itérée	Addition itérée ou multiplication	Addition itérée ou multiplication
Symbolisme	« u », « + »	« u », « + » ou « × »	« cm^2 » « c », ou « l », et « L »
Besoin de prendre en compte la mesure du côté ou de la longueur/largeur (bidimensionnalité)	NON	NON	OUI ou NON selon la situation (à terme il le faudra) -> Puis : OUI

Tableau 2-2 : changements imposés par l'introduction de la formule

Nous verrons que ces transitions et ces distinctions ne font pas toutes l'objet d'un travail spécifique selon les manuels. Je détaillerai dans mon étude ce qui est explicité dans chaque manuel (voir 2.5, p.238). De plus, les étapes que j'ai distinguées ici peuvent être mélangées. Je vais maintenant récapituler les conceptions associées à l'unité de mesure pour chacune de ces étapes.

	Calcul d'aire avec l'unité « u » ayant une forme quelconque	**Calcul d'aire avec l'unité « u » ayant la forme d'un carreau**	**Calcul d'aire avec l'unité « cm^2 » ayant la forme d'un carreau**
Surface, forme	Peut en avoir plusieurs	Forme fixe	Forme fixe Dans certains cas une autre forme est aussi introduite de façon théorique, puis abandonnée. Très généralement elle ne sert pas au report effectif (elle ne sert pas d'étalon)
Aire	N'a pas besoin d'être prise en compte par l'élève, mais implique généralement une forme fixe à l'unité de mesure (prise en compte à travers la forme)	N'a pas besoin d'être prise en compte par l'élève, mais implique généralement une forme fixe à l'unité de mesure (prise en compte à travers la forme)	Prise en compte
Nombre associé à l'unité de mesure	Non donné	Non donné	Imposé (1 cm^2)
Opération	Addition	Addition ou multiplication	Addition puis multiplication
Opération dans le registre des figures	Juxtaposition, compte de surfaces de forme donnée	Juxtaposition, compte de surfaces de forme donnée	Compte de surfaces de forme donnée Puis Compte des unités de mesure de longueur
Bidimensionnalité de l'unité de mesure	Non prise en compte par les élèves (*a priori*)	Non prise en compte par les élèves (*a priori*)	Prise en compte implicitement (le carré de côté 1 cm)

Tableau 2-3 : changements conceptuels liés à l'unité de mesure

Il faudra s'interroger sur les difficultés que peuvent créer ces distinctions et changements conceptuels, et la présence ou non d'une étape dans les manuels, permettant d'expliciter ces changements ou d'en garantir la cohérence.

Maintenant que j'ai présenté la façon dont certains manuels introduisent la formule de calcul de l'aire d'un carré ou d'un rectangle, je vais reprendre les questions issues de l'analyse historico-épistémologique pour montrer comment elles peuvent servir ce cas d'étude précis.

2.2 Reformulation des questions issues de l'analyse historico-épistémologique

Je reprends les catégories issues de l'analyse historico-épistémologique, et précise les questions auxquelles j'ai choisi de m'intéresser dans le cadre précis de la transition entre le calcul additif unidimensionnel dans le registre des figures, et celui de l'introduction des formules dans un cadre multiplicatif bidimensionnel. Certaines de ces questions se recoupent naturellement. Pour permettre d'expliciter le lien avec l'analyse historico-épistémologique, j'ai toutefois préféré conserver les catégories, quitte à provoquer des répétitions.

-les implications du système métrologique

Quelles sont les implications d'un système métrique dépendant sur l'enseignement de l'aire, du point de vue des unités de mesure de longueur et d'aire ; et de la transition entre grille et formule ? Le système métrique crée-t-il des implicites du fait de son caractère dépendant ?

-la conception du nombre

Quelles sont les implications du fait que les nombres utilisés pour exprimer les valeurs numériques de grandeur et pour la multiplication ou l'addition soient les mêmes ?

Quel rôle est donné au nombre, dans ce contexte, que représente-t-il ? Comment est traitée la distinction entre aire et nombre (valeur numérique d'aire) ?

-le lien entre opération physique et opération sur les nombres

Le lien qui est permis entre addition et découpage de la surface (grille), dans le registre des figures, est-il accompagné lors du passage à la multiplication (dans un contexte bidimensionnel et arithmétique ou symbolique) ?

-l'entrée en jeu de la bidimensionnalité

Comment est accompagné le passage à la bidimensionnalité, est-ce que le lien entre unité de mesure d'aire et de longueur est explicité ?

Le fait que la bidimensionnalité apparaisse implicitement dans la construction du carré à mesurer, et prenne une place plus centrale par la suite, est-il accompagné ?

-la conception de l'unité de mesure

Quelle valeur conceptuelle a l'unité de mesure d'aire, qui est liée par le système métrique à l'unité de mesure de longueur ? Quelle place est donnée au mesurage, au report d'étalon ?

Comment est utilisée l'unité de mesure, est-ce que la distinction entre surface et aire est faite pour celle-ci ? Est-elle conceptualisée différemment dans le registre des figures et dans le registre symbolique ?

Enfin, je ne traiterai la question suivante que sous forme de remarques mais elle serait importante à approfondir : quels ordres de grandeur sont choisis, comment sont-ils estimés ?

-l'opération et son lien avec l'opération physique, ainsi que les objets mathématiques qui entrent en jeu

Comment est effectué le parallèle de l'opération arithmétique dans le registre des figures, s'il y a lieu ? Quelles sont les conséquences de ce parallèle, sont-elles explicitées ?

Dans le cadre arithmétique, quel rôle conceptuel est donné à la conversion ? A la multiplication ? Au nombre ?

-le mesurage

Quelle est la place donnée au mesurage, cette place est-elle conservée lorsqu'il n'y a pas recours au cadre géométrique ?

Le mesurage qui a été travaillé dans le cadre unidimensionnel avec le report d'étalons (non standard), est-il toujours associable aux unités de mesure d'aire standard, qui sont rencontrées dans une relation plus ou moins explicite avec l'unité de mesure de longueur ?

-le recours au cadre géométrique

En résumé, comment est pensée la transition entre le registre des figures et les registres numérique et symbolique, du point de vue :

-de l'unité de mesure,
-de l'opération,
-de l'algorithme et des objets qu'il implique,
-du concept de nombre,
-du mesurage ?

-l'algorithme

Les étapes de l'algorithme sont-elles explicites, sait-on sur quel objet il opère à chaque étape ?

Quel est le parallèle entre ces étapes et le registre des figures ? S'il n'existe pas, comment les élèves peuvent-ils interpréter cette absence ?

J'ai fait le lien entre les catégories issues de l'analyse historico-épistémologique, et les questions qu'elles soulèvent pour l'analyse de la situation d'apprentissage en CM2, du point de vue didactique.

Je vais maintenant situer ces catégories, en lien avec la sélection de travaux actuels de recherche en didactique, que je vais présenter par la suite.

Dans le tableau, j'explicite le fait que ce sont principalement des *intersections* de champs de recherche en didactique, qui sont concernées par les questions soulevées ci-dessus :

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Champ de didactique concerné**
Lien grille/formule changement vers les nombres et symboles	Géométrie & Algèbre et arithmétique Changement de registre, changement de cadre
Lien grille/formule : Rôle donné au nombre et à la lettre après la transition entre registres	Algèbre et arithmétique & changement de registre

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Champ de didactique concerné**
Opération physique et opération sur les nombres Accompagnement de la multiplication dans le changement de registre, construction d'un carré et multiplication	Recherches théoriques Recherches théoriques & Changement de registre & bidimensionnalité & géométrie
Parallélisme entre les deux algorithmes rencontrés par l'élève	Didactique de l'algorithmique & changements de registre & géométrie & algèbre et arithmétique
Conceptualisation de l'unité de mesure d'aire -indépendamment de la longueur -distinction surface/aire-nombre pour l'unité de mesure d'aire -accompagnement conceptuel dans le changement de registre	Unité de mesure & géométrie Unité de mesure & géométrie Unité de mesure & changement de registre & géométrie & algèbre
Accompagnement de la place du mesurage dans le changement de registre	Mesure & changement de registre & unité de mesure & géométrie & algèbre et arithmétique

Tableau 2-4 : questions et champs didactiques concernés

Je n'ai pas trouvé de champs de recherche qui correspondent directement à des intersections, du point de mes questions précises. Par conséquent, j'ai fait des recherches dans les travaux issus de champs de didactique suivants, qui existent indépendemment du point de vue institutionnel (même s'ils s'intéressent souvent aux autres champs) :

-changement de registre/de cadre
-géométrie
-bidimensionnalité, multiplication
-mesure, unités de mesure
-recherches théoriques sur le savoir de référence
-algèbre

L'analyse historico-épistémologique me semble conduire ici à s'intéresser spécifiquement à ce qui relève d'intersections. Je vais maintenant présenter les travaux de didactique. Je conclurai ensuite sur la relation entre ces travaux de recherche et l'analyse historico-épistémologique (chapitre I).

3 LES TRAVAUX DE REFERENCE EN DIDACTIQUE

J'ai présenté l'introduction usuelle de l'aire du rectangle et du carré dans les manuels scolaires. Je m'intéresse précisément aux difficultés éventuelles qui peuvent être liées à la conceptualisation de l'unité de mesure d'aire lorsqu'elle passe du registre des figures (dans une situation additive unidimensionnelle) au registre des nombres et symboles.

Cette transition m'a conduite à faire appel à plusieurs catégories de travaux de référence en didactique. En particulier, les travaux sur l'aire dans un contexte géométrique, les travaux sur la mesure, les travaux sur la bidimensionnalité et la multiplication, ainsi que le changement de registre. L'introduction de l'algèbre est quasi-absente de ces références (du point de vue de l'unité de mesure), j'y reviendrai.

Parmi l'ensemble des références que j'ai rencontrées dans mon travail, j'ai sélectionné pour cette étude, celles qui me paraissaient le plus relever de ma question, liée à l'unité de mesure dans le cadre d'un changement de registre.

Je vais d'abord présenter ces travaux de manière linéaire, avant de les rattacher plus explicitement à l'analyse historico-épistémologique (issue du chapitre I). Tout au long de cette présentation linéaire, je ferai cependant des remarques pour préciser en quoi les points cités sont importants pour l'analyse de manuels ou l'expérimentation en classe ; en quoi les travaux cités justifient l'intérêt d'une recherche approfondie sur le sujet qui m'intéresse.

3.1 Les travaux de recherche en didactique

3.1.1 Le changement de registre, le changement de cadre

Dans le cadre de la transition du calcul d'aire en géométrie vers la formule, je vais m'intéresser à la question des registres de représentation sémiotiques de Duval.

Représentation sémiotique et objet mathématique

Duval (1993) commence par la distinction entre l'objet et sa *représentation*. Il s'agit par exemple du symbole, qui représente l'objet « nombre » ; ou du tracé qui représente un segment.

> Il y a un mot à la fois important et marginal en mathématiques, c'est le mot « représentation ». Il est le plus souvent employé sous sa forme verbale, « représenter ». Une écriture, une notation, un symbole représentent un objet mathématique : un nombre, une fonction, un vecteur,.... De même les tracés et les figures représentent des objets mathématiques : un segment, un point, un cercle,... Cela veut dire que les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. [...] c'est

> l'objet représenté qui importe et non pas ses diverses représentations sémiotiques possibles [...]. (Duval, 1993, p.37)

Système de représentation sémiotique et représentations mentales

Les représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont diverses, et nécessaires. Les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles à la perception, ils ont des représentants. Le système de représentation choisi va influer sur les traitements que l'on fait de ces objets.

> Néanmmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit « réels » ou « physiques » ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé. Il suffit de considérer le cas du calcul numérique pour s'en convraincre : les procédures, et leur coût, dépendent du système d'écriture choisi. Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique. (Duval, 1993, p.38)

Les représentations sémiotiques fonctionnent dans des *systèmes de représentation* (avec des contraintes qui sont propres au système). Par exemple, une figure fonctionne dans un système de représentation différent d'une formule : c'est ce qui va m'intéresser ici particulièrement. Duval fait la distinction entre les représentations sémiotiques et les représentations mentales d'un objet. Les représentations sémiotiques sont essentielles selon lui, pour extérioriser les représentations mentales afin de communiquer, certes, mais aussi pour penser les objets mathématiques.

> Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. On considère généralement les représentations sémiotiques comme un simple moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, c'est-à-dire pour les rendre visibles ou accessibles à autrui. Or ce point de vue est trompeur. Les représentations ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée. (Duval, 1993, p.39)

Registres de représentation sémiotique : le caractère essentiel de la diversité des représentations d'un objet

Selon Duval, il est essentiel pour penser les objets mathématiques, d'utiliser une diversité de registres pour se les représenter. Cela permet en effet, de différencier l'objet mathématique de sa représentation. Il faut que celui-ci soit reconnu dans ses différentes représentations.

> Le fonctionnement cognitif de la pensée humaine se révèle inséparable de l'existence d'une diversité de registres sémiotiques de représentation. [...] Pourtant il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de

> pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique (figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc.…) au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leur représentations et qu'ils puissent être ainsi reconnus dans chacune de leurs représentations.* La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets : il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme une représentation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté. (Duval, 1993, p.40)

Je m'intéresse ici à la conceptualisation de l'objet unité de mesure, mais aussi aux différents concepts liés au calcul d'aire, dans plusieurs registres de représentation. Les questions qui se posent pour moi sont les suivantes :

-comment est accompagnée la transition entre les registres du point de vue des objets mathématiques concernés ? Cette question apparaît fondamentale, après l'analyse historico-épistémologique qui conduit à voir comment sont pensés les concepts selon les registres et dans les transitions (voir Chapitre I).

-Après l'enseignement du calcul d'aire en CM2, les élèves qui savent utiliser la formule ont-ils acquis pour autant, une représentation correcte des objets mathématiques concernés, dans tous les registres ?

Si ce n'est pas le cas, Duval met ici en garde sur leur capacité à différencier les objets de l'une de leurs représentations. Peut-on avoir accès à la façon dont les élèves se représentent les objets liés au calcul d'aire ? Cette question sera étudiée dans le cadre de l'expérimentation en classe.

En résumé, je vais m'interroger sur la transition entre les registres à travers la possibilité d'exercer une continuité dans la conceptualisation d'un objet mathématique, ou au moins l'articulation de représentations de l'objet dans les différents registres, qui soient compatibles entre elles. Pour cela, je serai amenée à m'interesser au parallélisme entre algorithme dans le cadre arithmétique et opérations sur les figures dans le cadre géométrique.

Registres de représentation sémiotique et systèmes de représentation sémiotique

Par souci de rigueur, je présente la distinction que Duval fait entre registre de représentation et système de représentation. J'utiliserai le terme « registre ». Les systèmes ne sont pas tous des registres. Pour qu'un système de représentation sémiotique puisse être un registre de représentation sémiotique, il doit permettre trois activités cognitives : la formation d'une représentation, son traitement dans le registre donné, sa conversion.

> La formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné : énonciation d'une phrase (compréhensible dans une langue naturelle donnée), composition d'un texte, dessin d'un figure géométrique, élaboration d'un schéma, écriture d'une formule….
>
> […]
>
> Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre.
>
> […]

> La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. [...] La *traduction* est la conversion d'une représentation linguistique dans une langue donnée en une représentation linguistique d'une autre langue ou d'un autre type de langage. (Duval, 1993, p.41)

En ce sens, je m'intéresse à l'objet « unité de mesure » dans les cadres algébrique et géométrique. Dans les registres des figures et des symboles, l'unité de mesure passe d'une représentation « figure » à une représentation symbolique qui en fait un « élément d'une formule algébrique »[198]. J'utiliserai ici le mot registre et le mot cadre, ce qui appelle à une clarification du mot « cadre », que je présente également pour être rigoureuse.

Conversion de registres de représentation sémiotique et changement de cadre

Je m'intéresse à une conversion de registres ou à un changement de cadre. Douady (1987) utilise la notion de changement de cadre. Perrin-Glorian (2004) analyse la distinction entre changement de cadre et conversion de registre de représentation sémiotique (Duval, 1995).

Elle emploie le mot « cadre » pour cadre numérique ou cadre géométrique, le mot « registre » pour le registre de l'écriture des nombres ou le registre des figures. Ce qui est vraiment important c'est que l'on n'ait plus affaire aux mêmes représentations des objets quand on change de cadre ou de registre[199]. Dans le cas précis qui m'intéresse, le registre des figures, dans le cadre géométrique, est remplacé par le cadre numérique ou des formules, dans le registre symbolique. En particulier les objets manipulés (les unités de mesure, représentées par les figures) sont alors représentés par des symboles (comme le « cm^2 »).

Ce qui est le plus important pour mon sujet, c'est que Duval insiste sur l'importance de la coordination des registres de représentation.

> « La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité de conversion ». [...] Mais cette coordination est loin d'être naturelle. Et elle ne semble pas pouvoir se réaliser dans le cadre d'un enseignement principalement déterminé par des contenus conceptuels » (Duval, 1993, 51-52).

En particulier, il précise qu'il est possible pour l'élève de comprendre, lorsqu'il n'y a pas de coordination entre les registres, mais de façon limitée. C'est sur l'hypothèse de ces limites que je vais construire l'expérimentation en classe. Selon Duval, les connaissances ne sont pas alors mobilisables dans toutes les situations, en particulier le contrôle du sens de ce qui est fait n'est pas possible. Je vais enquêter sur ce point auprès des élèves.

> Naturellement, l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. En définitive, cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du « sens » de ce qui est fait. (Duval, 1993, 52).

---

[198] Il faut noter que du point de vue de la didactique de l'algèbre, l'unité de mesure n'est pas prise en compte comme un élément de la formule algébrique.

[199] Elle fait une distinction en terme d'apport (ou non) de connaissances nouvelles qui n'existent pas dans l'autre cadre.

Certains milieux facilitent la transition entre cadres. Par exemple, le logiciel de géométrie dynamique peut dans certaines conditions, faciliter la liaison entre cadre numérique et cadre géométrique. Perrin-Glorian (2004) replace la discussion sur les changements de cadre et de registre en fonction des connaissances supposées des élèves.

> Dans l'analyse didactique, il n'est pas toujours aisé de savoir si on a affaire à un changement de cadres ou de registres et il me semble que cela peut dépendre des connaissances supposées aux élèves. (Perrin-Glorian, 2004, p.68)

Par exemple dans le cadre géométrique, le registre peut être graphique (rectangles dessinés) ou celui du langage naturel[200]. L'usage de formules peut conduire à utiliser le registre symbolique et le cadre numérique. La représentation graphique de la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur (pour des rectangles ayant un périmètre donné égal, par exemple) apporte de nouveaux objets : des points, plutôt que des rectangles.

La connaissance est nouvelle : il s'agit de la continuité de la variation des rectangles, qui est alors matérialisée. En ce sens, Perrin explique qu'il s'agit plutôt d'un changement de cadre.

> Ici, le graphique est porteur d'une connaissance qui n'est présente ni dans le cadre numérique, que ce soit dans le registre symbolique de l'écriture des nombres ou dans celui du tableau, ni dans le cadre géométrique, que ce soit dans le registre des figures ou sur les rectangles découpés, c'est la continuité. C'est pourquoi le passage au graphique relève davantage à ce niveau d'un changement de cadre que d'un changement de registre : on n'a plus affaire aux mêmes objets, on obtient des points alignés et non plus des nombres ou des rectangles. (Perrin-Glorian, 2004, p.70)

De plus, Perrin-Glorian ajoute que l'ensemble des rectangles n'est pas disponible dans les autres cadres. Le graphique constitue un bon intermédiaire entre les cadres géométrique et numérique, il pose le problème général.

> De plus, le graphique peut jouer le rôle d'intermédiaire entre le cadre géométrique et le cadre numérique parce que les deux s'y retrouvent et qu'il porte des connaissances qui ne sont pas disponibles dans les autres cadres. En effet, le dessin du rectangle est présent en même temps que ses dimensions (et même la mesure de l'aire si on l'écrit à côté du point qui représente le rectangle) et la continuité de la variation est matérialisée par le segment qui représente l'ensemble des rectangles. On a ici l'ensemble des rectangles avec un ordre qui permet de rendre compte de la variation. Or l'ensemble des rectangles n'est pas disponible dans les autres cadres. Le graphique permet de poser le problème général parce que c'est l'amorce du cadre des fonctions. (Perrin-Glorian, 2004, p.70)

Mais si au lycée, le cadre algébrique est disponible, ainsi que le sous-cadre des fonctions, le registre des écritures symboliques est disponible. Alors le registre graphique représente bien le *même* objet dans un autre registre, et il n'y a pas « changement de cadre ». Bien sûr, la continuité, elle n'est accessible que dans le registre graphique.

> Si on pose le même problème en classe de seconde, le cadre algébrique est disponible, ainsi que le sous cadre des fonctions : on peut exprimer l'aire en fonction de la largeur, avec une représentation dans le registre des écritures symboliques $A = l\ (25-l)$ qu'on peut traduire point par point dans le registre

---

[200] Selon un exemple de Perrin-Glorian.

> graphique, ce qui rendra évident le résultat. On a bien cette fois représentation d'un même objet référent dans des registres différents, même si, là encore, la continuité n'est accessible que dans le registre graphique. On a en revanche à ce niveau une possibilité de démonstration dans le cadre algébrique et le registre des écritures symboliques : $A = -l^2 + 25\,l = -(l-25)^2 + 12{,}5^2$. (Perrin-Glorian, 2004, p.71)

Perrin conclut qu'il faut surtout s'intéresser aux outils disponibles, à leur manipulation et aux règles sous-jacentes.

> En fait, peu importe si on a affaire à un changement de cadre ou de registre. L'important est que les outils sémiotiques font partie intégrante de l'activité mathématique parce que ce sont des instruments de cette activité qui repose, en reprenant la terminologie de Bosch et Chevallard (1999), sur la manipulation d'ostensifs contrôlée par des non ostensifs. Les cadres contiennent à la fois les ostensifs et non ostensifs de l'activité mathématique, c'est-à-dire les règles de manipulation des ostensifs ainsi que les raisons de ces règles alors que les registres de représentation sémiotique comprennent certains des ostensifs ainsi que les règles de manipulation. (Perrin-Glorian, 2004, p.71)

Dans mon cas, le cadre algébrique apporte la connaissance nouvelle d'un point commun à tous les calculs d'aire du carré en fonction du côté. En ce sens il s'agit peut-être plutôt d'un changement de *cadre*, à ce stade de la scolarité. Le cadre numérique, par rapport au cadre géométrique, permet d'obtenir un nombre (qui correspond à la mesure d'aire dans une unité donnée). En ce sens, il y a là aussi un changement de cadre. Cependant j'utiliserai par commodité, et pour permettre de faire référence à ces deux champs de recherche en didactique, les deux termes (cadre et registre), dans la présente étude, sans perdre de vue le fait qu'il y a bien une connaissance nouvelle en jeu pour les élèves.

En résumé, je m'intéresse au cadre géométrique lié au registre des figures, au cadre numérique lié au registre des nombres, au cadre algébrique lié au registre symbolique.

Je me penche sur la question de la représentation des objets mathématiques liés au calcul d'aire, notamment aux unités de mesure dans le cadre du passage du cadre géométrique aux cadres numérique et algébrique et à la coordination de ces représentations[201].

La question va être pour moi la suivante, je la mènerai de l'analyse des manuels scolaires jusqu'à l'expérimentation en classe : est-ce que les changements (successifs) de cadres ont des effets sur la représentation que se font les élèves des objets mathématiques, comme l'unité de mesure ? Comment coordonnent-ils les registres ? Les connaissances sont-elles mobilisables dans toutes les situations ? Le contrôle du sens de ce qui est fait, que les manuels souhaitent favoriser dans la façon dont ils introduisent la formule par le compte des carreaux, est-il possible ?

Je passe maintenant aux travaux qui s'intéressent spécifiquement à l'aire dans le cadre géométrique, ainsi qu'aux distinctions entre surface, aire et nombre. Je les présenterai de façon linéaire mais préciserai, le cas échéant, les points qui me semblent moins développés dans les manuels[202].

---

[201] Je note qu'un travail de rapprochement de mon travail avec la notion d'espace de travail mathématique (ETM) serait intéressant à mener à l'avenir, dans la lignée des travaux d'Alain Kuzniak. Les liens entre ETM et changements de registre sont explicités par exemple, dans un cours donné à la 18$^{\text{ième}}$ l'école d'été de didactique des mathématiques (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck et Vivier, *à paraître*).

[202] Je donnerai mes impressions, puisque j'ai consulté un grand nombre de manuels et de séances sur ce thème ; mais il ne s'agira pas d'une analyse précise de chaque manuel sur ce point.

3.1.2 Les travaux sur l'aire

Les travaux de Perrin-Glorian et Douady

Douady et Perrin-Glorian, 1983

Douady et Perrin-Glorian (1983) proposent une brochure pour les « maîtres de l'école élémentaire », du CE2 au CM2 et pour les professeurs du collège (6^{e}, 5^{e}). La brochure donne un ensemble de situations d'enseignement de mesure des longueurs et des aires, avec des points de vue numérique et non numérique selon les cas, pensé selon une progression.

Par exemple, il s'agit de compter le nombre de carreaux dans un rectangle au CE2, de construire par découpage-recollement plusieurs surfaces ayant le même nombre de carreaux en CE2 et CM1, et de continuer ensuite en construisant des surfaces ayant même aire qu'une autre, mais cette fois sur papier blanc. Aux CM1 et CM2, un pavage arbitraire est proposé pour mesurer l'aire, puis la mesure en centimètres carré (cm^2) d'aires diverses est abordée (en CM2 et 6^{e}). Les questions d'invariance des aires et périmètres de surfaces ayant subi des transformations géométriques sont abordées en 6^{e} ou 5^{e}.

Je note que parmi les activités de Douady et Perrin-Glorian (1983, p.14), on voit l'utilisation d'unités de mesure de longueur et sous-unités de mesure de longueur (ici des fractions de l'unité) pour exprimer la mesure d'un segment (dans le cadre d'une activité émetteur-récepteur). Je reviendrai sur cette question importante du lien entre l'introduction de l'unité de mesure de longueur et la mesure d'aire (voir p.214).

Les grandes lignes de leur proposition me semblent aujourd'hui présentes dans les manuels scolaires, avec plus ou moins de fidélité au déroulé didactique, selon les cas. Voici le détail des séquences préconisées par Douady et Perrin-Glorian en lien avec la théorie, qui permet notamment, la construction du concept d'aire indépendamment de la surface et du nombre.

La comparaison des surfaces planes de même aire passe par :

1. l'explicitation de critères permettant d'obtenir la même aire ou une aire différente (par découpage-recollement) ;
2. l'utilisation d'un compte de carreaux ou d'un matériau similaire pour les deux surfaces à comparer, qui est ensuite pesé ;
3. la différenciation aire et masse (deux surfaces de même aire peuvent avoir des masses différentes selon le matériau)
4. la différenciation aire et longueur (distinctions aire/périmètre).

Concernant le pavage, et donc la mesure, Douady et Perrin-Glorian (1983, p.41), proposent ensuite des activités sur papier quadrillé :

1. construire des surfaces contenant plus ou moins de carreaux, de formes différentes (selon les groupes d'élèves) ;
2. ordonner les surfaces de la plus grande à la plus petite ;
3. travailler sur la conservation de l'aire malgré les transformations géométriques des surfaces : déplacements, rotations (aire toujours mesurée en carreaux) ;
4. compter des carreaux en utilisant le découpage-recollement et/ou l'union de demi-carreaux ;

5. travailler sur le recollement pour obtenir une surface de même aire (apprendre à utiliser tous les morceaux, ne pas chevaucher, ne pas compter de « trous »).

Parmi les activités qui me semblent moins développées dans la majorité des manuels, je note l'utilisation de la masse pour distinguer l'aire comme concept indépendant de la surface (qui fait penser à la tablette en cunéiforme W 23-291 dans laquelle l'aire est associée à un nombre de graines contenues sur une surface délimitée), la conservation de l'aire par transformation, et le travail sur le recollement (point qui sera traité également quand je présenterai les travaux d'Outhred, Mitchelmore et Owens). Ces deux derniers points sont importants pour mon sujet puisqu'ils ont un lien avec le sens que les élèves donnent au mesurage par report d'étalon.

Enfin Douady et Perrin-Glorian (1983, p.73) proposent de paver avec des carrelages de formes différentes (triangle, rectangle, carré, triangle rectangle). Les objectifs sont :

-comparer des aires par pavage ou par encadrement de la surface par deux surfaces pavables ;

-comprendre que la mesure d'aire dépend de l'unité choisie, expliciter des relations entre mesures obtenues avec des unités différentes ;

-savoir que pour ramener la comparaison d'aires à celles de leurs mesures il faut utiliser la même unité ;

-choisir une unité d'aire commode pour comparer.

Ces points sont particulièrement développés par les chercheuses et me semblent paradoxalement traités plus rapidement, voire pas du tout, dans la majorité des manuels. Je montrerai en tous cas en détails ce qu'il en est dans la séance que j'ai analysée.

L'enchaînement des séquences amène à augmenter le stock d'aires mesurables avec une unité et à utiliser de petites fractions. Ensuite une aire non mesurable avec les carrelages proposés est donnée, et décomposée en sous-surfaces. Ce dernier point ne me semble pas généralement traité par les manuels.

En résumé, parmi les activités qui sont moins développées dans la majorité des manuels, il me semble que ce sont celles qui touchent particulièrement au sens donné à l'unité de mesure standard, à savoir la comparaison d'aires entre elles par le résultat de la mesure, l'expression d'une même aire selon plusieurs unités, et proposer une aire non mesurable avec les carrelages mis à disposition.

Le cas du rectangle est traité spécifiquement par Douady et Perrin-Glorian (1983, p.90), pour la relation entre la mesure des côtés et la mesure d'aire. Il faudra s'intéresser à la place d'une telle activité, clé pour mon sujet d'étude, dans les manuels. L'émetteur et le récepteur ont des rectangles superposables, mais un nombre de carreaux utilisés pour paver qui peut différer. Ils doivent faire la relation entre les nombres trouvés et les carreaux utilisés.

Le bilan permet d'expliciter le fait qu'un rectangle est déterminé par ses dimensions ; que paver un grand rectangle avec un petit rectangle nécessite de pouvoir reporter l'une des dimensions du petit, un nombre entier de fois, sur l'une des dimensions du grand ; qu'un rectangle de dimensions u, v et un grand rectangle de dimensions « a = nu », « b = pv » donnera une aire du grand rectangle valant « np fois » l'aire du petit.

Ensuite, si l'aire du rectangle est mesurée en prenant comme unité l'aire du carré de côté u, la mesure de l'aire du rectangle est le produit des mesures des dimensions, si les dimensions du rectangle sont mesurées avec l'unité u.

Puis, une activité est proposée autour de la variation de l'aire du rectangle en fonction de la variation des côtés.

En résumé, parmi les activités qui me semblent sont moins développées dans la majorité des manuels, je note là aussi des activités clé pour garantir par la suite le sens donné à l'unité de mesure d'aire dans sa relation à l'unité de mesure de longueur[203] : l'introduction de la relation entre aire et dimensions des côtés en fonction du pavage mis à disposition ; et la variation de l'aire du rectangle en fonction des côtés.

Les unités légales sont introduites ensuite. (Douady et Perrin-Glorian, 1983, p.97). Un travail est d'abord proposé pour détacher le cm^2 de la figure carrée d'1 cm de côté (et l'attacher à une aire).

D'autres consignes visent à éviter l'erreur « un carré de côté ½ cm est un-demi cm^2 » ; et « un parallélogramme d'aire 1 cm^2 a tous ses côtés de longueur 1 cm ».

Un travail est proposé ensuite pour travailler sur les correspondances entre unités légales. Par exemple, un rectangle de dimensions « a × (1 m) » et « b × (1 m) » a pour aire a × b × (1 m^2). Et comme il a pour dimensions « 10 a × (1 dm) » et « 10 b × (1 dm) » il a pour aire 100 a × b × (1 dm^2), etc.

Douady et Perrin-Glorian (1983, p.100) proposent alors d'établir les formules de l'aire du parallélogramme, du triangle, du trapèze, du disque, par encadrements.

Toutes ces dernières activités portant sur la construction du sens donné à l'unité de mesure standard me semblent moins ou pas développées, dans la majorité des manuels. L'analyse de la séance d'introduction de l'unité de mesure d'aire standard pour chaque manuel permettra de donner plus de détails sur ces absences.

Douady et Perrin-Glorian, 1984-85

Douady et Perrin-Glorian (1984) reprend certaines séquences proposées dans l'ouvrage précédent. Il s'agit :

-d'une phase de travail sur papier quadrillé pour fixer les connaissances anciennes ;

-d'une approche géométrique qui permet d'étendre à des surfaces dessinées sur papier blanc le sens de l'expression « avoir même aire » (découpages-recollement) ;

-des activités visant à différencier les notions d'aire et de longueur, sans avoir recours à la mesure (aire-périmètre) ;

-des activités de pavage de surfaces variées à l'aide de divers pavés ;

-une étude de la variation ou de la conservation de l'aire au cours de quelques transformations géométriques ;

-la mesure de l'aire de surfaces en fonction d'une unité d'aire fixée, et les changements d'unité.

Il faut noter aussi que la distinction aire-périmètre de formes géométriques complexes n'entraîne pas celle de formes géométriques simples chez les élèves, ce qui est important pour l'étude de l'aire du carré et du rectangle.

> Même si les élèves ont établi qu'aire et périmètre pouvaient varier dans des sens différents, ils ont tendance à recourir à nouveau à la comparaison des longueurs pour comparer les aires de formes géométriques simples ; c'est ce que nous avons constaté dans des entretiens individuels. Le but des

---

[203] Ce passage sera mis ensuite en relation avec les travaux d'Outhred, Mitchelmore et Owens.

> consignes suivantes est de se convaincre que cette procédure n'est pas valable. La dernière sert de test et de renforcement. [...] La comparaison des longueurs des côtés et des périmètres ne donne aucun renseignement pour comparer les aires, sauf si cela assure que les surfaces sont superposables ou que l'une est incluse dans l'autre. (Douady et Perrin-Glorian, 1984, p.18-19)

En ce qui concerne le pavage, à nouveau, les situations proposées (qui impliquent des surfaces dont les comparaisons à l'œil ne donnent rien, et pour lesquelles on a exclu le découpage-recollement) offrent divers « carrelages » possibles.

Les premières surfaces sont choisies de manière à ce que chacune d'elles soit pavable avec un ou plusieurs des carrelages donnés mais non avec tous. Ensuite, les mesures de surfaces sont obtenues à l'aide d'unités qui ne pavent pas la surface : ces unités paveraient une surface de même aire que la surface donnée. Est introduite enfin, une surface qui n'est pavable avec aucun des carrelages donnés mais dont la mesure s'exprime en nombre entier avec certains carrelages. Il faut utiliser l'additivité des aires et par exemple utiliser plusieurs des carrelages donnés et les relations entre leurs aires. Une distinction est ainsi travaillée entre mesure et pavage : « Il s'agit là d'une des activités proposées dans le but de détacher la mesure du pavage » (Douady et Perrin-Glorian, 1984, p.21).

Dans une troisième étape elles donnent des surfaces quelconques et des grilles à maille carrée. La solution adaptée est alors d'encadrer les mesures des surfaces en prenant comme unité la maille de la grille.

Des travaux visant à récapituler tous les pavages possibles, à expliciter les relations entre unités d'aire et à introduire l'expression « mesure d'aire avec l'unité… » sont ensuite menés ; ils permettent de distinguer l'aire de sa mesure (différentes mesures d'aires peuvent être données pour une même surface selon l'unité choisie).

Parmi les points qui me semblent moins investis dans la majorité des manuels scolaires, le travail sur les pavages possibles, la distinction entre mesure et pavage, et les relations entre unités d'aire, me semble ne pas avoir trouvé sa place dans les séances observées dans la majorité des manuels.

L'utilisation d'un tableau permet d'exprimer le fait que toute aire mesurée avec une unité u peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec u. « La situation idéale est de pouvoir exprimer toutes les aires en fonction d'une même unité et donc de se ramener à la comparaison des nombres. » (Douady et Perrin-Glorian, 1984, p.27)

Enfin, les points 2.4.3 à 2.4.5 de l'article proposent d'augmenter les aires mesurées, par utilisation des pavages de la séquences précédente et familiarisation avec le calcul sur petites fractions. Le point 2.4.6 propose la mesure d'une aire qui n'est pavable avec aucun des carrelages proposés par additivité et substitution. L'article conclut sur la distinction entre mesure et pavage. La suite de l'article (Douady et Perrin-Glorian, 1985), s'attache à donner du sens à la mesure d'aire par le moyen d'une unité donnée, même lorsque la surface n'est pas pavable facilement. Cela permet encore de détacher la mesure du pavage.

> Il nous faut maintenant détacher la mesure des surfaces à mesurer de leur pavage effectif. Nous avons amorcé le processus, notamment en calculant l'aire des surfaces S1, ..., S6 en prenant l'aire de n'importe quel carrelage comme unité. Nous le développons dans la seconde partie de l'article, en particulier lors du calcul de l'aire des surfaces usuelles. (Douady et Perrin-Glorian, 1984, p.33)

L'article traite précisément le cas du rectangle. Il s'appuie sur des prérequis, notamment

-l'invariance par déplacement de l'aire, et par découpage-recollement ;

-la connaissance de la relation entre dimensions du rectangle et aire (si on a un petit rectangle de dimensions u, v et un grand rectangle de dimension a = nu, b = pv, l'aire du grand rectangle vaut np fois l'aire du petit) ;

-la connaissance des effets du choix d'une unité de mesure d'aire carrée dont le côté est l'unité de mesure de la longueur (alors la mesure d'aire du rectangle est le produit des mesures des longueurs) ;

-la relation entre dimensions et aire (si on multiplie une des dimensions d'un rectangle par un nombre n et l'autre par un nombre p, l'aire est multipliée par np).

En dehors du découpage-recollement, les prérequis ne me semblent pas établis par la majorité des manuels. Il est cependant possible qu'il soit considéré par les auteurs des manuels qu'une partie de ces distinctions relève de la sixième[204]. En particulier, la connaissance des effets du choix d'une unité de mesure d'aire carrée dont le côté est l'unité de mesure de la longueur fait partie des points qui peuvent créer des confusions très rapidement, voir p.214[205].

Dans la suite est proposé un travail sur la conservation de l'aire et des dimensions malgré les déplacements du rectangle.

Puis, la variation d'une dimension du rectangle est traitée, pour des mesures non entières de dimensions (quand une dimension est fixe, l'aire est proportionnelle à l'autre dimension, que le nombre soit entier ou non). Ensuite, un tableau général peut être introduit. La séquence amène à la conclusion que si l'on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre k, entier ou non, et l'autre dimension par un nombre k', entier ou non, l'aire est multipliée par $k \times k'$. Une situation autour de la recherche de rectangles de périmètres donnés permet de renforcer la situation précédente et d'institutionnaliser le fait qu'à périmètre constant, l'aire varie. Enfin l'article conclut sur des situations autour de transformations géométriques, et de calcul d'aires de figures usuelles (parallélogramme, trapèze, triangle, disque).

Perrin-Glorian, 1990

L'article va permettre d'amener les distinctions « surface, aire, nombre » du point de vue du savoir savant de référence et des erreurs d'élèves. Il rappelle les objectifs préalablement visés : construire l'aire en lui donnant du sens, en passant par la distinction entre aire et surface mais aussi entre aire et nombre (l'aire est un concept indépendant de sa mesure et la mesure d'aire peut donner plusieurs valeurs numériques différentes selon l'unité de mesure choisie, alors que l'aire, elle, ne varie pas)[206]. Puis, un travail spécifique est conçu pour différencier aire et longueur, en particulier aire et périmètre. La mesure, selon l'hypothèse de

---

[204] Mon analyse de manuels scolaires ne porte pas sur les manuels de sixième. En revanche, un rapide coup d'œil semble indiquer que l'aire du rectangle y est plutôt traitée plus rapidement qu'en CM2 (voir par exemple Hélice 6e, p.161). Le document d'accompagnement « Grandeurs et mesures au collège » (2016, p.19, 29-30 39-40) me semblet permettre de constater que les questions didactiques évoquées dans le Chapitre II restent entières.

[205] Il n'est pas question de jeter la pierre aux manuels scolaires, qui doivent traiter un programme très dense. En revanche, il faut ici connaître les contraintes et les pratiques, afin de faire un constat objectif et éventuellement, des propositions.

[206] Il est possible de se demander si la distinction entre aire et nombre n'est pas plus évidente dans le cas d'un système métrologique semi-indépendant, puisqu'à un même nombre peuvent être associées explicitement plusieurs valeurs numériques d'aire. Cependant dans ce cas, les valeurs numériques d'aire ne correspondent pas aux mêmes surfaces (un contrôle de l'ordre de grandeur permet de sélectionner la bonne mesure d'aire).

Perrin-Glorian, ne peut avoir du sens que si l'aire est construite comme grandeur autonome (distinction entre aire et surface et entre aire et nombre).

> 1. associer un nombre au maximum de surfaces (en particulier à tous les polygones et aux disques) de façon à pouvoir faire des comparaisons et des calculs. Cependant, pour définir une application mesure entre surfaces et nombres avec suffisamment de sens pour les élèves, nous avons fait l'hypothèse qu'il faut d'abord construire l'aire comme grandeur autonome en distinguant aire et surface aussi bien qu'aire et nombre.
> 2. différencier aire et longueur, en particulier aire et périmètre, et ceci avant même d'avoir un moyen de mesurer les aires -le périmètre est en effet, pour les élèves, une autre "mesure" de la surface.
> Nous avions choisi de retarder l'identification entre aire et nombre avec l'hypothèse qu'une identification précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs en jeu (ici aire et longueur). (Perrin-Glorian, 1990, p.5)

Perrin-Glorian propose alors un point sur le problème mathématique, le savoir savant à enseigner (voir p.16, note 5)[207]. Elle rappelle que la longueur a plutôt le sens de grandeur dans la vie courante (elle ne dépend pas de l'unité choisie pour la mesurer). Alors que pour l'aire, c'est plus difficile. La surface est le plus souvent utilisée pour faire référence à l'aire.

> Pour l'aire c'est moins clair, le terme surface, le plus couramment employé, désigne soit la surface avec sa forme, soit la grandeur et il est rare que ce soit uniquement de l'aire qu'on ait besoin, que la forme n'intervienne pas du tout, qu'il s'agisse de poser de la moquette ou de négocier des terres agricoles où on évalue le prix à l'hectare mais où on tient aussi compte de bien d'autres facteurs, y compris la forme : un champ très allongé ou de forme très irrégulière n'aura pas la même valeur qu'un carré de même aire! (Perrin-Glorian, 1990, p.11)

Elle parle ensuite de l'évolution des programmes et manuels scolaires, d'avant 1945 à 1978. Elle relate aussi les travaux sur le sujet, entre 1958 et 1974.

Les erreurs fréquentes des élèves sont mentionnées (Perrin-Glorian, 1990, p.31) :

-difficulté d'exprimer l'aire d'une surface qui ne peut être pavée par des carrés,

-difficultés à distinguer aire et surface donc aire et périmètre ;

-utilisation de formules inadaptées sur des surfaces comme le parallélogramme ou le triangle.

L'hypothèse de Perrin-Glorian (1990, p.32) est que l'aire est vue soit comme une surface (avec des confusions entre la diminution de la surface et la diminution de l'aire ou la distinction aire et périmètre) ; soit comme un nombre (utilisation des éléments « pertinents » pour le calcul et risque de fabrication de formules erronées). Le risque est souvent celui d'un traitement indépendant des problèmes sans mise en relation entre surface et nombre.

> Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une "conception nombre" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique. (Perrin-Glorian, 1990, p.32)

---

[207] Les propriétés de la mesure, la construction de l'application mesure, la construction mathématique de l'aire comme indépendante de l'unité, l'aire comme grandeur : les classes d'équivalences établies, à partir de la fonction mesure.

Perrin-Glorian propose de distinguer les trois pôles : le pôle géométrique avec les surfaces considérées comme parties du plan ; le pôle grandeur, avec les aires ; le pôle numérique avec les mesures. Elle fait l'hypothèse que ces distinctions, et l'établissement de l'aire comme grandeur, indépendamment de la forme de de sa mesure, permettront aux élèves d'établir des connections entre cadres (géométrique et numérique), c'est donc un point clé pour ma problématique, qui dépend d'une bonne construction de ces distinctions. Elle pense qu'identifier trop tôt nombre et grandeur favorisera l'amalgame des grandeurs (ici longueur et aire).

Elle fait alors le bilan de sa proposition que je reprendrai pas la suite :

-construire l'aire comme grandeur autonome (comparaison de surfaces par découpages-recollement, inclusions ; puis introduction de carrelages de formes variées, en donnant la possibilité à l'aire d'être exprimée par des nombres différents suivant l'unité choisie) ;

-utiliser la mesure, sur des surfaces non pavables ;

-pointer les différences et relations entre aires et longueurs.

Elle rappelle que la construction de l'aire, comme indépendante de la surface, est fragile ; particulièrement si elle n'est pas mesurée autrement que par le nombre.

> Cependant, nous pensons que la seule considération du deuxième point de vue ne permet pas à l'élève d'échapper à la prégnance de la forme des pièces et peut expliquer certaines des difficultés rencontrées. La recherche d'économie dans la méthode de comptage des carreaux peut amener un dérapage vers d'autres moyens d'associer un nombre à la surface (tels que le recours à une procédure périmétrique) si on ne dispose pas pour le concept d'aire d'une référence autre que numérique. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation du découpage-recollement est un point clé dans l'élaboration du concept d'aire, étape-relais entre les surfaces et les nombres dans la construction de F. (Perrin-Glorian, 1990, p.33)

Les situations qu'elle a proposées permettent de poursuivre la relation « surface-aire-nombre » avec un contrôle géométrique, en particulier dans les situations suivantes:

> -élaboration des formules de calcul d'aire des surfaces usuelles
>
> -proportionnalité de la mesure de l'aire du rectangle à la mesure de chacune des dimensions
>
> -bidimensionnalité de l'aire: si on agrandit une surface dans un rapport k pour les longueurs, son aire est multipliée par k^2 (Perrin-Glorian, 1990, p.34)

Elle termine aussi l'article par une mise en garde sur la déformation, point que je n'aborde pas, qui interviendrait dans la vision qu'ont les élèves du parallélogramme, comme un « rectangle déformé » : son aire ne varierait pas. Elle fait alors l'hypothèse de la nécessité d'une interaction statique-dynamique dans la conception de l'aire indépendamment de la longueur.

Conclusions en lien avec les travaux de Perrin-Glorian

Il est intéressant de voir qu'une grande partie des préconisations de Perrin-Glorian sont présentes dans les manuels scolaires. En particulier, la construction de l'aire avant la mesure, et l'aire comme concept indépendant de la surface, sont travaillés[208]. S'il s'agit effectivement d'une influence des travaux de recherche, le résultat des interactions entre auteurs et chercheurs est très positif. Le découpage-recollement, le pavage avec des unités arbitraires, les distinctions aire et périmètre, la connaissance de surfaces ayant la même aire mais pas la même forme, sont généralement proposés, bien que cela puisse être fait rapidement.

Je m'intéresse à une question bien particulière : celle de la transition entre situation unidimensionnelle additive dans le cadre géométrique, et situation bidimensionnelle multiplicative, aboutissant aux cadres arithmétique et algébrique. Le risque est souvent celui d'un traitement indépendant des problèmes, sans mise en relation entre surface et nombre. Or « les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique ». Je rappelle que Perrin-Glorian (1990, p.32) fait l'hypothèse que l'enseignement de l'aire comme grandeur, indépendamment de la forme de de sa mesure, permettra aux élèves d'établir des connections entre les cadres. De ce point de vue, de nombreuses préconisations de Perrin-Glorian, que j'ai listées, sont concernées. Perrin-Glorian (2001, p.309) rappelle de plus que « si l'on considère l'aire comme un nombre de carreaux, il n'est pas du tout évident que ce nombre soit conservé quand on change la position relative de la surface et du quadrillage. » La distinction entre aire et nombre est donc essentielle, en lien avec le mesurage. C'est aussi le sens de la mesure comme indépendant du pavage qui est en jeu. De plus la mesure, selon l'hypothèse de Perrin-Glorian, ne peut elle non plus avoir du sens que si l'aire est construite comme grandeur autonome.

Elle rappelle que la construction de l'aire comme indépendante de la surface est fragile, surtout si elle n'est pas mesurée autrement que par le nombre. De plus la distinction entre aire et périmètre de formes géométriques complexes n'entraîne pas celle de formes géométriques simples, chez les élèves.

Il faudra se demander si l'introduction de carrelages de formes variées, en donnant la possibilité à l'aire d'être exprimée par des nombres différents suivant l'unité choisie, a une place dédiée dans les manuels. En particulier, la place du travail sur la connaissance des effets du choix d'une unité de mesure d'aire carrée dont le côté est l'unité de mesure de la longueur (carré et rectangle), est à étudier. D'autres propositions de Perrin-Glorian portent sur le sens donné à la mesure, de la distinction aire et nombre, de la bidimensionnalité. Lors de l'analyse de la séance d'introduction aux formules dans les manuels, (voir 5, p.238), je mentionnerai ces points s'ils sont rencontrés :

Du point de vue de la mesure :
-utiliser la mesure sur des surfaces non pavables
-proposer aux élèves une aire non mesurable avec les carrelages qui sont mis à sa disposition
-travailler l'encadrement
-détacher la mesure du pavage, travailler sur différents pavages possibles
-utiliser un tableau permettant d'exprimer le fait que toute aire mesurée avec une unité « u » peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec u

[208] Toutefois, mon analyse détaillée de manuels ne portait pas sur ce point mais sur la séance suivante. Cette impression générale issue de l'observation de chaque manuel doit donc être précisée.

Du point de vue de la bidimensionnalité :
-travailler la relation entre aire et dimensions des côtés en fonction du pavage mis à disposition ; et la variation de l'aire du rectangle en fonction des côtés
-pointer les différences et les relations entre aires et longueurs, travailler la relation entre dimensions du rectangle et aire, l'agrandissement
-travailler sur conservation (ou non) de l'aire par transformation

Du point de vue de l'unité de mesure :
-travailler la distinction entre surface et aire pour l'unité de mesure elle-même
-donner des consignes visant à éviter l'erreur « un carré de côté ½ cm est un demi centimètre carré » ; et « un parallélogramme d'aire 1 cm^2 a tous ses côtés de longueur 1 cm »
-travailler les correspondances entre unités légales

Compléments : le concept de volume

Je complète cet état des lieux avec l'étude de RDM 4.1 « didactique et acquisition du concept de volume » (Vergnaud et al., 1983). Deux points sont soulevés en plus de l'enseignement des formules : la distinction est faite entre la grandeur physique qu'est le volume, et les opérations qui lui sont associées, qui ne dépendent pas de ses rapports algébriques avec et les longueurs et surfaces. Le lien entre formules de calcul et propriétés trilinéaires du volume est mentionné ensuite.

> L'inscription du volume au programme de la classe de cinquième est interprétée le plus souvent par les auteurs de manuels, comme une invitation à enseigner les formules classiques du calcul du volume, du parallélépipède rectangle, des prismes, des pyramides, de la sphère. Or l'arithmétisation du volume déborde largement cette question des formules, en amont et en aval : en amont d'abord parce que le volume est une grandeur physique mesurable, qui supporte comme telle des relations et opérations qui ne dépendent pas de ses rapports algébriques avec les longueurs et les surfaces ; en aval, ensuite parce que les formules de calcul impliquent (et supposent tout à la fois) plusieurs propriétés qui ne sont pas nécessairement associées, chez les élèves, à l'utilisation des formules : tel est le cas notamment des propriétés trilinéaires du volume. (Vergnaud et al., 1983, p.10)

Une distinction est faite entre les problèmes multiplicatifs liés à la proportion simple : c'est-à-dire quand deux variables dépendent linéairement l'une de l'autre (comme des quantités de marchandises et leur prix) ; et la proportion multiple dans laquelle une variable dépend linéairement de plusieurs autres variables qui sont indépendantes entre elles.

> Deux cas peuvent [alors] être distingués : celui du produit de mesures, dans lequel la grandeur physique dépendante peut être analysée dimensionnellement comme le produit des autres grandeurs (aire, volume, travail…) et celui de la proportion multiple ordinaire dans lequel une telle analyse dimensionnelle serait conceptuellement déplacée : la consommation de pain en fonction du temps et du nombre des personnes par exemple ne saurait être considérée comme le produit d'une durée par un nombre de personnes, même si elles est proportionnelle à l'une et à l'autre. (Vergnaud et al., 1983, p.10-11)

Le travail ici, comme dans ma recherche, porte sur la liaison entre les conceptions du volume comme grandeur physique unidimensionnelle « qui se prête à des comparaisons, des mesures, des estimations, des transformations, des sommes et des différences, etc… dans plusieurs situations de la vie quotidienne » (Vergnaud et al., 1983, p.16) et du volume comme grandeur tridimensionnelle, « qui suppose à la fois une analyse physico-géométrique de l'espace et une application de cette analyse dans le numérique et le dimensionnel » (Vergnaud et al., 1983, p.16).

A ce stade le constat est fait que le pavage, moyen habituellement utilisé pour passer de l'une à l'autre, ne répond qu'à une petite partie des problèmes posés par l'arithmétisation du volume. Vergnaud et al., (1983, p.21) réaffirment bien sûr le besoin de travailler aussi sur les aspects unidimensionnels, la mesure directe, la comparaison directe, etc. Ensuite, des situations de dépendance linéaire[209] du volume à l'égard des grandeurs surface et hauteur par exemple, sont proposées pour travailler l'aspect « grandeur tridimensionnelle » (Vergnaud et al., 1983, p.22). Je reviendrai sur la dépendance avec les travaux de Viennot.

La coordination

Vergnaud et al. (1983, p.23) rappellent l'importance de la question de la coordination des structure unidimensionnelle et tridimensionnelle. Ils rappellent des difficultés importantes en cinquième.

> [...] certains manuels se contentent de présenter la formule à côté du dessin d'un parallélépipède pavé (parfois même sans dessin) ; d'autres pratiques existent dans lesquelles le parallélépipède est décomposé en couches successives, en lignes et en colonnes, sans que soit autrement analysé le rapport entre cette décomposition additive du volume en volumes plus petits, et la décomposition multiplicative du volume en fonction des trois longueurs caractéristiques du parallélépipède.
> Or nous verrons dans l'expérience didactique que cette coordination soulève des difficultés importantes chez certains élèves de cinquième, difficultés qu'on ne peut voir et comprendre que si l'on se pose effectivement le problème de la coordination des représentations unidimensionnelle et tridimensionnelle du volume. (Vergnaud et al., 1983, p.23)

Leur ouvrage (Vergnaud et al., 1983, p.73) prévoit trois grands chapitres pour aborder l'enseignement du volume :
-comparer et mesurer des volumes
-d'une conception unidimensionnelle à une conception tridimensionnelle du volume
-le volume du prisme droit et la représentation de la bilinéarité par un tableau croisé de double dépendance.

Le deuxième chapitre, qui m'intéresse plus particulièrement, propose les tâches suivantes (Vergnaud et al., 1983, p.94-95) :
-une tâche de comparaison par pavage effectif (ou calculé) de deux boîtes parallélépipédiques, dont la forme ne permet pas de décider perceptivement laquelle est la plus grande
-une discussion sur les méthodes (avantages et inconvénients) débouchant sur la formule
-une tâche de calcul du nombre de cubes de 1 cm^3 que peut contenir chaque boîte
-une tâche de calcul des volumes de parallélépipèdes homothétiques
-une tâche d'exploration des différentes combinaisons pour former des parallélépipèdes ayant un volume donné (valeurs entières)
-une exploration du problème de changement d'unités

[209] La bande-unité des *Neuf chapitres* pourrait correspondre à une réflexion sur la question de dépendance linéaire. La question de dépendance d'une grandeur à l'autre est évoquée dans l'ouverture à d'autres situations multiplicatives.

-un problème de calcul de grandeurs différentes (volume, surface latérale, longueur d'arête)

Ces travaux, et notamment les 4 dernières phases, rappellent le travail de Perrin-Glorian (voir 3.1.2, p.199). Ils posent la question de la façon dont a été gérée la phase d'accès à la bidimensionnalité ou tridimensionnalité, dans l'enseignement, ainsi que les phases de distinction entre grandeur et nombre. Il faudra se demander s'il y a trace de ce type d'activités dans les manuels scolaires[210].

La bidimensionnalité : les travaux de Jeanine Rogalski, Outhred et Mitchelmore

Roditi (2005, p.52-55) rappelle la difficulté dans l'apprentissage, de la rencontre avec des situations multiplicatives faisant intervenir plusieurs espaces de mesure (agrandissement de figures, proportionnalité, calcul de l'aire d'un rectangle, problème faisant appel à l'addition itérée…). Perrin-Glorian (2001) décrit en particulier l'une des difficultés de la mesure d'aire, qui n'est pas « graduable », contrairement à la mesure de longueur.

> La comparaison directe n'est pas toujours possible, même sur le plan théorique. De plus, on ne peut pas créer une échelle linéaire (graduation) pour comparer directement les surfaces contrairement à ce qui se passe avec la longueur ou les grandeurs comme les masses ou les capacités dont on peut ramener la comparaison à la comparaison des longueurs via la création d'une graduation. Pour l'aire, la graduation n'est possible que dans des cas particuliers. C'est un aspect important. Ainsi Bessot et Eberhard (1983) montrent l'existence de deux conceptions pour la longueur : grandeur repérée et grandeur mesurée, qu'il faut coordonner. De leur côté, Nunes, Light et Mason (PME, 1991) montrent que la graduation est une technique culturellement ancrée qui facilite la comparaison des longueurs. L'absence d'instrument gradué avec une échelle linéaire est un des aspects de l'aire comme grandeur composée et bidimensionnelle. (Perrin-Glorian, 2001, p.308)

Lorsqu'il est proposé aux élèves de compter le nombre de cm^2 à l'intérieur d'une surface (grille, pavage), l'aire a un aspect unidimensionnel, dans un cadre additif. L'élève peut se concentrer sur la surface, la longueur n'ayant qu'un impact implicite, qui a affecté la construction sur laquelle il travaille. Même lorsqu'il passe à la multiplication pour « aller plus vite », il s'agit de compter un nombre de carreaux, le cadre explicite n'est pas celui d'une grandeur-produit. Par le choix d'une unité d'aire « adaptée », la mesure d'aire se ramène à des mesures de longueur, l'aire devient « bidimensionnelle ».

> C'est alors une grandeur produit, aspect incontournable pour arriver à des procédures efficaces et générales de mesure des aires. C'est à ces formules de calcul que se ramène très vite l'enseignement,

[210] Perrin-Glorian (2001) a fait un historique précis des travaux sur les grandeurs. D'autres travaux sont notamment cités, auquel j'ajoute un ouvrage dirigé par Bright et Clements (2003) ; Burgun et Raymond (1982), Jacquemier (1990), Nunes, Light et Mason (1991), Schneider (1991), Weatley et Reynolds (1991), Rouche (1992), Moreira Baltar (1993, 1996, 1998), Johan (1995), Baturo et Rod (1996), Brenner et Raymond (1996), Corberan Salvador (1996), Comiti et Moreira Baltar (1997), Bacquias (1998), Stoll (1998), Daubelcour (1998), Verschaffel et Janssens (1998), Furinghetti et Domingo (1999), Friedelmeyer (1999), Comin (2000), Bragg et Outhred (2000), Cobo et Fortuny Josep (2000), Pessia et Nurit (2000), Battista (2003), Schifter et Szymaszek (2003), Bonotto (2003), De Bock, Outhred, Mitchelmore, McPhail et Gould (2003), Lehrer, Jaslow et Curtis (2003), Lipka, Shockey et Adams (2003), Enderson (2003), Steinback, Schmitt, Merson et Leonelli (2003), Joram (2003), ils pourraient contribuer à approfondir la discussion. Je donne ces références en Annexe.

> renforçant les risques de confusion entre mesure de longueurs sur une surface et mesure de l'aire de cette surface. (Perrin-Glorian, 2001, p.308)

Rogalski (1984) étudie la bidimensionnalité du point de vue cognitif (entre autres), par exemple autour des agrandissement-réductions. Elle distingue des stades d'acquisition. Il est important pour mon propos que la représentation du produit passe graduellement d'un type « additif » et unidimensionnel à un type bidimensionnel[211].

> A 7 ans, il commence à y avoir des règles d'arrêt : le produit est une solution, unique, à certains problèmes. La représentation du produit semble de type « additif », une dimension reste relativement dominante, mais pas de manière absolument stable ; les comportements restent unidimensionnels.
>
> A 8 ans se produit un processus de réorganisation des représentations du produit de dimensions conduisant des représentations de type additif à celles de type multiplicatif ; le fait que les anticipations des effets d'adjonction d'éléments aux ensembles de base soient mobilisables nous en semble un indice très intéressant. Ce processus se traduit aussi, nous semble-t-il, par d'apparentes régressions pour certaines réponses. De plus, l'espace joue un rôle producteur. Cependant le domaine de validité des opérations bidimensionnelles est limité.
>
> A 9-10 ans, la bidimensionnalité du produit ensembliste est acquise […] Dans des opérations complexes comme les mises en correspondance de produit, les enfants peuvent maintenant faire des hypothèses unidimensionnelles stables, pour l'une et l'autre des dimensions successivement. Toutefois la coordination multiplicative de ces hypothèses reste difficile. (Rogalski, 1984, p.6)

L'introduction de la mesure d'aire dans l'enseignement est un élément clé de cette transition. Rogalski précise que le pavage n'est pas garant de la disponibilité de la bidimensionnalité. Ce point est extrêmement important pour la question de transition qui m'intéresse. Faute de travail spécifique à un moment choisi de la scolarité, la bidimensionnalité ne sera pas non plus disponible pour les autres formes planes adaptées.

> A 10-12 ans, les acquis sur la bidimensionalité de la mesure de surface s'établissent ; le pavage des figures rectangulaires en fournit une première base, qui n'assure pas néanmoins une disponibilité de la notion même pour les formes structurées multiplicativement (rectangles, parallélogrammes).
>
> De la 6ème à la 4ème alors que la linéarité de la mesure des longueurs est utilisée de façon fiable, la bidimensionnalité de la mesure de surface garde un domaine de validité limité, bien que s'étendant lentement à des formes comme les triangles. La structuration des situations-problèmes, les modes opératoires utilisés pour exprimer la mesure, interviennent dans la disponibilité de la bidimensionnalité. Faute de pratiques « spontanées » à ce niveau de fonctionnement des mesures spatiales, faute d'une intervention appropriée de l'enseignement, beaucoup d'élèves ne parviennent pas à s'approprier la mesure de surface comme une opération bidimensionnelle valide sur toute (bonne) forme plane. (Rogalski, 1984, p.7)

Rogalski distingue des obstacles dans le passage de l'unidimensionnalité à la bidimensionnalité. Elle distingue ces obstacles des difficultés liées à la réalisation matérielle,

[211] Je précise que dans l'enseignement, la multiplication est très généralement mise en relation avec une grille (pavage) dès son introduction. Ainsi, l'introduction de l'unité d'aire représentée par un carreau s'appuie sur ces prérequis.

aux ensembles de base, aux moyens de contrôle qui peuvent être difficilement accessibles. Il s'agit :

-du passage au domaine multiplicatif,

-du changement d'ordre de grandeur,

-de l'acquisition de la dimensionnalité des diverses mesures spatiales.

L'obstacle lié au domaine multiplicatif est celui du passage de la structure additive vers la structure multiplicative.

> Il apparaît tout d'abord l'obstacle que nous qualifierons de logique, au sens Piagétien, du passage au domaine multiplicatif. Cet obstacle a son versant arithmétique dans le problème du passage des structures additives aux structures multiplicatives, que l'enseignement, comme nous l'avons vu, a plutôt tendance à renforcer. L'une des conséquences à long terme est la représentation de la multiplication comme une opération qui « donne des nombres plus grands » (et la division comme une opération qui donne des nombres plus petits). (Rogalski, 1984, p.8)

En résumé, pour ce qui m'intéresse, l'action de mesurage par report d'unité de mesure dans un cadre unidimensionnel, est d'abord lié pour le versant arithmétique, à l'opération de l'addition. Cette action est remplacée par la multiplication pour obtenir le nombre total de carreaux dans la grille. Il est possible de se demander quel est le versant géométrique qui accompagne cette opération.

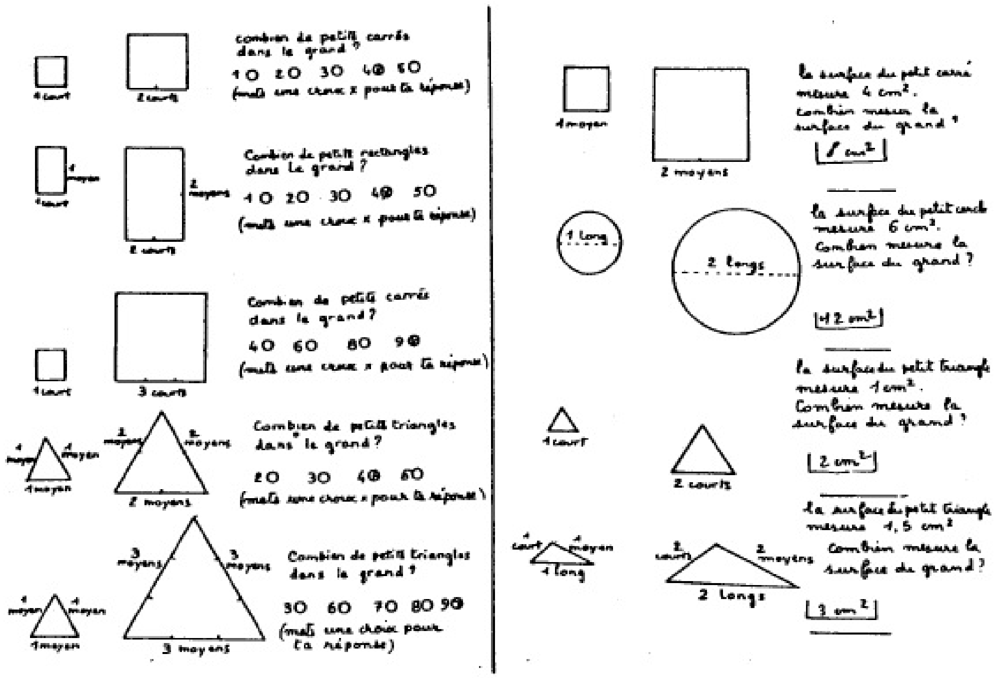
L'obstacle suivant est celui du changement d'ordre de grandeur du point de vue numérique, dès que les longueurs initiales ne sont pas trop petites.

> Un autre aspect de cet obstacle est lié au changement d'ordre de grandeur, en rapport avec la représentation du domaine numérique, où seul un domaine restreint est utilisé. Or le passage de l'unidimensionnel au bidimensionnel se traduit par un changement d'ordre de grandeur dès que les cardinaux des ensembles de base ou les mesures des longueurs ne sont pas trop petits. […] nous avons rencontré cet obstacle dans l'arithmétisation du volume (Vergnaud et al., 1983, Rogalski et al, 1983) et dans les rapports entre nombre et espace chez des élèves de 6ème et de 5ème (Errecalde et Rogalski, 1984). (Rogalski, 1984, p.8)

Il me semble spécifiquement adressé dans l'exercice de calcul d'aire paléo-babylonien où il faut nécessairement contrôler l'ordre de grandeur pour obtenir un résultat (voir 2.2, p. 48). Il faudra se demander comment il est négocié dans les manuels scolaires. Le dernier obstacle, la mise en relation entre dimensions physiques composées et dimensions composantes, est un obstacle majeur qui m'intéresse, en lien avec l'analyse dimensionnelle.

> Un autre type d'obstacle se rencontre dans l'acquisition de la dimensionnalité des diverses mesures spatiales : c'est la mise en relation entre dimensions physiques composées (surface, volume, au-delà masse volumique, etc.) et dimensions composantes. Ces problèmes liés à l'analyse dimensionnelle, se retrouvent jusque dans l'enseignement supérieur. (Rogalski, 1984, p.9)

Il me semble à mettre en relation avec les travaux de Viennot (1992) sur la dépendance fonctionnelle, (voir p.223) qui abordent ce problème sous un angle complémentaire. Rogalski (1984) met en place des expérimentations qui montrent que les relations à la mesure du côté peuvent être dominantes par rapport au pavage lorsqu'il est demandé de calculer l'aire.



Représentation 3-1 : un extrait de l'expérimentation de Rogalski (1984, Partie IV p.14)

Les objectifs qu'elle décrit sont les suivants : elle construit une expérimentation visant à apprécier dans les premières phases, la disponibilité d'une représentation de pavage et sa mobilisation effective ; les phases suivantes permettent d'étudier si le mode unidimensionnel ou bidimensionnel est choisi, du décompte additif au calcul. Les interactions entre les formules standard et les erreurs ou l'oubli du mesurage par report y sont donc très nettement mises en valeur.

> Les phases 1 et 3 ont pour but d'apprécier la *disponibilité* d'une représentation de pavage d'une figure par une figure semblable et la *mobilisation* possible de cette représentation par la donnée d'un (ou deux) modèle(s).
> Les couples de phases 1-2 et 3-4 concernent l'étude du passage d'une représentation qui permet le décompte additif d' « unités-formes » au calcul de la mesure d'une surface semblable à une autre.
> La comparaison des phases 2 et 4 a pour but d'étudier l'effet du mode opératoire choisi : un mode « unidimensionel » (représenté ici par un nombre de pots de peinture nécessaires pour peindre la surface) et un mode « bidimensionnel » (ici l'unité métrique cm^2).
> Les interactions des opérations de pavage et de mesure de surface avec les caractéristiques des figures sont étudiées dans les différentes phases pour explorer le domaine de validité des opérations et le domaine de validité de la « dimensionalité » de la mesure-surface. (Rogalski, 1984, Partie IV p.17)

Du point de vue des résultats, Rogalski (1984, Partie IV p.17) conclut que le pavage lié à l'addition est un point d'ancrage effectivement disponible, pour la mesure de surface au cours moyen.

> Cependant le domaine de validités des opérations reste limité, en particulier pour la mesure de surface : quant aux figures considérées, quant au domaine numérique : la bidimensionalité de la mesure surface, à la fois opposée et coordonnée à l'unidimensionalité de la mesure-longueur, n'est pas un concept que la

> majorité des adolescents se soit appropriée à l'issue de l'enseignement sur les mesures spatiales. (Rogalski, 1984, Partie IV p.50)

Elle constate cependant que les difficultés persistantes semblent dues à des obstacles cognitifs et épistémologiques, notamment le changement de structure et la dimensionalité relative des objets géométriques :

> Le passage des structures additives aux structures multiplicatives, et la constitution de celles-ci comme domaine propre, la reconnaissance de la dimensionalité relative d'« objets » géométriques – les lignes, surfaces et volumes – la notion d'équivalence qui fonde la mesure des formes non pavables et sous-entend des propriétés de continuité, complexes pour certaines. (Rogalski, 1984, Partie IV p.50)

Rogalski fait l'hypothèse que l'enseignement s'est adapté à ces obstacles et en a limité son intervention. Pourtant selon Rogalski il est possible de conduire les élèves à une approche productive de ces notions, considérées comme complexes.

> [...] il s'est adapté à ces obstacles cognitifs (dont le passage des structures additives aux structures multiplicatives, la dissociation des propriétés co-présentes de bord et d'intérieur des figures planes ou des objets) et à ces obstacles épistémologiques (dont la modélisation des lignes géométriques par l'ensemble des réels, en liaison avec les notions de continuité, la notion de produit de mesures...). [...] des expériences montrent pourtant (Douady 1980) que, sur cette base de la mathématisation, on peut conduire de jeunes élèves à une approche productive de notions considérées comme complexes et rejetées loin dans l'enseignement dans le cadre d'une conception déductiviste des mathématiques (les réels, par exemple). Cela nous paraît une perspective importante des recherches didactiques à mener dans ce domaine des mesures spatiales, en relation à la fois avec les structures de type algébrique (relation additif/multiplicatif) et les notions relevant de l'analyse. (Rogalski, 1984, Partie IV p.50-51)

En conclusion, en lien avec ma question qu'est le passage d'une structure additive unidimensionnelle à une structure multiplicative bidimensionnelle, Rogalski confirme la présence d'obstacles liés à la mise en relation entre dimensions physiques composées (surface, volume, au-delà masse volumique, etc.) et dimensions composantes. Elle constate que ces difficultés peuvent ne pas être traitées (ou être repoussées) dans l'enseignement. En ce qui concerne le point de transition que j'étudie plus particulièrement, elle met en place des expérimentations qui montrent que la coordination de la mesure par pavage, avec la dimension des côtés de la figure plane, est difficile à mettre en œuvre. Il est fortement possible que les difficultés constatées, que je souhaite étudier précisément du point de vue des transitions entre cadres qui affectent l'unité de mesure, conduisent les élèves à supprimer l'action de mesurage par report, au profit de formules, même si elles ne sont pas forcément adaptées.

En résumé, il y a bien une difficulté importante dans ce changement qui affecte :

-le passage du registre des figures aux nombres et symboles
-la structure : de l'addition vers la multiplication
-la bidimensionnalité

Je m'interrogerai sur la façon dont les manuels scolaires accompagnent cette transition et sur les conceptions qui peuvent être attachées aux objets qui entrent en jeu, notamment les unités de mesure. Je passe maintenant à des aspects cognitifs liés à la géométrie et aux dimensions.

Les connaissances spatiales et la « grille »

Outhred et Mitchelmore (1992) montrent que construire une grille est une activité problématique du point de vue cognitif. Si les élèves ont réussi à couvrir le rectangle de carreaux et trouver l'aire en comptant les carreaux (au moins en procédant un par un), beaucoup (30%) ont eu des difficultés à redessiner la grille qu'ils avaient sous les yeux : ils ajoutaient beaucoup trop de carreaux. Les carreaux assemblés n'étaient forcément interprétés par les élèves en termes de lignes et colonnes. D'autre part, l'utilisation de lignes parallèles pour dessiner une grille n'était pas acquise. 50% seulement avaient construit une grille avec des parallèles dans les deux sens (horizontal, vertical). Les auteurs argumentent que sans cette acquisition, la relation entre multiplication et longueur des côtés ne peut être acquise. En effet, leurs résultats montrent que les élèves qui ne se représentent pas la grille en termes de lignes et colonnes ne déterminent pas (ou rarement) le nombre de carreaux par multiplication. Aucun des élèves ayant fabriqué une grille en dessinant des carreaux « un par un » n'avait utilisé la multiplication, alors que la majorité des élèves qui avaient dessiné des grilles « structurées » l'avaient utilisée (ou ont fait des regroupements). De plus, seuls les élèves ayant dessiné des grilles structurées avaient mesuré les côtés du rectangle. Mais certains des élèves ayant réalisé de telles grilles n'avaient pas pour autant utilisé la mesure, pour déterminer le nombre de carreaux sur un côté du rectangle.

> On pourrait penser que le troisième niveau de dessin, (la transition des carreaux individuels vers une grille structurée) serait adéquat pour la mesure d'aire, mais de nombreux élèves à ce niveau, et même au niveau 4, n'ont pu appliquer leur multiplication et connaissances en mesure linéaire, pour déterminer l'aire du rectangle.
> La capacité à déterminer le nombre de carreaux sur chaque côté du rectangle quand elle n'était pas donnée explicitement, a été montrée seulement par les élèves qui multipliaient les dimensions ou groupaient par lignes ou colonnes et dessinaient des grilles structurées ou partiellement structurées. [...]
> Il est évident, par ces résultats, que les jeunes enfants n'interprètent pas automatiquement les quadrillages par carreaux en termes de lignes et colonnes, et que cela pourrait entraver leur apprentissage de la mesure d'aire utilisant des diagrammes. (Outhred et Mitchelmore, 1992, p.535-536[212])

Outhred et Mitchelmore (1996) font ensuite le lien au problème spécifique de la grandeur longueur. Ils s'attachent à la compréhension intuitive de la mesure d'aire avant son enseignement. Ils réalisent leur étude sur 155 élèves de quatre écoles d'un milieu socio-économique moyen de Sydney, années 1 à 4 (6-7, 7-8, 8-9, 9-10 ans). Ils font ressortir quatre principes fondamentaux pour l'acquisition de la mesure d'aire :

-le rectangle doit pouvoir être couvert sans trous ni chevauchement

-il doit pouvoir être couvert par pavage de carrés

-le nombre d'unités selon chaque côté doit pouvoir être trouvé (spontanément) en mesurant les longueurs

-le nombre d'unités dans une grille rectangulaire doit être vu comme le produit du nombre d'unités de chaque ligne et colonne.

Ils font l'hypothèse que les tâches visant l'apprentissage du dessin de pavage par carreaux pourraient attirer l'attention des élèves sur la relation entre le nombre d'unités d'aire qui couvrent le rectangle et les longueurs des côtés, puisque les élèves doivent déterminer

[212] Traduction en français par moi-même pour cette thèse.

combien d'unités doivent être posées le long des côtés adjacents. Ils classent les stratégies des élèves en niveaux :

-niveau 1 : l'élève ne se rend pas compte que toute la surface doit être couverte avec des unités identiques (trous, chevauchements, taille de l'unité changeante)

-niveau 2 : l'élève se rend compte que toute la surface doit être couverte mais il a des difficultés à assurer la systématisation du recouvrement et la congruence des unités

-niveau 3 : la grille est construite, les unités estimées. Mais l'élève ne voit pas la relation entre la taille de la grille et les longueurs des côtés du rectangle

-niveau 4 : l'élève voit la relation entre la taille de la grille et les longueurs de l'un des côtés du rectangle, mais s'étant focalisé sur une dimension, il a des difficultés à construire une grille correcte

-niveau 5 : la grille est construite, les deux côtés sont mesurés.

L'étude rappelle que la plupart des élèves d'année 1 n'arrivent pas au niveau 2, certains des élèves d'année 2 y parviennent. Les élèves d'années 3 (1 tiers) et 4 (3 quarts) sont de niveau 4 ou 5. De plus, la multiplication n'apparaît pas cruciale (principe 4) pour la compréhension informelle de la mesure d'aire du rectangle, « bien qu'elle soit bien sûr essentielle pour la compréhension de la formule ». (Outhred et Mitchelmore, 1996, p.104). Ils notent que la recherche a mis l'accent sur les principes 1 et 4, et souhaitent souligner l'importance du principe 3 : le nombre d'unités selon chaque côté doit pouvoir être trouvé (spontanément) en mesurant les longueurs.

> [...] qui apparaît avoir été complètement négligé par la littérature. Il peut sembler évident aux adultes que les nombres dans la grille dépendent des mesures du côté, mais ce n'est clairement pas évident pour les élèves. (Outhred et Mitchelmore, 1996, p.104)

Un point est particulièrement important pour cette étude : ils font le lien entre cette capacité et celle de mesurer à la règle. Ils montrent que *la mesure à la règle n'est pas automatiquement vue comme le compte d'un nombre d'espaces de taille 1 cm* (donnée par le nombre écrit sur la règle). Or, c'est un aspect essentiel pour permettre de relier le nombre d'unités carrées à la longueur du côté (d'autant plus si le carré ne fait pas 1 cm de côté).

> L'implication pour l'enseignement est que la mesure à la règle ne devrait pas être enseignée simplement comme une habilité mécanique. La règle devrait plutôt être vue comme l'une des nombreuses façons de résoudre le problème général ; comment trouver combien de telle unité de longueur se trouvent sur une longueur donnée ? (Outhred et Mitchelmore, 1996, p.105)

Outhred et Owens (1997) s'intéressent ensuite au lien entre la visualisation de l'espace et la possibilité de couvrir une surface de carreaux (visualisation avec ou sans l'utilisation d'un dessin). Rogalski fait aussi un lien entre l'acquisition de la bidimensionnalité et l'espace. Il s'agit de profiter des connaissances des enfants acquises dans l'espace, sur les propriétés liées à la bidimensionnalité, comme les notions de proximal et distal.

> Globalement, dans une certaine mesure, l'espace apparaît comme un précurseur dans la construction de la bidimensionnalité : la richesse de ses propriétés, la précocité des représentations des enfants construites à partir de leurs activités manuelles et motrices dans l'espace, en sont une des raisons. En particulier le privilège de la dimension proximal/distal (loin/près par rapport à soi, devant/derrière par rapport à des objets orientés) fournit une organisation unidimensionnelle. Le plan apparaît un référent privilégié pour la représentation de la bidimensionnalité en tant qu'objectivement organisé de façon bidimensionnelle. (Rogalski, 1984, Partie IV p.7)

Du point de vue cognitif, Rogalski rappelle d'ailleurs que les mesures spatiales font entrer en jeu des concepts physiques (transformations des objets) et spatiaux (organisation des activités cognitives sur l'espace). Ainsi, la bidimensionnalité a des implications cognitives liées à la représentation de l'espace. Les objets qui entrent en jeu dans la mesure font appel à des conceptions spatiales et aux relations entre les dimensions. La transition, dont on a montré qu'elle affectait le registre des nombres, le lien entre les structures (additive et multiplicative) ; affecte aussi le cadre géométrique, et implique là-assi, de faire de liens.

Je retiens des points importants pour la suite : pour l'étude conceptuelle de l'unité de mesure dans le cadre du changement de registre et de structure (additive vers multiplicative), il faudra se poser la question :

-de la façon dont les manuels scolaires explicitent le lien entre le nombre de carreaux sur une ligne et le nombre d'unités de mesure de longueur

-de l'implication éventuelle d'une non explicitation de ce fait du point de vue conceptuel et dans le cadre du changement de registre de représentation

Je remarque également que les *Neuf chapitres* (voir 4, p.156) proposent une transition originale sur ce point avec la transformation géométrique en « bande unité », qu'il faudrait interroger.

Quelques difficultés avérées

Perrin-Glorian (1990, p.31) mentionne quelques erreurs fréquentes des élèves :

-difficulté d'exprimer l'aire d'une surface qui ne peut être pavée par des carrés,

-difficultés à distinguer aire et surface, aire et périmètre ;

-utilisation de formules inadaptées sur des surfaces comme le parallélogramme ou le triangle (à mettre en relation avec l'expérimentation de Rogalski, voir Représentation 3-1, p.212)

Outhred et Mitchelmore (1996) font un état des lieux des difficultés qui concernent particulièrement ma question. Ils rappellent que le concept d'aire est mal compris entre sept et onze ans (Bell, Hughes et Rogers, 1975) ; de même que dans l'enseignement secondaire (Clements et Ellerton, 1995; Bell, Costello et Kuchemann, 1983).

Ils disent que selon Foxman, Ruddock, Joffe, Mason, Mitchell et Sexton (1983), seulement 55% des enfants de onze ans au Royaume-Uni pouvaient trouver le nombre de carreaux qui couvriraient une forme en T, étant donné la longueur de ses côtés, nombre qui chute à 25% si on utilise le terme « aire ». Les élèves réussissaient mieux lorsqu'une grille carrée était superposée à la forme que lorsqu'on leur donnait des longueurs de côtés, vraisemblablement parce que la grille mettait l'accent sur l'aspect couvrant et parce qu'ils pouvaient simplement compter les carrés.

Simon et Blume (1994) ont indiqué que bien que les futurs enseignants dans leur étude aient répondu aux problèmes de l'aire en multipliant, leur choix d'opération était souvent le résultat de l'apprentissage d'une procédure ou d'une formule pour l'aire d'un rectangle plutôt que le résultat d'un solide lien conceptuel entre leurs compréhensions de la relation entre l'aire et la mesure de longueur du côté. Cette difficulté va particulièrement m'intéresser, puisque j'ai choisi de travailler avec des élèves de la classe de seconde (15-16 ans) lors de l'expérimentation.

Les difficultés suivantes mentionnées par Outhred et Mitchelmore sont particulièrement intéressantes pour la question de la transition qui m'intéresse. Dans une étude de Tierney, Boyd et Davis (1990), il a été observé que de nombreux futurs enseignants : confondent l'aire et le périmètre; appliquent la formule pour trouver l'aire du rectangle aux figures planes autres que les rectangles; considèrent l'aire comme "longueur × largeur"; utilisent des lignes plutôt des unités carrées (carreaux); et assimilent les changements relatifs aux dimensions linéaires à des changements d'aire (par exemple, de nombreux étudiants pensaient que si les longueurs des côtés d'un carré étaient doublées, cela pourrait être le cas de son aire). Les difficultés à faire des liens entre les cadres sont confirmées par des travaux :

> On s'entend généralement à dire que les difficultés des enfants à l'égard des concepts d'aire de surfaces rectangulaires sont attribuables, en partie, à l'accent mis sur la formule, et que si les enfants ne comprennent pas la signification de partitionner des surfaces en carrés unité (carreaux), toute tentative d'enseigner des procédures pour calculer des zones sera au mieux apprise par cœur (Carpenter, Coburn, Reys et Wilson, 1975).
> Pour surmonter le problème de l'application par cœur des formules, des matériaux concrets ont été largement recommandés comme base pour construire des concepts abstraits. Cependant, un certain nombre d'études ont montré que les enfants ne saisissaient pas la relation entre les différentes formes de représentation des idées mathématiques, en particulier entre les activités concrètes consistant à couvrir des figures rectangulaires et la formule de l'aire rectangulaire. (Dickson, 1989, Hart, 1987, 1993).
> De plus, les matériaux utilisés pour mesurer les aires peuvent affecter la pensée des enfants. Doig, Cheeseman et Lindsey (1995) ont constaté que les enfants de 8 ans qui utilisaient des carreaux de bois pour recouvrir une surface avaient deux fois plus de succès que les enfants qui utilisaient des carreaux de papier, car l'utilisation de carreaux de bois évitait les problèmes à potentiel multiple, tels que les chevauchements et les trous. De plus, les enfants peuvent être capables de trouver le nombre de carrés qui couvrent une forme mais ne réalisent pas qu'ils calculent l'aire (Bell, Costello et Klichemann, 1983). (Outhred et Mitchelmore, 1996).

Simon et Blume (1994) ont indiqué que le lien entre les dimensions linéaires et la surface rectangulaire était difficile pour les futurs enseignants. Ils disent que s'il est effectivement possible pour eux : 1. de mobiliser la grille, et 2. de voir le total de carreaux comme le résultat à obtenir pour mesurer l'aire, mais l'étape 3. qui consiste à comprendre comment les mesures linéaires déterminent la taille de la grille leur est nécessaire et difficile. C'est sur ce dernier point qu'il sera possible d'étudier les réponses d'élèves lors de l'expérimentation.

3.1.3 Les travaux sur la mesure

J'ai choisi de présenter ici plusieurs types de travaux liés à la mesure dans des cadres plus éloignés du mien. Je complète ma réflexion avec des recherches liées plus précisément aux unités de mesure, dans d'autres situations. Ces distinctions me permettront de mettre en avant des aspects de la conceptualisation de l'unité de mesure, utiles pour l'analyse des manuels, mais également plus généralement pour les conclusions de la thèse.

Aspects épistémologiques et conceptuels de la mesure

Munier et Passelaigue (2012) s'intéressent à l'articulation entre didactique et épistémologie dans l'enseignement des grandeurs et de la mesure. Elles clarifient des notions conceptuelles et postures épistémologiques possibles. Les distinctions qu'elles proposent me permettront d'expliciter ce qui n'est pas transposé dans l'enseignement actuel. Elles abordent le sujet de l'introduction des grandeurs physiques et électriques, et les incertitudes de mesure. Elles se penchent sur les conceptions des enseignants.

Elles distinguent différents points de vue sur les grandeurs :

-la grandeur comme immensité

-la grandeur, en référence à une grandeur de nature particulière (comme la longueur)

-la grandeur, en référence à la variabilité (ce qui peut être augmenté ou diminué)

-la grandeur, en référence à la mesure et au mesurage (la grandeur est ce qui peut être mesuré)

-la grandeur comme propriété commune à un ensemble d'objets équivalents

Je choisis, comme Munier et Passelaigue, la définition du VIM (2008, p VI), qui définit les grandeurs comme « propriétés d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance que l'on peut exprimer quantitativement sous la forme d'un nombre et d'une référence ».

> Nous avons donc défini « grandeur » comme propriété, attribut, qui permet de décrire les objets ou les phénomènes. Cette première description des phénomènes peut conduire à comparer les objets selon un point de vue, la propriété choisie. Ainsi, il est possible de comparer directement deux objets allongés et de déterminer s'ils sont équivalents ou non du point de vue de la longueur, c'est-à-dire d'une espèce de grandeur. (Munier et Passelaigue, 2012, p.4)

Il est intéressant de rappeler à quel point le mot grandeur est polysémique. Elles appellent (Munier et Passelaigue, 2012, p.4) « espèce de grandeur », l'aspect qui est commun à des grandeurs mutuellement comparables : il s'agit de l'ensemble des classes d'équivalence données par l'étude des objets selon un certain point de vue. Par exemple, la longueur peut s'appeler circonférence, hauteur, profondeur…, ces dernières grandeurs sont donc « de même nature ». Munier et Passelaigue rappellent que la mesure peut cacher :

-l'opération de mesurage

-le résultat de cette opération

Selon le vocabulaire employé par le VIM (2008, p.28), « 2 cm » ou « 3 cm^2 "» s'appelle la valeur de la grandeur (la valeur de la longueur, de l'aire) en référence à un objet (segment, surface…). Cette valeur de grandeur a déjà fait l'objet de distinctions spécifiques dans le Chapitre I du fait des textes anciens.

> ensemble d'un nombre et d'une référence constituant l'expression quantitative d'une grandeur
>
> EXEMPLE 1
>
> Longueur d'une tige donnée:
>
> 5,34 m ou 534 cm

C'est ce que l'on appelle communément la mesure (résultat de l'opération de mesurage, avec une unité de mesure choisie). J'ai utilisé le terme « mesure de la longueur » ou « mesure de l'aire », dans cette étude. Selon le vocabulaire employé par le VIM (2008, p.13), j'ai appelé « 2 » ou « 3 » la valeur numérique de la grandeur (longueur, aire…) selon une unité de mesure choisie. Munier et Passelaigue (2012, p.5), utilisent le terme « étalon de mesure » pour l'utilisation de l'unité de mesure « reportée » dans le mesurage.

> La méthode de mesure la plus simple est la comparaison directe avec un étalon de mesure. Cela suppose le choix de cet étalon de mesure, grandeur de même espèce prise comme référence. Le lien avec le nombre permet alors d'établir des relations mathématiques dans la comparaison de deux objets possédant en commun une même grandeur (l'un étant objet de la mesure l'autre étant l'étalon choisi). Par exemple, pour reprendre le cas de la longueur, si on peut aligner 3 fois l'étalon de longueur choisi sur un objet

> allongé, on dira que la mesure de la longueur de cet objet est égale à 3. Ce nombre sera par ailleurs accompagné de son unité. (Munier et Passelaigue, 2012, p.5)

La question de l'unité de mesure reportée, liée à l'action de mesurage, me paraît intéressante à distinguer de l'unité de mesure conçue comme l'élément d'une expression arithmétique ou algébrique.

Munier et Passelaigue rappellent que pour certaines grandeurs le mesurage ne peut se faire directement[213]. J'ai décrit les conditions particulières mises en place pour pouvoir utiliser les mêmes nombres dans le monde des grandeurs et dans celui des opérations mathématiques (voir 3.2.3, p.229)

Enfin, la valeur de la grandeur selon Munier et Passelaigue, constitue la classe d'équivalence de toutes les mesures possibles selon toutes les unités de mesure. C'est une définition un peu différente de celle du VIM (voir ci-dessus). Il est intéressant je trouve, de distinguer la grandeur à mesurer, l'ensemble des mesures possibles et la mesure effective, selon une unité donnée.

> Lorsqu'on mesure une grandeur, sa « mesure » est un nombre déterminé en fonction d'un étalon pris comme référence, qui permet d'élaborer une classe d'équivalence que nous appelons « valeur » d'une grandeur. La valeur d'une grandeur ne dépend pas de sa mesure mais elle peut être exprimée par cette mesure. Par exemple la longueur d'une tige peut être exprimée en centimètres ou en décimètres : les nombres sont différents mais la valeur de la longueur de la tige est indépendante de ces nombres. Cette valeur constitue la classe d'équivalence. (Munier et Passelaigue, 2012, p.5-6)

Voici ce que pourrait donner cette distinction selon le vocabulaire que j'ai adopté.

Objet	Grandeur (concept, propriété, caractéristique)	Classe d'équivalence des mesures possibles de la grandeur dans toutes les unités possibles	Mesure (pôle nombre) Mesure de la grandeur avec une unité de mesure choisie	Nombre (pôle nombre) Valeur numérique de la grandeur mesurée avec une unité de mesure choisie
Surface	Aire	3 cm^2 0,03 dm^2 300 mm^2 etc.	3 cm^2 (mesure de l'aire de la surface, dans l'unité de mesure cm^2)	3 (valeur numérique de l'aire dans l'unité de mesure cm^2)

[213] Par exemple, pour la mesure des intensités électriques dans les ampèremètres électromagnétiques.

Segment	Longueur	2 cm 0,2 dm 20 mm etc.	2 cm	2 (valeur numérique de la longueur dans l'unité de mesure cm)

Tableau 3-1 : concept intermédiaire entre grandeur et mesure

Le travail épistémologique de Munier et Passelaigue les conduit à utiliser le vocabulaire du VIM également, et à faire des distinctions qui se rapprochent de celles qui m'intéressent. Il semble qu'ici, l'analyse historico-épistémologique rencontre l'analyse didactique sur le terrain conceptuel, et que les outils puissent être utiles à tous.

Aspects conceptuels liés à l'unité de mesure

Ce qu'il faut remarquer également, c'est que l'unité de mesure n'apparaît pas, *a priori*, dans les études sur les concepts. C'est aussi un objet ambigu, puisqu'il peut relever :

-du pôle « surface » : l'objet (il peut être représenté plusieurs figures, plusieurs formes possibles, ou implicitement, la forme fixe d'un carré, selon les cas)
-du pôle « grandeur » : le cm^2 est une unité d'aire : c'est une aire donnée ayant pour valeur numérique d'aire « 1 », comme le carré de côté 1 cm
-et du pôle nombre (le centimètre carré est caractérisé par sa mesure d'aire, 1 cm^2)
-et enfin être un symbole représentant un objet sur lequel il est possible d'opérer, puisque l'on peut « multiplier » : « cm × cm ».

En conclusion, l'unité de mesure relève donc des cadres géométrique, arithmétique, algébrique et des registres : symbolique (formules), des figures, ainsi que de celui du nombre et des grandeurs.

De même, l'unité de mesure peut être liée :

-au mesurage (report d'unité de mesure, que Munier et Passelaigue appellent alors « étalon »)
-à l'expression d'une mesure (selon une unité de mesure choisie)
-à l'opération comme l'addition : 1 cm + 1 cm = 2 cm ; à la multiplication 3 × 1 cm = 3 cm
-être elle-même multipliée : cm × cm = cm^2

Ces points seront importants pour mes conclusions, en lien avec l'analyse de manuel mais également du point de vue général de la thèse.

Mesure et numération

Ainsi, j'ai exposé le fait que l'unité de mesure est liée à la fois à une forte polysémie, à plusieurs concepts, et à une multiplicité de cadres et de registres. Ces aspects complexes liés aux unités de mesure posent la question de leur transmission. Je vais maintenant m'interroger sur leur place dans l'enseignement ainsi qu'en recherche sur le savoir de référence.

Dans le cadre des tableaux de conversion, les relations entre unité de mesure standard sont pensées pour leur aspect pratique. Il est possible que cela ait des conséquences sur leur enseignement, mais cela ne me paraît pas avoir été un thème phare en recherche, sauf dans quelques travaux comme l'ouvrage dirigé par Clements et Bright (2003) et dans l'étude de Chambris (2009) qui a mis en valeur un recul dans la réflexion sur ce thème dans l'enseignement.

Chambris (2007) rappelle que dans les années 1970 les instructions officielles ont demandé d'éliminer les grandeurs des mathématiques de l'école. Chambris rappelle l'importance des grandeurs pour la construction des savoirs numériques.

> […] (cela) se manifeste notamment dans l'omniprésence des « relations numériques » qui réduit l'étude des fractions et de la proportionnalité à des calculs sur des nombres et semble rendre impossible certains discours explicatifs. Les évolutions des programmes depuis 30 ans, reflet déformé, mais reflet quand même, des recherches de didactique ne tendent-elles pas à montrer, pour les objets que nous avons regardés au moins, que les grandeurs et le continu sont nécessaires pour que les élèves *construisent* de nombreux savoirs « numériques » ? (Chambris, 2007, p.29)

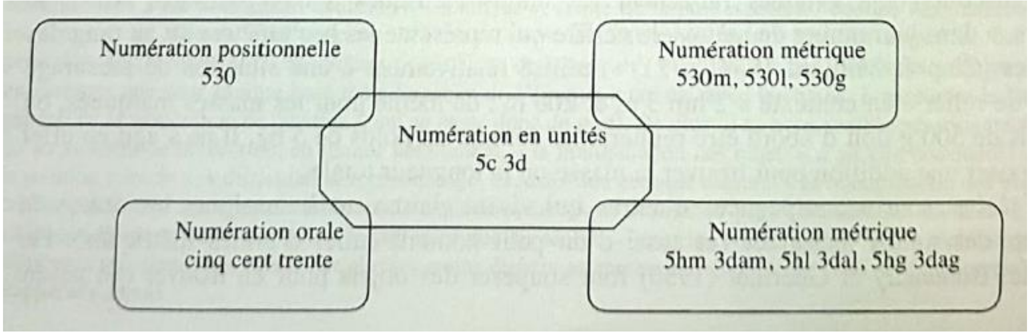
A partir de 1980, des grandeurs et du continu sont introduits dans le numérique, dans les manuels. Elle pose la question générale de la fonction du domaine mesure dans l'enseignement des mathématiques au primaire.

> Il semblerait que les grandeurs reviennent sans référence à une théorie mathématique mais au nom de la physique ou de la construction des connaissances par les élèves. Cela semble avoir notamment pour conséquence une rupture entre les mathématiques et le didactique. Ces *phénomènes* ont-ils des conséquences sur les apprentissages ?
> Enfin, en 1970, il semble qu'on crée le domaine mesure pour constituer le numérique. Compte-tenu des incursions multiples des grandeurs et du continu dans le numérique, quelle est aujourd'hui la fonction du domaine mesure dans l'enseignement des mathématiques du primaire ? (Chambris, 2007, p.29-30)

Elle explique qu'avant la réforme, entre 1930 et 1970, les manuels présentent une progression particulière pour l'étude du système métrique. « On observe un entrelacement des leçons des deux domaines. On a ainsi une sorte de progression « en crabe ». » (Chambris, 2009, p.215). Elle est constituée d'un enseignement des unités puis du mètre ; de la dizaine et des dizaines, de « l'entre deux dizaines » puis du décamètre ; etc.

De plus, Chambris met en valeur le fait que cette progression est accompagnée de discours récurrents pour l'étude du système métrique, sur les relations entre unités métriques d'une part, et sur les relations entre position, unités de la numération et unités métriques d'autre part. « Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines » (Boucheny et Guérinet 1930, p.52, cité par Chambris, 2009, p.215).

Elle explique aussi qu'une forme de numération, la numération en unités, permet de faire le lien entre numération positionnelle, numération orale, numérations métriques et numération au sein d'un système métrique lié à une grandeur.



Représentation 3-2 : la numération en unités (Chambris, 2009, p.215)

Chambris (2009, p.220-221) questionne :

> Est-il par exemple pertinent de disposer d'une théorie pour appuyer chaque pas de l'étude de la numération ? Cela ne s'oppose-t-il pas à une certaine prise d'initiative des élèves dans les situations d'apprentissage ? Comment introduire, dans les pratiques des enseignants, une théorie de la numération au plus près des tâches des élèves ? D'une certaine façon, accepter que les grandeurs contribuent à l'étude de la numération suppose probablement de renoncer à certaines conceptions des mathématiques véhiculées puissamment par la réforme et dont on peut faire le pari que certaines sont profondément ancrées dans les imaginaires mathématiques des enseignants.
>
> Finalement, notre étude peut être vue comme un point de départ pour une étude comparative. [...] (Chambris, 2009, p.220-221)

La conclusion de la rencontre avec ces travaux pourrait être de penser à nouveau à construire une progression dans l'apprentissage du système métrique, en lien avec ses aspects conceptuels, les cadres numérique et géométrique.

Penser les relations entre unités de mesure dans le cadre géométrique

Dans le cadre géométrique, l'apprentissage du système métrique, les relations entre unités de mesure sont-elles abordées, en dehors du compte du nombre de mm^2 dans 1 cm^2 ?

En conclusion, l'analyse des manuels scolaires devra permettre de s'intéresser à cette question, (voir 5, p.238). Joram (2003) propose également de penser le lien entre les unités de mesure comme étalons (reportés physiquement) et le système métrique, ainsi que les liens entre étalons eux-mêmes (conversions).

L'un des points clé qui entrent en jeu ici à mon avis, est le fait de pouvoir accompagner le changement de cadre (géométrique vers algébrique) à travers une représentation géométrique « correcte » des opérations (dans le cadre géométrique) sur les unités de mesure.

Par exemple,

- 3 × 1 cm n'est peut-être pas très difficile à accompagner conceptuellement dans le cadre géométrique
- 3 cm × 3 cm pourrait faire l'objet de représentations géométriques erronées. J'y reviendrai.
- La « conversion » 100 × 3 cm^2 pourrait elle aussi faire l'objet d'un accompagnement géométrique, et ainsi poursuivre le travail proposé entre unités de numérations et système métrique, dans le cadre géométrique

D'une manière générale, comment l'enseignement du système métrique est-il accompagné dans la transition entre les cadres ? Avant d'aborder l'importance de cette question grâce à l'analyse des manuels, je passe aux travaux de recherche sur la dépendance fonctionnelle, ainsi que le symbolisme et le savoir de référence à enseigner.

La dépendance fonctionnelle (Laurence Viennot)

Viennot (1992), en lien avec Rozier (1989) spécifie « quelques tendances fréquemment observées dans le traitement de problèmes à plusieurs variables ou dans l'interprétation d'énoncés qui s'y rapportent » (1992, p.127) Des conséquences s'ensuivent chez l'élève :

-considérer moins de variables que nécessaire

-ou traiter le nombre convenable de variables d'une manière inappropriée.

Viennot qualifie cela des « traits caractéristiques du raisonnement linéaire causal ». Elle déduit de l'étude la pertinence d'entrée dans l'apprentissage par les composantes générales du raisonnement, sans évacuer l'entrée par les contenus.

> On montre que ces traits caractéristiques du "raisonnement linéaire causal" apparaissent sur des contenus variés, ce qui contribue à justifier que l'on aborde aussi l'étude des idées des apprenants par l'entrée des composantes générales de raisonnement, et non seulement par celle des contenus spécifiques. (Viennot, 1992, p.127)

Viennot (1992, p.128-129) distingue les relations impliquant plusieurs grandeurs physiques visant à calculer une valeur numérique à partir de plusieurs autres (point de vue numérique) et celles visant des raisonnements du type : « si telle grandeur augmente et si telle autre est maintenue constante, alors telle autre diminue » (point de vue fonctionnel). L'entrée dans l'aspect fonctionnel est cruciale pour l'enseignement.

> Avant de poursuivre, il faut souligner toute l'importance de l'aspect fonctionnel. On peut dire que l'on commence à comprendre véritablement un domaine, de la physique en particulier, quand on maîtrise un tant soit peu les dépendances fonctionnelles. C'est notamment un élément majeur du contrôle des résultats qu'on obtient à la fin d'un calcul. (Viennot, 1992, p.128)

Viennot (1992, p.139-140) engage à penser le moment de l'introduction des règles du raisonnement sur plusieurs variables, en lien avec un angle d'étude fonctionnel et non uniquement numérique.

> A propos de quel chapitre va-t-on décider de prendre du temps pour expliciter et travailler les règles du raisonnement sur plusieurs variables ? Quand rassemblera-t-on les principes qui président à l'analyse quasi-statique des systèmes, lorsque ceux-ci sont étudiés ici ou là selon les concepts qu'ils mettent en jeu ? Plus simplement, quand développera-t-on l'aptitude à considérer un résultat sous l'angle fonctionnel et non seulement sous l'angle numérique ? Cela suppose une détermination explicite et à longue échéance, puisque ce sont principalement des contenus spécifiques qui sont mentionnés dans nos livres d'enseignement, et qu'un objectif en termes d'aptitude de raisonnement peut sembler a priori décourageant, et d'une efficacité diffuse. (Viennot, 1992, p.139-140)

Elle rappelle que c'est un point qui est nécessairement abordé plus ou moins implicitement dès l'introduction de la surface du rectangle.

> Mais, pour qui adopte ces objectifs, des pistes d'action existent, même à propos de contenus tout à fait élémentaires : on peut commencer à travailler les dépendances multifonctionnelles dès qu'on connaît

l'expression de la surface d'un rectangle. Et les enjeux correspondants sont d'une importance qui se passe de commentaires. (Viennot, 1992, p.139-140)

Dans le cadre qui m'intéresse, il s'agit d'expliciter le fait que si l'on prend en compte des mesures, et l'aspect bidimensionnel de la grandeur aire, il ne faudrait pas se placer uniquement dans un cadre numérique d'analyse. Il est difficile de tenir compte simultanément de deux termes d'une multiplication, du fait d'une façon naturelle que l'on a de raisonner qui est prioritairement « linéaire ».

Les travaux de didactique des mathématiques qui précèdent proposent des pistes pour travailler sur la dépendance de la grandeur aire à la longueur. Quelle place est donnée à ce travail sur la dépendance, dans l'enseignement en général ? Quel est le coût pour l'élève de ne pas avoir traité cette question, le cas échéant ? Ma recherche n'aborde pas directement cette question générale, mais propose une entrée par l'exemple de l'aire du carré et du rectangle.

Il est aussi possible que les élèves, en lien avec la formule de calcul d'aire, aient tendance à placer leur raisonnement dans le cadre numérique coûte que coûte, quitte à produire des raisonnements erronés : il faudra y être attentif.

La question de la prise en compte conceptuelle d'un lien de dépendance à la longueur, dans les cadres géométrique et numérique, et leur coordination, est importante ici dans ce qui peut être considéré comme un premier apprentissage de la dépendance. Cet aspect n'est, je crois, pas explicité comme le premier pas d'un tel apprentissage global de la dépendance, dans l'enseignement.

3.1.4 Le symbolisme

En dehors du texte de Chevallard et Bosch (2001), je n'ai pas rencontré de travail de recherche à citer portant spécifiquement sur la conceptualisation de l'unité de mesure en tant qu'objet algébrique, en lien avec le symbolisme, lorsqu'elle est introduite dans l'expression arithmétique lors du calcul d'aire[214]. Le point de Chevallard ne s'inscrit d'ailleurs pas complètement dans la didactique de l'algèbre, mais il est lié à mon propos. Chevallard propose la réhabilitation des unités de mesure dans les calculs.

> Il n'est guère besoin d'insister sur la grande fiabilité de cette technique de calcul, qui rend en particulier inutile la vérification de la cohérence dimensionnelle, puisque le contrôle se fait ici en continu, tout au long du calcul. La grande question, alors, est celle des voies et moyens d'une volonté de réintégration des unités dans les calculs, et, par là, des grandeurs dans la classe de mathématiques. (Chevallard et Bosch, 2001, p.22)

Les arguments de Chevallard et Bosch sont légitimes, même si la question du moment et de la façon d'introduire les unités de mesure dans les calculs reste ouverte.

En conclusion, au vu de l'ensemble des travaux précédents et de la présente étude, de nombreuses questions se posent :

-la cohérence dimensionnelle est un objet d'apprentissage. Comment cet apprentissage est-il pensé ?

-les élèves rencontrent des arguments de cohérence dimensionnelle dès « cm × cm = cm^2 ». Quelles en sont les conséquences sur la conceptualisation de l'unité de mesure, qui est ici à

[214] Il existe peut-être des travaux qui n'ont pas été portés à ma connaissance.

la fois liée à une multiplication, mais également pour l'unité de mesure d'aire, au résultat de la multiplication de deux unités de dimension 1 ?
-comment le changement de cadre, dans l'apprentissage de la formule, va-t-il s'arranger, le cas échéant, de ces nouvelles conceptualisations possiblement erronées ?
Je n'ai pas travaillé sur les questions suivantes, qui me semblent aussi importantes :
-peut-on travailler sur ce formalisme naissant autour de l'unité de mesure, en lui donnant du sens par un travail progressif sur la dépendance fonctionnelle, tout en explicitant son caractère arbitraire ?

J'ai présenté la façon dont la mesure d'aire du rectangle et du carré est généralement introduite en CM2 (voir 2, p.182) et ainsi, le fait qu'elle est liée à un premier apprentissage du symbolisme. Comment la lettre « c » pour « côté » va-t-elle être interprétée par les élèves lors du changement de cadre ? Que va-t-elle représenter ? Cette question sera amenée jusqu'à l'expérimentation en classe.

3.2 Le savoir de référence à enseigner

J'ai choisi de présenter ici trois travaux sur le savoir savant à transposer, qui éclairent mon propos par la façon dont ils permettent une prise de recul grâce à la théorie, sur les distinctions qui sont ou non, effectivement enseignées.

3.2.1 Découpage-recollement, aires et calculs avec unités

Pressiat (2001, p.283-293) utilise les notions de figures équidécomposables et équicomplémentaires (égal par complément, ayant même contenance). Je le présente ici seulement pour démontrer qu'il existe un décalage entre les opérations sur les figures et les opérations sur les nombres, qui implique que la justification par la grille que l'on utilise avec les élèves, porte des implicites démonstratifs. Je vais par la suite reprendre plus en détail la notion du décalage entre les opérations sur les figures et les nombres, avec les travaux qui m'ont été présentés par Nadine de Courtenay (voir 3.2.3, p.229).

Deux figures P et P' sont <u>équidécomposables</u> s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre :

$P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$

$P' = T_1' \cup T_2' \cup \ldots \cup T_n'$

Telles que pour chaque i, T_i et T_i' soient congruents. Le sens qu'il donne à « congruents » est le « sens ancien » (Pressiat, 2001, p.283) que j'associe à « isométriques » et donc de même aire.

Deux figures P et P' sont <u>équicomplémentaires</u> s'il existe des figures Q et Q' telles que les quatre conditions suivantes soient réalisées : P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre ; P' et Q' n'empiètent pas l'une sur l'autre, Q et Q' sont équidécomposables ; P $\cup$ Q et P' $\cup$ Q' sont équidécomposables.

On peut alors démontrer ainsi que des parallélogrammes construits sur la même base et entre les mêmes parallèles ont même contenance (même aire). De plus si deux figures sont équidécomposables, alors elles sont équicomplémentaires (elles ont même contenance).

Or la réciproque n'est pas vraie si l'axiome d'Archimède n'est pas satisfait[215]. S'il est satisfait, un axiome est nécessaire pour qu'il y ait équivalence. Ce dernier est satisfait dans certaines conditions, dans le plan de Hilbert satisfaisant l'axiome des parallèles et avec une fonction mesure bien définie. A ces conditions *seulement*, la théorie des aires, (obtenue avec la fonction mesure bien définie) et celle des figures de même contenance sont essentiellement équivalentes. (Pressiat, 2001, p.285-286).

Dans le cas qui m'intéresse précisément, on définit une application s qui associe à chaque figure quarrable[216], F, du plan, un nombre réel s(F) appelé « aire de F » qui a les propriétés suivantes :

α : la fonction *s* est positive
β : *s* est additive
γ : *s* est invariante par translation
δ : *s* est normalisée : pour un carré Q du réseau plan construit à partir d'un carré C, s(Q) = 1

On peut établir des propriétés, comme **γ*** : *s* est invariante par déplacement
α* : *s* est croissante (propriété utilisée ensuite comme axiome)
α** : formule de l'aire du rectangle

Les axiomes ont un lien étroit avec les méthodes de calcul pour les aires. L'axiome α est essentiel pour établir les résultats concernant l'aire du rectangle. F étant une figure quarrable, et (G_n) une suite de parties de F telle que l'aire de $F\backslash G_n$ puisse être rendue aussi petite que l'on veut à condition que *n* soit suffisamment grand, alors $s(F) = \lim s(G_n)$

En utilisant les axiomes **β** et **γ***, on peut calculer des aires par la méthode de décomposition, qui repose sur le fait que deux figures équidécomposables ont même aire. On peut également calculer des aires par la méthode de complémentation, qui repose sur le fait que deux figures équicomplémentaires ont même aire. (Pressiat, 2001, p.286-288). Dans le cadre scolaire les propriétés sont considérées comme des résultats de l'expérience, dont on n'a pas à prouver « ni l'existence, ni l'unicité ». (Pressiat, 2001, p.285-286). Dans l'enseignement, on fait pourtant appel à l'addition des aires de sous-figures qui composent une figure pour trouver son aire et au découpage-recollement pour calculer l'aire d'une figure, connaissant l'aire d'une autre.

---

[215] S'il est satisfait, on ne sait pas démontrer l'affirmative par des moyens purement géométriques (Hartshorne, 2000). Hartshorne démontre les propriétés de l'équidécomposabilité et en déduit que la relation d'équicomplémentarité (avoir même contenance) satisfait des propriétés (propriétés toujours vraies : égalité des aires de figures pour : les figures congruentes, la somme et différence de figures de même aire/contenance).
Certaines propriétés nécessitent l'axiome suivant (axiome de Zolt) : « si Q est une figure incluse dans la figure P, et si P\Q a une intérieur non vide, alors P et Q n'ont pas même contenance ». Dans le plan euclidien, les axiomes suivants sont satisfaits :
-le tout est plus grand que la partie
-si deux carrés sont égaux leurs côtés sont égaux
-les moitiés de deux figures égales sont égales (égal au sens « de même aire »)
L'axiome de Zolt est nécessaire pour utiliser l'hypothèse d'égale contenance dans les conclusions qui concernent les congruences. Ce dernier est satisfait dans certaines conditions (dans le plan de Hilbert satisfaisant l'axiome des parallèles avec une fonction mesure bien définie).
[216] Voir Pressiat (2001, p.286)

> L'emploi de réseaux à mailles de plus en plus fines est évoqué dans les « petites » classes (classe de 6e : détermination d'aires à l'aide de quadrillage et d'encadrements) en tant que moyen pour mesure approximativement certaines aires (celle du disque notamment). Ils ne seront plus guère utilisés par la suite. Dans l'enseignement secondaire, on ne démontre pas la formule donnant l'aire d'un rectangle dans le cas général, quant à l'aire du disque, on la définit souvent comme limite d'aires de polygones (sans justifier l'existence de la limite) : les deux interventions de l'axiome (α) dans la théorie des aires sont donc obscurcies[217]. (2001, p.287)

Ce que je souhaite dire ici, c'est que d'une part, la formule de l'aire du rectangle est justifiée par une théorie qui fait entrer en jeu des notions mathématiques complexes. La justification n'est pas *a priori* enseignée aux futurs enseignants. Il est difficile alors d'attendre qu'ils aient une posture prudente dans son introduction, qu'il soit formulé aux élèves par exemple, que la formule ne « va pas de soi » ou qu'elle leur sera justifiée plus tard. Elle leur est présentée comme triviale dans leur scolarité, et n'est jamais justifiée par la suite. De plus, la justification du calcul, auprès des élèves, par l'assimilation entre la somme des aires des sous-surfaces qui permettent la décomposition du rectangle (carreaux) et l'aire totale de la figure, prend pour acquis implicite une relation entre le cadre géométrique et le cadre numérique, entre les opérations sur les figures et celle sur les nombres et les propriétés de la fonction mesure. Je vais y revenir. Cet acquis pourrait avoir deux conséquences au moins :

-une assimilation, la création de liens entre certains objets, faute d'explicitation de ce qui entre en jeu dans chaque cadre,

-une relation à la justification qui soit sur ce point, « mal entamée ».

3.2.2 Le problème mathématique de la mesure

1. Le problème mathématique (Perrin-Glorian, 1990)

Perrin-Glorian (1990) pose le problème mathématique lié à la mesure, je vais résumer ici sa démarche.

Point a) de Perrin-Glorian : propriétés de la mesure

Perrin-Glorian explique que le problème de la mesure d'aire est d'associer un nombre à une « place occupée ».

> Le problème mathématique est donc celui de la définition d'une fonction mesure μ de l'ensemble des surfaces planes dans R+ (auquel on ajoute éventuellement une valeur infinie si on ne se limite pas aux

---

[217] Si on considère la formule relative à l'aire du rectangle comme un axiome noté (α **), ($\boldsymbol{\delta}$) est implicitement contenu dans (α **), si bien que la « théorie » des aires de polygones élaborée dans l'enseignement secondaire est faite à partir des trois axiomes (α **), ($\boldsymbol{\beta}$) et ($\boldsymbol{\gamma}$*). A partir de ces axiomes, on a tout ce qu'il faut pour calculer l'aire d'un polygone. On emploie sans clairement les différencier les deux méthodes de décomposition et de complémentation.

> surfaces bornées) qui vérifie "de bonnes propriétés" d'additivité et d'invariance par déplacement. (Perrin-Glorian, 1990, p.7)

Perrin-Glorian explique que μ ne sera pas définie partout mais sur un certain ensemble de surfaces, l'ensemble des surfaces mesurables pour μ, et cet ensemble de surfaces mesurables va dépendre des exigences qu'on met sur la fonction mesure. Les propriétés suivantes doivent être vérifiées (Perrin-Glorian, 1990, p.7) :

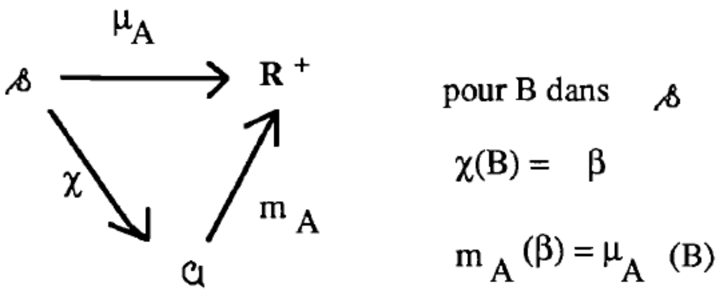
Si on demande que μ vérifie les propriétés suivantes:
-si S_1 et S_2 sont disjointes, alors $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$
-$\mu(S) \geq 0$ pour tout S
-μ est invariante par isométrie : pour toute isométrie g, et toute surface S,
$\mu(g(S)) = \mu(S)$

μ ne peut être définie qu'à un coefficient de proportionnalité près. D'autres remarques sur les conditions de prolongation de l'ensemble de définition de l'application sont ensuite menées. (Perrin-Glorian, 1990, p.7-8). L'existence et unicité de la fonction mesure sur les parties quarrables est discutée. Plusieurs représentations de l'application mesure dans l'histoire sont exposées.

Point c) de Perrin-Glorian : *aire: nombre ou grandeur* ?

Perrin-Glorian (1990, p.10) explique que dans toutes ces présentations l'aire est soit un nombre, soit l'application mesure elle-même : elle dépend du choix de l'unité. Perrin-Glorian lui donne un sens indépendant de l'unité choisie, en termes de classes d'équivalences obtenues. Ainsi, même s'il faut définir la mesure pour le faire, la grandeur aire a sa représentation mathématique propre.

> On peut cependant, d'un point de vue mathématique, donner un autre sens au mot aire, indépendant de l'unité : si on a choisi une surface unité A et défini l'application μ_A correspondante, on peut définir une relation d'équivalence R_A par S R_A S' si et seulement si $\mu_A(S) = \mu_A(S')$. Les classes d'équivalence obtenues ne dépendent pas du choix de A. On peut alors appeler aire β de B la classe d'équivalence de B pour n'importe laquelle des relations R_A et définir la mesure de l'aire β comme la mesure de n'importe laquelle des surfaces de β. On a un diagramme commutatif



Représentation 3-3 : diagramme commutatif (Perrin-Glorian, 1990, p.10)

> Ainsi *on peut donner un fondement mathématique à la notion d'aire en tant que grandeur,* même s'il faut définir au préalable la mesure pour lui donner ce fondement. (Perrin-Glorian, 1990, p.10)

Perrin-Glorian (1990, p.10) explique que l'accès aux classes d'équivalence sans l'intermédiaire de la mesure est complexe : en effet, les surfaces qui ont même mesure ne sont pas nécessairement superposables. Le recours au découpage-recollement est discuté dans le cas des polygones, il est plus difficile dans les cas du disque et du carré, du volume. Elle explique que ce qui intéresse les mathématiques, c'est l'application entre surfaces et nombres (μ_A) : les comparaisons de surfaces se ramènent à des comparaisons de nombres, les juxtapositions de surfaces à des additions de nombres.

> Dans ces conditions, la considération de $\mathcal{A}$ et des autres flèches peut apparaître comme un détour inutile. Nous verrons que ce point de vue a été celui de l'enseignement dans les années 65-80 : au moment où on a essayé d'adopter une démarche cohérente dans l'enseignement de la mesure, on s'est centré exclusivement sur l'application entre surfaces et nombres, en privilégiant l'utilisation du quadrillage et de ses subdivisions qui permet d'aborder la mesure des surfaces au niveau élémentaire de la façon la plus générale possible. Perrin-Glorian (1990, p.10)

Elle explique que la question du sens du mot grandeur entre en jeu, pour l’aire les termes les plus employés étant en lien avec la forme. Je garderai moi aussi une définition informelle, indépendante de la forme (aspect surface) et de l’unité de mesure (aspect nombre, ou valeur numérique de grandeur)[218].

> Il nous suffit de savoir que l'aire peut être définie comme une classe d'équivalence à partir d'une fonction mesure. Nous ne définissons pas l'aire mais seulement l'expression "avoir même aire" à partir du découpage et recollement ou de la mesure. C'est cet aspect que nous appelons l'aire en tant que grandeur. Un nombre suivi d'une unité est un moyen de désigner une aire. Perrin-Glorian (1990, p.12)

Maintenant que ces aspects ont été clarifiés, je vais m’intéresser de plus près aux effets du parallélisme qui existe entre les applications mesure (des surfaces vers les nombres) et les opérations et comparaisons sur les aires, à partir de celles sur les surfaces, sans recourir à la mesure (des surfaces vers les aires, puis des aires vers les nombres).

3.2.3 Mesure, monde des nombres et monde des expériences : la constante « k »

Lodge (1888, p.281-283) a proposé un modèle de compréhension des opérations qui sont menées dans le monde des expériences et des opérations sur les nombres, qui dépendent de la mesure dans un système métrologique donné. Cette explication théorique permet de mieux comprendre plusieurs distinctions historiques ainsi que ce qui unit certains travaux de recherche qui ont été rencontrés jusqu’ici. Le modèle explicite les choix qui ont été faits pour pouvoir mener les mêmes opérations dans le monde des nombres et celui des objets physiques. Prenons l’exemple de l’aire du rectangle, qui m’a été expliqué par Nadine de Courtenay. Je simplifie ici l’explication :

Dans le monde des expériences sur les grandeurs, si A correspond à une aire et Au à une aire unité,

$$L1 \otimes L1'$$

[218] Voir la définition dans la brochure 46 "Grandeur, mesure" de l'APMEP (1982)

Correspond à prendre en compte l'aire définie par le rectangle lié aux longueurs L1 et L1' alors si a est la valeur numérique d'aire

$$A = aA_u = L1 \otimes L1'$$

Si $L1 = l_1 \, L_u$ avec L_u l'aire unité,

$$A = aA_u = l_1 \times l_{1'} \times L_u \otimes L_u$$

Suivant le choix d'unité de mesure d'aire, avec k une constante qui dépend de la forme :

$a = k \, l_1 \, l_1'$

Ici, k est une constante qui dépend du système métrologique choisi et de la forme de la figure,

Or dans le système métrique actuel on a :

$a = l_1 \, l_1'$

C'est-à-dire que l'on choisit l'unité de mesure d'aire en choisissant le carré, comme

$$A_u = L_u \otimes L_u$$

Or cette action n'est pas anodine, il s'agit de redéfinir l'aire comme une grandeur dérivée de la longueur. Redéfinir l'aire comme la multiplication d'une longueur par une autre (la largeur) implique des choix. En éliminant ainsi k, il est possible de faire correspondre les opérations sur les nombres aux opérations sur les grandeurs.

Il est possible de se demander si cette facilité qu'offre le système métrique de faire un parallèle entre grandeurs et nombres aura des effets sur l'apprentissage, si des implicites peuvent surgir.

Du point de vue théorique, ce travail pourrait être mis en relation avec Pressiat (2001, p.293-296), qui fait un point sur les travaux de recherche en mathématiques permettant de construire une théorie des grandeurs justifiant les techniques de changement d'unités, donnant un cadre satisfaisant pour l'analyse dimensionnelle.

Maintenant que j'ai exposé ces distinctions permises par les travaux portant sur les aspects théoriques, je passe à l'analyse croisée ainsi qu'aux premières conclusions.

4 ANALYSE CROISEE AVEC LA PARTIE HISTORICO-EPISTEMOLOGIQUE ET PREMIERES CONCLUSION

Je vais maintenant expliciter le lien entre les questions soulevées par mon analyse historico-épistémologique et les constatations établies par les travaux de recherche sur la didactique de l'aire et de la mesure, ainsi que le savoir savant à enseigner.

Le croisement des analyses de textes anciens a permis de faire émerger plusieurs points qui peuvent être analysés dans le contexte d'un calcul d'aire actuel. Je les liste dans leur intégralité, dans un premier temps.

Les textes attirent l'attention sur :

-la conception du nombre

-le lien entre opération physique et opération sur les nombres

-l'entrée en jeu de la bidimensionnalité
-la conception de l'unité de mesure
-l'opération et son lien avec l'opération physique, ainsi que les objets mathématiques qui entrent en jeu
-le mesurage
-le recours au cadre géométrique
-l'algorithme
-les implications du système métrologique

Une première conclusion est ainsi que l'analyse historico-épistémologique semble permettre d'englober la question de l'aire du carré d'une façon large, peut-être assez complète. D'une part, les textes permettent un inventaire des objets mathématiques concernés par l'aire du carré et proposent des visions conceptuelles diverses de ces objets ; d'autre part, les chemins suivis par les algorithmes empruntés par chaque textes ancien diffèrent. La présence de ces divers chemins incite à penser aux cadres et registres mobilisés à chaque étape, ainsi qu'aux transitions entre les cadres et registres.

Ce sont ensuite ces critères précis (listés ci-dessus), que j'ai choisis d'utiliser (voir les détails en 2.2, p.190) pour questionner un point particulier de l'enseignement : la transition du calcul dans le cadre géométrique unidimensionnel et additif vers la formule dans les cadres arithmétique et algébrique, multiplicatif et bidimensionnel. L'analyse historico-épistémologique m'a amenée ici à m'intéresser à cette question, d'une part, et à réunir de nombreux champs différents en didactique pour y répondre, d'autre part.

Les champs concernés sont nombreux et la question amène à rechercher des intersections :
-changement de registre/de cadre
-géométrie
-bidimensionnalité, multiplication
-mesure, unités de mesure
-recherches théoriques sur le savoir de référence
-algèbre et arithmétique
-didactique et algorithmique

Je propose dans un premier temps, un résumé des conclusions permises par les travaux de recherche sur la question de la transition entre grille et formule d'aire du rectangle et du carré. Certaines de ces questions dépassent le cadre du point de transition étudié, et résultent de l'analyse croisée entre histoire et didactique.

Dans un second temps je reprendrai pour chaque critère issue de l'analyse historico-épistémologique, les questions qui ont été soulevées, les champs didactiques concernés, ceux dans lesquels j'ai trouvé des réponses, ainsi qu'un résumé de ces réponses.

4.1 Réponse aux questions issues de l'analyse historico-épistémologique dans les travaux actuels de recherche en didactique

Coordination entre les registres et implications conceptuelles

Les textes anciens m'ont amenée à me questionner sur la façon dont les objets mathématiques étaient conceptualisés selon les registres. Certains se situent dans un cadre géométrique dans une situation additive unidimensionnelle, d'autres dans le cadre numérique multiplicatif, ou entre plusieurs cadres. L'analyse conceptuelle des objets dans chaque cadre amène naturellement à se poser la question de la coordination entre les registres et de l'accompagnement de la transition conceptuelle entre les objets mathématiques concernés, notamment les unités de mesure. Les travaux de didactique confirment à la fois l'importance et la difficulté de cette question.

Comment l'unité de mesure, représentée par un carreau dans la grille présentée aux élèves, est-elle accompagnée dans le registre symbolique au moment de l'introduction de la formule ?

La coordination entre registres est-elle accompagnée ? Le contrôle du sens, mentionné par Duval, reste-t-il possible ? Les élèves peuvent-ils différencier les objets de l'une de leurs représentations ?

Que représente la lettre « c » ou « l » conceptuellement, alors qu'il y a eu une transition entre le cadre géométrique additif et le cadre numérique multiplicatif ?

Conceptualisation de l'unité de mesure et du mesurage

Dans les textes anciens, les unités de mesure d'aire peuvent être liées à une figure, de forme fixe ou non, à une action de mesurage par report (ou non). Elles peuvent être liées à une unité de mesure de longueur, ou avoir une existence indépendante.

L'idée de mesurage représentée initialement par le report d'un étalon (unité de mesure) est-elle conservée dans l'enseignement ultérieur, après le passage dans le registre des expressions (nombres ou symboles) ? Cette question est renforcée par la rencontre avec les travaux de Munier et Passelaigue et les distinctions épistémologiques qu'elles proposent.

L'unité de mesure est-elle vue comme un étalon ? Une surface ? Un nombre ? Ces conceptions sont-elles compatibles ?

Les travaux de Chambris montrent que l'enseignement du système métrique a pu faire l'objet d'un projet spécifique par le passé, en lien avec la numération, s'appuyant sur les liens entre les facteurs des systèmes métrique et numérique.

Comment est accompagné l'enseignement du système métrique du point de vue conceptuel ? Quel est le rôle de la conversion, dont on a pu voir un rôle conceptuel unificateur fort alors que plusieurs possibilités de mesure étaient proposées selon le système de mesure adopté ?

Quelle place est donnée aux ordres de grandeur, à la constitution de l'unité de mesure d'aire indépendamment de celle de longueur, dans une action liée au mesurage ?

Implications du système métrique (dépendant) et implicites potentiels

Dans les textes anciens, les systèmes métrologiques étudiés n'étaient pas tous dépendants. Cette semi-indépendance a des implications sur les nombres utilisés et leur fonction, sur les étapes de l'algorithme, sur les concepts, sur les liens entre unités de mesure.

L'utilisation du système métrique (dépendant) a-t-il un impact sur la conceptualisation de l'unité de mesure d'aire qui est liée à l'unité de mesure de longueur ? Du nombre, qui peut être lié aussi bien à un nombre de carreaux, une quantité qui représente plusieurs valeurs numériques de grandeur, une valeur numérique de longueur ? De la lettre qui prend la place de ce nombre ?

Le fait de pouvoir utiliser les mêmes nombres pour exprimer le nombre de carreaux cm^2 sur une ligne dans la grille, et le nombre de centimètres sur une ligne, peut-il créer des implicites ? Cette question est renforcée par la rencontre avec les travaux de Outhred, Mitchelmore et Owens.

Quelles sont les implications du fait que les nombres utilisés pour exprimer les valeurs numériques de grandeur et pour la multiplication ou l'addition soient les mêmes ? Quel rôle est donné au nombre, dans ce contexte ?

Conceptualisation surface/aire/nombre

Dans les textes anciens, le nombre peut être lié à une quantité ou non, à une grandeur ou non, dans le cadre du calcul d'aire.

-L'aire peut être liée à une surface dans son caractère unidimensionnel ou non, en un seul tenant ou comme une multiplicité (de carreaux par exemple). Elle peut aussi être liée à un ou plusieurs nombres (expression composée d'une mesure). Enfin, elle peut être liée à un nombre de semences sur une surface.

-La surface peut être vue comme une donnée, comme une figure à découper, comme transformable en une autre surface, comme une unité de mesure.

-L'unité de mesure d'aire peut être une figure de surface donnée, ou de surface modifiable pour s'adapter à la surface à découper. Elle peut exister indépendamment de l'unité de mesure de longueur.

Perrin-Glorian insiste sur la construction de la grandeur aire comme autonome des concepts de surface et de nombre, pour donner du sens à l'aire comme à la mesure.

L'idée d'une distinction entre aire et surface semble entrée dans les manuels. L'un des textes anciens présentait un travail sur l'expression d'une même mesure d'aire selon plusieurs systèmes de mesure. Comment la distinction entre aire et nombre est-elle travaillée dans l'enseignement ?

L'unité de mesure elle-même est-elle distinguée de l'aspect surface ou nombre, ou définie par l'un ou l'autre ? Quels en sont les impacts sur la conceptualisation de l'unité de mesure d'aire ?

Algorithmes et concepts

Dans les textes anciens, les étapes de l'algorithme peuvent être explicites, et il peut être précisé sur quels objets l'algorithme opère à chaque étape.

Dans l'enseignement actuel, dans le cadre d'un système métrique dépendant, quelles sont les étapes de l'algorithme de calcul d'aire ? Comment sont précisés les éléments sur lesquels opère l'algorithme ?

Dans le cadre du passage au registre numérique et symbolique, quel est le parallèle des opérations sur les nombres, dans le registre des figures ? Ce parallèle est-il compatible avec la représentation que se font les élèves de l'algorithme de calcul d'aire ?

Bidimensionnalité et multiplication

Dans les textes anciens, la situation peut être unidimensionnelle, bidimensionnelle, et dans ce dernier cas, faire ou non appel au registre des figures. Le registre des figures peut même aider à la coordination entre les registres, comme c'est le cas dans les *Neuf chapitres* qui propose un accompagnement de la bidimensionnalité. Le diagramme peut avoir (ou non) un rôle clé dans cette transition.

En tous cas, il existe des opérations dans le monde des nombres, qui ont un parallèle dans le monde des grandeurs et dans celui des figures. Cet aspect est mis en valeur par les différents travaux sur le savoir savant de référence à enseigner.

Quel est l'impact du système métrique dépendant sur la façon de concevoir les opérations dans les différents mondes, et de faire des liens entre elles ? Est-ce que le système métrique peut créer des implicites conceptuels ?

Les travaux de Rogalski, Roditi, Vergnaud, Viennot et d'autres, montrent que la bidimensionnalité et la multiplication sont des questions difficiles au sein du calcul d'aire. Dans les textes la multiplication peut être liée à une addition itérée, à des nombres indépendamment des grandeurs (en système SP), à une transformation géométrique bidimensionnelle, etc.

Quelle est la place d'une réflexion sur l'enseignement de la dépendance fonctionnelle dans l'enseignement ? Quelles sont les conséquences d'une première approche de cette dépendance en même temps que l'enseignement d'une première rencontre avec l'algèbre ainsi qu'avec un changement de cadres, lors de l'introduction des formules ?

4.2 Croisement des résultats de l'analyse historico-épistémologique et des travaux de recherche en didactique

Je vais maintenant, pour chaque critère issu de l'analyse historico-épisémologique, récapituler les champs didactiques concernés, ceux dans lesquels j'ai trouvé des réponses, ainsi qu'un résumé de ces réponses. De nombreuses questions émergent de ce croisement, c'est ce qui me paraît intéressant. J'expliciterai dans la partie suivante (voir 4.3, p.236), quelles sont, parmi ces questions, celles qui ont été retenues pour l'analyse des manuels scolaires.

-les implications du système métrologique

Les implications du système métrologique dépendant, me semblent être liées *a priori*

-à la confusion possible entre nombre de carreaux et nombre de centimètres, tenue comme évidente ; dont les difficultés sont confirmées par les travaux de Outhred, Mitchelmore et Owens. Il faudra s'intéresser à ce point dans l'analyse des manuels de CM2.

-à la conceptualisation de l'unité de mesure d'aire (voir ci-dessous)

Comme il n'y a pas de champ de recherche spécifiquement lié à l'unité de mesure, ces difficultés ne sont pas pensées dans un ensemble. En revanche, les travaux sur la bidimensionnalité, par exemple, s'y sont intéressés.

-la conception du nombre

Les travaux de Munier et Passelaigue sur la mesure insistent sur l'existence de distinction entre nombre et valeur numérique de grandeur et les confusions possibles de par l'ambiguïté du vocabulaire. Cette ambigüité est traitée par Marie-Jeanne Perrin qui propose un important développement pour traiter la distinction surface/aire/nombre dans le cadre de la géométrie.

Le fait que les nombres représentent plusieurs objets, qu'ils soient les mêmes pour exprimer le nombre de carreaux et le nombre de centimètres a été évoqué ci-dessus. C'est un point qui sera analysé dans les manuels.

Là encore, comme il n'y a pas de champ de recherche spécifiquement lié à l'unité de mesure, ces difficultés ne sont pas prises dans un ensemble qui relierait numérique, unité de mesure, géométrie, système métrique, algorithmique.

-le lien entre opération physique et opération sur les nombres

La distinction entre les opérations sur les figures, sur les grandeurs et sur les nombres a été pensée, notamment dans les travaux de Perrin-Glorian, Pressiat et ceux présentés par Nadine de Courtenay. Ces implicites ont peut-être des conséquences sur la conceptualisation de la multiplication qui pourrait être symbolisée par la construction d'un carré de dimensions données dans le cadre géométrique par les élèves, sans accompagnement. Ce point sera analysé pendant l'expérimentation en classe.

Ce problème ne me semble pas traité mais rejoint la question plus générale de l'accompagnement des opérations dans la transition entre les registres. Elle concerne entre autres, la didactique de l'algorithmique ainsi que les intersections entre les champs de recherche en didactique.

-l'entrée en jeu de la bidimensionnalité

L'entrée en jeu de la bidimensionnalité est traitée d'une part, par les travaux de Rogalski qui confirme la difficulté de la transition, dans les champs de la multiplication et de la géométrie ; d'autre part du point de vue de la dépendance fonctionnelle. Viennot insiste en effet sur la progressivité qui reste à penser sur ce point. Dans les *Neuf chapitres,* la bidimensionnalité est accompagnée du point de vue de la mesure par une transformation géométrique en « bande unité », (voir p.158), qui constitue une transition entre les registres des figures et numérique. La présence d'un accompagnement éventuel sur ce point sera étudiée dans les manuels.

-la conception de l'unité de mesure et le mesurage

Chambris traite la question du système métrique du point de vue numérique. L'importance du mesurage est rappelée par Munier et Passelaigue. L'unité de mesure d'aire ne semble pas traitée dans des travaux comme un objet d'étude pour elle-même, de même que la transition entre les registres qui l'affecte. En revanche, Perrin-Glorian, dans ses propositions, apporte des réponses du point de vue géométrique et du lien vers le nombre qui assurent une cohérence dans l'appréhension du concept d'unité de mesure d'aire.

La question du mesurage dans l'algorithme multiplicatif et de la façon dont les élèves vont continuer ou non à concevoir l'unité de mesure comme un étalon reste à mon avis, à traiter. J'analyserai la transition entre l'algorithme additif géométrique et l'algorithme multiplicatif, dans les manuels scolaires.

-l'opération et son lien avec l'opération physique, ainsi que les objets mathématiques qui entrent en jeu, l'algorithme

La didactique de l'algèbre s'intéresse aux difficultés liées au symbolisme, mais je n'ai pas rencontré de travaux sur la façon dont le changement de registre affecte l'unité de mesure ni la façon dont il affecte la notion de nombre ou la lettre. Le fait qu'ici il puisse s'agir de carreaux, de centimètres carrés, de centimètres, me semble être une difficulté potentielle.

Cette question concerne l'algèbre, l'algorithmique et le parallèle entre opérations sur les figures et entre les nombres.

En conclusion, il me semble que l'analyse historico-épistémologique a permis d'une part, de proposer un état général des concepts concernés par la question de l'aire du carré. Cet état des lieux a pu être dressé grâce aux lectures de didactique, qui ont permis de mettre des mots sur les observations de différences fines dans les textes anciens.

Ces différences amènent à poser des questions sur les transitions entre registres concernant tous les objets mathématiques mis en avant par l'analyse, et par là-même, ils incitent à croiser les champs de recherche en didactique.

Pour la question précise que j'ai choisi de traiter suite à cette analyse : la transition de la grille à la formule en CM2, il semble que les champs de didactique concernés se soient tous intéressés à l'une des facettes du problème. Mais comme le problème est positionné de façon très « interdisciplinaire » au sein de la didactique, et ne constitue pas un champ d'étude individuel, il n'a pas toujours réuni de réponses directes.

D'autre part, il semble que l'on puisse constater deux absences :

-la première, qui reste à confirmer, car je n'ai pas assez investi ces champs : il s'agit du croisement des champs de l'algèbre et de l'algorithmique sur la question des transitions entre registres et comment accompagner les objets mathématiques concernés ; cette question touchant aussi au problème du parallélisme entre opérations (sur les grandeurs, sur les nombres, sur les figures)

-l'unité de mesure comme champ indépendant en didactique (inter-cadres)

Je passe maintenant aux critères retenus pour l'analyse de manuels scolaires.

4.3 Critères retenus pour l'analyse des manuels scolaires

Le travail précédent a permis de relever un certain nombre d'éléments à observer dans les manuels scolaires de CM2. Je vais les récapituler ici. L'analyse des manuels scolaires servira d'une part, à répondre à certaines questions soulevées par le croisement de l'analyse historico-épistémologique et l'analyse préalable ; d'autre part à servir la construction de l'expérimentation en classe de seconde. Les élèves de seconde ont connu l'enseignement après les programmes de 2008.

Les questions suivantes pourraient être étudiées dans les présentations de manuels.
Quelle place est donnée aux ordres de grandeur, à la constitution de l'unité de mesure d'aire indépendamment de celle de longueur, dans une action liée au mesurage et/ou au report d'un étalon ?
Comment est accompagné l'enseignement du système métrique du point de vue conceptuel ? Quel est le rôle de la conversion, dont on a pu voir un rôle conceptuel unificateur fort alors que plusieurs possibilités de mesure étaient proposées selon le système de mesure adopté ? Quelle est la place d'une réflexion sur l'enseignement de la dépendance fonctionnelle et l'accompagnement des questions dimensionnelles dans l'enseignement ? Qu'en est-il des implications de ces aspects sur les unités de mesure ?
Quelles sont les conséquences d'une première approche de cette dépendance en même temps que l'enseignement d'une première rencontre avec l'algèbre ainsi qu'avec un changement de cadres, lors de l'introduction des formules ?

Je n'ai pas pu traiter toutes ces questions. Je rappelle que je m'intéresse à la séance qui permet la transition entre le registre des figures (grille) et l'enseignement de la formule de l'aire du carré et du rectangle. L'analyse croisée m'a conduite à sélectionner les points suivants :

-la conception de l'unité de mesure et le mesurage

- Représentations de l'unité de mesure d'aire dans la séance :

-l’unité de mesure peut-elle prendre plusieurs forme(s) (distinction surface/aire-nombre pour l’unité de mesure) ?
-l’unité de mesure est-elle présentée comme une aire ? une surface ? autre chose ?
-l’unité de mesure subit une transition : elle est représentée par une figure puis par un symbole « cm » ou « cm^2 ». La transition est-elle accompagnée et comment ?
-le mesurage peut être explicité dans le registre des figures, par l’idée du report d’un étalon sur une surface. Comment est accompagnée la transition vers le numérique, du point de vue du mesurage ?

-liens entre registres : bidimensionnalité, opérations, nombre

J’examinerai les liens entre registres du point de vue : de l’entrée dans la bidimensionnalité, de l’accompagnement de l’opération sur les figures vers l’opération sur les nombres, de la conception du nombre. Je l’ai rappelé, dans les *Neuf chapitres*, la bidimensionnalité et le mesurage sont accompagnés du point de vue de la mesure par une transformation géométrique.

- Comment est accompagnée la transition entre cadre géométrique et numérique (ou algébrique), du point de vue :
  -du lien entre nombre de carreaux et nombre d’unités de mesure de longueur
  -du changement de structure (additif puis multiplicatif)
  -du lien au mesurage : idée de report

En fonction des résultats je me demanderai ce que peut représenter le nombre ou la lettre pour l’élève :
-nombre de carreaux
-nombre de centimètres
-segment

Et ainsi, je m’interrogerai sur la possibilité pour l’élève de faire un lien entre l’algorithme dans le cadre géométrique et l’algorithme dans le cadre numérique.
Je présente ici ces algorithmes :

- Algorithme de calcul de l’aire du carré dans le cadre géométrique multiplicatif :

Entrée : nombre de carreaux sur une ligne
Multiplication de ce nombre
Résultat : nombre de carreaux
Sortie : nombre de carreaux + nom de l’unité de mesure d’aire associée au carreau

- Algorithme de calcul de l’aire du carré dans le cadre numérique multiplicatif lié à la formule :

Entrée : nombre de centimètres avec ou sans unité de mesure (nombre qui représente un nombre de carreaux sur une ligne)
Multiplication de ce nombre
Résultat : nombre (qui représente un nombre de carreaux)
Sortie : nombre + unité de mesure d’aire (nombre de carreaux + nom de l’unité de mesure d’aire associée au carreau)

En ce qui concerne les questions que je n’ai pas abordées, je mentionnerai aussi le choix des manuels de présenter des travaux spécifiques, le cas échéant, sur la distinction entre aire et nombre, sur les ordres de grandeur, sur le mesurage, sur la conversion ; dans les pages que j'ai rencontrées.

5 ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES DE CM2

5.1 Manuels scolaires analysés

Les manuels analysés sélectionnés constituent l'intégralité des manuels trouvés à la bibliothèque de l'ESPE de Rennes, donc mis à la disposition des futurs enseignants, sur la base des programmes 2008. Les élèves de seconde qui ont suivi l'expérimentation en classe avaient connu ces programmes, précisément.

Les manuels sont présentés en détail en Annexe.

La séance qui a été analysée est celle qui permet d'introduire la formule de l'aire du carré et l'unité de mesure d'aire standard. J'ai expliqué (voir 2, p.182) que l'aire est antérieurement enseignée indépendamment de la mesure, par comparaisons, notamment grâce au découpage-recollement, dans une séance précédente. J'ai analysé la séance qui suit ce travail, et qui permet d'introduire les formules d'aire du carré et du rectangle (voir 2, p.182).

C'est le souvent lors de cette séance qu'est introduite l'unité de mesure d'aire standard, le plus souvent le cm^2. Lorsque ce n'était pas le cas j'ai ajouté les informations de la séance d'introduction à l'unité de mesure d'aire dans l'analyse afin de pouvoir synthétiser les informations.

Les séances concernées sont présentées scannées en Annexe, de même que les pages du livre du maître. Lorsque le livre du maître propose une activité d'introduction qui n'est pas présente dans le manuel, celle-ci a été prise en compte dans le tableau. La présente synthèse est un résumé d'une analyse précise qui était trop longue pour pouvoir être présentée en intégralité dans la présente étude.

5.2 Analyse synthétisée

5.2.1 Présentation de l'unité de mesure d'aire

Manuel	**Carré**	**Aire d'un carré de 1 cm de côté**	**Autre forme**	**Autre association**
Compagnon maths	X	X (un carré de côté 1 cm a une aire de 1 cm^2)		
Petit phare	X	X		Surface colorée
Vivre les maths	X	X	tétris	Travail sur le cm^2 (grille de mm^2) Travail sur le

Manuel	Carré	Aire d'un carré de 1 cm de côté	Autre forme	Autre association
				dm^2 (grille de cm^2)
Maths tout terrain	X	X		Surface colorée en rose bordée de bleu La maison
Au rythme des maths	X	X (un carré de côté 1 cm a une aire de 1 cm^2)		Travail sur le dm^2 : « on peut faire dessiner ce carré en matérialisant les cm »
La clé des maths	X Lorsque le carré choisi a un côté de 1 cm on l'appelle cm^2			Surface colorée (mais le carré et le rectangle le sont aussi) Travail sur le dm^2 (grille de cm^2)
Pour comprendre les maths	X	X		Travail sur le cm^2 (grille de mm^2) Mesure de surface pour : maison, logement, terrain, pays
EuroMaths	X	X		4 petits carreaux Travail sur le dm^2 (grille de cm^2) et explicitation en terme de fraction de dm^2 Lien découpage-recollement et mesure en cm^2
J'apprends les maths	X	L'aire de plusieurs figures (dont l'aire mesure 1 cm^2)	Adaptation à la figure dont l'aire est à mesurer (p.69, p.72) Divers	Travail explicite sur le mm^2 (avec une transition entre cadre géométrique et numérique), de

Manuel	Carré	Aire d'un carré de 1 cm de côté	Autre forme	Autre association
			rectangles, triangle, tétris	même pour d'autres conversions (p.84) 4 carreaux
Maths Thévenet	X	X		4 carreaux Relation (figures) cm^2 / dm^2 et m^2 / dm^2
Maths-Sciences	X	X	Fractions de cm^2 exprimées en nombre de mm^2	cm^2 quadrillé en mm^2 Expression de mesures d'aire en mm^2 et en cm^2 Expression d'une mesure d'aire composée en mm^2 et en cm^2 La peau du ver de terre, le pré, les parois des poumons Rectangle exprimé en centimètres (largeur) et décimètres (longueur)
Cap Maths	X Le carré de côté 1 cm et d'aire 1 cm^2 est pris pour unité d'aire	X (2e étape)	L'élève construit 4 surfaces d'aire 1 cm^2	Rectangle exprimé en centimètres (largeur) et mètres (longueur) Relations avec le mm^2 travaillées plus tard (p.116)
A portée de maths	X	X L'aire d'un carré d'1 cm de côté mesure 1 cm^2		100 mm^2

Tableau 5-1 : présentation de l'unité de mesure d'aire dans les manuels

5.2.2 Introduction de la formule

Compagnon maths : il est demandé (« cherchons ensemble ») de découper un carré d'un centimètre de côté et de compter le nombre de carrés qui permettent de recouvrir « entièrement la figure ». Le carré, le rectangle et le triangle rectangle sont donnés (non remplis). Le livre du maître ne donne pas d'indications supplémentaires. Il est possible qu'il soit attendu de l'élève de faire des marques. Peut-être est-il attendu au contraire l'utilisation de la multiplication après avoir reporté l'étalon sur un côté.

Petit phare : il est demandé de donner l'aire du rectangle qui a été quadrillé par l'élève (« je revois »). Ensuite un rectangle de dimensions 9 cm par 6,5 cm est donné (« je découvre ». Le produit est demandé dans un second temps. L'élève doit remarquer qu'il a trouvé « la même chose »

Vivre les maths : il est demandé dans l'activité préparatoire du livre du maître, de mesurer l'aire de rectangles et de carrés dans l'unité carreau. Il est demandé d'expliciter les stratégies :

-de dénombrement

-de multiplication

A ce stade il est demandé de commencer à dégager les formules.
Ensuite un rectangle de dimensions 18 cm × 8 cm est donné sur papier non quadrillé. Les procédures sont confrontées puis il est proposé de superposer avec du papier quadrillé pour vérifier.

Maths tout terrain : il est demandé (« je comprends » et « je m'entraîne ») à l'élève de compter les carreaux d'une rangée. La multiplication et la formule sont ainsi introduites. En haut de la page suivante (« je comprends ») est introduite l'unité de mesure d'aire. Il est écrit 6 fois la mention « 1 cm^2 » dans un rectangle ayant pour mesure d'aire 6 cm^2. Dans le livre du maître (« séquence 1 »), l'accent est mis sur la multiplication par rapport à l'addition itérée.

Au rythme des maths : il est demandé dans l'activité préparatoire (« activités préliminaires ») du livre du maître, de paver des figures à l'aide de pièces de 1cm^2. Ensuite, des assemblages de 2, 3, 12 carrés mesurant 1cm^2 font l'objet d'un calcul d'aire.

La clé des maths : il est demandé dans l'activité préparatoire du livre du maître, de classer des rectangles. Un travail sur la distinction aire/périmètre est proposé (classement par aire, classement par périmètre).

Pour comprendre les maths : il est demandé (« Chercher », B) de donner l'aire de différents carrés et d'en déduire la formule.

EuroMaths : il est demandé (question 5 p.113) dans un premier temps de donner l'aire d'un rectangle et d'un carré sur papier quadrillé. Le cm^2 fait 4 carreaux, il est donc nécessaire pour l'élève de savoir ce qu'il reporte. Ensuite il doit prévoir l'aire d'un rectangle et d'un carré et vérifier en construisant sur papier quadrillé. Cette phase de vérification peut permettre l'explicitation du lien entre nombre de centimètres et nombre de carreaux. Ensuite la formule est proposée et doit être approuvée ou non par l'élève.

J'apprends les maths : il est demandé (« je deviens performant », A p.25 seq. 47) de trouver l'aire d'un rectangle dont seulement le coin gauche est quadrillé. L'élève doit explicitement mesurer à la règle pour avoir le nombre de centimètres sur une ligne et sur une colonne, et donc le nombre de carreaux ; afin de procéder à la multiplication. Plutôt que la formule, le manuel propose ensuite :

> « J'ai appris
> Quand je cherche l'aire d'un rectangle, plutôt que de le quadriller, je peux mesurer sa longueur et sa largeur et multiplier les deux nombres obtenus. [...] »

Maths Thévenet : il est demandé (exercice 1) de trouver l'aire de carrés et de rectangles dessinés sur du papier quadrillé, en cm^2 (carrés de 4 carreaux qui sont également déjà tous dessinés), de calculer le produit côté × côté (ou longueur × largeur), et de conclure. Dans le livre du maître, il est suggéré de faire confronter les procédures.

Les maths à la découverte des sciences : il est demandé (« cherchons ensemble ») de calculer l'aire d'un rectangle de 20 mètres par 10 mètres, qui est associé aux parois des poumons. Le rectangle est quadrillé. Il est explicité que le fait de compter est inutile, la multiplication est possible pour trouver le nombre de carreaux. Ensuite, il est demandé de trouver un rectangle différent ayant même aire. Puis de convertir en décimètres la longueur et la largeur et d'exprimer l'aire obtenue.

Cap Maths : dans le cahier géométrie mesure préconisé en introduction de la séance par le livre du maître, il est demandé de trouver les aires d'un carré, un rectangle et un triangle rectangle à l'aide d'un quadrillage en cm^2. Ensuite il faut construire différentes surfaces d'aire 1 cm^2. Enfin il est demandé de construire sur le quadrillage deux rectangles ayant pour aire 18 cm^2.

A portée de maths : il est demandé (« cherchons ensemble ») d'exprimer des mesures d'aire, à l'aide d'un quadrillage qui présente plusieurs unités de mesure d'aire possibles. Il faut « sélectionner » celle qui est demandée : « u ».

Manuel	**Grille**	**Dimensions choisies en cm pour le rectangle ou carré**	**Report fait par l'élève**	**Passage explicite de l'addition à la multiplication**	**Passage explicite du nombre de carreaux à un nombre de cm**	**Autre transition**
Compagnon maths	A imaginer	5×8 4×4	Oui	Pourrait être induit par la procédure mais c'est implicite (pas de précisions dans le livre du maître). L'élève peut s'en passer.	Pourrait être induit par la procédure mais c'est implicite (pas de précisions dans le livre du maître). L'élève peut s'en passer.	

Manuel	**Grille**	**Dimensions choisies en cm pour le rectangle ou carré**	**Report fait par l'élève**	**Passage explicite de l'addition à la multiplication**	**Passage explicite du nombre de carreaux à un nombre de cm**	**Autre transition**
Petit phare	Oui construite par l'élève	7×5 9×6,5	Non	Pourrait avoir été rencontré p.87 (non demandé explicitement)	Non	L'élève doit remarquer qu'il a trouvé la même chose en comptant et par produit, pour le rectangle ayant des valeurs non entières
Vivre les maths	Oui	A choisir puis 18 × 8 Dans le manuel, 5 × 8 2 × 10	Non	Oui	« Oui »	Le rectangle n'est pas quadrillé, certains vont mesurer le côté. Les procédures sont confrontées. Ensuite on vérifie avec du papier quadrillé superposé
Maths tout terrain	Oui	4 × 4 5 × 3 2 × 3 Etc. Jusqu'à 8 × 8	Non	Oui Institutionnalisé		Transition implicite[219]

[219] Il est répété 6 fois « 1 cm^2 » sur le dessin du rectangle à mesurer. Comme le compte des carreaux d'une rangée a été institutionnalisé comme permettant d'avoir le nombre de carreaux, le lien est mis en valeur sur le dessin du carreau de côté 1 cm. Mais il n'est pas prévu d'activité pour expliciter ce point.

Manuel	**Grille**	**Dimensions choisies en cm pour le rectangle ou carré**	**Report fait par l'élève**	**Passage explicite de l'addition à la multiplication**	**Passage explicite du nombre de carreaux à un nombre de cm**	**Autre transition**
Au rythme des maths	Oui -une grille (multicolo-re) -une grille effectuée par l'élève (couvrir la surface avec des carreaux)	4 × 4 6 × 3 Et 2, 3, 12 cm^2	Assemblage (autant de carreaux que nécessai-re pour couvrir)	Non	Non	
La clé des maths	Oui papier quadrillé en cm^2	de 20 à 27 cm^2	Non	Oui : par la mise en commun des procédures	Non	Apprentissa-ge par le classement visant la distinction aire et périmètre
Pour compren-dre les maths	Oui	3 × 3 5 × 5 10 × 10 5 × 3	Non	Non mais incité par le choix des valeurs (10 × 10)	Non	
EuroMaths	Oui	10 × 10 4 × 3 3 × 3 5 × 7 5 × 5	« Oui »: pour voir le report d'un cm^2 alors que le quadrillage n'est pas en cm^2	Non mais il est mentionné que les deux sont possibles + incité par le choix des valeurs	« Oui » : « prévois » Puis « vérifie »	
J'apprends les maths	Oui	6 × 4 10 × 2,5 6 × 6,5 9,5 × 4 16 × 13 (effacé)	Non	« Oui » : par la grille effacée	Oui : grille effacée	
Maths Thévenet	Oui	3 × 3 3 × 6 16 × 4 A trouver sur	Non	Oui par confrontation des procédures	Non	Trouver le carré d'aire donnée

Manuel	Grille	Dimensions choisies en cm pour le rectangle ou carré	Report fait par l'élève	Passage explicite de l'addition à la multiplication	Passage explicite du nombre de carreaux à un nombre de cm	Autre transition
		papier quadrillé : 8×8				
Maths-Sciences	Oui	20×10 (en m^2) Calcul de l'aire des poumons 25×44 (en mm^2) 3×3 (en cm^2) 5×40 (en mm^2)	Non	Oui : « inutile de compter »	Non	Trouver un autre rectangle ayant cette aire donnée Convertion en dm « en quelle unité l'aire est-elle alors exprimée »
Cap Maths	Oui	3×3 5×2	Non	Oui : passage par les diverses décompositions multiplicatives possibles + explicitation des procédures avec les élèves	Non mais il y a un dessin p.76 qui fait correspondre règle (graduée en demi-centimètres) et quadrillage	Trouver deux rectangles ayant pour aire 18 cm^2 (et autres options) Puis passage par toutes les décompositi ons multiplicativ -es possibles (recherche d'exhaustivi-té)
A portée de maths	« Oui », la « grille » choisie permet de compter selon plusieurs unités de mesure différente s, il faut sélectionn er « la bonne ».	3×3 5×3	Non	Non	Non	Sélection de l'unité de mesure à faire par l'élève (plusieurs possibilités)

Tableau 5-2 : introduction de la formule dans les manuels

5.3 Conclusion de l'analyse des manuels scolaires

Le principe général de cette partie est de faire un état des lieux des pratiques portant sur la séance d'introduction des formules d'aire du carré et du rectangle. Cette analyse ne s'inscrit pas dans une perspective de jugement. Il s'agit davantage de documenter les solutions adoptées par les manuels et les difficultés qu'ils rencontrent dans un cadre transmissif difficile sur au moins deux plans :

-l'introduction de la formule concilie le passage d'un contexte unidimensionnel additif dans le registre des figures à un contexte bidimensionnel multiplicatif dans les registres numérique et symbolique, le tout en un temps limité

-la conceptualisation de l'unité de mesure d'aire suivant les registres, je l'ai montré, n'a pas fait l'objet d'une réflexion en recherche sur les étapes de sa transmission auprès des élèves.

J'ai présenté les choix des manuels dans le cadre d'une séance bien particulière. Lorsque des informations me sont apparues comme importantes à expliciter dans le cadre d'autres séances présentées par le manuel, je les ai exposées. Cependant, le propos de cette étude n'étant pas l'analyse des manuels dans leur intégralité, les informations issues d'autres séances ou séquences ont pu ne pas être prises en compte.

5.3.1 L'unité de mesure d'aire

Dans cette séance, l'unité de mesure d'aire est associée au carré dans 13/13 manuels. L'unité de mesure est présentée comme l'aire d'un carré d'un centimètre de côté dans 12/13 manuels. Le manuel « la clé des maths » choisit de l'associer au carré plutôt qu'à une aire, d'où la formulation : « lorsque le carré choisi a un côté de 1 cm on l'appelle cm^2 ». Selon les manuels, un dessin accompagne la découverte de l'unité de mesure d'aire. Il s'agit souvent d'un carré dont l'intérieur est coloré, et qui indique « 1 cm^2 ».

Le manuel « maths tout terrain » choisit d'insister sur le « 2 » en exposant, dans le livre du maître (p.91) ce qui pourrait être comprit comme un lien au centimètre.

La distinction entre surface et mesure d'aire, pour l'unité de mesure, est choisie dans au moins trois manuels : ils proposent des formes variées pour représenter la mesure d'aire 1 cm^2. Un seul à ma connaissance, utilise ces formes explicitement pour la mesure (ce n'est pas uniquement une présentation formelle).

Le manuel « j'apprends les maths » propose d'adapter la forme de l'unité de mesure à la surface à mesurer ; il est le seul pour les pages de manuels que j'ai étudiées.

Dans les pages que j'ai étudiées, il est parfois proposé un travail sur les relations entre unités de mesure d'aire qui fait l'objet d'une aide dans le registre des figures. C'est le cas dans au moins 10/13 manuels. Il s'agit souvent de représenter le cm^2 comme 100 mm^2. Ce type de grille est alors présent dans les 10 manuels mentionnés, au moins. 11/13 manuels proposent de voir par exemple, 1 cm^2 comme 100 mm^2.

Le manuel « les maths à la découverte des sciences » rend explicite la possibilité d'exprimer des fractions colorées de cm^2 en mm^2. Ainsi le changement d'échelle est justifié par le besoin de s'*adapter* à la surface à mesurer.

Un travail sur la distinction entre carreau du quadrillage et unité de mesure a été ajouté dans 4/13 manuels.

Les unités de mesure d'aire sont reliées à un contexte de mesure, en relation également avec l'idée des ordres de grandeur, dans au moins 3/13 manuels (maison, pré, poumons…).

Le manuel « J'apprends les maths » propose une séance spécifique de travail sur les relations entre unités de mesure d'aire avec accompagnement géométrique (p.84).

Le manuel « les maths à la découverte des sciences » est le seul à donner une raison « motivante » de mesurer une aire dans la vie réelle (avoir une idée concrète de l'étendue de la surface des poumons). Ce manuel présente également une mesure d'aire composée.

Au moins 2/13 manuels présentent un travail avec une dimension (largeur) donnée dans une unité de mesure et l'autre (longueur) dans une autre unité de mesure.

En résumé

Voici les points auxquels sont confrontés les manuels et qu'ils ont choisi (ou non) de traiter explicitement dans cette séance d'introduction aux formules de calcul de l'aire du carré et du rectangle. Je les présente dans un premier temps, dans une liste :

Unité de mesure

-l'introduction du cm^2 (qui est alors vue comme une aire et/ou une surface)
-la représentation du cm^2 dans le registre des figures (en insistant parfois sur le bord et/ou l'intérieur d'un carré de 1 cm de côté)
-la distinction surface/aire-nombre pour l'unité de mesure d'aire et l'utilisation de formes variées associées à l'unité de mesure, pour pouvoir mesurer (présentation qui n'est pas seulement formelle)
-la distinction entre carreau du quadrillage et unité de mesure

Relation entre unités et changement de registre

-la représentation géométrique des relations entre unités de mesure d'aire
-l'introduction du besoin de changer d'échelle pour justifier le changement d'unité de mesure vers une sous/sur-unité de mesure
-l'indication de l'ordre de grandeur
-la représentation géométrique d'une unité de mesure comme une grille ou comme une surface unie en fonction des sous-unités de mesure
-l'accompagnement de l'apprentissage entre facteurs entre unités de mesure peut être fait dans le cadre géométrique
-l'expression des dimensions d'un rectangle peut être faite dans une ou plusieurs unités de mesure, parfois en différenciant l'unité de mesure utilisée pour la longueur et celle qui est utilisée pour la largeur

Le mesurage

-les raisons concrètes de mesurer une aire peuvent être explicitées
-la transition entre géométrie et formule peut être travaillée de façon à ce que la formule n'entre pas en contradiction avec le registre des figures. Ainsi l'idée de mesurage par report peut être conciliable avec la structure multiplicative.

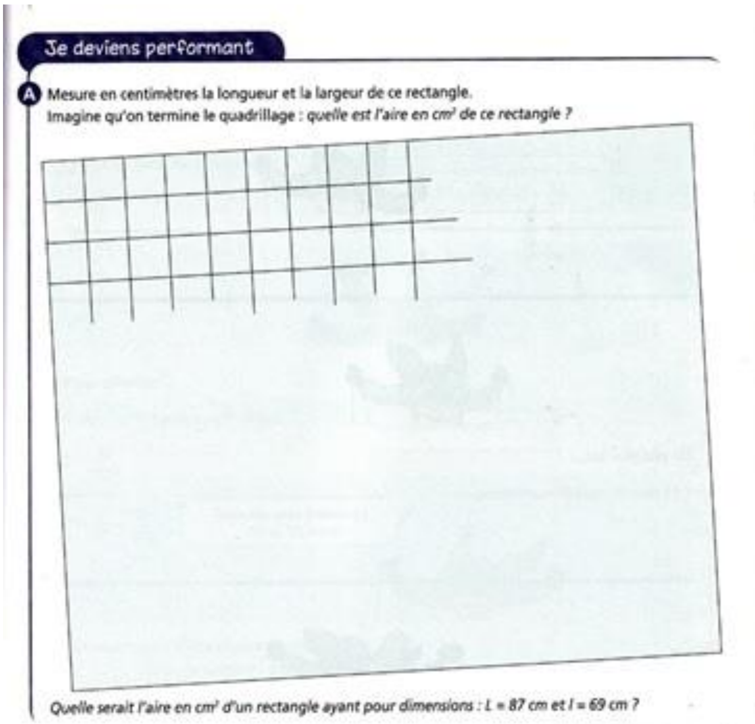
Cette analyse a été permise par l'analyse historico-épistémologique et son parallèle croisé en didactique. Ce qui apparaît grâce à cette analyse des manuels scolaires, sous l'angle de la conceptualisation de l'unité de mesure, c'est qu'il y a clairement un objet d'apprentissage. Cet apprentissage a, de fait, été l'objet de décisions dans les manuels, qui ne sont pas uniformes. Il intervient de plus au même moment qu'un autre apprentissage clé : le passage à une situation de bidimensionnalité dans une structure multiplicative.

En dehors des travaux de Perrin-Glorian qui visent la distinction aire/nombre et affectent l'unité de mesure (mais qui ne semblent pas pris en compte ici), les travaux de didactique que j'ai rencontrés dans ma recherche ne se sont pas penchés explicitement sur cette question du point de vue précis de la conceptualisation de l'unité de mesure, ainsi cette transmission du savoir sur l'unité de mesure d'aire ne fait pas l'objet de préconisations et les concepteurs de manuels sont livrés à eux-mêmes dans les décisions, ce qui explique probablement la diversité des réponses.

5.3.2 La transition entre « grille » et formule

Dans cette séance, la « grille » est utilisée par 13/13 manuels (à visualiser par l'élève lui-même dans 1/13 manuel où elle n'est pas dessinée).

L'explicitation de la relation entre le nombre de carreaux et le nombre de centimètres n'est assurée que dans 1/13 manuels (« j'apprends les maths »). J'avais explicité l'importance de cette phase, dans l'analyse préalable (Chapitre II). Elle permet de faire le lien entre les registres tout en conservant une représentation de l'unité de mesure compatible avec la formule. La « grille effacée » assure le besoin de recourir à la règle pour obtenir le nombre de carreaux sur une ligne.



Extrait 1 : la grille effacée dans « J'apprends les maths » (2008, p.75)

D'autres manuels se rapprochent de ce travail sur le passage « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres » : il s'agit de « Vivre les maths » et « EuroMaths ». Ces manuels proposent une vérification des prédictions par papier quadrillé. Ainsi, les élèves qui auront utilisé la multiplication sur les valeurs données dans l'énoncé seront ensuite confrontés au nombre de carreaux. Mais le passage par le nombre d'unités de mesure de longueur n'est pas aussi explicite ici que dans la « grille effacée ».

Le manuel « CapMaths » propose de passer par toutes les décompositions multiplicatives possibles pour une même mesure d'aire ; ainsi il induit également un rapport avec les mesures de longueurs, en partie explicité. Surtout, il constitue une réponse intéressante à l'explicitation du caractère bidimensionnel. De même, un manuel (« la clé des maths ») propose un double classement aire/périmètre. Au moins 2/13 manuels s'intéressent donc au problème de la bidimensionnalité à ce stade. Il faut noter que dans la plupart des manuels, une séance sur la distinction aire/périmètre est proposée, pas toujours en lien avec l'unité de mesure d'aire standard.

Certains manuels (6/13 manuels) explicitent le passage du compte de carreaux « un à un » à la multiplication ; passage nécessaire pour assurer l'introduction de la formule. Ce passage a normalement été travaillé lors de l'introduction de la multiplication, puis retravaillé ensuite chaque année. Ainsi cela explique peut-être pourquoi certains manuels ne choisissent pas d'expliciter ce point ici. Malgré tout, il est nécessaire de s'assurer que les élèves aient fait le lien dans ce contexte précis (calcul d'aire avec une unité donnée) pour que l'introduction de la formule ait du sens. Le rappel de ce point ne semble donc pas de trop pour limiter les biais dans l'apprentissage. Parfois, les dimensions choisies induisent le passage à la multiplication (l'addition des carreaux devenant laborieuse). C'est le cas dans au moins 9/13 manuels[220].

La grille choisie correspond parfois à l'unité de mesure, parfois non, selon les manuels. Il y a donc parfois une distinction entre unité de mesure et quadrillage. Lorsque la grille ne correspond pas à l'unité de mesure d'aire et que celle-ci n'est pas dessinée sur la grille par les concepteurs du manuel (EuroMaths), l'élève est obligé de passer lui-même par le quadrillage, ce qui pourrait induire l'idée de report d'étalon. Le manuel « à portée de maths » choisit de proposer une grille sur laquelle il est possible de choisir plusieurs tailles de carreaux. Il est probable qu'il s'agisse de faire travailler l'élève sur le choix explicite d'une unité de mesure d'aire.

Un seul manuel (Compagnon maths) propose lors de cette séance, un report effectif de l'unité de mesure d'aire (« cherchons ensemble »). Le manuel « au rythme des maths » propose de recouvrir la surface (« pour démarrer »), dans une mosaïque mobilisant des carreaux mesurant 1 cm^2 et d'assembler des carrés grâce à des carreaux cm^2 (« réactivation »).

A ce stade, des manuels proposent une distinction surface/aire/nombre, en demandant par exemple pour une aire donnée, de trouver un autre rectangle qui ait même aire ; ou d'exprimer une même aire dans une autre unité de mesure (c'est plus rare, au moins 2/13 manuels).

En résumé

Voici les points sur lesquels les manuels ont été forcés de se positionner ou à l'inverse de rester dans l'implicite :

---

[220] Certains manuels proposent des valeurs non entières pour les dimensions du rectangle, alors il est probable qu'à ces moments-là l'élève ne fasse pas le lien entre multiplication et nombre de carreaux sur une ligne/une colonne (addition ou multiplication + addition pour les moitiés de carreau) ; à moins qu'il n'ait été habitué à travailler sur la multiplication des décimaux dans le contexte géométrique par ailleurs.

L'opération

-le passage du compte de carreaux (addition itérée) à la multiplication dans le cadre géométrique peut être plus ou moins explicite, certains manuels jouent sur les dimensions pour motiver l'usage de la multiplication. Le choix des dimensions du rectangle (entières ou non) a des effets sur les procédures adoptées par les élèves.
-la distinction entre le passage de l'addition à la multiplication et le passage de l'unidimensionnalité à la bidimensionnalité peut être faite s'il y a plusieurs étapes

Le nombre et la mesure dans la transition

-le nombre (ou la lettre) peut représenter : carreau, centimètre, segment, côté… la représentation que se fait l'élève peut être accompagnée par une institutionnalisation ou rester implicite
-l'explicitation (ou non) de la relation entre le nombre de carreaux et le nombre de centimètres peut être faite, notamment avec la « grille effacée »
-si la transition n'est pas accompagnée il est probable que l'idée de report d'un étalon pour mesurer soit remplacée par l'idée d'une construction du cm^2 par multiplication du cm

Les manuels se positionnent aussi sur les distinctions liées à l'aire : les distinctions surface/aire et aire/nombre, qu'ils ont parfois proposé de travailler dans les séances précédentes, mais qui peuvent être (ou non) abandonnées au moment de l'introduction de l'unité de mesure standard.

5.3.3 La conception du nombre, la lettre

L'absence globale d'une réflexion sur la transition entre les registres dans les manuels conduit à une difficulté importante : l'introduction de l'algèbre, ici avec « c × c » ou « l × L » ne peut s'appuyer sur une cohérence, un parallélisme entre les cadres géométrique et arithmétique ou algébrique. Est-ce que la lettre « c » est liée au nombre de carreaux sur une ligne ou au nombre d'unités de mesure de longueur, ou encore au « côté » en général ? Est-ce que la lettre désigne la valeur numérique de la grandeur (« 3 », par exemple), la mesure entière de la longueur (« 3 cm », par exemple), un nombre de carreaux (3, par exemple), ou encore un nombre « flottant » qui a été extrait d'une mesure de longueur ?

Seul le manuel « j'apprends les maths » a permis une transition complète dans la conceptualisation des objets, puisque le nombre de carreaux est explicitement remplacé par le nombre de segments mesurant 1 cm. Plutôt que d'introduire la formule, le manuel est d'ailleurs prudent, et insiste sur la transition, probablement pour favoriser un rappel de la situation de mesure :

> « J'ai appris :
> Quand je cherche l'aire d'un rectangle, plutôt que de le quadriller, je peux mesurer sa longueur et sa largeur et multiplier les deux nombres obtenus. […] » (*J'apprends les maths*, 2008).

De plus, dans les manuels, les trois formes suivantes ont été observées :
- 3 cm × 3 cm = 9 cm^2
- 3 × 3 = 9 cm^2

- $3 \times 3 = 9$, donc l'aire est de 9 cm^2

Ainsi l'unité de mesure peut se retrouver incluse dans une notation multiplicative. Comment cette inclusion (ou non) est-elle conceptualisée par les élèves ?

Cette analyse a permis de mettre en valeur le fait que le passage de l'unité de mesure d'aire à l'unité de mesure de longueur (présent dans la formule, plus ou moins explicitement) n'est pas assuré (1 à 4 manuels sur 13 ont explicitement traité ce problème). Ce point qui a été l'objet de certaines recherches en didactique (notamment les travaux de Outhred, Mitchelmore et Owens, mais également dans les préconisations de Perrin-Glorian sur la distinction aire/nombre, voir Analyse Préalable : Chapitre II), ne semble pas avoir pénétré les manuels scolaires. C'est peut-être lié au fait que l'unité de mesure en tant qu'objet d'étude individuel et inter-cadres ne fait pas l'objet de beaucoup de travaux en didactique. L'ensemble des points sur lesquels il est demandé aux manuels de se prononcer conduit à une grande variété des pratiques. Il me semble donc important de les penser ensemble, dans une « didactique de l'unité de mesure » qui soit conduite tout en favorisant la transition entre les registres.

Je récapitule dans le tableau suivant les résultats obtenus, et les points à retenir pour l'expérimentation en classe. J'explicite aussi, le cas échéant, les solutions adoptées par un ou plusieurs manuels.

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Trouvé dans les manuels (en majorité)**	**Solutions trouvées par certains manuels (de façon ponctuelle)**	**Points à retenir pour l'expérimentation**
Accompagnement de l'unité de mesure lors du changement vers les nombres et symboles	Majoritairement absent : -pas de travail sur l'explicitation de l'unité de mesure centimètre dans son lien au cm^2 -pas d'explicitation du caractère arbitraire de la notation multiplicative sur les unités de mesure, le cas échéant	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres »	Confusions à attendre dans la représentation que les élèves se font de l'unité de mesure (multiplication de centimètres) Remplacement probable de la grille par des représentations géométriques erronées, perte de l'idée de mesurage (report d'un étalon)

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Trouvé dans les manuels (en majorité)**	**Solutions trouvées par certains manuels (de façon ponctuelle)**	**Points à retenir pour l'expérimentation**
Rôle donné au nombre et à la lettre après la transition entre registres	Majoritairement : flou Pas de travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres »	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres » + Attention particulière lors de l'introduction de la formule (*j'apprends les maths*)	Confusions à attendre dans la représentation que les élèves se font des objets sur lesquels opère l'algorithme multiplicatif
Accompagnement de l'opération multiplication dans le changement de registre, Relation entre construction d'un carré et multiplication	Non travaillé	Non travaillé comme c'était au contraire, le cas dans les *Neuf chapitres* par exemple	Confusions à attendre dans la représentation que les élèves se font de la multiplication qui est alors associée à la construction d'un carré de côté donné dans le cadre géométrique / avec des implications possibles sur ce qu'est le cm^2 pour eux

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Trouvé dans les manuels (en majorité)**	**Solutions trouvées par certains manuels (de façon ponctuelle)**	**Points à retenir pour l'expérimentation**
Parallélisme entre les deux algorithmes rencontrés par l'élève	-travail sur le passage de l'addition itérée à la multiplication dans le cadre unidimensionnel (souvent) -pas de travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres » -pas d'explicitation du caractère démontrable de la relation entre addition d'aires et juxtaposition de surfaces unité	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres »	Oubli attendu du premier algorithme qui n'était pas compatible avec le second
Conceptualisation de l'unité de mesure d'aire -indépendamment de la longueur -distinction surface/aire-nombre pour l'unité de mesure d'aire -accompagnement conceptuel dans le changement de registre	Travail sur différentes formes de l'unité de mesure d'aire (souvent) mais pas dans un contexte de report Majoritairement absent	Travail sur le cm^2 dans un contexte de report (mesurage) Travail sur le besoin de recourir à une sous-unité (changement d'échelle) Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres »	Unité de mesure d'aire qui n'a pas une existence propre dans un contexte de mesurage

Questions issues de l'analyse historico-épistémologique	**Trouvé dans les manuels (en majorité)**	**Solutions trouvées par certains manuels (de façon ponctuelle)**	**Points à retenir pour l'expérimentation**
Accompagnement de la place du mesurage dans le changement de registre	Majoritairement absente + Note : le mesurage n'est généralement pas motivé par un besoin de la vie courante	Travail sur la transition : « nombre de carreaux » à « nombre de centimètres » Lien entre mesure de surface des poumons et mesurage	Abandon du mesurage (incompatibilité des algorithmes)

Tableau 5-3: récapitulatif pré-expérimentation

Le contrôle du sens de ce qui est fait, que les manuels souhaitent favoriser dans la façon dont ils introduisent la formule par le compte des carreaux, est-il encore possible dans ces conditions ?

Les questions suivantes vont être retenues pendant l'expérimentation.

D'une part, je chercherai des confirmations : est-ce que les changements (successifs) de cadres ont des effets sur la représentation que se font les élèves des objets mathématiques comme le nombre ou l'unité de mesure dans l'algorithme multiplicatif ? Comment coordonnent-ils les registres, est-ce que l'algorithme additif est effectivement effacé, faute d'avoir pu être concilié avec l'algorithme lié à la formule ? Quelle est la place du mesurage pour eux dans le calcul d'aire ? Quelle idée se font-ils de l'unité de mesure d'aire, est-elle liée au mesurage ?

D'autre part, comment le texte ancien par ses différences, va-t-il agir sur les objets mathématiques qui entrent en jeu dans le calcul d'aire ?

Maintenant que j'ai précisé les questions retenues pour l'expérimentation, je conclus ce chapitre avec une ouverture sur les conclusions pratiques permises par cette analyse de manuels scolaires, à la lumière de l'analyse croisée historique et didactique.

5.4 Ouverture sur ces premières conclusions

Suite à ces analyses, il me semble qu'il est déjà possible de conclure qu'il est intéressant d'insister sur certains points. Si les futurs travaux de didactique sur l'accompagnement de l'unité de mesure entre les cadres doivent permettre de conclure sur les points cités précédemment, voici les propositions que je peux mettre en avant dès maintenant, dans la perspective d'une future ingénierie, par exemple :

-la grille effacée (« j'apprends les maths ») me semble être un élément de choix pour favoriser la transition entre les registres et favoriser ensuite les associations entre les symboles (dans le cadre algébrique) et les objets mathématiques déjà évoqués dans le cadre géométrique. Cela permet d'accompagner l'algorithme, du cadre géométrique au cadre multiplicatif et numérique, en pouvant associer à chaque étape un objet mathématique précis rencontré dans le registre des figures

-que les unités de mesure soient incluses ou non dans la notation multiplicative lors des calculs, il serait peut-être bon de préciser que cette notation a un caractère fictif du point de vue géométrique, utile certes, mais possible uniquement grâce à l'adoption de conventions

-les étapes du passage de l'addition itérée de carreaux à la multiplication, puis de la multiplication pour connaitre le nombre de carreaux vers la mesure effective du côté du carré, peuvent être distinguées

-il serait probablement intéressant de travailler davantage avec les élèves sur le report effectif d'unités de mesure d'aire (par exemple un drap, dans la cour), sur les contextes pratiques de calcul d'aire (voir « les maths à la découverte des sciences »), les ordres de grandeur pour les unités de mesure d'aire[221]

-il est probablement intéressant d'utiliser les différentes formes de l'unité de mesure standard pour mesurer

-les distinctions entre aire et nombre sont préconisées par les travaux de recherche (voir les travaux de Perrin-Glorian, Chapitre II) mais peu représentées dans l'enseignement. De même pour l'enseignement de l'aire en utilisant la masse (pour distinguer l'aire comme concept indépendant du nombre et de la surface), qu'elle propose.

-Le manuel « j'apprends les maths » propose diverses représentations des relations entre unités de mesure d'aire dans le cadre géométrique, qui paraissent intéressantes. La justification du changement d'échelle apparait clairement avec l'utilisation du mm^2 pour des fractions du cm^2 (voir « les maths à la découverte des sciences »)

-la distinction entre carrelage et unité de mesure, les choix de valeurs pour les dimensions du carré ont des implications sur l'enseignement de l'aire (voir les détails dans le présent sous-chapitre)

- la distinction entre surface et aire/nombre pour l'unité de mesure existe, et n'est pas enseignée uniformément, il pourrait être intéressant de clarifier ces distinctions.

Suite à l'ouverture sur ces quelques points pratiques qui peuvent être retirés de l'analyse de manuels, je passe à l'expérimentation en classe.

[221] Je n'ai pas travaillé sur le sujet de l'approximation dans cette thèse, mais il semble important de le mettre à relation avec la présente étude.

CHAPITRE III - EXPERIMENTATION EN CLASSE

1 INTRODUCTION

Je l'ai exposé en introduction (voir 1, p.20) : cette expérimentation s'inscrit dans le projet européen d'histoire des sciences SAW : « sciences mathématiques dans les mondes anciens »[222]. Le projet a pour objectif principal de refléter la diversité et l'ingéniosité des anciens systèmes de pensée mathématique; plutôt que de projeter notre propre compréhension et nos propres conceptions des objets mathématiques, sur les procédures anciennes.

Chercher une façon de transposer cette manière actuelle de faire de l'histoire est intéressant à au moins deux niveaux, à mon avis :

-cela permet d'utiliser comme savoir de référence un type d'histoire qui est connecté aux nouvelles tendances de la recherche[223], en particulier à une façon de penser l'histoire non linéaire, en évitant d'y chercher les objets mathématiques tels qu'ils sont connus aujourd'hui. En particulier, cette démarche est une façon d'interpréter l'hypothèse selon laquelle il est important de communiquer sur l'image et la nature des sciences, à travers : la complexification de la notion de progrès, l'idée qu'il existe plusieurs solutions mathématiques, que les bonnes solutions ne sont pas seulement « occidentales », que les idées mathématiques émergent de contextes variés, etc.

-cela permet également d'utiliser la diversité des solutions mathématiques dans les sources anciennes pour questionner la compréhension des concepts mathématiques par les élèves aujourd'hui.

L'utilisation de l'histoire des sciences dans la salle de classe peut prendre plusieurs formes, comme le détaille précisément Jankvist (2009). L'histoire peut être considérée comme un outil ou un objectif, et ce de plusieurs façons ; il peut être orienté vers l'apprentissage des mathématiques, vers un changement de regard sur la nature des sciences ou sur la motivation et le plaisir mathématique ; le but peut être de voir les mathématiques comme une activité culturelle, ou de fournir de nouvelles perspectives aux enseignants, etc.

Nicolas Décamp et moi avons décidé de travailler avec une chercheuse en histoire des mathématiques (Christine Proust) habituée à enseigner l'histoire en tant qu'objectif. Nous souhaitions déterminer si dans ces conditions, il y aurait également des effets sur les étudiants du point de vue mathématique (« l'histoire comme outil »). Cela constitue notre interprétation du contexte du projet SAW.

A cet égard, nous nous sommes placés dans un type d'approche interdisciplinaire « symétrique » (Castela, El Idrissi et Moungabio, 2016, p.429). Nous avons essayé de prendre en compte les contraintes des deux disciplines. Les difficultés de la recherche d'un tel équilibre ont déjà été exprimées par Fried (2008)[224].

[222] Le projet SAW (http://sawerc.hypotheses.org/) est un projet européen (ERC) d'histoire des mathématiques anciennes.

[223] Voir aussi Bernardes (2018).

[224] J'ai traduit ces extraits en français pour la thèse.

> La question qui se pose est de savoir si l'incorporation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques ne pose aucun problème en principe. [...] l'histoire des mathématiques et l'enseignement des mathématiques sont des disciplines, chacune avec ses propres objectifs et sa propre conception du sujet. L'enseignement des mathématiques - au moins tel qu'il est habituellement conçu (et cette qualification n'est pas triviale) – a pour objectif les mathématiques modernes, mais traite les mathématiques comme elles sont conçues aujourd'hui comme s'il s'agissait de mathématiques tout court; [...] D'une certaine manière, c'est la projection de la position de chercheurs mathématiciens ou de scientifiques qui, pour utiliser les termes favoris de Kuhn, doivent, en temps normal, travailler à l'intérieur d'un paradigme, un ensemble de concepts, de procédures, d'approches fixes comme si elles étaient éternelles, dans les manuels. [...] Les historiens des mathématiques sont comme des anthropologues qui étudient des cultures mathématiques très différentes des nôtres ; au travail, les historiens doivent considérer les mathématiques comme toujours changeantes et n'ayant pas de référence fixe et éternelle. (Fried, 2008, p. 2-3)

Au cours d'une séance ayant « l'histoire comme objectif », dirigée par la spécialiste, j'ai décidé d'observer les éventuels effets conceptuels des différences mathématiques nées d'une ancienne tablette cunéiforme. Pour cela j'ai comparé deux groupes d'étudiants: un groupe d'histoire des sciences (groupe test), qui a suivi nos sessions d'histoire, et un groupe témoin, qui n'en a pas eu.

J'ai également essayé de décrire certains aspects de « nature des mathématiques » et de « nature de l'histoire » dans les discours des élèves. L'objectif était de savoir s'il était possible d'observer des effets, du fait d'une séance d'histoire des sciences qui soit conçue comme compatible avec l'esprit des derniers développements de la recherche en histoire, notamment en termes de diversité.

La méthodologie est celle d'une ingénierie didactique (Artigue, 1989), voir p.16. L'analyse *a priori* qui va suivre, a servi de construction pour l'expérimentation en classe. Elle est basée sur mon analyse historico-épistémologique (voir 2.4, p.111) et sur mon analyse préalable (voir Chapitre II).

L'analyse historico-épistémologique a permis de s'intéresser aux concepts de nombre, d'unité de mesure, de multiplication, etc, dans le cadre de l'aire du rectangle et du carré, dans plusieurs textes anciens. Ce travail a conduit à relever un certain nombre d'observables qui ont guidé une analyse de manuels scolaires de CM2 (introduction des formules d'aire du carré et du rectangle) en collaboration avec la synthèse des travaux didactiques sur le sujet. J'ai fait le constat d'un certain nombre d'implicites possibles, liés au système métrique actuel.

Sur cette base, j'ai construit une analyse *a priori* de l'expérimentation afin de documenter la présence éventuelle de difficultés ou contradictions, liées à ces implicites, ainsi que l'effet hypothétique de la séance d'histoire des sciences sur les questions que se posent les élèves. Je me suis demandé si les élèves pouvaient être affectés dans leur questionnement, par une tablette cunéiforme régie par un système métrologique dans lequel les systèmes de mesure de longueur et de surface ne correspondent pas.

La principale question de recherche est la suivante: est-il possible pour des séances d'histoire des sciences, présentées avec des objectifs *propres à la discipline historique*, d'avoir un effet sur les questions mathématiques des élèves, du point de vue conceptuel ? Est-ce que ces séances ont aussi un effet du type « nature de la science » ? Est-il possible pour les sessions d'histoire de constituer une forme de « milieu a-didactique[225]» favorable (Brousseau 1986, p.86) pour déstabiliser le système établi par les élèves et réenclencher un questionnement sur des notions supposées stables[226], (à réinvestir ensuite éventuellement par les professeurs de mathématiques)? Quelles sont les conditions pour que le système mathématique ancien puisse affecter le nôtre, et qu'ils communiquent, tout en préservant les spécificités historiques, la diversité?

Dans cette introduction je vais commencer par présenter les travaux de recherche utilisant l'histoire des sciences pour l'enseignement. Ensuite, je détaillerai plus précisément les choix qui ont été faits pour l'approche méthodologique de l'expérimentation et les contraintes liées à l'utilisation de l'histoire.

L'expérimentation prend place en classe de seconde (15-16 ans). Deux groupes sont étudiés : un groupe test (qui a suivi des séances d'histoire des sciences) et un groupe témoin. Le groupe test a suivi 4 séances d'histoire de la Mésopotamie. Le groupe témoin n'en a pas eu. La présente analyse se base sur les réponses à une question écrite du groupe test, ainsi que des transcriptions d'entretiens menés dans les groupes test et témoin[227]. Je donne les détails du protocole dans l'analyse *a priori.*

Je préciserai dans un premier temps, le contexte et ses implications : le lycée et l'option « histoire des sciences » dans laquelle s'inscrit l'expérimentation. Dans un deuxième temps, je détaillerai comment le texte ancien a été choisi, sous quelle forme il a été présenté aux élèves, et je justifierai ainsi le choix du niveau. Je donnerai enfin un aperçu de l'organisation des séances Mésopotamie dans lesquelles s'inscrit l'expérimentation. Je préciserai un certain nombre de choix qui ont été faits en lien avec contraintes disciplinaires de l'histoire. Je terminerai par des précisions sur les groupes test et témoin.

1.1 Travaux de référence : utilisation de l'histoire des sciences pour l'enseignement

Je ne donnerai ici qu'un petit aperçu des travaux utilisant l'histoire des sciences en classe. J'ai essayé de sélectionner ceux que j'ai rencontrés pendant ma thèse et qui m'ont influencée dans ma démarche. Ce n'est donc pas exhaustif. Un travail de recensement de travaux a été fait, notamment par Clark, Kjeldsen, Schorcht et Tzanakis (2018, p.18-23) à l'occasion de ICME 13 à Hamburg. De Hosson et Schneeberger (2011) ainsi que Chorlay et de Hosson (2016) proposent une synthèse et une réflexion sur les différentes approches. Jankhe et al. (2000) ont recensé les différentes utilisations de l'histoire des sciences en classe.

Allchin (2011) propose une approche critique de la façon dont l'histoire des sciences est présentée en classe en lien avec l'impression que donnent les aspects narratifs sur la nature des sciences. Maurines et Beaufils (2011) listent un certain nombre de difficultés problématiques liées à l'utilisation de l'histoire des sciences et propose des pistes. Cariou

[225] Relative, puisque des interactions étaient inévitables, je détaillerai pourquoi. D'autre part, il faut noter que du point de vue de la didactique de l'histoire, la situation n'est pas vraiment a-didactique, et qu'il y a plutôt une forme de découverte pas à pas, avec institutionnalisation régulière. Voici comment Sensevy (2001, p.202-224) caractérise une situation a-didactique idéale : Dans les situations a-didactiques, les interactions des élèves avec le milieu sont supposées suffisamment prégnantes et adéquates pour qu'ils puissent construire des connaissances, formuler des stratégies d'action, valider des savoirs en utilisant les rétroactions de ces milieux sans que leur activité ne soient orientée par la nécessité de satisfaire aux intentions supposées du professeur.

[226] J'ai détaillé la notion de milieu, voir 2.3, p.44

[227] J'ai également recueilli des traces orales (dictaphones) des séances Mésopotamie, qui n'ont pas encore été analysées. De plus, les élèves du groupe test ont « enseigné » la Mésopotamie à des élèves de CM2. Ce résultat lui non plus, n'a pas encore été analysé.

(2011, p.101) s’intéresse à l’épistémologie naturellement présente chez les enseignants et met en garde contre l’utilisation de l’histoire des sciences sans formation.

Le groupe IREM de Rennes dirigé par Alain Herreman auquel j’ai participé propose une réflexion sur les enjeux profonds liés à la façon dont a été présentée l’histoire des sciences dans les manuels scolaires de mathématiques, et donne des pistes aux enseignants pour repérer des dynamiques dans les narrations. Maurines et Beaufils (2012) avaient déjà fait des remarques en ce sens.

J’ai commencé (de Varent, 2016) une approche historiographique de ces tendances en étudiant David Eugene Smith, historien collectionneur et enseignant qui a participé à la création des premiers colloques internationaux de didactique, en poussant à l’utilisation de l’histoire des sciences pour des raisons qui me semblent proches de celles qui sous-tendent les encarts de manuels scolaires. Hulin (1984) s’intéresse à cet aspect dans les congrès internationaux de sciences expérimentales.

> On peut s'interroger sur les motivations de l'introduction de l'histoire des sciences et sa présentation dans les manuels. Les arguments présentés en faveur de l'intervention d'une dimension historique dans l'enseignement des sciences sont divers, mais il y a aussi des réserves et des oppositions. Il est intéressant de confronter un certain nombre de points de vue, tels ceux de H. Bouasse, A. Comte, P. Duhem, P. Langevin, H. Le Chatelier, L. Pasteur... S'il y a une grande constance dans les arguments avancés il faut noter que par rapport à la fin du XIXe siècle le décalage accru entre la science enseignée et la science en marche rend plus grandes les difficultés. (Hulin, 1984, p.15)

Dans sa thèse, Gosztonyi (2015) utilise l’histoire des sciences, par l’analyse d’une approche pédagogique ancienne (une analyse de manuels en particulier), pour penser l’enseignement. Réciproquement elle utilise des outils de didactique actuels pour penser son analyse historique. La première partie de mon travail se situe dans cet esprit de contributions réciproques, à l’étape de la recherche. Ce sont des aspects qui peuvent ensuite alimenter le terrain. Je passe maintenant aux aspects « terrain » de ma thèse avec l’expérimentation en classe.

Mon héritage provient d’approches épistémologiques, il faut notamment citer Saltiel et Viennot (1984) ainsi que Viennot (2008). Ce dernier travail est le premier que j’aie lu pour cette thèse. Il réussit à montrer l’intersection possible dans la réflexion, entre histoire et didactique, autour de l’épistémologie. Cécile de Hosson (2011) a formalisé les « aller-retours » à travers le cadre méthodologique de la reconstitution didactique fondée sur des matériaux historiques.

> Associer histoire des sciences et enseignement revient pour nous à créer une dialectique de nature épistémologique entre deux enquêtes, l’une, centrée sur les raisonnements des élèves, l’autre tournée vers l’évolution des idées dans l’histoire des sciences. Nous suivons en cela la voie ouverte par Dorier qui s’intéresse à l’épistémologie « en ce qu’elle permet de mieux comprendre les liens entre la constitution d’un savoir dans la sphère savante d’une part et l’enseignement et l’apprentissage de ce savoir d’autre part » (Dorier, 2006, p. 16). Cette dialectique permet 1) de préciser les contraintes didactiques auxquelles le savoir est soumis dans le cadre scolaire, 2) d'assujettir l'enquête historique à ces contraintes de façon à extraire les informations historiques à réorganiser, 3) de faire en sorte que ces informations prennent place dans le système didactique pour favoriser l’acquisition du savoir visé, cette dernière étape nécessitant d’assumer le fait que les informations se présentent sous une forme dissemblable à celle prise au sein de la sphère historique. (de Hosson, 2011, p. 33)

Celle-ci y définit une reconstruction didactique comme « une séquence d'enseignement conçue sur la base d'informations historiques explicites et se donnant pour but l'apprentissage d'un concept ou d'une loi physique » (de Hosson, 2011, p. 34)

Bosdeveix (2016, p.52-55) décrit trois catégories :

-l'histoire des sciences comme moyen d'éclairer les difficultés des apprenants en lien avec l'analyse épistémologique

-l'histoire des sciences comme source de problèmes féconds permettant d'élaborer un parcours d'apprentissage, en lien avec l'accès à la profondeur des concepts

-l'histoire des sciences comme approche de la nature de la science

Dans ma thèse, j'utilise ces trois catégories. La première à travers l'analyse historico-épistémologique et son utilisation.

1.1.1 Observer des difficultés liées à l'épistémologie

Comme le synthétise déjà Bosdeveix (2016, p.52), l'étude historique permettrait de mieux comprendre les savoirs à enseigner. Il s'agirait d'y puiser une aide pour prendre la mesure de la « résistance à long terme de certaines idées » et ne pas « sous-estimer les difficultés posées par l'apprentissage de ces concepts par les élèves » (Saltiel et Viennot, 1983, p.214 ; traduit par Bosdeveix, 2016, p.52).

Plusieurs ont mis en garde contre le récapitulationnisme consistant à assimiler les étapes de l'histoire et le développement de la pensée de l'élève (Gohau, 1995, p.23 ; Artigue, 1990) ; Chevallard 1985, p.47 ; Raichvarg, 1987). Les avantages de l'approche épistémologique ont été cités par plusieurs auteurs, comme Astolfi et Peterfalvi (1997), Orange (2003), Crépin-Obert (2011), Bosdeveix (2016), tout en prenant garde à l'effet récapitulationniste.

J'ai déjà présenté ma démarche : je ne cherche pas à comparer les sphères historique et didactique, à assimiler les étapes de l'histoire au développement de la pensée.

Dans un certain sens je ne cherche pas non plus directement des obstacles épistémologiques : j'ai cherché à identifier des observables dans les manuels scolaires, grâce aux textes anciens, qui témoignent probablement de la présence d'obstacles épistémologiques. Je vais maintenant m'intéresser à la présence (ou non), dans les raisonnements d'élèves, de traces de ces observables, et à la façon dont le texte historique agit (ou non) sur eux.

1.1.2 Donner accès à la profondeur des concepts

Dans sa thèse, Sophie Canac utilise l'histoire pour penser un travail sur le langage de la chimie (noms, formules, symboles, équations chimiques). Elle explique dans sa thèse que le nom scientifique, en opposition au nom commun, ne semble pas être un outil pertinent utilisé par les élèves pour classer les espèces chimiques. Ils ont du mal à décoder une formule chimique en dehors du contexte de l'équation et ne les comprennent pas dans ce contexte. Les élèves font une interprétation des noms et des formules chimiques majoritairement en termes d'atomes et de molécules (aspect microscopique) et très peu en termes d'espèces chimiques (aspect macroscopique). Face aux difficultés des élèves pour donner du sens aux formules, Sophie Canac propose une reconstruction didactique au sens de de Hosson (2011). A partir de controverses historiques, elle élabore des outils didactiques qui doivent permettre aux élèves d'identifier les raisons qui ont permis l'élaboration des formules chimiques. Dans le cadre de l'utilisation de la controverse, elle a une réflexion poussée sur la transposition historique de la controverse.

Bosdeveix (2016, p53) fait sur ce point un rapprochement entre la vision de Canguilhem (1979, p.8) et celle de Fabre (2010, p.161). Canguilhem argumente qu'il faut s'intéresser moins aux résultats de l'histoire des sciences « qu'à la façon dont les problèmes, même non résolus, ont été posés », aux hypothèses.

> La genèse des hypothèses doit donc être privilégiée par rapport au recensement des observations. (Canguilhem, 1979, p. 8, cité par Bosdeveix, 2016, p.53)

Cette vision se rapproche d'ailleurs de la façon actuelle de faire de l'histoire des sciences du fait de l'importance donnée à la contextualisation. Fabre considère que l'enseignement doit permettre de situer les savoirs dans leur contexte d'origine au sein des controverses qui leur « ont donné naissance ».

> Ensuite, pour qu'une théorie soit comprise par les élèves, il faut leur permettre d'exprimer les objections qui leur viennent à l'esprit. La science est contre intuitive, elle s'oppose à nos préjugés, au sens commun » (Fabre, 2010,p. 161, cité par Bosdeveix, 2016, p.53)

Ainsi, dans sa thèse, Bosdeveix (2016, p.53) a cherché à identifier « des problèmes auxquels se sont confrontés les systématiciens en construisant leur classification ».

> Cette analyse historique devrait permettre d'en extraire des problèmes féconds à soumettre aux étudiants dans le but de les aider à saisir toute la complexité et la profondeur du concept de végétal.

Cette approche permet un compromis entre l'idée de donner accès à la diversité de pensée historique et sa présentation devant les élèves. En effet ici il s'agit bien de conserver une forme de complexité, nécessaire à l'exposition de la diversité, pour pouvoir, plutôt que de simplifier, donner accès à la profondeur du concept. L'élaboration qui a mené à travers un long processus historique, à une négociation donc la science actuelle est le fruit, est ici décortiquée sur l'une de ses parties. Cet accès à la complexité est permis dans ce cas, par la lecture de controverses et de sources primaires. La négociation, liée à la possibilité pour les élèves de comprendre et avoir accès à cette complexité, se fait en lien avec la façon de présenter les sources primaires aux étudiants ou élèves, et avec le choix du niveau.

Je vais aussi chercher à donner accès, avec cette expérimentation, à une forme de complexité, liée à la diversité. Je me positionne également dans un travail sur la profondeur des concepts. La perspective est descriptive : je cherche à connaître certains effets de la rencontre avec d'autres approches des concepts, sur les élèves, sans *a priori* sur le fait que la rencontre soit forcément fructueuse. Là aussi, la façon de donner accès à la complexité, donne lieu à une réflexion sur la façon de présenter les sources primaires, ainsi qu'à un choix de niveau des élèves. Cette négociation devra se faire dans le cas présent, avec des contraintes liées à la discipline historique.

De plus, la présentation aux étudiants de controverses, explicite en partie auprès d'eux l'existence de plusieurs points de vue sur les concepts, ce n'est pas le cas dans la source ancienne que j'ai choisie. J'essayerai de détailler quelles sont les conséquences de ce point.

1.1.3 Travailler sur la nature des sciences

De Hosson et Schneeberger (2011, p.6) citent trois formes d'emploi de l'histoire pour travailler sur la vision que les élèves ont de la science (ou NoS : Nature of Science) : faire vivre aux élèves une controverse historique, reproduire en classe des expériences historiques, placer les élèves en situation d'explorer la diversité et l'adéquation des modèles avec les données empiriques.

> Plusieurs études comparatives ont ainsi montré que la vision que les élèves ont de la science se trouve modifiée lorsque l'enseignement s'ouvre à l'histoire des sciences (Allchin, 1999 ; Irwin, 2000 ; Höttecke, Henke, et Riess, 2012). Il peut s'agir, selon les cas, de faire vivre aux élèves une controverse historique en analysant la nature des arguments en jeu, en présentant les acteurs, les liens entre ces acteurs, leurs outils d'échange (Albe, 2009 ; Maurines et Beaufils, 2011), de reproduire en classe des expériences historiques (Riess, 1995), de placer les élèves en situation d'explorer la diversité et l'adéquation des modèles avec les données empiriques (Laugier et Dumont, 2000) » (de Hosson et Schneeberger, 2011, p. 6).

Bosdeveix (2016, p.54) rappelle que ce thème est ancien et a donné lieu à une littérature importante.

> Des auteurs comme Norman Lederman (2007) et Gürol Irzik et Robert Nola (2014) expliquent en effet que la volonté d'élargir l'enseignement scientifique à la façon dont les savoirs scientifiques se construisent date de plus de cent ans. Le thème « nature de la science » (NoS) donne lieu à une volumineuse littérature en didactique des sciences au plan international depuis le début des années 1990. Lederman (2006) définit la nature de la science comme les fondements épistémologiques de l'activité scientifique et des savoirs scientifiques qui en résultent. De nombreux auteurs se sont intéressés à l'effet de l'histoire des sciences sur l'image de la nature de la science d'élèves ou d'étudiants. L'ouvrage de revue (International handbook of research in history, philosophy and science teaching) piloté par Michael R. Matthews (2014) comprend plusieurs chapitres récents discutant des relations entre histoire des sciences et NoS.

Mon objectif n'est pas d'améliorer l'image de la nature de la science par une séquence explicitement construite en ce sens. En revanche, je chercherai à caractériser des observables dans le discours des élèves, afin de témoigner de la présence éventuelle d'une influence positive ou négative de la séance d'histoire « à la manière de l'historien » sur la vision de la science mathématique et historique qu'ont les élèves. Il est envisageable que la réflexion que les élèves conduiront, relativement aux concepts mathématiques, soit de nature à modifier la perception qu'ils ont de la science.

En conclusion, je me placerai dans une position d'observateur, la plus neutre possible. Je chercherai à évaluer si les observables qui ont été mis en évidence dans les manuels scolaires et qui témoignent probablement d'obstacles épistémologiques, ont laissé des traces dans les raisonnements d'élèves. J'essayerai de caractériser la présence éventuelle des effets de la rencontre avec une autre façon d'approcher les concepts mathématiques, sur les conceptions des élèves.

Je ne travaillerai pas directement sur la nature de la science mais je chercherai à caractériser, dans le discours des élèves, certains des effets de la rencontre avec une séance d'histoire des sciences compatible avec les objectifs d'un historien des sciences. Je me base sur l'effet hypothétique que la séance pourrait avoir sur les concepts d'une part, comme sur la présentation de faits historiques et la mise en situation d'investigation, d'autre part.

Du point de vue de la transposition historique, les aspects « diversité » (avec des effets possibles sur les concepts) et « investigation » (avec des effets possibles sur le point de vue des élèves sur la nature de la science historique) sont ceux qui ont le plus compté aux yeux de l'historienne des sciences dans l'implémentation de la séquence. Je les considère donc ici comme les caractéristiques propres à la présence d'une manière de faire de l'histoire en classe qui soit compatible avec les nouvelles tendances de la recherche en histoire des sciences ; ce que je cherche précisément à observer[228].

Des aspects de didactique de l'histoire des sciences ont été soulevés par Guedj, Laube et Savaton (2007) qui ont entamé des réflexions sur le type d'enseignement scolaire de l'histoire des sciences et techniques, les conditions de son enseignement, la formation des enseignants.

> Nous avons cherché à montrer ici que l'utilisation d'outils didactiques à caractère historique et épistémologique dans la classe, en réponse aux injonctions des programmes officiels de l'enseignement scientifique, pose des questions spécifiques de recherche qui sont de l'ordre d'une didactique de l'EHST puisqu'ils se traduisent par la construction implicite ou explicite de connaissances en EHST chez l'élève. Il s'agit donc d'interroger les objectifs liés à l'usage de ces outils didactiques ainsi que les rapports des enseignants et des élèves à un champ de savoirs de référence constitué au sein d'une discipline universitaire non scolaire. (Guedj, Laube et Savaton, 2007, p.11)

Proust (2012) présente des éléments de réflexion pour aller vers la didactique de l'histoire des mathématiques. Mon travail présentant des conséquences, liées à la volonté d'observer les effets d'une séance « à la manière de l'historien », il me faudra proposer un positionnement méthodologique lié à ces enjeux de transposition de l'histoire des sciences.

Je passe maintenant aux formes d'utilisation de l'histoire en classe.

1.1.4 Utilisation de l'histoire en classe

Parmi les expériences en classe qui m'ont influencée, il y a des travaux de recherche et des travaux liés à des groupes IREM ou à de la formation d'enseignants.

J'ai eu la chance d'être accueillie à Vienne par Marc Troudet, de l'IREM de Grenoble (groupe « géométrie pratique avec des instruments de mesure anciens »). Son travail propose un compromis qui me paraît très intéressant entre les enjeux historiques qu'il connaît bien par sa formation, et les enjeux d'enseignements qu'il connaît également par son métier. En effet, il présente par exemple des illustrations d'époque montrant le fonctionnement d'un instrument ancien pour mesurer des distances inaccessibles[229]. Son travail permet de présenter une science « sans savant », ce qui évite à mon avis certains écueils liés à l'idée que la science n'appartient qu'aux génies, qui risque de circuler. Certains des instruments présentés sont d'une grande beauté, ce qui pourrait participer à la valorisation du travail dans des contextes qui ne sont pas forcément uniquement ceux de « savants ». De même, l'illustration et la mise en action des élèves permettent une forme de mise en contexte. En effet, l'élève doit explicitement travailler avec les outils d'époque et l'accès à l'idée qu'il y a une forme d'ingéniosité, dans un contexte précis, n'est donc pas très loin. C'est peut-être un pas intéressant vers la relativisation de l'idée de progrès linéaire ; même s'il faut nuancer, l'élève pouvant toujours arriver à la conclusion que c'était bien compliqué. Malgré tout, le plaisir des élèves que j'ai pu observer, qui peut être lié à une forme de constat d'esthétisme de l'outil, et/ou de plaisir de pouvoir déduire les mesures inacessibles « par soi-même » participe peut-être à la conclusion que ces instruments ont des aspects positifs et ingénieux. Il faudrait bien sûr étudier ces faits expérimentalement. Le mémoire professionnel d'Eric Plessz (2018) que

[228] Théoriquement, il faudrait pouvoir caractériser le savoir de référence à enseigner pour une majorité d'historiens à travers l'étude d'ouvrages de référence, par exemple.

[229] Voir aussi l'ouvrage collectif dirigé par Hébert (2004), et le travail en cours d'Anne Boulais.

j'ai dirigé dans le cadre de son année de stage à l'ESPE s'intéresse aussi à la question des instruments comme compromis[230] dans la présentation de séances d'histoire des sciences.

J'ai également eu la chance d'être invitée par Alice Morales, du groupe IREM de Grenoble sur la « Mésopotamie ». Certains de leurs choix diffèrent des miens : en particulier le caractère flottant du système SP n'est pas introduit aux élèves, ce qui donne une impression différente de son utilité. Cela dit, c'est parfaitement légitime, puisque j'ai mentionné qu'il existe dans la littérature, des recherches en histoire qui ne prennent pas en compte cet aspect « flottant » (voir 2.2, p. 48.). Ce m'intéresse particulièrement dans leur travail, c'est la collaboration très forte qui avait été engagée avec les professeurs d'histoire, qui participaient aux séances ainsi qu'au groupe IREM. L'enseignante en mathématiques était également experte sur le sujet de la Mésopotamie, par goût personnel. De ce fait, les séances étaient conçues avec beaucoup de finesse du point de vue de l'histoire. Ainsi les élèves étaient accompagnés dans leurs découvertes scientifiques par une découverte qui était également historique, artistique et culturelle. Il est possible d'imaginer que cet accompagnement ait eu un effet positif sur les aspects liés au regard posé par les élèves sur la science ancienne elle-même. Comme le contexte historique est donné initialement aux élèves par le programme d'histoire en sixième, il est évident qu'il aura des conséquences sur les séances d'histoire des mathématiques. Grâce à cette expérience du groupe IREM, deux questions supplémentaires se posent :

-dans quelle mesure le travail d'histoire des sciences peut-il avoir un effet sur les aspects nature des sciences, si un travail historique n'est pas mené, ou s'il s'appuie sur les quelques séances programmées classiquement par l'enseignant ?

-des séances d'histoire suffiraient-elles pour travailler sur ces aspects liés à la nature des sciences, sans que les contenus scientifiques n'aient à être abordés en profondeur ? Ce dernier point est traité par Maurines et Beaufils (2011). Je passe maintenant à un autre équilibre que j'ai rencontré.

L'option « histoire des sciences » initiée par Matthieu Husson au lycée de Levallois-Perret propose un atelier d'histoire des sciences en seconde. Les enseignants (SVT, physique, mathématiques) font eux-mêmes leur cours et constituent leur bibliographie, selon leur envie, leur curiosité et le hasard des trouvailles. De ce fait, il s'ensuit forcément parfois des discours sur l'histoire qui peuvent être liés à une forme d'historiographie qui ne correspond plus aux critères actuels visant à favoriser une image plus complexe du progrès, de la nature des sciences ou du caractère non uniquement occidental de la science.

Mais ce qui est important est que le respect des envies des enseignants permet le partage d'une grande curiosité. Ce partage de curiosité a été discuté par Eric Plessz dans son mémoire professionnel. Il ne faut pas sous-estimer à mon avis cet aspect, qui pourrait conduire les élèves à avoir envie de continuer à se renseigner plus précisément, ou à avoir une vision particulière des sciences. Des études plus poussées sur ces points seraient d'un grand intérêt et permettraient peut-être de rejoindre les intérêts des enseignants[231].

La question du préjudice réel ou non d'une histoire des sciences non actualisée est en fait extrêmement complexe à traiter, et des niveaux pourraient être établis. Des précautions orales,

---

[230] L'absence d'un savant/génie permet par exemple, d'éviter le biais d'une vision inaccessible des sciences.

[231] Je pense en effet qu'il faut être prudent. La séance Thalès classique au collège est liée à une forme de colonialisme, voir http://irem.univ-rennes1.fr/histoireencarts. Traitée telle quelle, il y a probablement plus d'effets négatifs que positifs sur la vision qu'aura l'élève de la société. Pourtant, il ne faut pas sous-estimer l'effet (à étudier) de ce type de rapprochements lettres-sciences sur l'élève. Je pense que si la relation est à réinventer, certes, il est important de ne pas la sous-estimer, étant donné les rapports fréquents qu'en font les enseignants sur le terrain.

par exemple, pourraient être envisagées[232]. De plus, cette technique d'élaboration des cours permet à l'option histoire des sciences d'exister au lycée : les aspects pratiques étant facilités pour les enseignants, il ne leur est pas *impossible* de faire des séances d'histoire ; ce qui serait rendu très difficile par le fait de leur demander de trouver des sources secondaires correspondant aux critères actuels. La question des ressources mises à disposition des enseignants est plus que jamais d'actualité dans ce contexte, même si elle est à croiser avec l'aspect formatif sur les précautions liées à l'utilisation de l'histoire. Sur ce point, des chercheurs comme Renaud Chorlay et Cécile de Hosson font un travail important, en formation, dans le cadre par exemple de *la Main à la Pâte.*

D'autre part, cette option histoire des sciences de Matthieu Husson est mise en relation avec les interventions régulières de chercheurs en histoire des sciences en classe, ainsi qu'avec le travail documentaire, fait en coopération avec la documentaliste (Bernard, Brechenmacher et Husson, 2014). Ce travail des élèves permet une initiation critique aux sources. Il propose par exemple de prendre connaissance par un jeu de piste, d'une dizaine de versions de photographies des *Eléments d'Euclide*, certaines non-occidentales. Les élèves sont en groupe, et chaque groupe cherche quelle est la source à partir de la photographie. Tous se rendent compte qu'ils ont une version des *Eléments*. Ensuite, Matthieu Husson propose une institutionnalisation qui montre que le savoir « grec » est international. Ainsi, la prise de recul par rapport au discours sur l'histoire des sciences est permise en parallèle, sans bloquer les collègues. Cet attachement à la collaboration est théorisé par Alain Bernard (2016) dans le cadre de son groupe IREM. Il s'attache à penser la relation avec les enseignants tout autant que le travail de diffusion de l'histoire.

Je passe maintenant aux travaux d'expérimentation en classe utilisant l'histoire des sciences. Chorlay (2018) propose une expérimentation utilisant l'histoire pour donner accès à un autre algorithme de division (en l'occurrence la division par 2 chez Al-Khwarizmi) aux élèves, non connu de ceux-ci. Il vise à revenir sur la justification de l'algorithme, en utilisant aussi un approfondissement sur le sens de la retenue. Il obtient des traces de raisonnement montrant que des élèves arrivent bien à justifier ce nouvel algorithme. Il détaille des niveaux dans la notion de « justification mathématique », pour permettre d'exprimer ces observations. De plus il permet aussi une réflexion sur le travail d'histoire dans la formation d'enseignant, puisqu'il garde trace des discussions avec ceux-ci, en amont. Une parution récente de la CII (histoire des mathématiques au cycle 3, 2018) traite d'expérimentations utilisant l'histoire au cycle 3.

Suite à leur reconstitution historique, Décamp et Hosson (2012) amènent à une présentation différente de la source, puisque la source historique n'est pas forcément visible en classe ou en formation[233]. Le fait de faire le travail d'histoire en amont a permis de repenser la vision des concepts. De plus, du point de vue strictement historique, il permet d'éviter l'écueil d'un discours problématique sur Eratosthène.

1.2 Choix de l'approche historique et expérimentale

[232] L'utilisation de « c'est plus compliqué » peut permettre peut-être, une forme de compromis. De même, certaines situations peuvent être évitées. Le travail réalisé par Décamp et de Hosson (2012) permet de bénéficier du travail historique sans préjudice colonialiste par exemple.

[233] Du moins, telle que je l'ai vue présentée en formation à *la Main à la Pâte*.

Pour s'intéresser à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe dans une perspective de recherche, il semble naturel de se tourner vers l'expérimentation. Il est évident que la réalité est plus complexe que ce qui peut être observé explicitement, dans les traces écrites et les enregistrements : les historiens et didacticiens travaillent sur ces difficultés au quotidien.

> La recherche en didactique des mathématiques s'appuie sur une variété de méthodes complémentaires. La construction et l'expérimentation de situations didactiques et l'observation de leurs effets dans la classe sont indispensables pour cerner les faits didactiques dans toute leur complexité. (Vergnaud et al., 1983, p.27)

Nous avons choisi de fonctionner avec des entretiens (interviews) semi-dirigés, afin d'ouvrir la porte à des remarques spontanées éventuelles. Les traces écrites correspondant à la réponse à un exercice de la séance à analyser (un TD sous forme de questions) ont permis d'avoir des informations complémentaires[234]. Je vois cette expérimentation comme une première étape sur laquelle construire éventuellement plus tard, des situations planifiées plus systématiques.

> Réciproquement d'ailleurs, l'expérimentation didactique fait surgir des phénomènes intéressants sur lesquels il est parfois possible de conduire ensuite des expériences planifiées, plus systématiques et plus rigoureuses du point de vue du contrôle de certaines variables de situations, que celles qu'on peut conduire avec toute une classe. Les épreuves individuelles et notamment les entretiens individuels apportent ainsi une information indispensable. (Vergnaud et al., 1983, p.27)

Comme le soulignent Vergnaud et al. (1983, p.27) s'appuyer sur la « connaissance préalable de la difficulté relative de certains problèmes et sur une description fiable des conduites des élèves face à ces problèmes », ne peut qu'améliorer l'observation et l'expérimentation. Dans mon cadre, il était difficile de connaître précisément les difficultés qu'allaient soulever des activités inédites dont une partie était créée pour l'occasion : c'est une difficulté qui concerne d'ailleurs souvent les expérimentations liées à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, qui sont le plus souvent « originales ».

Nicolas Décamp, Christine Proust et moi visions donc simultanément cette connaissance des difficultés d'élèves et l'étude des effets de nos choix. Je préciserai quels choix relèvent de l'historien (construction d'une séance d'histoire des sciences avec des objectifs de didactique de l'histoire) et quels choix relèvent de l'aspect expérimental (besoin de réaliser de bonnes conditions d'observation).

La mise en place des séances implique la didactique des mathématiques, la didactique de l'histoire et la pédagogie en général. C'est précisément pour obtenir des réponses sur l'effet de ces choix que j'ai procédé à l'expérimentation qui est rapportée ci-après. Je me place donc dans une étape préliminaire, qui consiste à mieux connaître les effets des contraintes historiques et des contraintes liées au contexte, d'une séance d'histoire des sciences ; avant même d'imaginer une utilisation ultérieure concrète dans l'enseignement. Cette étape est nécessaire à la construction d'expérimentations qui pourront viser à terme l'élaboration de séquences utilisant l'histoire des mathématiques anciennes ou l'histoire pour elle-même. Je n'ai pas non plus étudié la phase qui consisterait en l'utilisation de l'histoire comme milieu et de ses effets hypothétiques pour clarifier les notions mathématiques actuelles. J'ai seulement essayé de documenter si de tels effets existent, ce qu'ils sont et s'ils affectent chaque élève de

---

[234] Les séances ont aussi été enregistrées au moyen de dictaphones. Ce résultat n'a pas encore été analysé. Du point de vue méthodologique il sera intéressant de confronter les résultats des entretiens à ceux-ci, plus spontanés.

la même façon ; s'il est possible de s'appuyer sur de tels effets pour construire d'hypothétiques prochaines étapes.

Je note tout de même que la séquence et certaines séances peuvent être découpées en séances d'introduction aux mathématiques cunéiformes et qu'une partie d'entre elles (décoder une table de multiplication, écrire sur l'argile, travailler avec un abaque), construites au préalable par Cécile Michel, Brigitte Lion et/ou C.Proust (selon les séances), ont été testées sur plusieurs niveaux scolaires. L'utilisation pratique n'est donc tout de même pas trop éloignée de ma démarche.

Les différentes questions abordées au cours des séances d'histoire et des entretiens sont loin d'épuiser tous les aspects possibles de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, loin d'épuiser également tous les aspects possibles d'un travail sur l'aire ou les grandeurs. Elles portent principalement sur :

-l'utilisation d'un texte historique pour approfondir et questionner un algorithme qui semble limpide (calcul de l'aire du carré)

-l'équilibre entre nombres et grandeurs mesurées en géométrie

-le sens donné à la mesure

Je passe maintenant aux aspects concrets tels que le choix du niveau. J'ai choisi d'utiliser l'un de ces textes pour voir s'il pouvait permettre de soulever des questions nouvelles autour d'un algorithme devenu automatique et ressenti comme facile en classe de seconde. Pour mieux cerner l'effet du texte, j'ai mené des entretiens avec deux classes de seconde (15-16 ans) du même lycée à Levallois-Perret et de niveau mathématique similaire ; le groupe témoin n'ayant pas fait d'histoire des mathématiques en classe.

Le groupe test de l'expérience est composé de 35 élèves de seconde (enseignement secondaire, 15-16 ans) pris dans un lycée de la banlieue de Paris. J'ai constitué des sous-groupes dans cette classe (par affinité). Chaque groupe a été entendu[235].

Pour la classe témoin sans histoire des sciences : 20 élèves ont été entendus. Cinq sous-groupes ont été constitués par affinité. Ils n'ont pas eu de séances d'option découverte « histoire des sciences » et ne me connaissaient pas avant les entretiens.

Bien sûr, chaque individu est confronté à un avis sur l'histoire des sciences au cours de sa scolarité ou de sa vie sociale, ainsi qu'à des cours d'histoire sur la Mésopotamie. Il n'est pas possible de connaître précisément l'effet de ces facteurs sur les résultats. La classe témoin n'est pas un échantillon « neutre ». Cependant, elle peut représenter la relation qu'ont les élèves du cursus classique en ce qui concerne le point de vue de la société sur les sciences et leur histoire, notamment dans les distinctions éventuelles qui apparaîtraient avec le groupe test.

1.2.1 Hypothèses, choix méthodologiques et précautions

L'expérimentation se place dans le cadre d'une comparaison entre groupe test et groupe témoin. Compte-tenu des faibles effectifs de cette étude, elle est à rapprocher d'une étude de cas. En ce sens, je me baserai à la fois sur :

-la comparaison chiffrée des réponses des deux groupes[236]

[235] Un seul groupe n'est pas retenu ici pour l'analyse des résultats parce que je l'ai encadré afin d'avoir une idée précise de ce qui se passait pendant les séances.

-certains extraits des discours d'élèves.

Cependant, étant donné la taille de mon échantillon, les chiffres avancés n'ont pas un caractère général. Il s'agit seulement de pouvoir générer des hypothèses par la comparaison des groupes, qui pourraient être utilisées par la recherche future sur l'utilisation de l'histoire des sciences, éventuellement sur de plus grands échantillons.

J'ai choisi de ne pas interroger le groupe test avant d'assister aux séances d'histoire, car ils auraient pu chercher à se conformer à notre contrat didactique (Mason et Johnston-Wilder 2004, Chapitre III).

Je rappelle que les principales questions de recherche sont les suivantes : est-il possible pour des séances d'histoire des sciences, présentées avec des objectifs propres à la discipline historique, d'avoir un effet sur les questions mathématiques des élèves, du point de vue conceptuel ? Est-ce que ces séances ont aussi un effet du type « nature de la science » ?

Est-il possible pour les sessions d'histoire de constituer une forme de « milieu a-didactique[237]» favorable (Brousseau 1986, p.86) pour déstabiliser le système et réenclencher un questionnement sur des notions supposées stables, à réinvestir ensuite par les professeurs de mathématiques[238]?

Quelles sont les conditions pour que le système mathématique ancien puisse affecter le nôtre, et qu'ils communiquent, tout en préservant les spécificités historiques (la diversité)?

L'analyse de manuels scolaires a généré un certain nombre d'attendus dans les difficultés potentielles des élèves (voir Tableau 5-3, p.254). En particulier, des difficultés supposées sont liées à la conceptualisation de l'unité de mesure, au remplacement de l'algorithme additif par un algorithme multiplicatif (du fait d'une impossibilité à concilier conceptuellement les deux) et enfin à la création de conceptualisation erronées.

Ces attendus seront utilisés de deux façons :

-d'une part, ils seront vérifiés dans la partie mathématique de l'entretien, notamment sur le groupe témoin

-d'autre part, l'hypothèse est que l'algorithme lié à la tablette, par sa proximité avec le nôtre (algorithme multiplicatif de calcul d'aire du carré lié à la formule), pourrait éventuellement générer des questions spontanées en lien précisément avec ces difficultés (voir l'analyse *a priori :* 2 p.274). C'est-à-dire que la comparaison naturelle des algorithmes, très similaires, va constituer un terreau pour l'auto-introspection des élèves sur des points qui devraient leur paraître flous, terreau dont il sera peut-être possible de trouver des traces dans les propos des élèves.

Toutes les séances étaient présentées aux élèves par l'historienne des mathématiques cunéiformes, Christine Proust. Le choix a été fait de travailler directement avec un chercheur en histoire, pour supprimer la variable de « transposition de l'histoire par un non professionnel de l'histoire ». La conception des séances a été faite avec elle pour bien comprendre les éléments qui tiennent à cœur au chercheur en histoire des sciences dans la transmission de cette « discipline nouvelle ». Il faut noter aussi qu'être chercheur en histoire

[236] Je donne les résultats généraux sur les ensembles de classe en pourcentages, pour faciliter la comparaison, puisque les effectifs des deux groupes diffèrent.

[237] Relative, puisque des interactions étaient inévitables, je détaillerai pourquoi. Voici comment Sensevy (2001, p.202-224) caractérise une situation a-didactique idéale : Dans les situations a-didactiques, les interactions des élèves avec le milieu sont supposées suffisamment prégnantes et adéquates pour qu'ils puissent construire des connaissances, formuler des stratégies d'action, valider des savoirs en utilisant les rétroactions de ces milieux sans que leur activité ne soient orientée par la nécessité de satisfaire aux intentions supposées du professeur.

[238] J'ai détaillé la notion de milieu, voir 2.3, p.44

ne signifie pas être professeur d'histoire, et qu'il faudrait analyser si cette distinction a un poids dans la présentation et la conception des séances.

Il faudra, dans l'analyse de la séance 4, prendre en compte le fait que les séances de cunéiforme qui ont précédé et les conditions liées à l'option découverte ainsi que le cadre général « détendu » de cette option[239].

Il faudrait par la suite, questionner la reproductibilité d'une telle expérience en d'autres milieux scolaires, d'une part, et dans un cadre « hors option » plus classique, d'autre part. Sur le long terme, il ne faudra pas perdre de vue la question de la motivation des élèves ayant de moins bons résultats en mathématiques. Pour la présente analyse, je me demanderai seulement, lors de l'analyse des résultats, si des disparités peuvent être détectées[240].

1.2.2 Choix du lycée et de l'option

Le choix de présentation de la tablette cunéiforme imposait un travail préalable sur les nombres cunéiformes et le système SP. Pour introduire les tables métrologiques (voir 2.2, p. 48) il nous fallait également un temps de préparation avec les élèves. Présenter la diversité d'un système de pensée mathématique peut donc prendre du temps.

La proposition de Matthieu Husson de réaliser l'expérimentation dans le cadre de son option « histoire des sciences » en seconde nous a paru, à Christine Proust, Nicolas Décamp et moi-même, une bonne opportunité : cela nous permettait de conserver les objectifs des historiens des sciences, l'entrée dans le système ancien nécessitant du temps. Dans le cas présent, il fallait en effet appréhender le système numérique et ses possibilités ; travailler sur le système métrologique, avant d'introduire l'aire du carré.

1.2.3 Choix du texte ancien

Choix du texte ancien : j'ai décidé de travailler l'un des textes anciens qui avaient inspiré mon travail de recherche. La tablette cunéiforme UM 29-15-192 aide particulièrement à prendre conscience des implicites de notre algorithme de calcul de l'aire du carré, puisqu'il faut « traduire » la mesure du côté en « nombre à calculer », multiplier ce nombre par lui-même et convertir le résultat en « surface » (mesure d'aire). Il est donc possible de se poser la question des éléments sur lesquels l'algorithme opère, des raisons de leur « transformation » (une mesure de longueur en entrée, une mesure d'aire en sortie) et des objets mathématiques et dimensions en jeu. Ces étapes de « traduction » nécessitaient même un outil concret : les tables métrologiques. Guidée par Nicolas Décamp, j'ai donc décidé de bâtir l'expérimentation, liée à l'objectif général[241] de l'apport potentiel de la diversité mathématique par l'histoire, autour de ce calcul particulier de l'aire du carré, en cunéiforme.

---

[239] Pour ce faire, j'ai choisi d'enregistrer les quatre séances (et ce pour chaque groupe d'élève) ainsi que les séances sur Euclide. Je n'ai pas encore traité ces informations, qu'il faudra croiser avec les résultats des réponses aux entretiens.

[240] J'ai entrepris une analyse des réponses en fonction du niveau mathématique des élèves, que je n'ai pas terminée.

[241] Cet objectif général se distingue bien sûr de ce qui est raisonnablement détectable à l'échelle où est menée l'expérience sur un petit échantillon et en un temps court.

1.2.4 Choix du niveau et d'une tablette « brute »

Pour comprendre complètement la tablette cunéiforme, des éléments complexes entrent en jeu. La multiplication en système SP, les inverses multiplicatifs (voir 2.1.3, p. 36 et p.45), le système métrologique (et les facteurs divers entre les unités de mesure), les tables métrologiques manipulant deux systèmes numériques (voir 2.2, p. 48).

Avec Christine Proust, nous avons fait le choix d'opter pour la non-simplification (relative) du texte historique. Il aurait en effet été possible de travestir légèrement la source pour ne travailler que sur l'un des aspects du texte. Par exemple, le traduire complètement et ne pas se soucier de la perte d'ordre de grandeur en système SP. Dans notre cas, cela aurait mené à ne pas se servir des tables métrologiques. C'est justement de ces outils spécifiques à l'algorithme ancien que j'ai souhaité me servir pour voir s'ils permettaient de questionner les concepts actuels.

Une possibilité aurait été de s'inspirer de ces tables de conversion (tables métrologiques) pour faire un travail n'utilisant pas l'histoire, en mathématiques. Ici, je voulais une source historique effectivement présente en classe, puisqu'il s'agit d'étudier les effets d'une séance d'histoire des sciences à la manière de l'historien sur les aspects précis liés aux caractères généraux suivants : « concepts » et « nature des sciences ». Pour préserver les aspects liés à la diversité, le choix a été fait de travailler sur la tablette cunéiforme « brute », sans transformations importantes. C'est un choix qui est fait aussi dans d'autres séances d'histoire cunéiforme que Christine Proust avait l'habitude de présenter, afin que les élèves passent eux-mêmes par la constatation des différences. Elle faisait l'hypothèse que cela leur permettrait d'entrer dans cet autre système mathématique.

La présence des calculs en base 60, le fait que l'ingéniosité du système soit liée à la connaissance des divisions par la multiplication utilisant les inverses ; la présence d'un système métrologique semi-indépendant ; nous ont conduits à choisir des élèves ayant du recul. Nicolas Décamp et moi voulions que le calcul de l'aire du carré soit stabilisé, pour pouvoir revenir sur la notion et la questionner. Le niveau de seconde nous paraissait un bon compromis pour soulever ce type d'interrogations tout en permettant la compréhension de la tablette.

La classe de seconde se situe d'ailleurs à la porte d'un retour prochain à la notion d'aire comme intégrale d'une fonction (l'aire sous la courbe), et sur un travail toujours plus important avec les unités de mesure dans les calculs, notamment en physique. Cette recherche peut être liée à l'idée de travailler avec une compréhension semi-complète, qualifiée de « niveau 3 » dans l'approche d'Airasian et al. (2013). Le but est d'observer si les activités des élèves autour des textes cunéiformes qui leur sont présentés peuvent permettre de créer des conditions pour réinvestir la notion d'aire du carré, supposée stable, et ouvrir la porte vers un travail, en classe de mathématiques, amenant ensuite aux niveaux de compréhension complète[242].

Je précise que les sous-groupes n'ont pas changé entre la « première séance Mésopotamie » et la fin des séances Mésopotamie menées par Christine Proust, qui ont été suivies des entretiens de ces mêmes groupes. Les élèves m'ont vue à chaque séance Mésopotamie. Cependant, je ne suis pas intervenue auprès des élèves dans ces séances.

---

[242] Niveaux 4 à 6 d'Airasian et al. (2013).

1.2.5 Implications liées au contexte

L'option découverte « histoire des sciences » en seconde imposait un certain type de travail. Premièrement, je rappelle qu'elle proposait un contexte « décontracté » dans la mesure où il s'agissait d'une option non notée, les groupes pouvant circuler librement, et traditionnellement pensée pour être agréable ; enfin, n'offrant pas de contraintes au niveau du programme. Le sujet abordé en classe pouvait être choisi librement. En revanche il s'agissait d'être le plus ludique possible et de mettre les élèves en position d'activité. Les élèves n'avaient pas de contraintes en termes de notes, mais plutôt des objectifs de fond : un TPE de fin d'année (travail de recherche), la présentation d'un atelier « mathématiques cunéiformes » pour des élèves de CM2 à la suite de la première période « histoire des mathématiques »[243]. Cette option imposait la restitution d'une partie choisie de leur travail de l'année. L'un des objectifs majeurs de cette option, pour les enseignants (outre la découverte de l'histoire des sciences), était de permettre aux élèves de seconde de faire un choix d'orientation de fin d'année (en particulier « S » - scientifique - ou « L » - littéraire -) plus « détendu », moins compartimenté et enrichi[244].

Deuxièmement, l'option découverte est gérée collectivement : principalement par le professeur de mathématiques et chercheur au CNRS en histoire des mathématiques médiévales, Matthieu Husson. La professeure d'histoire-géographie-éducation civique, Barbara Jamin est aussi très fortement impliquée. D'autres professeurs du lycée (S.V.T, physique-chimie, philosophie) sont entièrement responsables de plusieurs séances. Cette gestion collective a imposé d'une part, que nous suivions un emploi du temps précis, et d'autre part que nos séances soient directement suivies par d'autres séances d'histoire des sciences (sur le thème d'Euclide d'abord avec Matthieu Husson, puis sur l'astronomie à la Renaissance et la naissance de la génétique). C'est un facteur important à prendre en compte puisque nous avons dû commencer nos interviews pendant le début des séances « Euclide ». Il est difficile de savoir comment ces dernières ont influencé le regard des élèves sur les mathématiques cunéiformes. Notons que l'année de notre expérimentation, le professeur de mathématiques ayant quitté le lycée, le nouveau professeur « remplaçant non titulaire » qui venait d'arriver n'avait pas souhaité être présent aux séances. C'est un facteur important à prendre en compte puisqu'il était habituellement donné un rôle important au professeur de mathématiques dans l'assimilation du travail fait dans cette option découverte (reprise des séances en cours de mathématiques).

1.2.6 Organisation des séances « Mésopotamie » et expérimentation

L'expérimentation porte sur la quatrième séance d'activités sur la Mésopotamie, d'une durée de deux heures, sur un total de huit heures consacrées à la Mésopotamie. Elle consistait en l'étude de la tablette cunéiforme « aire du carré ». Les trois premières séances ont été construites avec Christine Proust à la manière de l'historien, en partie pour remplir notre contrat de présence à cette option. Nous les avons utilisées aussi pour permettre la compréhension des notions amenées dans la dernière séance qui est analysée ici dans le cadre de l'expérimentation.

---

[243] Précisons que l'histoire des mathématiques a été suivie de séances d'histoire de la physique et de la S.V.T.

[244] Il nous semble intéressant d'utiliser ainsi cette option. Une réflexion philosophique ou historique sur la science ainsi qu'un travail sur la diversité des solutions scientifiques semblent permettre à la fois un recul sur la science et une approche humaniste et agréable qui pourraient permettre aux élèves se sentant « scientifiques » comme aux élèves se sentant « littéraires » de complexifier leurs points de vue.

Ainsi, les trois premières séances correspondaient à un double contrat : permettre d'une part, la connaissance de l'écriture cunéiforme des nombres, la notation en système SP (grâce à des tables de multiplication), les inverses multiplicatifs (grâce à un travail sur des tables d'inverses), et les tables métrologiques (grâce à une séquence sur celles-ci). Je présente en Annexe les contenus de ces séances. D'autre part, du fait de l'option découverte, elles devaient correspondre à une découverte de l'histoire des mathématiques cunéiformes et être « intéressantes » en elles-mêmes. Pour ce faire, Christine Proust a proposé de travailler avec de l'argile, un abaque de « pâtes et haricots » permettant de multiplier en base 60, et des traductions depuis le cunéiforme. L'élève était alors mis en position d'assyriologue-découvreur et déchiffreur.

La séance 4 sur l'aire du carré qui fait l'objet de cette expérimentation a été construite explicitement en lien avec l'analyse *a priori*, en collaboration avec Christine Proust, Nicolas Décamp et Matthieu Husson.

Il faut noter que les quatre séances de Christine Proust ont été précédées par une séance d'introduction à l'option découverte (par Matthieu Husson et Barbara Jamin) ainsi qu'une séance d'histoire de la Mésopotamie (Barbara Jamin) sur lesquelles je n'ai pas eu d'influence : c'est un élément à prendre en compte et ces séances ont été également enregistrées.

J'ai enfin enregistré les séances qui ont suivi la séance 4 (aire du carré) jusqu'à la construction et réalisation d'ateliers « découverte des mathématiques cunéiformes » par les seconde pour des élèves de CM2. Du fait du planning élaboré par les responsables de l'option découverte, qui devaient composer avec la réalité de leur programme pour cette option, des demi-groupes d'élèves et de l'école primaire, ce travail était mené en parallèle des séances de découverte « Euclide ». Je pense que ces enregistrements seront très intéressants pour le développement de la recherche future[245].

C'était aussi le créneau qui nous avait été assigné pour mener les entretiens : nous pouvions prendre l'un des groupes à part pendant une heure chaque mardi, pendant que les autres élèves construisaient leur séance pour les CM2 ou réfléchissaient aux mathématiques d'Euclide avec Matthieu Husson. J'ai joint le programme annuel de cette option (voir 3.4, p.310 et les Annexes, pour plus de commodité). Il est suivi du programme détaillé de la première période.

1.2.7 Contraintes disciplinaires et choix

Je rappelle que l'option histoire du lycée imposait un style « actif » et le plus ludique possible. De plus, des contraintes étaient liées à la transmission de la diversité.

Ces contraintes ont résulté en le choix d'une activité d'investigation, mêlée à des activités « manuelles » (argile, abaque pâtes/haricots), ainsi qu'un travail sur des sources brutes non traduites, que les élèves arriveraient eux-mêmes à décoder avec un petit dictionnaire conçu pour l'occasion, afin que les élèves s'approprient les éléments de diversité par la découverte individuelle.

Du point de vue de l'histoire, la source brute permettait, à travers l'étude de tables de multiplication issues d'une école de scribes, d'entrer dans un système mathématique différent (le système numérique SP) sans avoir besoin de « fixer » les ordres de grandeur des nombres.

[245] Ils donnent accès aux conceptions des élèves sur les mathématiques de la Mésopotamie, bien que ce soit un accès partiel (les élèves de seconde peuvent choisir de ne donner que des informations partielles aux élèves de CM2 qu'ils pourraient considérer comme trop jeunes).

Le choix de travailler avec de l'argile et un calame, l'abaque de haricots et des pâtes se rapproche du courant actuel d'archéologie expérimentale qui consiste en l'utilisation d'outils au plus près des outils utilisés à l'époque, pour permettre de faire émerger des hypothèses historiques. L'élève était mis dans les conditions de l'époque (écrire sur une tablette comme les scribes). Le travail sur l'abaque permettait à l'élève d'avoir accès à l'hypothèse de reconstitution historique d'un outil de calcul en base 60 (un abaque avec des colonnes de 6 haricots et 10 pâtes, en alternance, utilisé pour multiplier). L'aspect ludique entrait en compte également dans ces choix.

Ces choix, liés à la double approche disciplinaire, ainsi qu'à des enjeux pédagogiques, seront à prendre en compte dans l'analyse. Du point de vue historique, il s'agissait de présenter l'originalité mathématique du système, et pour cela de ne pas modifier la source brute. Mais il s'agissait aussi d'une forme de « découverte active » de la recherche en histoire.

La difficulté sera pour moi d'analyser si ces choix ont un effet sur l'interprétation des résultats du point de vue du premier questionnement : connaître l'effet du travail sur la tablette cunéiforme sur les conceptions des élèves. Par exemple, le choix de travailler une source brute a-t-il créé des étapes mathématiques qui ont rendu la séance 4 plus difficile ? Les aspects pédagogiques ont-ils donné des impressions aux élèves sur les mathématiques concernées ?

La double (ou triple) analyse en question est une difficulté qui me semble inhérente à toute expérimentation mettant en jeu l'utilisation de l'histoire des sciences, du fait de la double transposition historique et mathématique qui entre en jeu : il faudra donc s'attacher à cerner les difficultés méthodologiques et proposer des pistes de résolution.

1.2.8 Niveau des groupes

Le lycée était un lycée de niveau correspondant à la moyenne : 90% de réussite au baccalauréat en 2014, 3% de moins que la moyenne nationale.

Avec l'aide de Matthieu Husson j'ai choisi une autre classe de seconde du même lycée comme classe témoin, ce qui me permettait de ne pas changer de milieu scolaire. Deux choix étaient possibles parmi les professeurs volontaires, l'un étant une classe « internationale » de très bon niveau en mathématiques, que nous n'avons pas choisie. La seconde classe était d'un niveau moyen plus proche de notre classe « histoire des sciences », c'est donc celle qui a été sélectionnée.

Les élèves qui suivent cette option « histoire des sciences » étaient tous dans la même classe de seconde. Ils ne l'avaient pas tous choisie, certains étaient là parce qu'ils n'avaient pas eu l'option demandée. Cette option étant encore « invisible » dans le catalogue, ceux qui l'avaient prise l'avaient fait par le bouche à oreille des années précédentes, ou grâce à la journée unique de présentation, qui a lieu une fois par an.

Maintenant que j'ai présenté les conditions expérimentales, je passe à l'analyse *a priori* détaillée des effets qu'il est possible d'envisager du fait de la rencontre avec le texte ancien.

2 ANALYSE *A PRIORI*

2.1 Les effets attendus *a priori*

2.1.1 La tablette cunéiforme UM 29-15-192

Je rappelle que cette analyse *a priori* se base sur une analyse préalable (chapitre II), notamment sur l'étude de manuels scolaires de CM2 (voir 5, p.238). Cette analyse de manuels scolaires, basée sur l'analyse historico-épistémologique, a permis de relever un certain nombre d'indices donnant accès aux conceptions, qu'il est envisageable de retrouver chez les élèves de seconde lors des entretiens (dont je donnerai les étapes plus loin).

L'aspect conceptuel de l'entretien va être lié avec la possibilité ou non pour la tablette cunéiforme UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) de servir de socle à un milieu a-didactique (voir 2.3, p.49) qui inviterait les élèves à s'interroger sur l'algorithme actuel de calcul de l'aire des surfaces. Je vais ci-dessous relever quelles différences, dans l'algorithme ancien, sont susceptibles de soulever des questionnements chez les élèves. Il est aussi possible que la comparaison ne se fasse pas : auquel cas il faudra analyser les raisons de l'absence de lien fait par les élèves entre l'algorithme proposé par la tablette et l'algorithme actuel, pour le calcul de l'aire d'une surface.

Plusieurs hypothèses sont envisageables quant aux réactions des élèves. En simplifiant fortement :

-les difficultés soulevées par l'analyse de manuels ne sont pas confirmées

-les difficultés sont confirmées lors de l'entretien et la tablette permet de soulever de nouveaux questionnements chez les élèves[246]

-les difficultés sont confirmées lors de l'entretien mais la tablette ne permet pas de soulever de questionnements

-les difficultés sont confirmées lors de l'entretien, les questionnements observables existent chez les élèves mais ils ne sont pas effectivement observés dans le discours des élèves qui a été analysé

Les résultats seront probablement plus nuancés, tous les élèves suivant l'option n'appartiendront pas forcément à la même catégorie ; ou que selon les questions, un même élève pourrait appartenir à plusieurs catégories.

Etapes de l'algorithme

Je rappelle les étapes de l'algorithme :

	Tablette UM 29-15-192	**Aujourd'hui (en général)**
Entrée	2 doigts (le côté du carré)	2 cm (le « côté » ou la « longueur du côté » ou

[246] Une précaution est à ajouter ici : le fait que ces questionnements existent, s'ils sont observés, pourrait être lié directement à l'entretien, et non seulement à la séance. L'entretien a pu avoir un effet par lui-même. Les élèves ont été mis en groupes de 4-5 afin (entre autres) de pouvoir enregistrer les réactions pendant les séances, mais cet aspect n'a pas encore été analysé.

		2 le nombre d'unités de mesure d'aire sur un côté
Mise en correspondance (tablette métrologique) d'une mesure de longueur avec un nombre en système SP	Oui	Non ou « enlever l'unité de mesure »
Opérande	20	2
Multiplication	20 20 6:40	$2 \times 2 = 4$ ou $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$ ou $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$
Mise en correspondance	Oui : -ordre de grandeur attendu -sélection du cycle pertinent	Non ou « apposer une unité de mesure d'aire »

Tableau 2-1 : étapes des algorithmes de calcul d'aire

Question d'élèves envisageables

Voici les questions qu'il est envisageable que les élèves se posent spontanément, s'ils comparent naturellement ces algorithmes.

Entrée et mise en correspondance

	Tablette UM 29-15-192	Aujourd'hui (en général)
Entrée	2 doigts (le côté du carré)	2 cm (le « côté » ou la « longueur du côté » ou 2 le nombre d'unités de mesure d'aire sur un côté
Mise en correspondance	Oui	Non ou « enlever l'unité de mesure »

Pour cette étape, il est possible d'envisager :

- Le constat par les élèves de l'existence d'une étape « supplémentaire » dans la tablette : la conversion.

- Le constat de l'utilisation de nombres différents : nombres « à calculer » (système SP pour les opérations) et « à mesurer » (pour les valeurs numériques de grandeurs). « 2 doigts ».

Voici une question qu'il est possible que les élèves se posent : à quoi correspond, actuellement, le fait d'associer « 2 cm » à « 2 » (absence de « conversion » ou « conversion facile ») ?

C'est-à-dire :

-à quoi correspond le fait d'utiliser le « même » nombre (pour la valeur numérique de longueur et le calcul) ?

-> comment cela est-il possible ?

- Si l'élève se souvient de l'existence de la grille (voir 2, p.182), il peut se demander si « 2 » correspond à un nombre de centimètres ou de carreaux

  Cette question, si elle existe, peut amener à une discussion sur le lien entre centimètres et carreaux, utilisable par l'enseignant

- Si l'élève ne se souvient pas de l'existence de la grille, il pourra faire le constat d'une difficulté à répondre à cette question

Ces questions si elles existent, peuvent amener une discussion sur le système métrique, utilisable par l'enseignant.

Multiplication

	Tablette UM 29-15-192	Aujourd'hui (en général)
Opérande	20	2
Multiplication	20 20 6:40	$2 \times 2 = 4$ ou $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$ ou $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$

Pour cette étape, il est possible d'envisager :

- Le constat par les élèves d'une multiplication qui porte sur des nombres différents de ceux issus de la mesure de longueur (valeur numérique de longueur)
- Le fait que la multiplication est en base 60, elle semble ne « rien représenter » de spécial (elle n'est pas effectuée sur les valeurs numériques de grandeur)
- Le fait que la multiplication ne donne pas la mesure d'aire

Voici une question qu'il est possible que les élèves se posent :

-qu'est-ce qu'ils multipliaient ? Et nous, qu'est-ce qu'on multiplie ?

- Si l'élève se souvient de l'existence de la grille, il peut se demander pourquoi multiplier « 2 cm » alors que l'on souhaite obtenir un nombre de carreaux
  Cette question, si elle existe, peut amener à une discussion sur le lien entre centimètres et carreaux (et le système métrique en général) utilisable par l'enseignant

- Si l'élève ne se souvient pas de l'existence de la grille, il raisonnera probablement en termes de multiplication de « centimètres ». Il pourra alors se demander « après tout, pourquoi je multiplie des centimètres » ?
  Cette question, si elle existe, peut amener à une discussion sur la grille, puis sur le système métrique.

Voici une autre question qu'il est possible que les élèves se posent :

-que représente la multiplication ?

- Si l'élève se souvient de l'existence de la grille, la multiplication représente une multiplication « nombre de carreaux sur une ligne » par « nombre de carreaux sur une colonne ».

- Si l'élève ne se souvient pas de l'existence de la grille, il aura probablement des difficultés à répondre à cette question

-voici une autre question éventuelle qui peut émerger chez les élèves : pourquoi la multiplication permet-elle de donner directement la mesure d'aire ?

- Si l'élève se souvient de l'existence de la grille, il fera le lien entre nombre de carreaux et mesure d'aire.

Si l'élève ne se souvient pas de l'existence de la grille, il aura probablement des difficultés à répondre à cette question, ce qui ne permet pas de s'assurer de la bonne compréhension des concepts sous-jacents à cette multiplication, dans la mesure où il peut aussi s'agir d'un simple moyen mnémotechnique.

L'élève pourrait aussi donner une réponse du type « $cm \times cm = cm^2$ » en utilisant l'analyse dimensionnelle (qui est une conséquence notationnelle du système métrique) comme élément de justification mathématique. L'analyse dimensionnelle qui est une justification légitime qui permet de savoir que le résultat sera dimensionnellement assimilable à une surface (qui s'exprimera dans le système métrique en m^2, cm^2 ou autre chose), pourrait être ici assimilée à une opération géométrique de construction d'un carré.

La tablette ancienne AO 6484 montre que l'assimilation de l'opération mathématique multiplication à la construction d'un carré existe dans le cadre géométrique ; ici elle serait utilisée abusivement en partie en ce qui concerne le cm^2, si son caractère « arbitraitre » (lié au choix de constitution du système métrique) n'est pas compris.

Mise en correspondance

	Tablette UM 29-15-192	Aujourd'hui (en général)
Mise en correspondance	Oui : -ordre de grandeur attendu -sélection du cycle pertinent[247]	Non ou « apposer une unité de mesure d'aire »

- Constat de l'utilisation de nombres différents : résultat de la multiplication en nombres « à calculer » (notation SP) et de nombres « à mesurer » (pour la valeur numérique d'aire).
- Constat de l'existence d'une étape de conversion dans l'algorithme ancien

Voici une question qu'il est possible que les élèves se posent :

-à quoi correspond, actuellement, le fait d'associer :
- « 4 » à « 4 cm^2 » ?
- « 2 × 2 » à « 4 cm^2 » ?
- Ou : « 2 cm × 2 cm » à 4 cm^2 ?

C'est-à-dire :

-à quoi correspond le fait d'utiliser le « même » nombre (pour la valeur numérique de d'aire et le résultat du calcul) ?
-> comment cela est-il possible ?
-à quoi correspond le fait d'associer « 2 × 2 » à une mesure d'aire ?
-à quoi correspond « cm × cm = cm^2 » ?

- Constat de la présence d'une recherche de l'ordre de grandeur, dans l'algorithme ancien

Voici une autre question qu'il est possible que les élèves se posent :

-pourquoi est-ce qu'il est facile de trouver l'unité de mesure d'aire, pourquoi le centimètre est associé au centimètre carré ?

- Cette question si elle existe, peut amener une discussion sur le système métrique, utilisable par l'enseignant.

Maintenant que j'ai explicité les questions qui peuvent se poser du fait de la rencontre avec le texte ancien, je passe aux effets possibles de la tablette sur les aspects conceptuels liés aux objets mathématiques.

Effets conceptuels possibles de la tablette cunéiforme

[247] Sur ce point, nous avons travesti l'histoire, puisque l'entrée n'existe pas dans la table métrologique.

Ces questions ont un effet potentiel sur la conception :

-du nombre. La distinction entre valeur numérique de grandeur et nombre, pose ici la question du nombre en tant que :
-« nombre de reports » (d'une unité de mesure de longueur),
-nombre en tant que quantité abstraite pouvant représenter une infinité de situations tant qu'elles sont liées à la même quantité
-et éventuellement, nombre en tant que représentant du résultat d'une addition itérée (nombre de carreaux par exemple, pour ceux qui se rappellent de la grille)

-de la multiplication. La multiplication peut représenter, dans l'algorithme ancien, quelque chose qui semble abstrait et sans lien avec la réalité géométrique. La vérité est plus complexe, mais ainsi la multiplication peut n'être perçue que comme un objet transitoire entre deux grandeurs. Dans l'algorithme actuel, s'il se révèle délié de la question géométrique par les élèves qui l'auraient oubliée, la situation est alors similaire. L'exemple ancien pousse ce raisonnement à son maximum. Ainsi la question du sens de la multiplication peut émerger.
Les élèves peuvent voir la multiplication en lien avec :
-une simple « transition » entre grandeurs de type différent
-un changement de dimension (en lien avec l'analyse dimensionnelle)
-une opération abstraite sans réalité physique
-de multiples situations dans le cas général « c × c »
Les élèves qui se souviennent de la grille peuvent ajouter ou remplacer aussi ces conceptions :
-le mesurage (report de mesure d'aire, étalon)
-l'addition itérée (de carreaux), « généralisée »

-de la mesure. La mesure peut représenter :
-pour les élèves, une simple entrée d'algorithme qui donne le nombre qui va servir d'opérande ou une sortie d'algorithme
-un report d'unité de mesure (de longueur, d'aire) en lien avec le mesurage : cette conception est potentiellement abandonnée lors de l'apprentissage de la formule (voir : manuels scolaires 5, p.238).

pour l'unité de mesure d'aire, elle peut représenter :
-un carreau
-le résultat de la multiplication « cm × cm »
-et dans le texte ancien, un étalon lié à une surface, dont l'existence est indépendante de l'unité de mesure de longueur

-de l'algorithme. L'algorithme peut représenter :
-quelque chose qui prend une mesure en entrée et rend une mesure en sortie avec une étape intermédiaire : « multiplication »
-une multiplication uniquement
-dans l'idéal, toutes les étapes, avec un parallèle géométrique possible, lié au mesurage

-de la lettre dans la formule. La lettre peut représenter :
-un côté géométrique de carré
-une mesure de longueur (valeur numérique + unité de mesure)
-une valeur numérique de longueur (nombre seul)
-un carreau

-et la lettre qui représente l'unité de mesure : « cm » ou « cm^2 » : une unité de mesure, représentable ou non géométriquement, résultat ou non d'un « produit » (pour cm^2)

D'une manière générale, toutes ces interrogations devraient aussi conduire les élèves à se demander ou se re-demander comment et pourquoi « marche » la formule.

J'ai explicité les questions qui pourraient émerger si la tablette fonctionnait efficacement comme élément principal d'un *milieu a-didactique* (relatif, avec présence ponctuelle d'un enseignant).

J'ai précisé également le fait que le professeur de mathématiques pourrait alors rebondir sur certaines questions pour donner des précisions sur le système métrique et ainsi favoriser une bonne représentation des concepts. Cette phase constituerait une forme d'institutionnalisation mathématique, qui n'a pas été mise en place dans le cadre de cette expérimentation (voir le déroulé de la séance 4, paragraphe 3.3, p.301).

Je récapitule maintenant dans un tableau les observables théoriques auxquels pourrait conduire l'expérimentation.

Observables théoriques et entretien : récapitulatif

Dans le tableau qui suit, je récapitule les questionnements spontanés qu'il est envisageable d'observer si la tablette agit effectivement efficacement, comme élément central du *milieu*, et suscitant ainsi les questions dont j'ai fait l'hypothèse. Je précise également une partie des questions du protocole de l'entretien qui ont été conçues pour favoriser la présence d'observables sur ce point.

Etape de l'algorithme ancien	**Constat**	**Questionnement spontané envisagé chez l'élève**	**Questions conçues pour favoriser l'émergence de questions spontanées**
Entrée + mise en correspondance	-étape supplémentaire dans la tablette -davantage de « nombres » utilisés	A quoi correspond le fait d'associer « 2 cm » à « 2 » (absence de conversion) ? -> Pourquoi on utilise les mêmes nombres, nous ? Comment l'absence de conversion est-elle possible ? Eventuel si présence de grille : Est-ce que « 2 » correspond à un nombre de « cm » ou de carreaux ?	Questions écrites : donnez toutes les étapes de l'algorithme (dans les deux systèmes) Question de l'entretien donnez un exemple de calcul d'aire, avec les valeurs que vous voulez Qu'est-ce que « 3 » dans ton exemple ? (si l'élève a dit $3 \times 3 = 9$ cm^2 par ex.)

Multiplication	-multiplication de « 20 » et non de « 2 », par lui-même -perte de l'ordre de grandeur, base 60 -le résultat n'est pas une mesure d'aire	Pourquoi on multiplie des « centimètres » ? Que fait/représente la multiplication ? Pourquoi la multiplication donne la mesure d'aire directement ? Eventuel si présence de grille : pourquoi multiplier « 2 cm » alors que l'on souhaite obtenir un nb. de carreaux ?	Question de l'entretien qu'est-ce que c'est que tu multiplies ? Si il y a absence de grille chez l'élève : pourquoi cm × cm = cm^2

Conversion + sortie	-étape supplémentaire -davantage de « nombres » utilisés -recherche de l'ordre de grandeur	Que veut dire -le fait d'associer 4 à « 4 cm^2 » -le fait d'associer « 2 × 2 » à une mesure d'aire « 4 cm^2 » -le fait d'associer 2 cm × 2 cm » à 4 cm^2 (pourquoi « cm × cm = cm^2 » ?) -pourquoi c'est facile d'ajouter juste « cm^2 » à la fin ? -pourquoi il n'y a pas de conversion ? Pourquoi on peut utiliser les « mêmes » nombres, nous ? -comment on choisit l'unité de mesure d'aire, pourquoi c'est toujours « unité de mesure de longueur au carré » ? Pourquoi on peut juste « ajouter » le mot « cm^2» à la fin ?	Question de l'entretien Pourquoi tu mets « cm^2 » à la fin ? + Comparaison entre le groupe témoin et le groupe test. Eventuellement, on peut attendre moins de réponses expliquant : le « cm^2 » parce que j'ai pris « cm » au début. On peut aussi attendre plus de détails dans les étapes de l'algorithme actuel. C'est quoi pour toi un cm^2? Est-ce que le 5 de 5 cm est le même que dans 5×5 ?

Tableau 2-2 : récapitulatif des observables théoriques en fonction du protocole

Observables théoriques liés aux aspects conceptuels-épistémologiques et entretien

Il est envisageable d'observer des indices, qui donneraient à penser qu'il y a eu effet sur les concepts. Je regroupe les questions précédentes, cette fois-ci du point de vue des concepts.

-le nombre.

-questions spontanées éventuelles qui pourraient émerger dans le groupe test : « pourquoi il peut y avoir plusieurs nombres ? »,
-plus de débats liés à la question « qu'est-ce qu'on multiplie » ? que dans le groupe témoin

-la multiplication.

-questions spontanées éventuelles qui pourraient émerger dans le groupe test : par exemple, « on compte des carreaux, ou on change de dimension ? » ; « on multiplie des centimètres ? le côté ? » ; « je ne vois pas le lien avec les carreaux », etc.

-plus de difficultés dans le groupe test, à répondre à la question de « qu'est-ce qu'on multiplie » et de « pourquoi on met cm^2 à la fin », plus de difficultés avec l'expression « $cm \times cm = cm^2$ » ou moins de réponses automatiques du type « cm × cm et ça fait un carreau ».

-la mesure.

-indices laissant penser que les élèves du groupe test cherchent à justifier la présence de mesure dans l'algorithme (qui n'est pas uniquement lié à la multiplication seule)
-explicitation de plus d'étapes dans l'algorithme actuel, dans le groupe test
-questions spontanées éventuelles qui pourraient émerger : « mais pourquoi on multiplie des centimètres et ça donne des centimètres carrés ? » (pourrait être la trace du besoin de chercher à retourner à l'aspect report d'étalon, mesurage)
-plus de réponses : « un carreau » à « qu'est-ce que le cm^2 » que de réponses « cm × cm »

-l'algorithme.
-capacité à donner plus d'étapes dans le groupe test
-éventuellement, remarques spontanées d'élèves essayant de lier les étapes aux étapes géométriques sur la grille

-la lettre.
-plus de débats dans le groupe test : est-ce qu'il s'agit d'un « côté » (registre des figures ?) d'une mesure de longueur ? d'un carreau ?

Dans l'analyse *a priori* j'ai détaillé les effets mathématiques attendus de la rencontre avec la tablette UM 29-15-192. Pour autant, j'ai expliqué que les séances « à la manière de l'historien » ont aussi été influencées par les points suivants du point de vue historique :

- Le constat de l'existence d'une diversité de solutions mathématiques : la rencontre avec des nombres en système SP, un système métrologique « semi-indépendant », un algorithme différent utilisant des tables métrologiques.
- La rencontre avec la Mésopotamie afin de ne pas la présenter comme « préhistorique » : l'existence d'un système de pensée mathématique cohérent, intéressant ; l'utilisation de photographies pour illustrer le propos.
- La complexification de l'approche du progrès : la rencontre avec la diversité et son intérêt, la rencontre avec un système mathématique très ancien qui fonctionne différemment.
- La rencontre avec le travail du chercheur en histoire : le travail d'investigation par l'élève pour donner du sens aux sources à disposition (tables métrologiques),•e travail de déchiffrage du cunéiforme, la visualisation des sources primaires (photographies, argile), le travail sur les outils (abaque, calame).

Je passe maintenant aux questions écrites du protocole.

2.1.2 Les questions écrites

Je détaillerai précisément l'obtention de traces écrites dans la séance 4 « aire du carré ». Les questions qui relèvent de ma démarche pour recueillir des informations qui ne sont pas liées seulement à des aspects de compréhension de la tablette, sont les suivantes :

j) A votre avis, à quoi servent les tables métrologiques ?

k) Pourriez-vous écrire exactement le même exercice avec un vocabulaire moderne ?

l) Pourriez-vous donner vos impressions et sentiments (libres) sur cet exercice ?

Il s'agissait ici de définir les questions de façon à ce qu'elles n'induisent pas de comparaison avec le système actuel, afin d'étudier quel type de comparaison était fait spontanément par l'élève, le cas échéant.

Je rappelle qu'il s'agissait d'essayer d'observer si la tablette pouvait constituer l'élément principal efficace d'un « milieu a-didactique ». En effet, l'étude de l'utilisation de la tablette et ses effets spontanés, sans avoir à institutionnaliser les comparaisons avec l'algorithme actuel, était compatible avec les contraintes historiques. Notre historienne souhaitait par respect pour ces contraintes, ne pas créer elle-même de comparaison. La comparaison est était perçue comme un outil provisoire, qu'il faut ensuite abandonner. En revanche, la comparaison spontanée par les élèves est le signe d'une entrée dans la diversité du système, que j'ai souhaité observer.

L'historienne avait donc choisi pour cette séquence Mésopotamie, de ne pas faire elle-même de comparaisons. Par exemple, pour le système SP, elle attendait qu'un élève fasse la remarque de la similarité avec les « heures et minutes », elle approuvait puis abandonnait cette remarque. La similarité est en effet partielle, et l'historienne préférait que les élèves puissent l'oublier rapidement, afin d'entrer réellement dans le système. Elle avait ainsi fait le choix de ne pas l'institutionnaliser formellement.

Le risque de la comparaison formelle serait de trop simplifier les différences, et de transformer le système ancien en système actuel modifié. Mais le choix de l'historienne de ne pas expliciter ces comparaisons ne signifie pas que les élèves n'en fassent pas. Il s'agit donc pour nous, d'étudier ces comparaisons et leurs effets.

2.2 Les entretiens et le protocole commenté

Je vais maintenant détailler le protocole des entretiens, conçu avec Nicolas Décamp. Ils ont été menés après les séances Mésopotamie pour le groupe test. Une partie des questions a été utilisée pour questionner le groupe témoin. Je fais apparaître en italique les questions qui n'ont été posées qu'au groupe test. Je donne les résultats de ces questions spécifiques (italique), en Annexe. Elles n'ont de sens que dans le groupe test puisqu'elles concernent la tablette en cunéiforme.

Les entretiens se sont déroulés en deux parties : une partie « mathématiques » qui visait d'une part à vérifier un certain nombre d'hypothèses issues de mon analyse préalable (chapitre II) sur la compréhension mathématique des élèves, et d'autre part, à pouvoir comparer les groupes (test et témoin) sur les questions évoquées ci-dessus dans l'analyse *a priori*. Cette partie « mathématiques » était aussi l'occasion de pouvoir recenser d'éventuelles questions spontanées qui émergeraient de la part des élèves du groupe témoin. J'ai évoqué ces aspects dans le tableau Tableau 2-2, p.283. De plus, le protocole pouvait donner lieu à des observables liés aux changements conceptuels hypothétiquement provoqués par la rencontre avec l'algorithme ancien. Je les ai détaillés (voir p.283).

L'idée générale des contraintes que nous nous sommes imposés dans la formulation des questions est :
-de ne pas trop laisser sous-entendre quel est le « contrat didactique »
-de ne pas induire nous-même de comparaison avec l'algorithme actuel

La partie « nature des sciences » (historique et mathématique) des entretiens, visait à obtenir des observables dans les réponses et débats entre élèves.

L'aspect semi-dirigé des entretiens avait pour but de donner lieu à des raisonnements spontanés et de leur laisser le temps d'être développés par le dialogue avec les autres élèves. Il est évident que nous n'attendions pas de ces questions un accès complet à la pensée des élèves, ni à l'effet entier des séances sur eux. Il s'agissait seulement de relever des indices de la présence d'une influence éventuelle de la séance.

D'autre part certaines questions sont volontairement ouvertes, comme « que pensez-vous de l'histoire des sciences ». Il nous a paru intéressant de les poser, afin de pouvoir comparer les groupes sur ce sujet, mais il faut là aussi prendre en compte la quasi-impossibilité d'avoir accès à la complète représentation des élèves par ce type de question, trop générales.

Les entretiens ont eu lieu par groupes de quatre élèves. Des temps de réflexion individuelle, avec possibilité d'écrire sur feuille blanche, ont été proposés avant le retour à la discussion collective, pour certaines questions.

Je passe maintenant au protocole des entretiens, commenté en détails, en accord avec les questions supposées pouvoir émerger.

Protocole commenté

Introduction

« Bonjour, merci beaucoup de bien vouloir discuter avec moi. Je vous rappelle que c'est anonyme et que personne d'autre que moi n'écoutera. On ne veut pas savoir votre niveau en maths, ni si c'est juste ou faux. Il n'y a ni bonne ni mauvaise réponse, ce qui nous intéresse c'est ce que vous en pensez. »

Questions : partie mathématique

1. Pourrais-tu me dire comment tu calcules aujourd'hui l'aire d'un carré ? (temps de réflexion individuel)

2.
   - Si l'élève a donné une formule :

Est-ce que tu sais pourquoi cette formule marche? Comment l'expliquerais-tu à quelqu'un ?

Pour ces deux premières questions, nous n'imaginons pas que les résultats seront très différents entre les groupes témoin et test. Nous attendons quelques explications de type « grille » et une majorité de difficultés à répondre, de « je ne sais pas » ou d'élèves qui donnent simplement la formule.

Nous pouvons cependant imaginer que le groupe test soulèvera peut-être plus de remarques spontanées du type « je me demande pourquoi la formule marche » (voir analyse *a priori*).

3.
   - Si l'élève a donné une formule « brute », non appliquée à un exemple :

« Peux-tu me donner un exemple avec un carré de la taille de ton choix ? » (temps de réflexion individuel)

Cette question nous permettra d'analyser la place donnée aux unités de mesure dans l'application de la formule, et leur choix.

4. Selon vous quelles sont toutes les étapes qu'il y a dans le calcul d'une aire de carré, si vous deviez les donner un peu comme une recette de cuisine? (temps de réflexion individuel)

Cette question a un rôle clé, elle nous permettra d'analyser un éventuel changement dans la capacité des élèves du groupe test à distinguer des étapes et des objets mathématiques entrant en jeu à chaque étape de l'algorithme, après la rencontre avec un algorithme différent. Cela donnera des indices sur l'effet qu'a eu le texte ancien et sa capacité à entrer en communication, à être comparé ou non, avec l'algorithme actuel. Si des étapes sont distinguées par le groupe test, il est possible que l'absence de conversion dans notre algorithme soulève les questions spontanées attendues du type « à quoi correspond le fait d'associer « 2 cm » à « 2 » ? ou « pourquoi on utilise les mêmes nombres, nous ? », « pourquoi il n'y a pas de conversion » ? Et éventuellement, pour ceux qui auraient mobilisé la grille, la question : « est-ce que « 2 » correspond à un nombre de « cm » ou de carreaux ? »

Nous faisons l'hypothèse d'une difficulté à distinguer des étapes (au moins pour le groupe témoin), avec une tendance à résumer le calcul d'aire à la seule étape de multiplication. Plus de détails pourraient être attendus aussi aux étapes où il n'y a pas conversion (à l'étape d'« apposition » simple de l'unité de mesure d'aire par exemple).

5. Dans votre formule, le « 2 » [le nombre qui est multiplié] c'est quoi ? Est-ce le même que dans 2 cm ?

Je rappelle (voir analyse préalable, Chapitre II) que nous faisons l'hypothèse d'une difficulté à expliciter ce qui est multiplié, notamment pour les élèves ne mobilisant pas l'idée de « grille », ainsi qu'une méconnaissance (normale) des distinctions nombre et valeur numérique. Nous attendons quelques réponses du type « un nombre de carreaux » et une majorité de réponses du type « la longueur du côté », sur lesquelles nous pourrions rebondir et demander des précisions, pourquoi « ça marche ».

Cette question pourra être l'occasion de constater une éventuelle différence entre les groupes témoin et test. Ces derniers pourraient par exemple faire des remarques spontanées du type « ah mais c'est vrai que chez nous c'est « les deux » (nombre multiplié et mesure) alors qu'en Mésopotamie ce n'est pas le même (nombre en système SP et mesure). » Les questions spontanées mentionnées à la question précédente pourraient aussi être observées à ce stade.

Des questions spontanées du type : « Pourquoi on multiplie des « centimètres » ? », « que fait la multiplication ? », « pourquoi notre multiplication donne la mesure d'aire directement ? », « pourquoi cm × cm = cm^2 » pourraient être observés dans le groupe test. Les élèves ayant encore accès à la grille pourraient demander : « pourquoi multiplier « 2 cm » alors que l'on souhaite obtenir un nombre de carreaux ? »

6. Pourquoi on met le cm^2 ici ?

Je rappelle (voir analyse préalable) que nous faisons l'hypothèse d'une difficulté générale à expliciter le choix de l'unité de mesure, du fait entre autres, d'une utilisation automatique de l'unité de mesure d'aire « correspondant » à l'unité de mesure de longueur.

Cette question pourra être l'occasion de constater l'éventuelle émergence de questions spontanées dans le groupe test, du fait de la rencontre avec des unités de mesure d'aire non liées aux unités de mesure de longueur, du type : « pourquoi chez nous les unités de mesure ont le « même nom » ? »

Peut-être que le groupe test donnera moins de réponses du type : « « cm^2 » parce que j'ai pris « cm » au début. » [c'est une réponse qui a du vrai, mais qui est elliptique] Des questions du type : pourquoi associer 4 à « 4 cm^2 », associer « 2 × 2 » à une mesure d'aire « 4 cm^2 », pourquoi « cm × cm = cm^2 » ? « pourquoi c'est facile d'ajouter juste « cm^2 » à la fin ? », « pourquoi il n'y a pas de conversion », « pourquoi on peut utiliser les mêmes nombres, nous ? », pourraient émerger davantage dans le groupe test.

7. C'est quoi pour vous un cm^2?

Nous attendons *a priori* des réponses du type « un carreau » et des réponses du type « une unité de mesure d'aire » ; sans distinction entre les deux groupes (témoin et test).

Des questions du type « comment on choisit l'unité de mesure d'aire, pourquoi c'est toujours « unité de mesure de longueur au carré » ? », ou « Pourquoi on peut juste « ajouter » le mot « cm^2» à la fin ? » pourraient émerger davantage dans le groupe test.

8. Là il y a des longueurs et là, des surfaces[248] ; à quel moment on est passé de l'un à l'autre ?

Cette question, bien que posée de manière « non mathématiquement légitime », nous permettra d'attirer l'attention des élèves sur l'entrée en jeux de grandeurs de type différent, dans l'algorithme. Ici nous attendons une différence entre les groupes témoin et test. Nous pensons que le groupe témoin répondra « au moment de la multiplication », donnant un rôle clé à la multiplication qui semble opérer une transformation entre dimensions ou grandeurs.

Nous pensons que le groupe test, qui a constaté l'existence de nombres en système SP et de mises en correspondances (qui peuvent être appelées « conversions »), sera partagé, hésitant. Peut-être des questions spontanées émergeront-elles à ce moment, du type : « dans la tablette on a fait une conversion (mise en correspondance entre mesure de longueur et nombre puis entre nombre et mesure d'aire) ; chez nous je ne sais pas comment on fait/je ne vois pas où est cette étape ».

Quelques élèves dans chaque groupe mobiliseront peut-être l'idée de « grille » en répondant que la mesure de longueur n'entre pas vraiment en jeu, et qu'il s'agit en fait de connaître le nombre de carreaux (le nombre de cm^2), la multiplication opérant sur le nombre de carreaux par ligne et colonne. Alors la mesure de longueur donne simplement le nombre de carreaux sur une ligne. Il pourrait être dit qu'il y a une mise en correspondance implicite de la mesure de longueur d'un côté en nombre de carreaux sur un côté.

9. Si j'ai une piscine (carrée) de 20 cm de côté (une piscine de souris). Je voudrais la carreler avec des carreaux (carrés) de 1 cm de côté, combien de carreaux est-ce qu'il me faut?

Je rappelle (voir analyse préalable, Chapitre II) que nous faisons l'hypothèse d'une difficulté générale à mobiliser la grille (cadre géométrique) qui n'a plus de sens depuis l'introduction de la formule mémorisée. Cette question permettra de voir quelle méthode est favorisée par les élèves : compter des carreaux ou calculer l'aire puis diviser par l'aire d'un carreau. Nous faisons l'hypothèse d'une majorité d'utilisation de cette dernière méthode, dans les deux groupes. Nous pensons que la question permettra peut-être à certains élèves de remobiliser la « grille ». Le choix du centimètre a été fait pour ne pas introduire de biais liés au choix d'une unité de mesure moins familière.

10. Pouvez-vous m'expliquer pourquoi la formule marche?

Nous souhaitons voir si chez les élèves qui ont « remobilisé la grille », les explications changent.

Questions : sur la tablette cunéiforme (posées uniquement au groupe test)

11. Selon vous quelles sont toutes les étapes qu'il y a dans la tablette sur l'aire du carré ?

Cette question a un rôle clé, si toutefois les élèves arrivent à :

-comprendre et se souvenir des étapes

-les mettre en relation avec celles de l'algorithme actuel

Elle nous permettra alors d'analyser l'émergence d'éventuelles questions spontanées des élèves liées à un changement dans la capacité de distinction des étapes de l'algorithme actuel, après la rencontre avec un algorithme différent ; et notamment avec les étapes liées à la conversion (mise en correspondance entre les valeurs de grandeurs et les nombres en système SP).

[248] J'ai préféré utiliser ici les termes « surface » et « longueur » qui me semble plus habituels pour les élèves, du fait du flou institutionnel sur l'utilisation des termes, que « mesure d'aire », que j'utilise dans la thèse pour des raisons scientifiques. Cela pose des questions méthodologiques, toutefois.

12. A quel moment on est passé de longueur à surface dans la tablette?

Cette question a aussi un rôle clé, puisqu'elle insiste sur l'existence de l'outil intermédiaire entre les grandeurs (longueur, aire) : le nombre en système SP lié aux tables métrologiques. Elle nous permettra d'analyser l'émergence d'éventuelles questions spontanées des élèves liées à la rencontre avec le texte ancien. Ce sera peut-être l'occasion pour eux de signaler « l'absence » de tables métrologiques et la possibilité d'utiliser les mêmes nombres, pour exprimer les valeurs numériques de grandeurs et les nombres à multiplier, aujourd'hui.

Questions : nature des sciences (historique, mathématique)

1. Est-ce que vous appelleriez "mathématique" le travail qu'effectuaient les scribes mésopotamiens ? Puis : vous semble-t-il identique au travail que vous effectuez en cours de maths ? Pourquoi ?

Cette question doit permettre d'identifier la façon dont les élèves identifient la différence, la diversité, lorsqu'ils y sont confrontés, l'intègrent ou non comme une possibilité scientifique, et comment cela va influer sur leur rapport à l'histoire, favorisant ou non des réactions « positivistes » selon les cas.

2. Est-ce que la diversité des méthodes utilisées pour les calculs d'aire, pour la multiplication et pour le comptage vous a aidé à comprendre les méthodes actuelles ?

Cette question, ouverte, doit permettre de savoir si les élèves parviennent ou non à expliciter une partie des questions qui auraient émergé après la rencontre avec la source ancienne.

3. Qu'est-ce qui vous a semblé facile ou difficile dans les séances sur la Mésopotamie ?

Cette question doit permettre de contribuer à faire des liens, s'ils existent, entre sentiment de difficulté, sentiment de plaisir dans la réalisation des séances et positionnement des élèves envers l'histoire.

4. Est-ce que ce que l'histoire des mathématiques a interféré dans votre compréhension en mathématiques ? Est-ce que cela vous a aidés, vous a « embrouillés », ou est-ce neutre ?

Cette question, ouverte, doit permettre de savoir si les élèves parviennent ou non à expliciter certains éléments de liens entre mathématiques actuelles et anciennes ; ou leur sentiment de séparation complète des deux systèmes.

5. Saviez-vous qu'on faisait des maths comme ça en Mésopotamie?

Cette question ouverte doit aussi permettre de savoir si les élèves parviennent ou non à expliciter certains éléments de liens entre mathématiques actuelles et anciennes ; ou leur sentiment de séparation complète des deux systèmes.

6. Est-ce que votre point de vue a changé sur ce que sont les mathématiques?

Cette question ouverte, doit permettre de savoir si les élèves parviennent ou non à expliciter certains effets de la séquence sur les aspects « nature des sciences » ou l'absence d'effet.

7. Est-ce que vous aimez les maths? Oui/non, pourquoi?

Cette question doit permettre d'investiguer la relation des élèves aux séances d'histoire des sciences en fonction de leur relation aux mathématiques.

1. A votre avis, qu'est-ce qui est important quand on présente un texte historique?

Cette question ouverte doit permettre de savoir si les élèves parviennent ou non à expliciter leur relation à la discipline historique, et de constater des changements éventuels entre groupe témoin et groupe test.

2. Qu'est-ce que c'est pour vous que l'histoire des sciences?

Cette question ouverte doit permettre de savoir si les élèves parviennent ou non à expliciter leur relation à la discipline d'histoire des sciences, et de constater des changements éventuels entre groupe témoin et groupe test.

Maintenant que j'ai présenté le protocole, je présente en détail les séances d'histoire des sciences et leur introduction. Je vais présenter ces séances de façon linéaire, mais il me semble utile d'entrer dans les détails. Je commenterai, au fur et à mesure, les aspects qui me paraissent déterminants.

3 LES SEANCES EN CLASSE

3.1 Les séances d'introduction

3.1.1 Introduction générale à l'option Histoire des Sciences

La première séance d'Histoire des Sciences suivie par les élèves a eu lieu le 19 Septembre. Elle était encadrée par Matthieu Husson, chercheur au CNRS en histoire des mathématiques, ancien enseignant du lycée, et Barbara Jamin, professeur d'histoire-géographie. Je ne suis pas intervenue dans la construction de cette séance introductive, qui portait sur la présentation du fonctionnement de l'option « histoire des sciences » pour toute l'année scolaire. J'en ai été témoin. Elle précédait les séances Mésopotamie, et il m'a paru important de documenter le cadre qui a été donné aux élèves par leurs encadrants, avant l'expérimentation.

La séance a débuté par la présentation des encadrants (Matthieu Husson et Barbara Jamin) et de moi-même. Matthieu Husson a ensuite demandé « qu'est-ce que la science » ? Il a fait remarquer aux élèves l'emploi de plusieurs sortes de mots : ceux liés à la science comme disciplines scolaires et ceux liés au monde professionnel (recherche, découverte, etc.). Enfin, les mots comme astronomie, médecine, mathématiques, qui se retrouvent dans plusieurs matières, disciplines. Une discussion a suivi sur les « plus anciennes », qui a fait ressortir les mathématiques, l'astrologie et la médecine, chez les élèves. Matthieu Husson a expliqué que l'astrologie est une discipline qui était très liée pendant longtemps à l'astronomie, dans des cultures différentes, tout autour du monde. Barbara Jamin a insisté sur la pratique culturelle de l'astrologie aujourd'hui, « même vous, dans une classe dite scientifique ».

Les encadrants ont ensuite demandé « qu'est-ce que l'histoire évoque pour vous ? ». Matthieu Husson a noté oralement que les élèves répondaient sous forme d'« objectifs » (comprendre pourquoi le monde est comme il est, éviter que des événements se reproduisent, etc.).

Il leur a demandé alors « comment ? », puis a conclu : « on va se débrouiller pour voir sciences et histoire, ces deux thèmes. […] Les sources peuvent avoir un aspect très varié. Grâce à elles, on peut savoir des choses sur ce qui s'est passé il y a très longtemps. Par exemple des tombes en Chine qui comportaient des ustensiles de cuisine, des manuels de maths, les statuettes de la famille et des serviteurs […] Les mots progrès, mémoire que vous avez notés, c'est très important, on en rediscutera. […] On va faire de l'histoire dans ce domaine riche des sciences, qui sont d'aujourd'hui, et anciennes aussi. On va explorer cette épaisseur. Mathématiques, physique, médecine sont très anciennes. Ce qu'on sait aujourd'hui, c'est comme une falaise avec des couches de milliers d'années. On va regarder ça, en comparant. Vous allez apprendre à avoir une souplesse d'esprit. Les maths d'il y a 3000 ans, ça demande de se mettre à la place, de réfléchir comme, de mettre entre parenthèses les connaissances et ensuite alors de faire des liens. Ça vous sera utile dans la vie pour comprendre ce que vous vivez. »

Ce cadrage de Matthieu Husson, qui donne le ton aux élèves dès la séance introductive, me paraît important à souligner, d'autant qu'il fait une allusion directe à la Mésopotamie dans la demande de « se mettre à la place ». Il ouvre la porte pour les élèves, dès le début, à une méthodologie de souplesse et de complexification de la façon de voir les réalités ; il réagit aux mots « progrès » et « mémoire ». Le tout est fait en douceur, sans entrer dans un conflit direct avec les perceptions sur lesquelles il faudra travailler, mais en donnant le cadre et en expliquant l'existence de la diversité des approches.

La discussion est ensuite passée sur des aspects techniques : planning, mots aux parents concernant l'autorisation d'enregistrer les séances Mésopotamie, les contrôles et la notation, la constitution des groupes, la présentation des intervenants : en histoire des mathématiques, de la chimie, de la S.V.T, en philosophie, ainsi qu'un travail avec la documentaliste au C.D.I. Les élèves ont fait des remarques sur la philosophie, qui leur paraissait un enseignement difficile pour eux (classe de terminale).

Le professeur d'histoire a aussi précisé le lien qu'elle voyait entre l'option et l'orientation des élèves : « pour une même question, plusieurs regards vont enrichir la réponse. Juxtaposer c'est mieux comprendre. On aura en gros, toujours une approche scientifique et littéraire, de « sciences humaines ». La seconde est une classe de détermination. Elle sert à savoir qui vous êtes. Notez qu'une orientation en fin de seconde c'est aussi une sélection en fonction de vos notes. Ce n'est pas facile de savoir ce qui est le mieux. Il faut se connaître. Faire coïncider : envie, projets, résultats. Chaque question qu'on abordera vous donnera aussi l'occasion de vous demander ce que vous avez préféré, où vous êtes le meilleur. La philosophie, c'est 8 heures par semaine : si vous n'aimez pas, oubliez le BAC L. » Un élève a alors demandé avec humour s'il était possible de passer « plusieurs BAC à la fois ».

Ce cadrage de Barbara Jamin correspond je crois à l'une des ambitions des concepteurs pour cette option découverte en seconde : aider les élèves à s'orienter dans leur choix de classe de première, tout en leur permettant une orientation plus « fine » que le clivage habituel « L ou S », militant peut-être pour la reconnaissance des influences nécessaires d'une discipline dans les autres, et la nécessité de continuer une réflexion sur plusieurs plans, quel que soit le choix disciplinaire des élèves en première. Il correspond aussi, m'a-t-elle dit ensuite, à l'expérience du fait que certains élèves ne pourraient pas être orientés comme ils le souhaitent (ex : volonté d'aller en « S » mais impossibilité). Il faudrait alors les aider à exploiter et connaître leurs forces ainsi que leurs goûts pour choisir leur orientation.

La discussion est revenue sur l'organisation de l'année : « il y aura trois périodes et chaque période correspondra à une discipline (mathématiques, physique-chimie, S.V.T). Vous aurez un panel de différentes sciences, vous verrez plusieurs lieux, plusieurs temps. Il y aura une tâche finale et un objectif à chaque fin de période ». A la fin des séances Mésopotamie, des ateliers seraient fabriqués pour des élèves de C.M.2, par les élèves de seconde. « Le C.M.2 est l'objectif de la première période. Comment faire pour que vous puissiez dire si vous avez bien compris les séances ? On va faire de vous des transmetteurs de savoirs, à peu près des professeurs. Vous animerez des petits ateliers sur quelque chose que vous avez appris. Vous choisirez le savoir à transmettre et sous quelle forme. Ils feront de l'histoire des sciences sans s'en apercevoir ! C'est du service après-vente pour notre option ! […] si ça ne fonctionne pas, vous le verrez directement sur le visage des C.M.2 […] c'est responsabilisant ».

Beaucoup de questions ont été soulevées par les élèves sur ces ateliers C.M.2. Il faudrait qu'ils apprennent à anticiper les questions des C.M.2 et à faire des recherches pour y répondre à l'avance.

Les encadrants ont expliqué (point qui semblait important pour les élèves) qu'il n'y aurait pas de contrôles, mais que les compétences seraient évaluées : travail de groupe, implication, organisation, vision à long terme, etc. en fonction des tâches données à chaque fin de période. Des clés seraient données pour apprendre aux élèves l'autonomie, l'exploitation de leur curiosité, l'approfondissement, le fait de nourrir sa réflexion : il faudrait apprendre à partir de questions, chercher puis trouver de nouvelles questions ; faire des compromis mais aussi défendre leurs opinions, prendre des notes et les utiliser, rédiger des comptes-rendus, être actif par soi-même.

Des élèves ont demandé s'il y aurait un lien avec les disciplines enseignées en seconde. Cette question me paraît intéressante, puisqu'elle semble différencier explicitement la discipline de la discipline dans son histoire. Il a été répondu que les séances de physique et de S.V.T (sur les mouches et mutations génétiques) seraient liées au programme, et qu'un chapitre d'histoire serait aussi traité.

Un élève conclut avec humour « ça suffira une séance par semaine ? »

Les interventions de Christine Proust ont été présentées aux élèves comme des « conférences universitaires » et comme une chance : « ce n'est pas très courant d'avoir des vrais chercheurs en seconde ».

Mon intervention (qui correspondra à une présence discrète lors des séances, la récupération des documents écrits des élèves et des enregistrements par dictaphones, puis à des entretiens) est présentée ainsi à un moment de la séance : « elle vous observera » puis avec humour « vous serez des souris de laboratoire pour Mme de Varent ». C'est un fait qui pourrait être problématique puisque nous essayons de construire une communication ouverte lors des entretiens, avec les élèves[249]. Cependant, j'ai ensuite eu l'occasion de voir les élèves à chaque séance puis de les interviewer, en insistant sur les valeurs scientifiques et les objectifs : connaître l'opinion des élèves, ne pas juger, rendre anonymes les témoignages, accepter la pluralité des réponses possibles, réfléchir sur l'enseignement, dans le but de mieux comprendre les effets des séances auxquelles ont été confrontés les élèves.

3.1.2 Introduction historique à la Mésopotamie

Une introduction historique à la Mésopotamie a été élaborée par le professeur d'histoire-géographie et présentée aux élèves le 29 Septembre. Matthieu Husson était aussi présent, de façon plus discrète pour cette séance menée principalement par Barbara Jamin. Je ne suis pas intervenue dans la construction de cette séance, mais en ai été témoin ; elle précédait les séances Mésopotamie. Barbara Jamin a rappelé la géographie (localisation de la Mésopotamie), a distribué un document (carte, tablette d'argile, frise, chronologie). Celui-ci est disponible en Annexe. Deux élèves m'ont proposé leurs notes sur le cours (elles sont aussi disponibles en Annexe).

On remarque notamment dans ces notes les mots-clés suivants : le Tigre et l'Euphrate, les premières maisons, l'invention de l'écriture et son évolution, l'argile, la sédentarisation, la

[249] Cette situation n'est pas inhabituelle pour les didacticiens, il n'est pas toujours facile d'expliquer leur présence en classe, et les élèves se posent aussi beaucoup de questions.

colonisation des fleuves, l'agriculture, les impôts et administration, les scribes, les premières traces écrites de lois, les guerres, la Bible, l'épopée de Gilgamesh, l'orientalisme au XIX^{e} siècle. Bien sûr, ici, il n'est pas mention de mathématiques, et la question de la juxtaposition des disciplines se pose aussi entre histoire et histoire des sciences.

3.2 Les séances Mésopotamie qui précèdent l'expérimentation : séances 1, 2, et 3

Les trois premières séances de Christine Proust ne font pas partie du protocole d'expérimentation. Toutefois, je les présente ici ; elles ont servi à construire les connaissances nécessaires pour la compréhension de la séance 4 (aire du carré). Elles ont été construites et menées par la spécialiste, pour une partie des exercices (notamment la découverte du système SP), à la manière dont elle le souhaitait. Les séances utilisant l'abaque étaient nouvelles, et imaginées par Christine Proust pour répondre aux contraintes et besoins de l'option découverte de Matthieu Husson. Nicolas Décamp et moi-même avons participé à l'élaboration de chaque séance afin de nous assurer tous ensemble, que toutes les connaissances nécessaires soient bien disponibles avant la séance 4. La séance 3 notamment, qui n'avait jamais été mise en œuvre, a été conçue pour préparer les élèves aux tables métrologiques. Comme je l'ai précisé en introduction de l'expérimentation (voir 1, p.256), cette organisation m'a permis d'assister aux séances d'histoire des sciences, d'être descriptive, sans intervenir. Cela tout en assurant que les séances correspondaient aux contraintes et objectifs d'une spécialiste historienne des sciences.

3.2.1 Séance 1

La première séance de Christine Proust (voir en Annexe) a servi de prise de connaissance avec le système SP. Des copies de tablettes scolaires de Nippur datant de la période paléo-babylonienne étaient proposées. La table de multiplication par 12 était à traduire.

L'impression générale est que les élèves n'ont pas eu de difficulté à déchiffrer les nombres en cunéiforme, ont compris plus ou moins vite qu'il s'agissait d'une table de multiplication. Arrivés à « 5 × 12 », ils ont constaté que le signe « 1 » est écrit. Pour « 6 × 12 » ils ont vu « 1:12 » au lieu de 72. Christine Proust a fait une intervention orale au tableau, après une période de recherche, pour institutionnaliser.

Elle attendait toujours que les élèves proposent d'eux-mêmes une comparaison avec la façon de noter l'heure, les incitant ainsi : « à quoi ça vous fait penser » ? Elle m'a confirmé plusieurs fois ne pas souhaiter exprimer elle-même cette analogie (modernisante), afin qu'elle reste transitoire et que les élèves se plongent plutôt dans le système de pensée ancien. Elle ne choisissait pas non plus d'insister sur le caractère « flottant » (perte de l'ordre de grandeur) du système SP à ce stade, mais soulignait le fait que la position du « 1 » n'est pas « plus à gauche » que le premier 1.

Ensuite, la table de multiplication par 18, des tables de carrés, une table de racines carrées étaient à traduire. Un tableau incitait les élèves à expliciter leur traduction des signes signifiant « 1 », « 10 », « fois », « racine carrée ». Il était demandé de décrire les principes de notation des nombres. Dans sa correction, Christine Proust a quand même choisi d'institutionnaliser ainsi :

> La notation des nombres est basée sur les principes suivants :

-La notation utilise deux signes cunéiformes : un clou vertical pour représenter 1 et un chevron pour représenter 10.

-Les nombres de 1 à 59 sont notés avec des 10 et des 1 répétés autant de fois que nécessaire. Les 1 et les 10 sont toujours répartis par rangées de trois éléments maximum.

-Soixante unités d'un ordre sont remplacées par une unité de l'ordre supérieur. Le système est comparable à notre système de mesure du temps (soixante secondes sont remplacées par une minute, soixante minutes sont remplacées par une heure).

-La notation n'indique pas les ordres de grandeur : dans un nombre, on ne sait pas où se trouve la position des unités.

Ce dernier point concernant les ordres de grandeur n'a à mon avis pas été maîtrisé, ou pas été maîtrisé tout de suite et par tous les élèves ; ce qui étaient visible par exemple lorsqu'ils « traduisaient » (pour certains) 1:12 en 72. Enfin, il était demandé d'écrire les tables de 9 et de 1:30 en cunéiforme sur de l'argile.

Du point de vue historique, la séance présente des enjeux forts. Elle permettait à Christine Proust d'insister sur l'initiation au travail d'historien : déchiffrer, transcrire, reconstituer les parties détériorées, comprendre soi-même les systèmes d'écriture. Elle donnait aussi des conseils en début de séance pour permettre cet apprentissage :

Déchiffrer

- trouver des régularités
- commencer par le plus simple (séries régulières, séries déjà vues)
- noter au fur et à mesure la signification des signes cunéiformes identifiés

Transcrire

- mettre en place un système de transcription des signes numériques

Il faut noter que cette initiation au travail de l'historien ne pouvait qu'être partielle (c'est une forme de transposition du savoir savant), puisque le travail réel de la de recherche en histoire se base sur la comparaison de nombreuses sources avant d'offrir des conclusions. Doussot et Grandjean (2014) ont explicité ce décalage. Pourtant, l'initiation permettait ici d'être assez proche de la pratique. Christine Proust a aussi choisi de présenter l'existence du site internet de référence qu'est le CDLI (http://cdli.ucla.edu/) et la possibilité d'y trouver directement les sources primaires.

Le travail sur l'argile offrait une autre ouverture sur le travail de l'historien : celle de la reconstitution expérimentale. Les élèves étaient initiés à des réflexions sur les outils utilisés et leurs conséquences. Ce travail expérimental a aussi des raisons d'être d'ordre pédagogique, et permet *a priori* d'entretenir la motivation des élèves : cela se constate bien dans la pratique, sans se baser sur des observables bien définis[250].

Toutes ces formes d'entrées vers le travail en histoire possèdent aussi un sens profond en didactique de l'histoire : elles reposent je crois, sur l'hypothèse que le fait d'engager ainsi l'élève sans perte d'esprit critique, en pleine possession d'une pluralité d'hypothèses, dans une démarche scientifique, d'ouvrir sa curiosité; permettra une immersion dans la diversité de pensée mathématique. En reproduisant une démarche plus rigoureuse et proche du travail de recherche, les élèves auraient accès plus facilement à ce que vivent les historiens lorsqu'ils

[250] C'est un avis personnel qui ne se base pas sur une expérimentation.

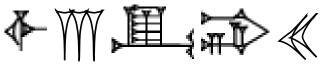
parviennent à une immersion « réussie », et ont ainsi accès à d’autres perceptions des mathématiques.

Grâce à cette séance, des compétences nécessaires pour la séance 4, sur laquelle porte l’expérimentation, étaient abordées : la familiarisation avec le système SP et ses caractéristiques. Il s’agit d’un système en « base 60 », positionnel mais qui ne conserve pas les ordres de grandeur. Le travail était mené, je l’ai détaillé plus haut, en appliquant aussi des objectifs de didactique de l’histoire.

3.2.2 Séance 2

La deuxième séance de Christine Proust (voir en Annexe) a servi de rencontre avec la multiplication et la division en système SP. Tout d’abord, une table d’inverses était donnée à traduire. Si le principe de traduction était maintenant familier pour les élèves, comprendre le sens de la table était plus difficile. L’énoncé donnait un « coup de pouce » en incitant à compléter la phrase avec le mot « l’inverse » :

Coup de pouce



se prononce « igi esh (3) gal-bi nish (20) » et signifie « … de 3 c’est 20 »[251].

La correction était collective avant de passer à la suite. Les élèves étaient amenés à comprendre, par l’observation de la tablette traduite ou ensuite, par la discussion, qu’« inverse » d’un nombre signifie « ce par quoi il faut multiplier le nombre pour trouver 60, donc 1. Il s’agit déjà d’une étape complexe à mon sens, mais il fallait ensuite aller plus loin en se penchant sur la division. Une analogie était proposée avec l’inverse fractionnaire : « diviser par 2, c’est multiplier par ½ ».

Aujourd’hui, pour diviser un nombre par 2, on peut multiplier ce nombre par ½, c'est-à-dire par 0,5

$15/2 = 15 \times ½ = 15 \times 0{,}5 = 7{,}5$

Dans les écoles de scribes, pour diviser un nombre par 2, on peut multiplier ce nombre par ½, c'est-à-dire par 30 (en notation flottante) :

Exemple : diviser 15 par 2

$15/2 \rightarrow 15 \times 30 \rightarrow 7{:}30$

Autre exemple : diviser 6 par 15

$6/15 \rightarrow 6 \times 4 \rightarrow 24$

Cette comparaison se base donc sur une analogie profonde des notions d’inverse : « 2 × 30 = 1 », en « base 60 » ; comme « 2 × ½ = 1 ». Elle est exprimée par la phrase : « on peut multiplier ce nombre par ½, c'est-à-dire par 30 (en système SP) ». L’exercice demandait :

Diviser à la façon babylonienne

Diviser 6 par 30 — $6/30 \rightarrow 6 \times … \rightarrow$ **…**

Diviser 50 par 30 — $50/30 \rightarrow … \times … \rightarrow$ **…**

Diviser 2 par 15 — $2/15 \rightarrow … \times … \rightarrow$ **…**

[251] Les extraits sont issus des séances qui sont présentées dans leur intégralité en Annexe.

Diviser 20 par 3 20/3 → … × … → **…**

Coup de pouce : n'hésitez pas à utiliser les tables de multiplication.

Voici la façon dont Christine Proust a ensuite transposé lors de la correction, après avoir donné la table complète (voir Annexe) :

Diviser 6 par 30, c'est multiplier 6 par l'inverse de 30, c'est-à-dire multiplier 6 par 2

6 × … ⟶ …

Diviser 50 par 30, c'est multiplier 50 par l'inverse de 30, c'est-à-dire multiplier 50 par 2

50 × … ⟶ …

Diviser 2 par 15, c'est multiplier 2 par l'inverse de 15, c'est-à-dire multiplier 2 par 4

2 × … ⟶ …

Diviser 20 par 3, c'est multiplier 20 par l'inverse de 3, c'est-à-dire multiplier 20 par 20

20 × … ⟶ …

Ainsi les élèves étaient engagés à voir la division comme une « multiplication par l'inverse ». Les élèves n'avaient probablement pas tous compris ou assimilé les deux notions à ce stade : l'inverse est « ce par quoi il faut multiplier le nombre pour trouver 60, donc 1 » et diviser c'est multiplier par l'inverse (en « base 60 »). L'objectif de Christine Proust n'était pas toujours celui de la compréhension complète des justifications mathématiques du système ; comme je l'expliquerai lors de la présentation du calcul sur abaque. Il s'agissait de faire sentir aux élèves que le fait de « perdre l'ordre de grandeur » permet de raisonner autrement : ici de multiplier plutôt que diviser. S'ils n'ont peut-être pas tout compris clairement, les élèves percevaient ici plus nettement les possibilités du système.

Ensuite, une tablette (présentant une élévation au carré, sans mention de calcul d'aire) était à traduire. Il fallait deviner qu'il s'agissait d'une multiplication de 4:50 par lui-même.

4:50

4:50

2:21:40

Cette tablette introduisait le calcul avec des jetons ; permettant de poser des multiplications en système SP telles que celle-ci. Grâce à des haricots et des pâtes, les élèves ont travaillé avec des colonnes alternées « 10/6 ».

C'est-à-dire que la première colonne est « pleine » lorsqu'elle possède dix jetons (pâtes), qui deviennent un haricot dans la colonne « supérieure » (à gauche). Cette colonne-là est « pleine » lorsqu'elle possède 6 jetons (haricots), qui deviennent une pâte dans la colonne « supérieure », etc. Les échanges se font donc alternativement à 6 et à 10. Il était demandé :

Calculer avec les jetons

2:5 fois 12

2:13:20 fois 18

5:3:24:26:40 fois 9

4:50 fois 4:50

Le calcul était présenté au tableau grâce au diaporama, avec le détail des étapes en termes de haricots et pâtes pour chaque colonne. S'il est peu probable que les élèves aient tous maîtrisé les raisons pour lesquelles un tel algorithme fonctionne, la pratique a dû les renforcer dans le caractère « positionnel » du système SP, ainsi que dans l'existence d'une alternance 6/10 pour la valeur de la position supérieure.

Il a permis à certains élèves d'exprimer des questions, qui ont mené à l'explicitation suivante : « l'ordre de grandeur général ne compte pas, cela signifie que l'on ne sait pas par exemple, où se trouve le « 6 » de 6:40. On ne sait pas si c'est 400 ou 24 000, ou 6 + 40/60, etc. En revanche, le 6 est bien soixante fois supérieur à 40, les positions (relatives) comptent entre elles ». Je note d'ailleurs qu'il n'est pas évident de comprendre que le fait que « 6 est soixante fois supérieur à 40 » correspond au fait qu'il y a un facteur six entre la colonne du 4 (de 40) et la colonne du 6. C'est-à-dire qu'il n'est pas explicite que nous ayons décomposé 40 en 4 × 10. La séance se terminait sur la présentation de MesoCalc, calculateur mis au point par Baptiste Mélès[252].

Du point de vue historique, des objectifs sont entrés en jeu dans la conception de la séance. On retrouve d'abord les éléments rencontrés en séance 1 : tout d'abord le déchiffrage, à partir du cunéiforme, de deux tablettes. Ensuite, des tentatives par les élèves, de compréhension de son sens (une liste d'inverses, puis une tablette d'élévation au carré) étaient engagées. Lors du déchiffrage des tablettes, la prise de conscience de l'importance de la disposition (l'organisation spatiale en listes et colonnes, ou dans un exercice, le calcul et le résultat en-dessous) était possible. La plongée dans la diversité du système mathématique, renforcée par la prise de conscience des conséquences du système SP sur la notion de division était permise. L'utilisation de l'abaque, permettait une connaissance des techniques expérimentales en histoire (c'est un abaque hypothétique, ce fait leur a été précisé). Ces objectifs liés à l'histoire semblaient à nouveau compatibles avec les aspects pédagogiques motivationnels : les manipulations, la démarche d'investigation. Je note qu'encore une fois, la spécialiste avait le souhait de partager une ressource utilisée en recherche (le site de Baptiste Mélès), avec les élèves ; les encourageant à « expérimenter » d'eux-mêmes les multiplications, et leur donnant ainsi des clés pour l'investigation autonome.

En résumé, grâce à cette séance, certaines des compétences nécessaires pour la séance 4, sur laquelle porte l'expérimentation, ont été abordées : la familiarisation avec le système SP et ses caractéristiques a fait l'objet d'un approfondissement par l'abaque. Le système SP est apparu plus clairement comme positionnel, les effets de la base 60 se sont vus sur le nombre de haricots ou de pâtes, nécessaires à un échange avec une unité supérieure. Certains élèves semblent avoir mieux compris la distinction entre « positionnel » et « ne conserve pas les ordres de grandeur » à ce stade, bien que ce ne soit pas le cas de tous. Les élèves se sont familiarisés avec la disposition du calcul lors de la multiplication (l'élévation au carré de 4:50, exercice III, tablette P368277), qui est celle de la tablette UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48).

La multiplication « 20 × 20 = 6:40 » a aussi été abordée car il s'agit de celle qui est présente sur la tablette UM 29-15-192. La « multiplication par l'inverse » (en base 60) qui remplace la division, est expliquée. Cela donne du corps au système SP, montrant quelles caractéristiques calculatoires il permet d'obtenir. La compréhension fine du calcul d'inverse aurait pu être utile pour extrapoler la correspondance entre 1/3 grain et 6:40 qui ne figure pas dans la table métrologique : nous avons fait le choix de ne pas l'expliquer. Pour la séance 4, nous avons en effet choisi de modifier artificiellement la table métrologique en ajoutant cette entrée. La compréhension claire par les élèves du calcul d'inverse n'était ainsi pas nécessaire.

Le fait d'avoir compris que dans ce système, diviser correspond à multiplier par l'inverse, n'était pas sans intérêt pour la séance 4. En effet, il s'agissait d'une plongée dans la diversité de pensée mathématique. Elle permettait aussi de mieux comprendre *a priori* l'intérêt du système SP.

---

[252] http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html

3.2.3 Séance 3

La troisième séance de Christine Proust (voir en Annexe) a d'abord permis la reprise des activités liées à l'abaque. Les calculs suivants : 2:5×12, 2:13:20×18, 5:3:24:26:40×9, 4:50×4:50 qui étaient proposés aux élèves, ont été corrigés, collectivement. Les difficultés rencontrées avec les colonnes ont été retravaillées.

Ensuite, les tables métrologiques de longueurs et surfaces ont été abordées. Leur utilisation par les scribes n'était intentionnellement pas explicitée, de même que la présence de nombres (à droite) en système SP ; laissant la résolution de ce « mystère » pour la séance 4 dont c'était l'objet.

Une première table métrologique des longueurs était à compléter.

> Cette table contient des mesures de longueur, énumérées de la plus petite à la plus grande, depuis 1 doigt jusqu'à 2 coudées. A chaque mesure de longueur, correspond un nombre en notation sexagésimale positionnelle flottante.

Nous avions choisi (Christine Proust, Nicolas Décamp et moi) de traduire en français les unités de mesure, mettant en avant leur caractère lié au « mesurage » (doigts, coudées…). Les unités de mesure ont un nom qui est en effet proche d'objets familiers. La rencontre avec la table métrologique passait donc par l'observation des relations entre unités de mesure, comme l'énoncé ci-dessous le montre.

a) Essayez de compléter la traduction en vous aidant de la copie et en devinant la logique de composition de cette tablette. La traduction des signes cassés doit apparaître entre crochets.
b) Combien y a-t-il de doigts dans une coudée ?
c) La valeur approximative du doigt dans le système métrique moderne est 1,7 cm. Quelle est la valeur approximative de la coudée ?

La correction était collective avant de passer à la suite. Le fait de compléter la traduction à l'aide de la copie attirait aussi le regard de l'élève vers la cyclicité des nombres en système SP à droite. Une seconde tablette était alors donnée avec sa traduction.

> Cette tablette est similaire à la précédente, mais elle contient une nouvelle unité de mesure de longueur, le *ninda*. Cette unité de longueur a une valeur assez proche de celle de la « perche », une ancienne unité de mesure de longueur utilisée en France avant la réforme des poids et mesures de 1796 ; on peut donc traduire « *ninda* » par « perche ».
>
> a) Combien y a-t-il de coudées dans une perche (*ninda*) ? (observez la traduction de la tablette 2)
>
> b) Quelle est la valeur approximative de la perche (*ninda*) dans le système métrique moderne ?
>
> c) A quels nombres positionnels correspondent le doigt, la coudée et la perche ? (écrire ces résultats dans le tableau ci-dessous)

Les élèves étaient alors incités plus directement à examiner les nombres en système SP (à droite), par la question « c » et le tableau à compléter.

Longueur	Nombre correspondant (en notation sexagésimale positionnelle)
1 doigt (*šu-si*)	10
↓× …	↓×…
1 coudée (*kuš*)	…
↓× …	↓×…
1 perche (*ninda*)	…

Tableau 3-1 : tableau à remplir par les élèves

Voici en quoi consiste la correction :

Longueur	Nombre correspondant (en notation sexagésimale positionnelle)
1 doigt (*šu-si*)	10
↓× 30	↓× 30
1 coudée (*kuš*)	5
↓× 12	↓× 12
1 perche (*ninda*)	1

Tableau 3-2 : correction

Ainsi les élèves étaient amenés à voir le lien entre les facteurs entre unités de mesure et l'évolution des nombres en système SP correspondants. Si le nombre (à droite) est toujours « 1 » (1 doigt, 1 coudée, 1 perche) ; le nombre en système SP, lui, varie (10, 5, 1) et suit les facteurs entre unités de mesure. A ce stade, les élèves ne savaient toujours pas à quoi servaient ces tables métrologiques.

Sur la troisième tablette on trouve des valeurs pour d'autres unités de mesure, de surfaces, du grain jusqu'au sicle. Ce système de présentation aux élèves, basé sur trois sources réelles, permettait de présenter les tables métrologiques et une grande palette d'unités de mesure, tout en gardant un lien avec les sources. En effet, les historiens ont reconstitué les tables métrologiques, sur la base de telles tablettes. C'est ainsi sur un texte composite qu'ils s'appuient pour leurs besoins quotidiens. Les questions posées aux élèves étaient similaires aux précédentes. La dernière permettait d'introduire l'unité de mesure d'aire qu'est le verger (le *sar*).

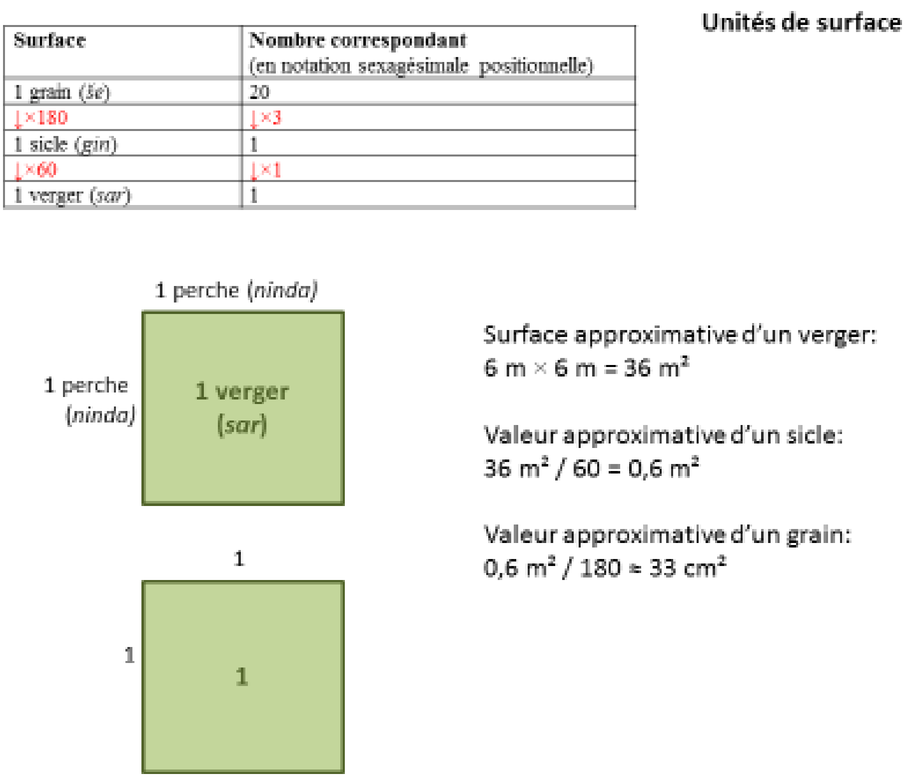
a) Essayez de compléter la traduction du texte écrit sur la face en vous aidant de la copie et en devinant la logique de composition de cette tablette. Ignorez la deuxième ligne.
b) Une nouvelle unité apparaît sur le revers : le sicle (*gin*). Combien y a-t-il de grains dans un sicle ?
c) A quels nombres positionnels correspondent le grain et le sicle ? (écrire ces résultats dans le tableau ci-dessous).
d) L'unité la plus utilisée par les responsables de la gestion des terres était une unité de surface plus grande, équivalente à la surface d'un petit verger. Le nom de cette unité est le *sar*, qui veut dire verger en sumérien. 1 verger (*sar*) est équivalent à 60 sicles (*gin*). A quel nombre positionnel correspond le verger (*sar*) ? (écrire ce résultat dans le tableau ci-dessous).

Un tableau était donné à compléter, à nouveau :

Surface	Nombre correspondant (en notation sexagésimale positionnelle)
1 grain (*še*)	20
↓ ×…	↓ ×…
1 sicle (*gin*)	…
↓ ×…	↓ ×…
1 verger (*sar*)	…

Tableau 3-3 : tableau à remplir par les élèves

Le verger est une unité de mesure importante, puisqu’il s’agit de ce que Christine Proust a appelé le « pont » (voir p.53). Voici comment la correction a été proposée au tableau :



Surface	Nombre correspondant (en notation sexagésimale positionnelle)
1 grain (*še*)	20
↓×180	↓×3
1 sicle (*gin*)	1
↓×60	↓×1
1 verger (*sar*)	1

Représentation 3-1 : diapositive de correction

Cette correction met en valeur le caractère « pont » de la relation entre le verger et la perche (*sar*/*ninda*) : ce que je traduis aujourd’hui par la capacité à être « représentable facilement au moyen d’une unité de mesure carrée ». Je note au passage que la notation de Christine Proust : « 6 m × 6 m = 36 m^2 » aurait pu influencer les résultats des entretiens ; mais je ne crois pas que ce soit le cas, au vu des résultats (voir 4.3 p.322).

Enfin, il était demandé de donner la valeur approximative du verger, du sicle et du grain dans le système métrique moderne ; incitant les élèves à se familiariser avec les ordres de grandeur.

Du point de vue historique, des objectifs sont entrés en jeu dans la conception de la séance. On retrouve encore des éléments rencontrés en séance 1 : le déchiffrage, à partir du cunéiforme, de deux tablettes ; le travail sur des sources primaires plutôt que sur la table composite. Ici, l'éveil à l'observation (des facteurs entre unités de mesure, des relations entre en système SP et facteurs entre unités de mesure), guidait l'interprétation, par des hypothèses.

Grâce à cette séance, certaines des compétences nécessaires pour la séance 4, sur laquelle porte l'expérimentation, étaient abordées : la familiarisation avec les tables métrologiques, et les unités de mesure de longueur et de surface. Le regard de l'élève devait être attiré vers les liens entre l'unité de mesure (à gauche) et le nombre en système SP (à droite). Le caractère « cyclique » de ce-dernier était rappelé.

Le fait que le système numérique servant à exprimer des valeurs numériques de grandeur n'était pas le même, n'a pas été rappelé. En revanche, la spécialiste institutionnalisait ainsi la semi-indépendance du système métrologique :

> Mais les autres unités de surface (grain, sicle) ne sont pas des carrés de côté 1 unité de longueur.

3.3 La séance 4 : expérimentation

La quatrième séance est l'objet de l'expérimentation (voir en Annexe). Je l'ai construite avec l'aide de, et en accord avec, Christine Proust (à la manière de l'historien) et Nicolas Décamp (pour l'expérimentation). C'est la spécialiste Christine Proust qui l'a présentée elle-même, pour limiter les variables liées à l'interprétation d'un enseignant (voir Introduction de ce chapitre, 1 p.256). Ainsi, elle a constitué sa présentation de correction (orale et powerpoint) sur la base de la séance préparée ensemble, en amont. Cette dernière s'intitule « tables métrologiques ». Les élèves devaient découvrir petit à petit le sens de la tablette UM 29-15-192 sur l'aire du carré, et comment utiliser les tables métrologiques pour le résoudre. Le titre constituait un indice permettant de guider les élèves vers l'utilisation des tables métrologiques abordées à la séance précédente.

La première partie de la séance visait à reprendre les tables métrologiques abordées en séance 3 et aller plus loin dans la formulation d'hypothèses sur leur utilisation. Elle commençait par l'étude d'une table métrologique des longueurs composite.

> Observez la reconstitution des tables métrologiques dans le document annexé à ce TD. Ces deux tables métrologiques reconstituées contiennent des mesures de longueur (dans la partie gauche du tableau), et des mesures de surface (dans la partie droite du tableau). Pour chaque table, chaque mesure correspond à un nombre en notation sexagésimale positionnelle flottante.
>
> a) Quelles mesures correspondent au nombre flottant 10 dans la table des longueurs ?

La question a) servait à faire remarquer aux élèves que pour un nombre en système SP (à droite) correspondait plusieurs mesures de longueur possibles (à gauche).

Réponses « correctes » : 1 doigt, 2 coudées, 10 perches, 10 arpents, 20 lieues

> b) Regardez ces deux tables reconstituées (longueurs, surfaces) : est-il possible de passer de l'une à l'autre ? Si oui, comment ferait-on selon vous ?

La question b) visait à aller plus loin dans la formulation d'hypothèses sur l'utilisation des tables métrologiques. Elle offrait déjà aux élèves plusieurs constatations spontanées possibles :

- 1. Réaliser que les unités de mesure d'aire ne dérivent pas du nom des unités de mesure de longueur (système semi-indépendant)

pour une partie des élèves qui mènent une investigation plus poussée :

- 2.

2.1 comprendre que s'ils cherchent une correspondance « facile » entre mesure de longueurs et d'aires en élevant au carré, pour expliquer la présence des nombres en système SP (à droite), <u>cela ne fonctionne pas partout</u>.

2.2 Eventuellement, il est possible de remarquer un tronçon qui « fonctionne », avec l'aide des ordres de grandeur : s'ils considèrent qu'un carré de côté « 1 perche » a pour mesure d'aire « 1 verger », par exemple. De même, pour 2 perches (2 × 2 = 4) qui correspondent à « 4 vergers », et ainsi de suite. Le nombre en système SP (à droite) semble être le simple résultat de la multiplication de la valeur numérique de la longueur. L'ordre de grandeur étant indiqué ainsi à droite : « maison » il est possible de faire cette relation entre les tables métrologiques.

pour une partie des élèves qui continueraient le raisonnement :

- 3. pour 6 doigts (par exemple) cela ne fonctionne pas. En prenant en compte l'ordre de grandeur, l'élève peut essayer deux tactiques :

- 3.1 faire une multiplication de type « 6 × 6 = 36 ». Ainsi l'attention est attirée par le fait que <u>6 doigts correspondent à 1, et non à 6</u>. L'élève ne peut plus expliquer le lien entre les tables métrologiques qu'il a commencé à élaborer.

- 3.2 Il peut alors (ou directement) utiliser le nombre en système SP qui correspond à 6 doigts, soit « 1 ». Alors, pour l'ordre de grandeur d'une tablette, il trouve bien « 3 grains » et comprend le fonctionnement des tables métrologiques.

Au terme de la question b), les élèves prennent conscience *a priori* que les unités de mesure d'aire n'ont pas le même nom que les unités de mesure de longueur. Certains constatent qu'utiliser la valeur numérique de la longueur pour multiplier, dans le calcul d'aire du carré, ne fonctionne pas « partout ». Certains peuvent voir une distinction entre une valeur de grandeur (longueur, aire) et le nombre sur lequel porte l'opération (multiplication).

Il est possible, grâce à la tablette, de « raccrocher » les élèves qui n'auraient pas encore fait ces constatations par la suite. La question b) sert tout de même de révélateur introductif, pour engager le raisonnement dans chaque groupe, permettant de faciliter l'interprétation de la tablette UM 29-15-192.

c) A votre avis à quoi servent ces tables ? (laissez aller votre imagination).

La question c) devait nous permettre de faire le point, à ce stade de la séance, sur les hypothèses des élèves quant à l'utilisation des tables métrologiques. Une correction orale a été faite ensuite par Christine Proust pour les questions a) et b). Cette correction est passée par les étapes successives :

1. Rappel de la relation entre la perche et le verger : un verger comme mesure d'aire d'un carré de côté 1 perche.

Christine Proust avait pour cela prévu des questions incitant les élèves à faire la constatation de la présence d'un seul « pont » entre les unités de mesure.

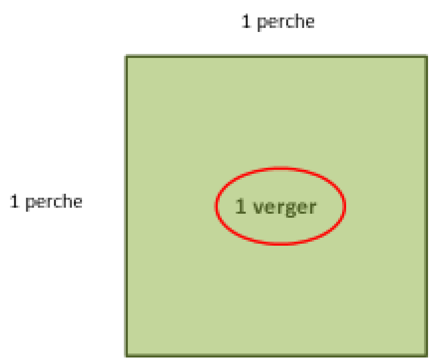
-dans la liste des mesures de surface, quelles sont celles qui sont des carrés de mesures données dans la liste des mesures de longueur ?

-Représenter ces connexions par des traits.

Ainsi, il lui était possible d'introduire le verger comme mesure d'aire d'un carré de côté 1 perche, seule relation représentable par un carré. Il me semble que ces questions ont pu être mal comprises par certains élèves : elles se basent déjà sur la compréhension des points que j'ai évoqués plus haut pour la question b).

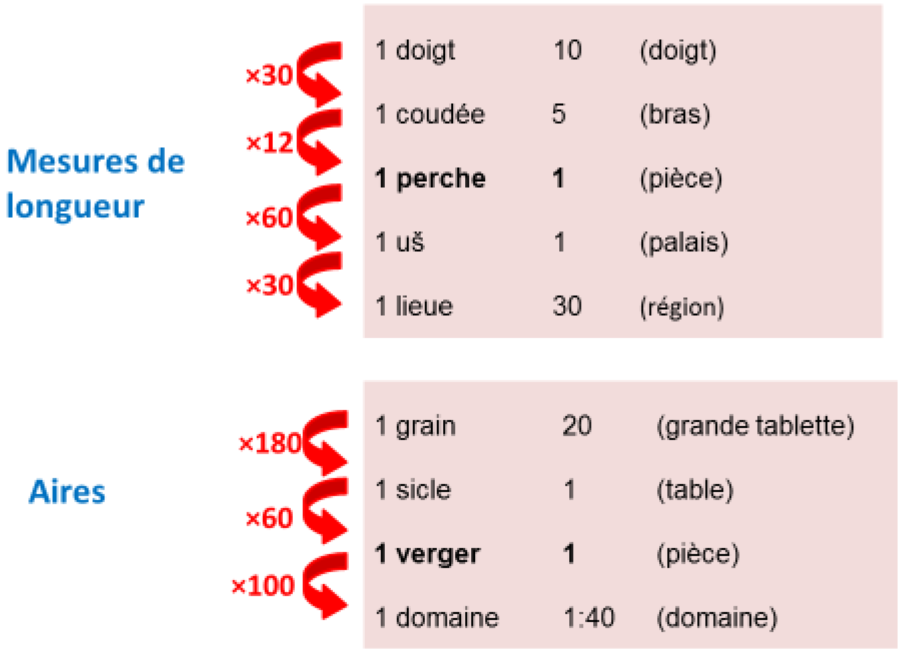
Mesures de longueur			Aires		
1 doigt	10	(main)	1/3 grain	6 :40	
2 doigts	20		1/2 grain	10	(tablette)
3 doigts	30		1 grain	20	
4 doigts	40		2 grains	40	
5 doigts	50		3 grains	1	
6 doigts	1	(tablette)	6 grains	2	
7 doigts	1.10		9 grains	3	
8 doigts	1.20		12 grains	4	
9 doigts	1.30		15 grains	5	
1/3 coudée	1.40		18 grains	6	
1/2 coudée	2.30		21 grains	7	
2/3 coudée	3.20		22 grains	7.20	
5/6 coudée	4.10		23 grains	7.40	
1 coudée	5	(bras)	24 grains	8	
2 coudées	10		25 grains	8.20	
3 coudées	15		26 grains	8.40	
4 coudées	20		27 grains	9	
5 coudées	25		28 grains	9.20	
1/2 perche	30		29 grains	9.40	
1 perche	**1**	(maison)	1 sicle	1	(table)
2 perches	2		2 sicles	2	
3 perches	3		3 sicles	3	
4 perches	4		4 sicles	4	
[…]			5 sicles	5	
10 perches	10		[…]		
20 perches	20		10 sicles	10	
30 perches	30		11 sicles	11	
40 perches	40		12 sicles	12	
45 perches	45		13 sicles	13	
5perches	50		14 sicles	14	
1 uš	1	(palais)	15 sicles	15	
2 uš	2		16 sicles	16	
3 uš	3		17 sicles	17	
4 uš	4		18 sicles	18	
5 uš	5		19 sicles	19	
[…]			1/3 verger	20	(jardin)
10 uš	10		1/2 verger	30	
1/2 lieue	15		2/3 verger	40	
2/3 lieue	20		5/6 verger	50	
5/6 lieue	25		**1 verger**	**1**	(maison)
1 lieue	30		2 vergers	2	
2 lieues	1	(région)	3 vergers	3	
4 lieues	2		4 vergers	4	
6 lieues	3		5 vergers	5	

Représentation 3-2 : diapositive de correction de Christine Proust



Représentation 3-3 : diapositive de correction de Christine Proust

Christine Proust avait alors prévu un approfondissement, expliquant que les facteurs entre unités de mesure de longueur et d'aire ne se correspondent pas, pour expliquer cette situation du « pont unique ».

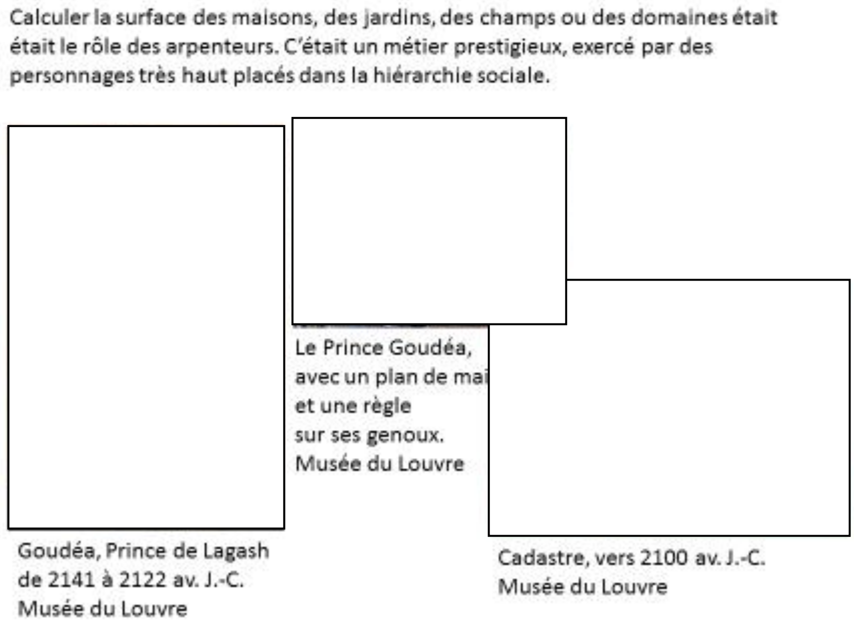


Représentation 3-4 : diapositive de correction de Christine Proust : facteurs entre unités de mesure de longueur et d'aire

2. Explicitation du caractère cyclique des nombres en système SP (à droite) dans les tables métrologiques.

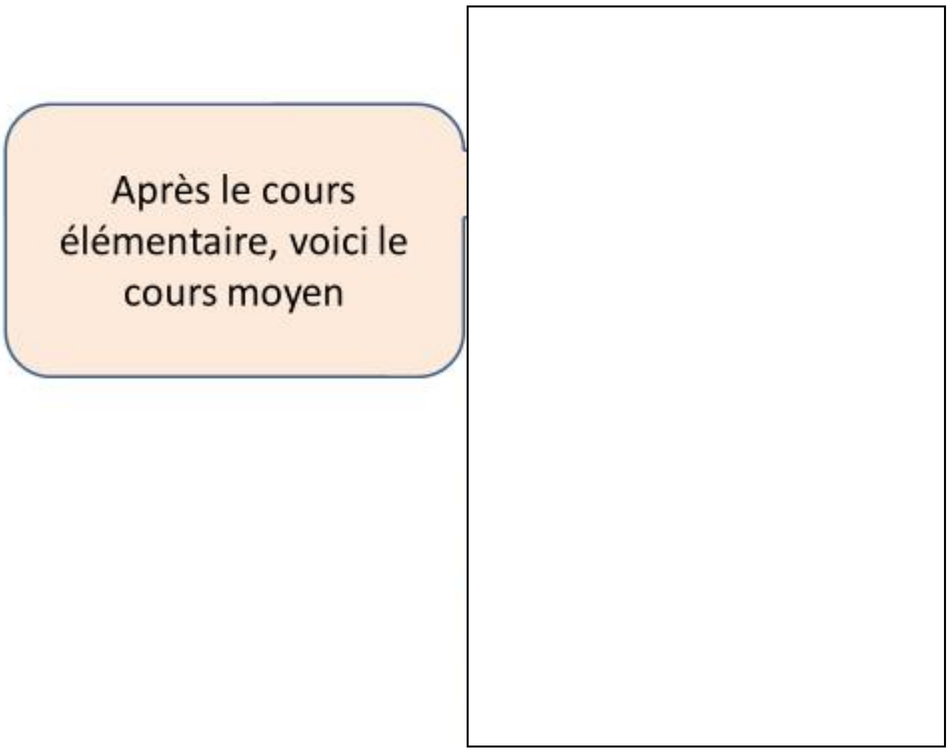
   La suite de la correction permettait de donner les mesures correspondant au « nombre flottant 10 dans la table des longueurs ». Voici comment a été institutionnalisée cette phase d'explicitation[253] :

[253] Prince Goudéa : https://www.louvre.fr/oeuvre-notices/gudea-prince-de-lagash-statue-assise-dediee-au-dieu-ningishzida
Statue d'Ebih-Il, nu-banda : https://www.louvre.fr/oeuvre-notices/statue-d-ebih-il-nu-banda



Représentation 3-5 : diapositive historique

Enfin, une diapositive contextuelle présentait le calcul d'aire. Dans le cadre d'une transmission à des élèves qui ne connaissent que très peu la Mésopotamie, des influences liées aux photographies choisies sont à prévoir. De même l'utilisation des termes « cours élémentaire » et « cours moyen ».



Représentation 3-6 : diapositive introductive de la tablette UM-29-15-192

La seconde partie de la séance visait la découverte de la tablette UM-29-15-192 sur l'aire du carré. La tablette était proposée en cunéiforme, un dictionnaire (lexique) était proposé pour aider à la traduction.

> Tablette surprise
>
> Cette tablette contient un exercice de mathématiques pour les scribes. Vous êtes maintenant capables de la déchiffrer entièrement !

Le titre était suivi d'une copie de la tablette UM 29-15-192 et d'un lien renvoyant vers le CDLI[254] où il est possible de voir la photographie et la copie de la tablette ainsi que les publications auxquelles elle a donné lieu. L'énoncé demandait alors :

> d) TRADUCTION
>
> Essayez de la traduire en vous aidant de la copie et du petit dictionnaire. La traduction des signes cassés doit apparaître entre crochets.

L'objectif de cette question était d'amener petit à petit les élèves vers la compréhension de l'utilisation des tables métrologiques dans le calcul de l'aire du carré. Je rappelle qu'ils maîtrisaient déjà la notation des nombres en cunéiforme. Le lexique permettait alors de traduire tous les signes non numériques. A ce stade, il leur était possible de s'interroger sur les zones de la tablette (calcul en haut à gauche et énoncé puis résultat en bas à droite). Ils étaient rentrés en contact avec une multiplication d'un nombre par lui-même et ce type de notation sur une tablette, ce qui devait faciliter pour au moins une partie des élèves la compréhension du fait qu'il s'agissait d'une multiplication. Il était aussi possible de commencer à s'interroger sur les valeurs (2 doigts et 20).

Du point de vue historique, il faut noter des choix :

-le lexique présente des légères variantes avec la tablette puisqu'elle a réellement été écrite par un scribe (avec sa propre graphie) ; les lexiques dont disposent les assyriologues correspondent à des « moyennes » entre les signes connus, sur de longues périodes de l'histoire. Nous aurions pu créer un lexique spécial issu de la tablette, qui aurait considérablement facilité le travail des élèves. Ici, il semblait possible de concilier un certain « attrait » pour la difficulté, historiquement réelle, auprès des élèves (argument pédagogique) et la découverte de la recherche en histoire.

-L'utilisation de la tablette brute devait amener l'élève à s'intéresser à la question, en se positionnant comme un assyriologue-découvreur. D'une part par la phase de déchiffrage, d'autre part dans la tentative d'explication du contenu de la tablette. Cette démarche d'investigation était liée à la fois à des objectifs historiques (comme lors des séances précédentes) et motivationnels. Elle permettait enfin d'entrer dans la diversité du système mathématique dans son ensemble, sans effacer les différences.

> e) OBSERVATION
>
> Comment la tablette est-elle mise en page ? Quelles sont les différences que vous voyez entre les deux zones ?

La question e) visait à faire expliciter aux élèves le fait que deux zones distinctes peuvent être repérées sur la tablette. Avant même de traduire, un historien des mathématiques cunéiformes y reconnaîtrait sans doute une tablette calculant l'aire d'un carré. C'était l'occasion d'aider des élèves qui auraient été mis en difficulté par la traduction : ils pouvaient déjà facilement

---

254 http://cdli.ucla.edu/

traduire les nombres (en haut à gauche). La question permettait aussi d'amener les élèves à expliciter la présence d'un calcul, d'un énoncé et d'un résultat ainsi qu'à se questionner sur les liens entre ces zones de texte.

Du point de vue historique, l'apprentissage de l'observation de la disposition spatiale est une compétence clé.

INTERPRETATION PERSONNELLE

f) Pourquoi à votre avis, trouve-t-on deux zones distinctes d'écrit (coin haut gauche, coin bas droit) ? Qu'est-ce qui se passe dans chaque zone selon vous ?

La question permettait à nouveau d'amener les élèves à expliciter la présence d'un calcul, d'un énoncé et d'un résultat ainsi qu'à se questionner sur les liens entre ces zones de texte. Elle nous permettait d'accéder à une trace écrite du raisonnement des élèves à chaque étape. Elle visait également à orienter au moins une partie des élèves vers la remarque que « 2 doigts le côté » ne donnent pas lieu à un calcul de type « 2 × 2 ».

g) Pensez-vous qu'il y a un lien entre les deux parties de la tablette ? Si oui, lequel et comment ? Si non, pourquoi ?

La question g) visait explicitement à interroger sur la différence entre le calcul en haut à gauche :

20

20

6 40

Et l'énoncé qui disait :

2 doigts le côté d'un carré

Sa surface combien ?

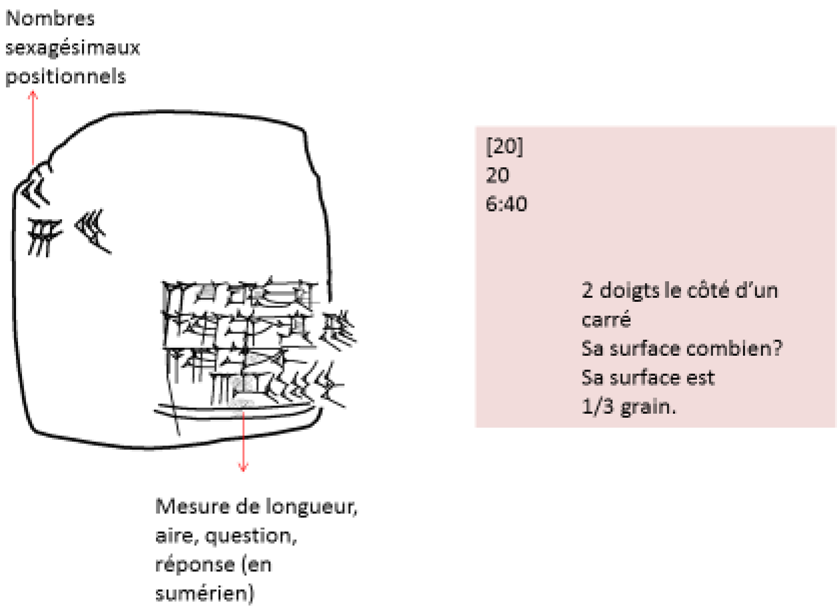
Sa surface c'est 1/3 de grain

L'élève pouvait répondre « non » en justifiant ainsi : la multiplication de 20 par 20 donne « 6:40 » mais le calcul attendu devrait être sur « 2 » puisque le côté est « 2 doigts ». L'élève pouvait aussi utiliser les tables métrologiques pour faire le lien entre 2 doigts et 20 (nombre en système SP). Ensuite il remarquerait naturellement que la multiplication de 20 par 20 donne 6:40 (multiplication déjà faite explicitement dans la séance précédente) et chercherait 6:40 dans la table métrologique des surfaces pour trouver « 1/3 grain » (correspondance déjà rencontrée explicitement lors de la séance précédente).

A ce stade, une correction était proposée au tableau pour la traduction de la tablette :

Représentation 3-7 : correction liée à la traduction de la tablette

Ainsi qu'une explicitation liée aux zones de la tablette :



Représentation 3-8 : diapositive pour les élèves : zones de la tablette

h) Parmi les documents qui vous ont été donnés, quels sont ceux que vous utiliseriez pour interpréter cette tablette ?

La question h) visait à aider les élèves qui n'auraient pas pensé à utiliser les tables métrologiques. L'élève pouvait nommer : la table de multiplication (20 multiplié par 20 donne 6:40) et les tables métrologiques de longueur et surface.

OUVERTURE

j) A votre avis, à quoi servent les tables métrologiques ?

La question devait aider les élèves restants, qui n'auraient pas pensé à utiliser les tables métrologiques pour interpréter la tablette. Elle nous permettait aussi d'avoir une trace écrite des élèves sur leur hypothèse finale de l'usage de ces tables. Nous avons fortement induit cette hypothèse.

La correction présentait alors ainsi l'utilisation des tables métrologiques pour calculer :

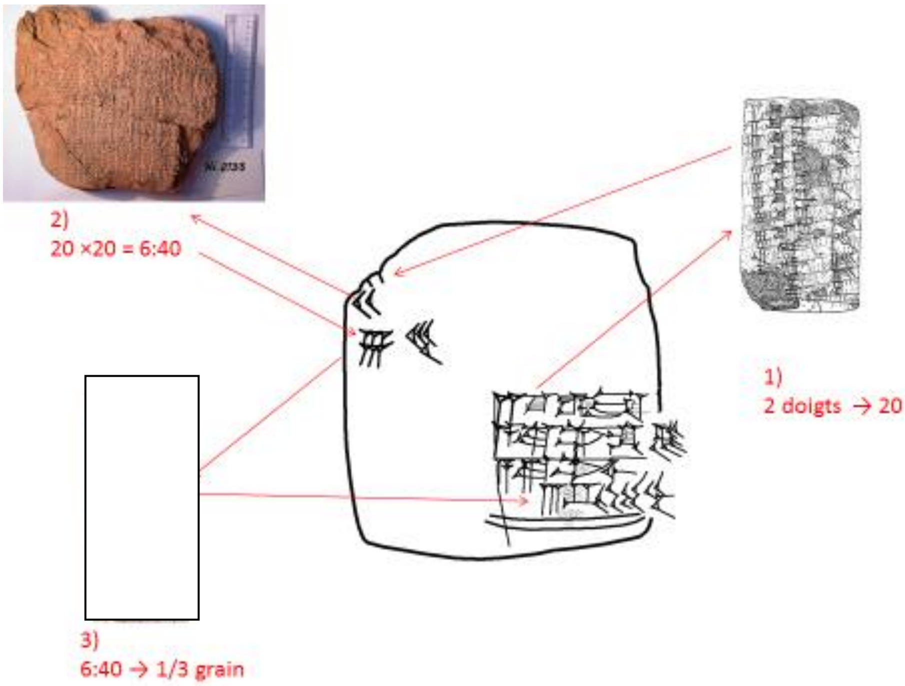
[20]
20
6:40

2 doigts le côté d'un carré
Sa surface combien?
Sa surface est
1/3 grain.

Longueurs	
1 doigt	10
2 doigts	20
3 doigts	30
4 doigts	40
5 doigts	50
6 doigts	1

Surfaces	
1/3 grain	6:40
1/2 grain	10
1 grain	20
2 grains	40
2 ½ grains	50
3 grains	1

Représentation 3-9 : diapositive pour les élèves : utilisation des tables métrologiques pour calculer l'aire



Représentation 3-10 : diapositive pour les élèves : explicitation des tablettes à utiliser pour résoudre l'algorithme

k) Pourriez-vous écrire exactement le même exercice avec un vocabulaire moderne ?

Cet exercice devait permettre d'observer plusieurs effets éventuels de la séance. Premièrement, la capacité des élèves à exprimer des étapes dans le calcul d'aire actuel. Deuxièmement, l'effet éventuel de la tablette sur la façon de nommer certaines étapes. Troisièmement, l'explicitation d'étapes « manquantes » dans l'algorithme actuel (ou supplémentaires dans l'algorithme ancien), autour de la mise en correspondance des mesures avec les nombres en système SP. Quatrièmement, des interrogations spontanées éventuelles liées à cette comparaison.

l) Pourriez-vous donner vos impressions et sentiments (libres) sur cet exercice ?

Cette question devait permettre de recueillir des interrogations spontanées (voir question précédente) ; ainsi que d'éventuelles impressions sur le système ancien de calcul de l'aire et les éléments qu'il fait ressortir dans la méthode actuelle. La question permettrait aussi offrir des résultats auxquels nous n'aurions pas encore pensé.

3.4 Programme annuel

Je présente ici le programme annuel de l'option découverte histoire des sciences au lycée Léonard de Vinci (classe de seconde). Les enseignants qui étaient présents sont présentés également.

Programme annuel de l'« option découverte » Histoire des Sciences

Lycée Léonard de Vinci à Levallois-Perret

Année 2014-2015

Première Période : les mathématiques dans le monde ancien (septembre-février)

Deuxième Période : l'astronomie à la Renaissance

(février-mars)

Troisième Période : naissance de la génétique aux XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles

(avril-juin)

Programme détaillé de la première période :

Première Période : les mathématiques dans le monde ancien (septembre-février)

19 Septembre : introduction générale à l'enseignement découverte (M.Husson, B.Jamin)

29 Septembre : histoire des mondes antiques 1 (avant Alexandre le Grand, raconté du point de vue mésopotamien) (B.Jamin)

Séances sur les mathématiques en cunéiforme :

30 Septembre : TD1 Ecole des scribes (C.Proust, M.Husson, B.Jamin)

07 Octobre : TD2 Calculs avec des jetons (C.Proust, M.Husson, B.Jamin)

14 Octobre : TD3 Tables métrologiques et systèmes d'unités de mesure (C.Proust, M.Husson)

04 Novembre : TD4 Calcul de l'aire d'un carré (C.Proust, M.Husson)

--

Séances « Euclide », préparation d'ateliers cunéiformes CM2, interviews :

18 Novembre : Histoire des mondes anciens (période hellénique et romaine, du point de vue mésopotamien) (M.Husson)

25 Novembre : Euclide 1 : le texte des *Eléments* (M.Husson)

02 Décembre : Euclide 2 : analyse d'une démonstration en demi-groupe + préparation d'ateliers cunéiforme (autre demi-groupe) + entretiens 1 (M.Husson et le remplaçant de B.Jamin)

09 Décembre : Euclide 3 : construction d'un carré d'aire donnée en demi-groupe + préparation d'ateliers cunéiforme (autre demi-groupe) + interviews 2 (M.Husson et le remplaçant de B.Jamin)

16 Décembre : séance du professeur de philosophie (supprimée)

06 Janvier : préparation d'ateliers en cunéiforme pour les CM2 + interviews 3 (M.Husson et le remplaçant de B.Jamin)

13 Janvier : préparation d'ateliers en cunéiforme pour les CM2 + interviews 4 (M.Husson et le remplaçant de B.Jamin)

20 Janvier : préparation d'ateliers en cunéiforme pour les CM2 + interviews 5 (M.Husson et le remplaçant de B.Jamin)

27 Janvier : l'astronomie à la Renaissance (M.Husson et le professeur de physique)

3 Février : l'astronomie à la Renaissance (M.Husson et le professeur de physique

6 Février : ateliers en cunéiforme pour les CM2 (M.Husson et B.Jamin)

4 Analyse a posteriori

4.1 Introduction

Je présenterai ici une partie des résultats de l'expérimentation en classe. Je vais détailler précisément ici ce que j'ai choisi de traiter pour la thèse et ce qui sera traité ultérieurement. Je présente également davantage de résultats en Annexe.

- Résultats écrits

Je ne traiterai ici que des résultats à la question « k », c'est-à-dire :

> k) Pourriez-vous écrire exactement le même exercice avec un vocabulaire moderne ?

Ce sont les plus révélateurs. Il s'agissait en effet d'avoir accès à une entrée en communication des deux algorithmes (ancien et actuel) chez les élèves, sans créer nous-mêmes des éléments de comparaison, (voir l'analyse *a priori,* 2 p.274).

J'ai ainsi choisi de ne pas utiliser les résultats des autres questions ici, mais ils avaient été analysés en détail et ceux-ci me servent à conclure que les groupes ont au moins « suivi » le déroulé de la séance et répondu correctement, ou sélectionné des informations pertinentes dans le discours de l'historienne au tableau, pour répondre aux questions. Les entretiens reviennent sur une compréhension plus profonde de la tablette.

La question « k) » n'a pas été corrigée au tableau. Elle donne accès à des traces de comparaison entre les algorithmes, qu'il faut analyser.

- Enregistrements des séances

Je ne traiterai pas ici des enregistrements des séances, mais il faudra compléter à l'avenir ces premiers résultats avec les enregistrements qui donnent accès à des moments spontanés de la découverte avec les sources.

- Entretiens

Je traiterai ici des résultats des entretiens, qui ont tous été transcrits (environ 15h), voir en Annexe. Pour exposer au mieux mes résultats, dans le contexte d'une expérimentation qui se révèle proche d'une étude de cas, j'ai choisi une approche mixte : des résultats globaux chiffrés, permettant notamment de comparer les deux groupes, ainsi que des extraits de débats plus individuels pour permettre de dégager des perspectives (voir par exemple l'approche de Clark, 2011).

- Séances en C.M.2

Je ne traiterai pas dans la thèse de cette partie des résultats qui reste à analyser. Cela pourra faire l'objet d'une publication ultérieure. En effet, ces séances donnent un accès intéressant à la compréhension des élèves, par le biais de la transmission. Les élèves de seconde devaient transmettre un aspect de leur choix aux élèves de CM2 (9-10 ans). Bien que des biais soient à envisager : les traces donnent accès à ce que les élèves de seconde pensent que les CM2 peuvent comprendre ; ce matériau permet un accès plus « direct » à leurs conceptions : sans ma présence, sans questionnement, en lien direct avec les mathématiques en cunéiforme. Je passe maintenant aux résultats écrits.

4.2 Les résultats écrits à l'exercice « k »

Je rappelle le contenu de la question. Les réponses sont données par groupe, chaque élève du groupe a répondu individuellement, les réponses individuelles sont numérotées.

k) Pourriez-vous écrire exactement le même exercice avec un vocabulaire moderne ?

Voici les réponses détaillées par groupe, pour chaque membre du groupe, avec les fautes éventuelles d'orthographe et la mise en page d'origine. Afin de donner un aperçu détaillé des mises en pages, je présente ici toutes les réponses pour chaque groupe (chacun ayant un nom de fleur). Elles sont ensuite synthétisées dans un tableau.

Groupe Alabama

1. [VIDE]

2. $3{,}4^2$ = 11,56 — Quelle est la surface d'un carré de 3,4 cm ? Sa surface est 11,56 cm

3. [VIDE]

Commentaire :

L'élève 2. de ce groupe a adopté la mise en page exacte de la tablette et a traduit « 2 doigts » en choisissant une valeur approchée de « deux doigts[255] » (*šu-si*), la valeur initiale de la tablette en cunéiforme (3,4 cm). Il a séparé les mesures du calcul. De ce fait il semble avoir vu que la conversion (mise en correspondance avec la table métrologique) était inutile (ou automatique) dans notre système métrique. Le résultat de la mesure d'aire est donné en centimètres.

Groupe Bellis

4. [VIDE]
5. Oui je pourrais… mais j'en ai aucunes idées
6. [VIDE]

Groupe Coquelicot

7. non

8. Quelle est la surface d'un carré de deux doigt côté

9. Quelle est la surface de deux doigts au carré ?
   Quelle est la surface d'un carré de 2 doigts au carré ?

10. oui: Quelle est la surface d'un carré de deux doigts de côtes ?

Commentaire :

Les élèves 8, 9 et 10 ne s'engagent pas dans la phase de « conversion » et ne donnent pas de résultat. Peut-être que cette absence de « partie gauche » de la tablette, témoigne d'une rencontre effective avec l'absence de conversion dans notre système. L'élève 9 a peut-être fait une tentative d'interprétation qu'il est difficile d'interpréter ici.

[255] Il leur avait été donné l'information suivante : doigt, unité de longueur (environ 1,7 cm)

Groupe Richelieu

11. Le côté d'un carré est de 2 doigts.
    Quelle est l'aire de ce carré ?
    Son aire est de 1/3 grain

12. Le côté d'un carré est de 2 doigts
    Combien est son aire ?
    Sa surface est de 1/3 grains

13. Soit Le côté d'un carré est de 2 doigts,
    Quelle est l'aire de ce carré ?
    Sachant que sa surface est de 1/3 grains !

14. Le côté d'un carré est de 2 doigts.
    Quel est sa surface
    Sa surface est de 1/3 grain.

Commentaire :

Les élèves 11, 12, 13, 14 de ce groupe a adopté la mise en page exacte de la tablette en bas à droite, et pas en haut à gauche. Ainsi, en gardant les valeurs de la tablette, les élèves ne s'engagent pas dans la « conversion » et il n'est pas possible de savoir s'ils interprètent une absence de conversion dans notre système. Peut-être que cette absence de « partie gauche » de la tablette, témoigne d'une difficulté à retranscrire l'absence de conversion dans notre système.

Groupe Heliopsis

15. [VIDE]

16. Quel est la l'aire d'un carré dont le côté est de 3,4 cm ?
    L'aire du carré est de 11,56 cm^2

17. Quel est l'aire d'un carré qui a pour côté 3,4 cm ?
    L'aire de ce carré est 11,56 cm^2

18. Si 2 doigts est le côté d'un carré combien vaut sa surface ?

Commentaire :

Les élèves 16 et 17 de ce groupe n'ont pas adopté la mise en page exacte de la tablette mais ont traduit « 2 doigts » en choisissant une valeur approchée (3,4 cm).

Ils n'ont pas séparé les mesures du calcul, mais de fait, ils ont pu constater que la conversion (mise en correspondance avec la table métrologique) était inutile (ou automatique) dans notre système métrique. Le résultat de la mesure d'aire est donné en centimètres carrés.

Groupe Tournesol

19. Soit un carré de 2 centimètres de côté
    Quel est sa surface ?

20. le côté d'un carré est de 3,4 cm.
    Quelle est sa surface ?
    Sa surface est $3{,}4^2$

21. [VIDE]

22. Je pense que ca serait dure de pouvoir transcrire exactement, le même exercice, avec un vocabulaire moderne.

Commentaire :

L'élève 19 a traduit la mesure de longueur en mesure de longueur en centimètres. La valeur numérique « 2 » a été choisie (peut-être en référence à « 2 » doigts).

L'élève 20 n'a pas utilisé la mise en page de la tablette mais a converti « 2 doigts » dans une valeur approchée et a peut-être donné une trace de « conversion en nombre » en enlevant l'unité de mesure pour le calcul (élévation au carré).

Groupes Magnolia[256] (1 et 2)

23. En sachant que 2 doigt est (la mesure du/au) le côté du carré
    Calculez sa surface.
    Sa surface est donc de 1/3 grain.

24. Oui : soit un carré de 5 cm de côté.
    Calculer son aire.

25. Le côté du carré vaut 3,4 cm
    Combien vaut sa surface ?
    Sa surface vaut 11 cm^2

26. Le côté du carré vaut 3,4 cm
    Combien vaut sa surface ?
    Sa surface vaut 11 cm^2

27. [VIDE]

28. Oui, on fait un tableau de conversion,

[256] Deux groupes avaient choisi le même nom de fleur. Les résultats par groupes seront différenciés par la suite.

par exemple ; 6 doigts = 3 gru

29. Soit un carré de 3,4 cm de côté. Quel est sa surface ?
(calcul : $3,4^2 = 11,56$)
Sa surface est 11,56 cm

Commentaire :

Les élèves 25 et 26 ont effectué une approximation de « 2 doigts » et ont arrondi le résultat de l'élévation au carré. L'élève 29 a effectué toutes les étapes de l'algorithme ancien.

L'élève 28 fait mention explicite de la conversion mais ne parvient pas à expliciter l'absence de conversion aujourd'hui. Il donne le résultat en centimètres.

Groupes Dietes

30. Calculer la Surface d'un carré de côté 9 cm ?
$4 \times 4 = 16$
Sa surface est de 16 cm^2.
Je penserais bien faire une table métrologique
avec des calculs différents et en sumérien.

31. exemple: carré de 2 cm de
côté = c^2
$= 2^2$
$= 4\ cm^2$

32. exemple: carré de 2 cm de côté = 1 c^2
$= 2^2$
$= 4\ cm^2$

33. [VIDE]

4.2.1 Résultats principaux

Je récapitule les résultats dans le tableau ci-dessous :

Nom des groupes	Pas de réponse	Seulement un énoncé, avec les valeurs de la tablette	Seulement un énoncé, avec des valeurs en cm	Présence explicite de « conversion » en nombre	Présence implicite de « conversion » en nombre	Utilisation de la mise en page de la tablette ou de tout l'algorithme ancien	Utilisation de la mise en page de la tablette (partie droite)	Utilisation uniquement des valeurs de la tablette	Mention explicite de l'idée de conversion ou de la table métrologique	Autre cas

Alabama	2			1		1				
Bellis	3									
Coquelicot	1	3						3		
Richelieu							4	4		
Heliopsis	1	1			2					
Tournesol	2		1	1			1			
Magnolia 1 et 2	1		1	1	2	1	1	1	1	
Dietes	1				1				1	2
TOTAL	11	4	2	3	5	2	6	8	2	2

Tableau 4-1 : synthèse des résultats à la question « k »

<u>Nombre de réponses à l'exercice</u>

Parmi les élèves présents ce jour-là :

22 élèves répondent à l'exercice.
11 élèves ne répondent pas :
8 élèves ne répondent pas du tout (vide complet) et 3 élèves font une « non réponse ».
Les non-réponses sont :

- « Oui je pourrais… mais j'en ai aucunes idées »
- « non »
- « Je pense que ca serait dure de pouvoir transcrire exactement, le même exercice, avec un vocabulaire moderne.

Au total, 11 élèves ne font donc pas l'exercice, ce qui correspond à environ 33%, soit une part importante des élèves.

<u>Nombre d'élèves ayant explicité toutes les étapes</u>

Aucun élève n'explicite l'absence de conversion dans l'algorithme actuel. En revanche, deux élèves utilisent la même mise en page que celle de la tablette ou tout l'algorithme :

Elève 29
Soit un carré de 3,4 cm de côté. Quel est sa surface ?
(calcul : $3{,}4^2 = 11{,}56$)
Sa surface est 11,56 cm

Ces deux élèves ont sûrement constaté « l'absence de conversion » dans le système actuel, du fait de l'explicitation des étapes :

Elève 2

$3{,}4^2$
$= 11{,}56$

Quelle est la surface d'un carré de 3,4 cm ?
Sa surface est 11,56 cm

Ces deux élèves (2 sur 22 soit environ 9%) ont choisi de garder et de traduire « 2 doigts » en une valeur approchée en centimètres. Le résultat est donné en centimètres également.

D'autre part, 4 élèves (4 sur 22 soit 18%) supplémentaires ont peut-être traduit l'absence de « conversion », ce sont ceux qui ont répondu par exemple :

Quel est la l'aire d'un carré dont le côté est de 3,4 cm ?
L'aire du carré est de 11,56 cm^2

C'est-à-dire qu'ils n'ont pas explicité la présence d'une absence de « conversion », mais qu'ils ont réussi à faire l'exercice sur des valeurs actuelles. Le fait qu'ils aient traduit « 2 doigts » les a conduits a montrer une forme de comparaison entre les systèmes (ancien et actuel). Malgré tout il est possible également qu'ils aient simplement écrit le calcul d'aire actuel sans réfléchir aux étapes des algorithmes : il est difficile de conclure.

Nombre d'élèves ayant potentiellement des difficultés à faire communiquer les systèmes

Ces élèves n'ont pas explicité la présence d'une absence de « conversion », ils n'ont pas utilisé de valeurs actuelles, ou s'ils les ont utilisés, ils n'ont pas donné de résultat.

-Un énoncé seul, avec les valeurs de la tablette : 4 élèves
-Un énoncé seul, avec des valeurs en centimètres : 2 élèves
-Un énoncé et un résultat, avec seulement les valeurs de la tablette : 8 élèves
Au total, 14 élèves sur les 22 qui ont répondu (environ 63%)

Un élève mentionne la conversion, mais n'arrive pas à expliciter l'idée d'absence de conversion (mise en correspondance)

4.2.2 Autres remarques

Choix des unités de mesure :

- 10 élèves choisissent d'utiliser les unités de mesure de la tablette cunéiforme (doigts, grains), soit un peu plus de la moitié.

9 sur ces 10 élèves utilisent « 2 doigts » comme dans la tablette.

L'élève qui utilise 6 doigts a répondu ainsi : « Oui, on fait un tableau de conversion, par exemple ; 6 doigts = 3 gru »

Cet élève fait allusion à la conversion mais il est malheureusement difficile d'en conclure davantage.

12 élèves choisissent de d'utiliser les unités de mesure actuelles. Dans ce cas il s'agit toujours du centimètre.

Remarque : aucun élève qui a répondu ne donne une mesure sans unité de mesure. Etant donné que cela arrive au contraire, fréquemment dans la partie « mathématiques actuelles » de l'entretien, cela correspond peut-être à une façon d'interpréter la consigne et d'écrire « à la manière » de la tablette cunéiforme ; à moins que les élèves n'aient été plus attentifs à ce qu'ils pensent être une exigence scolaire, à l'écrit que pendant les entretiens.

Choix des valeurs :

Parmi les 12 élèves qui ont choisi le centimètre, les valeurs sont :

3,4 cm (sept fois)
5 cm (une fois)
2 cm (trois fois)
9 cm (une fois)

La mesure 3,4 cm peut s'expliquer par une forme de traduction de la valeur donnée en cunéiforme (2 doigts). Il faut noter qu'il peut y avoir eu une circulation des idées d'un groupe vers l'autre. Les discussions entre groupes étaient possibles dans la forme adoptée (option découverte, cours/TD détendu).

La mesure « 5 cm » pourrait s'expliquer comme une valeur facile évidente dont on connaît le carré.

La mesure « 2 cm » pourrait faire écho à « 2 doigts ». C'est peut-être aussi une valeur facile évidente dont on connaît le carré.

Au total, seuls cinq élèves choisissent une mesure entière. Prenant en considération ce qui a été trouvé dans la partie « mathématiques actuelles » de l'entretien, le choix d'une valeur arrondie correspond encore une fois, à une façon d'interpréter la consigne et d'écrire « à la manière » de la tablette cunéiforme.

-Résultat pour les 7 élèves du sous-groupe « valeurs de la tablette en centimètres » :

- 11 cm^2 (deux élèves) pour cet arrondi[257] du résultat de $3,4^2$ (l'un des élèves donne le même texte que l'autre au mot près, pour cet exercice)
- 11,56 cm (deux élèves) et 11,56 cm^2 (deux élèves) soit un total quatre élèves pour cette valeur « exacte » du résultat
- On note également un « non résultat » : $3,4^2$

Mise en page :

Un seul élève propose une mise en page absolument similaire à celle de la tablette (Alabama) :

$3,4^2$	
= 11,56	Quelle est la surface d'un carré de 3,4 cm ? Sa surface est 11,56 cm

[257] Cet arrondi est pertinent pour des élèves de 2nde, on leur apprend en effet en cours de physique que si le nombre de chiffres significatifs des données initiales d'une multiplication est 2 alors le résultat doit être exprimé lui aussi avec 2 chiffres significatifs (selon cette règle il faut donc tronquer 11,56 cm^2 à 11 cm^2)

Six élèves utilisent la mise en page de la tablette pour la partie droite.

Calcul :

Seulement 4 élèves prennent en compte explicitement la partie calcul, présente en haut à gauche dans la tablette. Un seul de ces élèves fait partie du sous-groupe ayant utilisé les valeurs et unités de mesure de la tablette.

Formes d'expression du calcul :

1. Deux élèves présentent explicitement le calcul : l'élève mentionné ci-dessus (Alabama) qui explicite séparément : « $3{,}4^2 = 11{,}56$ »

et un élève du groupe Magnolia qui explicite en écrivant à part :
« (calcul : $3{,}4^2 = 11{,}56$) ».

Remarque : ces deux élèves ont enlevé les unités de mesure dans cette phase du calcul, ce qui pourrait correspondre à une tentative de coller à la tablette cunéiforme.

2. Deux élèves présentent implicitement le calcul dans le groupe Coquelicot : « Quelle est la surface d'un carré de 2 doigts au carré ? » (dans l'énoncé) et Tournesol qui propose : « Sa surface est $3{,}4^2$ ».

3. L'élève 30 du groupe Dietes peut avoir été influencé par la tablette, mais il est difficile de conclure. Le fait qu'il y ait une référence à la table métrologique peut indiquer cependant qu'il y a eu comparaison, mais il n'est pas explicité si elle a pu avoir fait l'objet d'un choix.

4. Deux autres élèves du groupe Dietes utilisent une formulation utilisant l'algèbre « c^2 » et « 2^2 » qui paraissent à première vue plus éloignées de la tablette.

En résumé, les élèves ont trouvé plusieurs façons de « transposer » l'exercice. Je liste les résultats ci-dessous, en fonction du nombre d'élèves :

-adaptation reprenant la syntaxe et vocabulaire de la tablette : 18/22 élèves

Le dernier élève a répondu autrement : « Oui, on fait un tableau de conversion, par exemple ; 6 doigts = 3 gru »

- utilisation du centimètre : 12/22 élèves, dont :

-adaptation sous forme de « Traduction » de « 2 doigts » en 3,4 cm (7/12 élèves)
-choix différent : 5 cm ou 9 cm (2/12 élèves)
-utilisation possible du « 2 » de deux doigts : 2 cm (1/12 élèves)
-mise en page reprenant celle de la tablette : 1/22 élèves
-formulation qui semble être éloignée de la tablette : 2/22 élèves

4.2.3 Conclusions

L'exercice a donné lieu à une forte abstention : au total, 11 élèves ne font pas l'exercice ce qui correspond à environ 33%, soit une part importante des élèves.

Deux élèves témoignent de ce qui semble être une prise en compte totale de tout l'algorithme ancien, et il est très probable qu'ils aient bien compris l'« absence de conversion » dans le système actuel et soient parvenus à la « traduire ». 4 autres élèves ont peut-être également saisi cette absence et sont parvenus à la traduire. Au total, 2 à 6 élèves sur 22 soit environ 27% maximum ont réussi à expliciter cet aspect.

Les autres élèves (soit au minimum 73%) semblent gênés, d'autant plus que des traces montrent que certains ont fait un effort de « traduction », mais ils se sont arrêtés au moment de la « conversion ». Il faut aussi signifier que 11 élèves supplémentaires n'ont pas répondu *du tout* à cet exercice.

Ainsi, ces traces écrites montrent que la communication spontanée entre les systèmes ancien et actuel ne semble pas être automatique, ou ne donne pas lieu à des éléments qui puissent être observés[258]. Les élèves semblent avoir perçu l'existence d'une conversion, mais ils sont gênés et ont du mal à l'expliciter en tant qu'« absence de conversion » dans le système actuel. Il est possible que la tablette fonctionne difficilement comme élément principal d'un milieu a-didactique. A ce niveau (2nde), si l'on veut renforcer la comparaison entre les deux systèmes, il semble qu'il faille guider plus les élèves, en attirant leur attention sur les points clés qui ont été mis en évidence dans l'analyse *a priori*. La communication entre les algorithmes elle-même nécessite d'être institutionnalisée. Il est possible que cette mise en communication institutionnalisée soit difficile à concilier avec les contraintes de la discipline historique.

4.3 Les résultats des entretiens

Ces premiers résultats sur les réponses aux questions écrites laissent pressentir certaines des difficultés des élèves dans la compréhension des différences entre algorithme ancien et actuel. Pour accéder de manière plus approfondie au mode de raisonnement des élèves, notre méthodologie prévoyait des entretiens successifs à la séance, dont je vais détailler ici les résultats.

4.3.1 Synthèse des résultats : partie « mathématiques actuelles »

La partie mathématique de l'interview avait deux objectifs majeurs : d'une part, de vérifier un certain nombre d'hypothèses sur les mathématiques actuelles, qui avaient été faites sur la base de l'analyse de manuels scolaires. Le fait que les résultats à un questionnaire écrit soient limités est connu et l'entretien était prévu pour analyser plus en détail la compréhension par les élèves de ces différents concepts, en étant à l'affut de traces éventuelles d'influence des mathématiques anciennes dans les mathématiques actuelles. D'autre part, elle permettrait de proposer un terrain favorable à l'émergence éventuelle de questions spontanées chez le

[258] Michèle Artigue me signale d'ailleurs que la situation ne favorisait peut-être pas assez une posture réflexive pour que les interrogations des élèves puissent donner lieu à des indices oraux qui soient observables. Je pense qu'il serait intéressant d'envisager un dispositif de type « narration de recherche » ou autre dispositif favorisant l'émergence d'éléments qui puissent être observés, à l'avenir.

groupe test, qui seraient liées à la découverte d'un fonctionnement mathématique différent dans le texte ancien. Je présente les résultats détaillés dans un tableau, en Annexe.

Calcul de l'aire d'un carré

Lorsqu'il est demandé aux élèves d'expliquer comment calculer l'aire d'un carré, la réponse attendue est quasi-unanime, donnée par les deux groupes : « la formule », de type « c × c » ou « L × l » : 95% du groupe témoin et 97% du groupe test. Comme cela était attendu, les écarts ne sont pas significatifs au test de Fisher.

Seuls deux élèves du groupe témoin proposent en plus de la formule, une alternative qui ressemble davantage à une « explication » : l'un propose une représentation « grille », et l'autre essaye de « remplir » à l'infini le carré avec des « lignes » horizontales.

Il faut aussi noter des erreurs dans la formule (6 élèves du groupe test, dont 3/4 faisant partie d'un même sous-groupe, Magnolia 2.

Ces constatations confortent mon hypothèse de l'oubli ou de la méconnaissance de la représentation « grille », que j'avais associée à la difficulté de faire un lien conceptuel entre l'unité de mesure « carreau » et l'unité de mesure dans la formule (voir analyse *a priori*, 2 p.274).

Justification de la formule

Lorsque la formule était donnée par l'élève, il lui était demandé de « dire pourquoi elle marche ». Nous pouvions nous attendre à des explications de type « grille » ou à un oubli de ce type de justification géométrique. Nous pouvions imaginer l'émergence de questions spontanées du type « je me demande pourquoi la formule marche » dans le groupe test, du fait de la rencontre avec la tablette.

La majorité des élèves présents des deux groupes n'ont pu donner d'explication. 61% des élèves du groupe test disent qu'ils ne savent pas, pour 17% du groupe témoin. Les autres proposent une réponse ou justifient leur absence de réponse.

Seul un élève propose, dans chaque groupe, une représentation « grille », à ce stade (5% du groupe témoin, 2,9% du groupe test). Un élève du groupe test propose aussi une explication liée à la proportionnalité entre longueur et aire[259]. Ce résultat renforce l'hypothèse d'une impossibilité à mobiliser la conception « grille » pour une proportion quasi-unanime des élèves.

Des élèves répondent en donnant les conditions d'application de la formule (11,5% dans le groupe test, pour 10% dans le groupe témoin, peut-être dans l'embarras de ne pas savoir répondre[260].

Les écarts sont significatifs au test de Fisher. Une légère nuance apparaît ici entre les groupes, dans la façon de ne « pas répondre à la question ». 0% des élèves présents du groupe test répondent qu'ils « ne savent pas » pour 25% dans le groupe témoin. La formulation « je n'ai pas de réponse supplémentaire » (par rapport à la formule) apparaît dans le groupe témoin à 20%, pour 17% dans le groupe test. 23% des occurrences de formulations dans le groupe test sont du type « on a appris comme ça » ou « on ne nous a jamais expliqué », catégorie qui apparaît à 5% dans le groupe témoin. Il est possible d'envisager que l'apparition de cette

[259] Pour le carré l'aire est proportionnelle au carré de la longueur.

[260] L'idée sous-jacente serait qu'il vaut mieux répondre quelque chose (même faux) plutôt que « rien ».

formulation dans le groupe test fasse écho à l'idée de questionnement spontané de notre analyse *a priori* et soit liée indirectement à la séance d'histoire des sciences[261]. Cela pourrait être par exemple, une trace de l'effet de la confrontation avec « d'autres manières de faire », qui inciteraient à envisager aussi « d'autres manières d'enseigner » et ainsi à prendre du recul, envisager qu'il existe une explication qui ne leur a pas été fournie.

Exemple avec des valeurs

Nous avions demandé aux élèves de donner un exemple avec des valeurs, pour étudier la place donnée aux unités de mesure dans la formule. Cette question devait amorcer les questions suivantes, plus poussées, sur le statut de l'unité de mesure et permettre l'émergence d'éventuelles questions spontanées. Elle devait aussi permettre de voir quelle place serait donnée aux trois formulations que nous avions repérées dans les manuels scolaires : calcul sans unités de mesure, calcul sur unités de mesure (de type : 2 cm × 2 cm = 4 cm^2) et formulation « hybride » de type : « 2 × 2 = 4 cm^2 ». Il s'agissait de pouvoir étudier ensuite quels objets mathématiques étaient représentés aux yeux des élèves, derrières les lettres.

Les deux groupes proposent une majorité de formulations hybrides (57% pour le groupe test et 40% pour le groupe témoin). Cela pourrait être dû au fait que la formulation propose une sorte de raccourci entre « calcul sans unités de mesure » et « énoncé du résultat », en une seule étape. Parfois, l'unité de mesure est présente sur un dessin (ex : « 2 cm »).

Les solutions sans unités de mesure sont présentes mais en proportion bien moindre (20% pour le groupe test, et 25% pour le groupe témoin). En revanche, le calcul sur unités de mesure est très peu utilisé (5,7% dans le groupe test et 5% dans le groupe témoin). A ce stade de l'expérimentation, il est difficile de conclure, si ce n'est que l'on constate la présence des trois formulations, mais dans des proportions très inégales, de manière homogène dans les deux groupes.

On peut donc penser que le texte ancien n'a pas eu un impact direct sur les notations (ce n'était pas un objectif), et les écarts ne sont pas significatifs. Mais la suite montrera des disparités lorsque des questions plus précises sont formulées sur les objets mathématiques. Il est tout de même possible de remarquer que la formulation hybride est la plus « floue » de toutes, quant à la précision des objets sur lesquels elle opère.

La multiplication donnée sans réponse, qui renforce l'idée que le calcul d'aire est assimilé à la seule étape de la multiplication, est présente à 22 ,8% dans le groupe test et 10% dans le groupe témoin.

Enfin, cette question semble avoir eu un effet spontané : deux élèves (inclus dans le compte) du groupe test proposent une formulation syntaxique très proche de celles du texte ancien, évidemment absente dans le groupe témoin :

« 5 cm est la longueur d'un côté
5 × 5 = 25
L'aire est de 25 cm^2 ».

L'existence de cette hypothétique similarité syntaxique offre sûrement une démonstration de la capacité du texte historique à pénétrer le domaine des mathématiques actuelles. D'autre part, elle témoigne peut-être d'une transformation plus profonde dans la compréhension des objets qui entrent en jeu dans l'algorithme, j'y reviendrai par la suite.

[261] Il faudrait le vérifier sur un échantillon plus large et de manière plus systématique.

Donner toutes les étapes du calcul comme une recette de cuisine

Pour cette question, il était demandé de donner toutes les étapes du calcul d'aire « comme une recette de cuisine ». Des différences auraient pu être observées dans le groupe test, qui aurait donné davantage d'étapes, du fait de la rencontre avec l'algorithme ancien. Des questions spontanées auraient pu également émerger, par exemple : « chez nous, il n'y a pas de conversion ». Les résultats ne sont pas significativement différents.

➢ Résultats[262] :

-35% des élèves du groupe témoin et 25,7% du groupe test donnent 4 étapes :
-mesurer/prendre le côté/la longueur ou donner la valeur d'un côté
-multiplier le côté/la longueur/la valeur ou « mettre au carré »
-donner l'aire/le résultat
-donner l'unité de mesure

-30% des élèves du groupe témoin et 28,6% du groupe test donnent 3 étapes (dont 1 élève, du groupe témoin, sur un exemple numérique) :
-mesurer/prendre le côté/la longueur
-multiplier le côté/la longueur/ ou « mettre au carré »
-donner l'aire/le résultat
dont 4 élèves du groupe test donnent une justification liée aux conditions d'application de la formule (« parce que chaque côté a la même longueur ») ; dont 1 élève du groupe témoin donne ces étapes en faisant référence à l'unité de mesure

-15% des élèves du groupe témoin et 11,4% des élèves du groupe test donnent 2 étapes :
-mesurer/prendre la valeur du côté/la longueur
-multiplier la valeur/la longueur/ ou « mettre au carré » dont 1 élève du groupe test ajoute qu'il faut tracer un carré en utilisant l'image du « L »

A2 : ben on trace un carré

C : oui ?

A2 : heu… on prend heu la longueur heu une longueur d'un carré, une autre longueur d'un carré, et il faut qu'elles soient… faut qu'elles se touchent, 'fin j'pense

C : d'accord, là tu as fait le « L » [avec les doigts]

-1 élève soit 5% du groupe témoin donne ces étapes en faisant référence à l'unité de mesure

---

[262] Autres résultats du groupe test :
-10% des élèves donnent 1 seule étape :
-multiplier les côtés
-2 élèves disent qu'il faut appliquer la formule
-1 élève dit qu'il faut multiplier le côté par 2
-1 élève ne propose pas du tout de multiplication: « tracer un carré de périmètre 12 cm, trouver la longueur d'un côté puis calculer son aire. Vous devriez trouver 16 cm^2 »
-1 élève répond que l'explication dépend de l'âge de la personne à laquelle on s'adresse
-1 élève essaye de justifier « moi j'dirais les deux côtés, qu'on reprend 'fin… qu'on remet en deux fois. »

-10% des élèves du groupe témoin ne répondent pas, pour 14,3% du groupe test

-1 élève soit 5% du groupe témoin insiste sur la formule :
« - En premier on écrit la formule de l'aire du carré,
- Ensuite on remplace par les valeurs
- Puis on fait le calcule »

Les résultats sont assez homogènes : les deux groupes proposent en majorité, deux à quatre étapes. La seule différence notable est que deux élèves du groupe test font appel au cadre géométrique (« on remet les côtés en deux fois », « côté × côté ça fait un L »). Les questions spontanées envisagées en lien avec le détail des étapes n'apparaissent pas.

Qu'est-ce que l'on multiplie ?

La question « est-ce que le « 5 » dans 5 cm est le même que le « 5 » dans 5 × 5 ? » [question adaptée aux valeurs choisies par l'élève] a permis de donner plus de détails, les différences sont significatives.

Les résultats montrent en effet une disparité entre le groupe test et le groupe témoin. Les élèves du groupe témoin ont répondu à 62,5% que c'étaient « les mêmes ». Cette réponse se trouve à 11,4% dans le groupe test. La distinction entre les données comme la longueur et les valeurs qui entrent en compte dans le calcul est exprimée par 25% du groupe témoin et 8,6% du groupe test. Les élèves du groupe test ont répondu à 62,9% que l'on calcule sur des nombres qui « représentent quelque chose ». Ils expriment l'idée d'une « trace » du « côté » ou de la « longueur ». Dans le texte ancien, le nombre (en système SP), semble au contraire ne pas représenter la longueur. Ici le nombre n'est pas présenté comme « indépendant » par les élèves, comme c'est le cas dans la tablette. D'ailleurs, c'est justement l'intérêt du système métrique actuel. Mais, ici c'est intéressant, les élèves expriment la capacité du nombre à « représenter plusieurs choses ». Il est possible que nous ayons accès à une trace de communication entre les mathématiques anciennes et actuelles.

En revanche, aucune remarque spontanée plus explicite du type « ah mais c'est vrai que chez nous c'est « les deux » ! » n'est apparue.

Enfin, cette question a aussi permis de lever un débat dans l'un des groupes test, la formule de l'aire du carré, opérant sur « un côté » ; les formules de l'aire du triangle et surtout du cercle (qui n'a pas de côtés) ne semblent pas relever pour eux du même type d'opération. Ici, l'expérimentation et le texte historique qui a inspiré nos questions, ont permis indirectement d'expliciter comment les objets mathématiques interfèrent avec l'interprétation des domaines d'application de la formule. Cette difficulté conceptuelle montre aussi à quel point l'identification des objets d'une opération ou d'un algorithme (qui prend ici en entrée un « côté » plutôt qu'un nombre de carreaux), rend mathématiquement difficile l'accès au sens profond de l'opération.

Les questions spontanées envisagées du type « Pourquoi on multiplie des « centimètres ? », « que fait la multiplication ? », « pourquoi notre multiplication donne la mesure d'aire directement ? », « pourquoi cm × cm = cm^2 ? » ; n'ont pas été observées.

Pourquoi on met le cm^2, ici ?

Je faisais l'hypothèse d'une difficulté générale à expliciter le choix de l'unité de mesure, du fait entre autres, d'une utilisation automatique de l'unité de mesure d'aire « correspondant » simplement à l'unité de mesure de longueur associée. Cette difficulté se retrouve probablement dans les nombreuses erreurs constatées lors des réponses écrites (TD et entretiens, du type : expression de la mesure d'aire en centimètres ou oubli de l'exposant « 2 » de cm^2). Les différences sont significatives.

J'envisageais que le groupe test donne moins de réponses du type : « je mets « cm^2 » parce que j'ai pris « cm » au début. » Des questions spontanées du type : pourquoi associer 4 à « 4 cm^2 », associer « 2×2 » à une mesure d'aire « 4 cm^2 », pourquoi « $cm \times cm = cm^2$ » ? « pourquoi c'est facile d'ajouter juste « cm^2 » à la fin ? », « pourquoi il n'y a pas de conversion », « pourquoi on peut utiliser les mêmes nombres, nous ? », auraient pu émerger davantage dans le groupe test.

Les élèves du groupe témoin et du groupe test ont majoritairement exprimé le fait que l'unité de mesure sert à « indiquer qu'il s'agit d'une aire » (45% du groupe témoin, 40% du groupe test). Cette réponse renforce mon hypothèse d'une unité de mesure « dé-mathématisée », qui sert uniquement d'indication de « contexte », de façon littéraire. 10% des élèves du groupe témoin et 17% du groupe test rappellent que c'est « parce que $cm \times cm = cm^2$ ». Le calcul aux dimensions qui est un effet (utile) du système métrique devient un objet de justification. Cette explication de type « formule » remplace ainsi probablement l'action d'étalonner (mesurage) dans la tentative de donner du sens à la formule, qui n'en a plus ou pas (la « grille » ayant été oubliée ou étant méconnue).

Une différence est notable puisque 25,7% du groupe test et seulement 1 élève du groupe témoin soit 5% disent que « l'unité de mesure d'aire dépend de l'unité de mesure de longueur choisie ». Il est étonnant de trouver cette différence, puisque le texte historique présente des unités de mesure de longueur construites justement, indépendamment du système d'unités de mesure d'aire. Si l'effet est réellement lié au texte ancien (je rappelle que la formulation existe dans certains manuels scolaires), alors il est possible qu'il les ait amenés à expliciter ce lien.

Qu'est-ce qu'un cm^2 ?

Lorsqu'il est demandé ce qu'est « un centimètre carré », les différences sont significatives. Les élèves du groupe témoin répondent majoritairement « une surface » (31,25%), et 18,25% des élèves répondent « un carreau ». En revanche, 48,6% des élèves du groupe test parlent directement du carreau ou d'un carré. L'esprit est peut-être le même pour ces réponses, la « surface » étant probablement considérée comme un carreau pour beaucoup d'entre eux. Les catégories que j'ai distinguées ne sont peut-être pas légitimes.

D'autre part, l'idée de carreau ne signifie pas que les élèves mobilisent l'idée de « reporter » ni la « grille ». On trouve en faible proportion dans les deux groupes l'idée « un centimètre multiplié par un centimètre », reliant « multiplication » et construction géométrique. Parfois, les élèves font un « L » avec leurs doigts. Le calcul aux dimensions devient un objet de justification qui est interprété dans le cadre géométrique. Parfois ils entament une discussion sur la « (petite) taille » du centimètre carré.

On retrouve seulement deux fois, dans le groupe test, une référence à l'utilité pour « mesurer », et donc une référence indirecte à l'étalonnage, liée au centimètre carré.

Des questions spontanées du type : « pourquoi chez nous les unités de mesure ont le « même nom » ? » n'ont pas émergé.

Là il y a des longueurs et là, des surfaces ; à quel moment on est passé de l'un à l'autre ?

Cette question pourrait faire état d'une imprégnation du texte historique. Pourtant, il n'est pas possible de conclure statistiquement puisque le test de Fisher ne donne pas une différence significative. 75% des élèves du groupe témoin disent que le « passage » se fait pendant la multiplication, pour 62,8% des élèves du groupe test. Le résultat est légèrement moins élevé et l'on voit émerger une nouvelle option : « au moment du résultat » chez 14,3% des élèves du groupe test et 1 élève du groupe témoin (5%).

Les formulations de type « juste après la multiplication/entre calcul et résultat » ou « à cause de ce que l'on multiplie » sont minoritaires, dans les deux groupes.

L'émergence d'une nouvelle option pourrait s'expliquer par la rencontre avec le texte ancien : après le calcul, sur des nombres « flottants », il faut chercher la « mesure d'aire » dans la table métrologique, c'est peut-être le « moment du résultat », qui est alors énoncé. Il faut noter que cet effet, qui ne concerne qu'un nombre limité d'élèves, n'a pas mené à des questions explicites quant à « l'absence de conversion » comme nous l'attendions. Ainsi, l'effet (présent) probablement lié au texte historique, reste latent, discret et ne donne pas lieu à des interrogations spontanées.

La piscine

Cette question visait à vérifier si dans un contexte où la grille était présentée directement aux élèves, ceux-ci préféraient fait appel au compte de carreaux par multiplication, ou s'ils favoriseraient le calcul d'aire puis la division par l'aire d'un carreau (qui nous paraissait plus compliquée). Nous nous attendions à des résultats similaires dans les deux groupes. Voici la question :

> Je vous donne un exercice, ce n'est pas pour connaître votre niveau en mathématiques. On a une piscine carrée, de 20 cm de côté. Une piscine pour souris. Et au fond, on voudrait mettre des carreaux d'un centimètre de côté. Combien de carreaux faut-il pour remplir le fond de la piscine ?

Dans le groupe témoin, 70% des élèves utilisent la formule pour calculer l'aire, puis divisent par l'aire d'un carreau (avec une erreur pour un élève). 15% font appel la représentation « grille » mais n'arrivent pas à conclure. Le reste des élèves ne répond pas. Dans le groupe test, 60% font appel à la formule puis à la division. La différence est statistiquement significative. 40% des élèves du groupe test font appel au compte de carreaux, mais souvent grâce à l'aide de l'un des camarades du groupe, les autres élèves étant restés sans solution au départ.

Ainsi les réponses confirment que le recours à la grille n'est pas ou plus naturel. S'il est envisageable que le contrat didactique les ait poussés vers le calcul d'aire, la question semble pourtant induire très clairement vers la multiplication pour connaître le nombre de carreaux. Or, ce n'est pas ce qui est favorisé. Même si certains élèves utilisent peut-être le calcul d'aire (puis la division), tout en mobilisant le cadre géométrique, il est fort probable que le non-recours à la multiplication soit plutôt lié à la préférence du recours au registre symbolique par rapport au registre des figures.

Ce résultat pourrait être un symptôme d'un passage à la formule qui a été mal négocié, générant un abandon du cadre géométrique qui devenait conflictuel avec la représentation liée à la formule (voir p.238).

A ce stade, il a été demandé à nouveau aux élèves « pourquoi la formule marche ». Nous avions fait l'hypothèse que quelques élèves retrouveraient alors (ou découvriraient) l'explication « grille » après l'exercice (suggestif) « piscine ».

C'est le cas pour 4/20 élèves du groupe témoin et 7/35 élèves du groupe test, soit des effectifs restreints. Cela semble confirmer notre hypothèse de la perte chez une majorité d'élèves (du groupe témoin comme du groupe test) de cette justification de la formule de l'aire du carré par la grille, grille pourtant présente dans bon nombre de manuel (nous faisons ici l'hypothèse que la plupart des élèves ont été confrontés à cette grille au cycle 3).

Conclusion pour cette partie mathématique :

D'une manière générale, les résultats révèlent deux points importants : d'une part les hypothèses sur les difficultés associées à la compréhension par les élèves de l'algorithme de mesure de l'aire d'un carré paraissent majoritairement vérifiées. D'autre part, les effets du texte historique semblent laisser des traces de modifications conceptuelles, mais elles ne donnent pas lieu à explicitation par les élèves. Les résultats écrits à la question « k[263] » laissaient envisager cette possibilité qui est confirmée par les entretiens. Les questions spontanées n'apparaissent pas, les indices indiquant des prémisses de modification de conception sont ténus.

La perte du souvenir de la grille justificatrice paraît confirmée dans les deux groupes. La formule de calcul d'aire du carré est retenue mais peut faire l'objet d'erreurs. Dans le cadre d'une impossibilité à la justifier, les élèves font appel à une formulation du type « c'est comme ça », ou à des erreurs de logique : les conditions d'application de la formule sont parfois données comme justification. Une nuance statistiquement significative apparaît entre les groupes, dans la façon de ne « pas répondre à la question ». 23% des occurrences de formulations dans le groupe test sont du type « on a appris comme ça » ou « on ne nous a jamais expliqué », catégorie qui n'apparaît pas dans le groupe témoin. Une hypothèse serait que la rencontre avec l'histoire des sciences favorise l'idée que les mathématiques sont justifiables. Auquel cas la question donnerait un accès très indirect à cette idée. Bien sûr, il faudrait d'autres études pour étudier plus explicitement ce phénomène. Cette différence pourrait indiquer une prise de conscience d'une impossibilité à « justifier ». L'effet obtenu concernerait alors la « nature des mathématiques », et les questions mathématiques de l'entretien permettraient d'y accéder, indirectement.

Une autre différence statistiquement significative est constatée puisque lorsqu'il est demandé pourquoi indiquer « cm^2 », 25,7% du groupe test et seulement 1 élève (5%) du groupe témoin disent que « l'unité de mesure d'aire dépend de l'unité de mesure de longueur choisie ». Le texte historique présente des unités de mesure de longueur construites inversement, indépendamment du système d'unités de mesure d'aire. Cette remarque des élèves pourrait avoir été émise du fait de la constatation d'une différence.

De plus, la question du passage de « longueur à surface » a fait émerger des distinctions dans le groupe test, qui a peut-être été influencé par l'algorithme ancien (les données ne permettent de conclure statistiquement). Mais à aucun moment des questions explicites, spontanées, n'émergent sur ce point. L'hypothèse de la perte du souvenir de la grille (cadre géométrique) est largement renforcée par l'exercice de la « piscine » où il était « plus

[263] Laurent Theis remarque qu'il pourrait s'agir également d'un effet de contrat, lié au vocabulaire de « recette de cuisine » qui pourrait être vue comme une réduction au plus efficace plutôt qu'une explicitation, malgré la demande de marquer des étapes.

naturel » de compter les carreaux que de calculer l'aire du fond. Après cet exercice, un petit nombre d'élèves des deux groupes expliquent l'aire du carré par la « grille ».

Les effets du texte ancien semblent donc confirmés, mais peu explicités. Les questions spontanées envisagées n'apparaissent pas. De même que dans les traces écrites, où l'absence de conversion donnait lieu à une impossibilité pour beaucoup, de comparer les algorithmes. Ici les questions qui nécessitent une forme d'explicitation, n'émergent pas. En revanche, dans les traces écrites, des formes d'influences ont pu être constatées. Pour au moins deux des élèves, il y avait même comparaison complète des algorithmes à la question « k ». Lors des entretiens également, des traces d'influence par le texte ancien sont observables. Du point de vue des étapes de l'algorithme, l'un des groupes semble réutiliser la formulation « par étapes », de l'algorithme ancien, lors de l'entretien. Ceci indique peut-être une prise de conscience conceptuelle sur les nombres et de fait, l'absence de conversion.

Les réponses à la question « qu'est-ce qu'on multiplie » sont statistiquement significatives d'une différence. Le groupe test (62,9% à 0%) semble mobiliser davantage l'idée que le nombre « représente quelque chose », une trace de « côté » ou de « longueur ». Le concept de nombre apparaît dans le langage des élèves relié à une forme de pluralité. Cela montre peut-être aussi le résultat d'une comparaison avec l'algorithme ancien, dans lequel les nombres en système SP peuvent difficilement être assimilés avec d'autres objets, ils ne représentent pas de quantité (perte de l'ordre de grandeur).

Un débat sur la comparaison des formules d'aire (triangle, cercle) est apparu spontanément dans un groupe, donnant lieu à une problématique liée aux objets : est-ce que le côté représente un segment ou autre chose ? Ce débat confirme l'importance de la réflexion sur les objets qui entrent en jeu dans l'algorithme et le fait qu'ils ne soient pas clarifiés.

Malgré la perte générale du souvenir de la grille, l'unité de mesure est spontanément associée au carreau (ou à une surface, plus généralement). Les difficultés envisagées en lien avec cette représentation sont confirmées : on trouve l'expression suivante : « cm × cm = cm^2, et ça fait le carreau ». L'idée de carreau ne signifie cependant pas que les élèves mobilisent de reporter l'unité de mesure, ni l'utilisation d'une grille (dans un cadre géométrique). De plus, elle semble majoritairement associée à une indication littéraire contextuelle (« indiquer qu'il s'agit d'une aire »), à 45% dans le groupe témoin et 40% dans le groupe test. Pour tous, les objets sur lesquels l'algorithme de calcul opère ne sont pas identifiés clairement, et le concept d'unité de mesure n'est pas, ou plus, relié spontanément à l'idée de reporter un étalon (mesurage). Je rappelle qu'une différence était notable ici puisque le groupe test (25,7% pour 5% dans le groupe témoin) exprime l'idée « d'unité de mesure d'aire qui dépend de l'unité de mesure de longueur choisie », peut-être par contraste avec le texte ancien.

En définitive, les résultats de cette partie mathématique montrent d'une part, que la présence de difficultés envisagées (dans les mathématiques actuelles) est vérifiée dans les deux groupes et concerne des aspects épistémologiques, en lien avec l'algorithme et ce qu'il représente.

D'autre part, les mathématiques du texte ancien affectent effectivement la perception des mathématiques actuelles, et ce sur les objets mathématiques prévus. Cet effet est souterrain, difficile à expliciter par l'élève, et il ne touche pas toute la classe de la même façon. De plus, les traces sont fines et les indices difficiles à identifier (bien que plusieurs fois statistiquement significatives).

Les questions sur les mathématiques pourraient avoir donné accès à un autre changement, significatif, dans la conception qu'ont les élèves des mathématiques, du fait de la rencontre avec l'histoire. Ce changement concernerait alors « nature des mathématiques ». Les élèves considéreraient davantage que les affirmations mathématiques ont une justification.

Le rôle du professeur de mathématiques (et du professeur d'histoire, j'y reviendrai) dans l'institutionnalisation, la réutilisation de la séance d'histoire de sciences est peut-être particulièrement important. Des précautions doivent être soulevées, car le terrain sur lequel il se base est alors implicite, et n'affecte pas tous les élèves uniformément.

Si l'enseignant provoque lui-même des comparaisons entre les algorithmes ancien et actuel, il peut se heurter à des contraintes du point de vue historique. La spécialiste avait spécialement évité d'institutionnaliser ces comparaisons. La question sera donc : comment s'assurer que le texte ancien puisse avoir des effets sur lesquels rebondir ? Existe-t-il une forme d'explicitation supplémentaire, qui soit compatible avec les contraintes historiques ?

Les conditions de communication entre algorithme ancien et actuel, en particulier la constatation des « absences » (ici, de l'étape de conversion) dans notre système, ne sont pas automatiques. De plus, faciliter cette communication est difficile, si l'on souhaite préserver la spécificité du texte ancien.

4.3.2 Partie « nature des sciences » (historique, mathématique)

Je vais détailler ici les questions qui ont été posées aux deux groupes (test et témoin) concernant les mathématiques et l'histoire.

Qu'est-ce que les mathématiques ?

Pour traiter la question « qu'est-ce que les mathématiques », j'ai utilisé pour le groupe test, les critères relevés indirectement par les élèves pour décider si ce qui a été rencontré en Mésopotamie est considéré comme mathématique ou non[264]. La question était : « est-ce que c'est des mathématiques ce qu'ils font en mésopotamie ? »[265]. La comparaison n'est pas scientifiquement complètement légitime. Pourtant, la majorité des catégories se retrouve dans les deux groupes, selon cette méthode. De plus, il est sûrement difficile d'avoir accès à autre chose que des réponses très générales, vagues, avec des questions si ouvertes.

30,3% des occurrences dans le groupe témoin pour 3,6% dans le groupe test font appel au caractère logique des mathématiques. La formulation de la question ou la séance, ont pu avoir un effet sur cette catégorie. Le caractère « utile » des mathématiques est exposé par 21,2% des occurrences du groupe témoin pour 14,3% dans le groupe test. La catégorie : « le calcul et les opérations / la géométrie », émerge à 7% dans le groupe témoin mais 50% dans le groupe test. D'autres catégories se trouvent en minorité, dans l'un des deux groupes.

Quelques discussions sur l'apprentissage par cœur « sans réfléchir », émergent dans chaque groupe. Elles sont peut-être liées aux questions que nous avons posées sur la formule en début d'entretien.

Le nombre de débats est légèrement plus élevé dans le groupe test (3 pour 1). L'un des débats concerne une compréhension partielle du travail du scribe, qui est assimilé à un travail « par cœur » sans réflexion.

Il faut noter aussi des remarques aux autres questions posées au groupe test, qui vont dans le sens d'une assimilation du travail sur l'aire du carré ancien au niveau actuel de primaire et collège est conforme à une tendance qui se retrouve même chez certains historiens, et que j'ai repérée par exemple, dans mon travail sur D.E. Smith (2016). Comme les débats sont importants dans d'autres questions posées uniquement au groupe test, il est envisageable que l'histoire ait eu un effet sur la richesse, le nombre d'arguments et de débats spontanés, ainsi que leur complexification, lorsque des discussions sur la « nature des sciences » sont lancées. Là aussi, il y a peut-être une réutilisation possible, en histoire ou en philosophie, de ce terreau. Ce qui est intéressant, c'est que dans ce cadre la relation à l'histoire est utilisée pour parler des mathématiques, (6 occurrences) : « les mathématiques c'est vieux », « ça n'a pas toujours été si uniforme », « ça a évolué ». Même si certains arguments sont, il faut en prendre note, associés à une forme de condescendance, il peut s'agir d'un effet de la confrontation avec des épisodes d'histoire des sciences.

---

[264] Que la réponse soit « oui » ou « non », j'ai gardé seulement le critère de classification.

[265] En effet, le manque de temps pour terminer les débats avait affecté le nombre de sous-groupes ayant répondu à la question « qu'est-ce que les mathématiques ».

Qu’est-ce qui est important quand on présente un texte historique ?

La question « qu’est-ce qui est important quand on présente un texte historique » a été méthodologiquement intéressante. La réflexion semble liée pour les élèves à la question précédente sur l’histoire des sciences, et certains élèves réfléchissent à ce qu’ils trouveraient important à dire dans un cours d’histoire *des sciences*. Les réponses dans les deux groupes, sont majoritairement portées sur le fait de « donner des précisions de contexte » sur la source.

Des catégories relevant du groupe témoin comme « présenter les étapes de la recherche, le processus de réflexion » (6 occurrences) en histoire des sciences, ou faire référence au présent, ce qui a « servi » (5 occurrences) (ex : en quoi ces trouvailles sont-elles utiles aujourd’hui ? Comment utiliser l’histoire pour s’améliorer ?) sont absentes dans le groupe test. Une hypothèse serait que les conceptions des élèves sur les possibilités d’utilisation de l’histoire des sciences ont changé dans le groupe test. Le thème des erreurs, de la fiabilité de la source, est évoqué de manière minoritaire dans les deux groupes (4 fois dans le groupe témoin, 1 fois dans le groupe test).

Le groupe test propose sept « discussions complexes » qui ne sont pas présentes dans le groupe témoin :

1. Questions sur le statut de la source par rapport à l’éventuelle subjectivité de l'auteur (recul nécessaire):

S1: Eh bien, par exemple, si nous écrivions pendant la guerre, les pays adversaires n'auraient pas la même version. Donc, si le texte a été écrit dans un pays ... ce n'est pas ... valide. [...]

2. La difficulté et le besoin (ou non) de connaître l'auteur en fonction du type de source:

S2: Ce que je veux dire, c'est que l'auteur n'est pas essentiel dans tous les documents, pas dans tous les types de documents. [...]

Eh bien, je veux dire pour un roman, pour un article et tout, d'accord, nous en avons besoin, je suis d'accord avec S3.

Moi: Pourquoi?

S2: Parce que hum ... pour savoir, pour la culture, pouvoir comparer ... avec d'autres [...] mais hum par exemple un problème de maths, vous ne vous demanderez pas ... qui l'a écrit, je veux dire ... que ce soit ta grand-mère ou un gars que tu as croisé.

S3: Un problème mathématique, c'est différent et ... [inaudible] [...]

S3: Le texte sera célèbre et le problème ne le sera pas parce que le problème ... Cela dépend du type du texte. [...]

3. La fiabilité du contenu scientifique du texte, avec le risque d'apprendre quelque chose d’incorrect. Cela pourrait peut-être appartenir à l'une des facettes de ce qui a été décrit comme "dépaysement" (Barbin 1997, Guillemette 2015) :

S5: Eh bien ... si la source n'est pas fiable, je veux dire ... si cela n'a pas été démontré, nous ne pouvons pas leur donner [aux étudiants] quelque chose ... qui pourrait être faux.

S5: Hum ... si on découvrait par la suite qu'en fait ce calcul ... ne fonctionnait pas ou [...]

S5: Cela nous ferait faire un pas en arrière, n'est-ce pas? [des rires]

Moi: Cela vous fait prendre du recul?

S6: Eh bien peut-être que ça peut aussi nous faire progresser, parce que nous savons déjà que ce n'est pas correct, alors on peut déjà en retirer une ... [...] hypothèse hum ... [...]

S5: Je veux dire si c'est faux et qu'on le sait, c'est bon. Cependant, si nous pensons que c'est vrai et que nous l'apprenons...

Moi: Vous avez peur d'apprendre quelque chose de faux?

S5: Exactement.

4. Nuances concernant le rôle de l'historien, également lié à une certaine forme de dépaysement ; et impressions que l'interprétation se dessine à partir d'un consensus :

S7: parce que, hum ... chaque historien doit avoir eu une hypothèse, ils ont essayé et tout ... et hum ... ils ont vu ce [signe cunéiforme] qui signifie "1" et essayé sur plusieurs tablettes et ainsi ... ce hum ... les a amenés à croire que cela signifiait 1.

S8: Je pense que oui, elle a raison, beaucoup de gens doivent avoir hum ... décrit ce hum ... tablette, certains avaient de bonnes réponses et certains ont eu de mauvaises réponses, et ... je n'aurais pas aimé en apprendre une mauvaise.

S7: Ça ne devrait pas ... hum ... ça doit être un travail collectif, il doit y avoir plusieurs points de vue.

S8: Oui, c'est ça, ça doit être démontré et ... [...]

S7: S'il y a un raisonnement logique, hum ... on voit aussi ... la plus grande majorité ... même ... tout le monde, obtient le même résultat. Ceci ... ils concluent sur la même ... hypothèse.

S8: Si nous parvenons à convaincre tout le monde [cela signifie que c'est vrai].

Ce débat a conduit à un débat sur le rôle et l'implication des élèves :

S2: C'est intéressant mais ... en fait chaque étudiant pourrait aussi donner son avis, ça pourrait aider les historiens.

S8: Oui.

S7: Parce que hum ... tout le monde peut donner son avis et avoir raison hum ... peut-être grâce à notre hypothèse ou nos commentaires ... il pourrait les amener à penser ... autre chose, ce qui pourrait les conduire aussi, à trouver le bon résultat (rires).

5. Besoin de connaître les bases mathématiques pour comprendre la source.

6. Le rôle du contexte qui est interprété par l'élève comme un outil de motivation:

S9: Nous devons savoir ... le contexte [...] pour savoir pourquoi ... nous l'avons trouvé aujourd'hui et à quoi il servait avant.

Moi: Très bien. Et pourquoi est-ce important?

S9: Parce que sinon ... bon pour moi on ne peut pas comprendre la source. [...]

S10: Eh bien, je dirais qu'on doit être, hum ... eh bien, quand nous présentons quelque chose, nous devons être convaincant, aussi, pour donner envie aux gens d'écouter. [...]

S9: Une classe "pleine de vie" [...]

Moi: Le contexte, pour vous, cela donne de l'intérêt? Le contexte ... de la source, par exemple?

S10: Je ne sais pas.

S9: Eh bien, peut-être pas d'intérêt, mais ça aide à comprendre [...]

S10: Eh bien oui, j'avais déjà des professeurs, quand ils ont expliqué quelque chose qu'ils avaient l'habitude de mettre ... le bon ton. Cela nous a donné envie d'écouter. Je pense que c'est mieux.

Moi: D'accord, quand ils ont présenté la source?

S10: Oui.

7. Et l'impact du statut de la source (brute, à déchiffrer ou non) sur la motivation de l'élève et / ou pour adopter une approche scientifique:

S11: Je la donnerais traduite [...] afin que nous ayons un premier exemple, pour savoir ce qu'ils ont fait [les scribes], et on pourrait essayer de mettre chaque lettre dans hum ... la traduction, pour tout le monde comprenne, puis essayer de traduire par nous-mêmes, avec un exemple. [...]

Moi: Très bien. Êtes-vous d'accord?

S12: Oui, si nous ne justifions pas, c'est comme prêcher des choses. Et donc nous ne pouvons pas nécessairement y croire.

C: D'accord, vous voulez dire pourquoi elle a été traduite de cette façon? [...] Est-ce qu'ils vous disent cela en classe d'histoire ?

Tous: Non. Pas beaucoup. [...]

S13: Je le donnerais brut. Pour moi, c'est le seul moyen ... de comprendre. Nous le faire nous-mêmes. [...] pour tester, pour faire nous-mêmes les choses, pour comprendre par nous-mêmes et ensuite nous pouvons demander la réponse pour vérifier, puis continuer à faire hum ... le calcul, mais pour moi, c'est brut. Parce qu'avec l'aide c'est trop ... facile. Nous obtenons la réponse et le hum ... nous le copions simplement donc ... c'est brut.

Ces discussions, témoignent d'une prise de recul par rapport à la source, à ce « qu'on en sait », et à ce qu'il faut pour la comprendre. Le fait d'envisager les diverses possibilités de présentation à l'élève, les diverses propositions scientifiques éventuelles du contenu, par rapport à ce qui est connu sur la source aujourd'hui est intéressant. Le rôle, bien qu'ici sublimé car il connaît « la bonne » interprétation, de l'historien, dans le choix d'une interprétation est amené. Ces points me paraissent un effet intéressant qui pourrait être lié à la séquence d'histoire (ou au fait d'avoir un professeur d'histoire différent dans chaque groupe en classe de seconde, cette hypothèse n'est pas négligeable), et qui peut être relayé ensuite par le professeur d'histoire.

Les débats suscités montrent la motivation à échanger sur ces thèmes. L'ouverture vers la complexité, engagée par les élèves, est un pas intéressant vers l'enrichissement des conceptions. Enfin, les diverses possibilités de présentation de la source à l'élève sont évoquées dans une discussion spontanée des élèves sur la « pédagogie » ; fait qui ne me semble pas sans intérêt puisqu'il témoigne d'une prise de recul sur les possibilités de présentation de la source ainsi que sur son usage envers les élèves[266]. Il y a, avec ces séances, une découverte des mathématiques anciennes mais peut-être aussi de la façon de faire de l'histoire. Ce point est cohérent avec les détails que j'ai donnés dans les choix relevant de la conception des séances. Les méthodes de présentation des textes par l'historienne spécialiste diffèrent sans doute sensiblement de celles l'enseignement.

En général, dans cette partie de l'expérimentation, les résultats révèlent que la séquence d'histoire des sciences pourrait avoir eu un effet sur la richesse et le nombre de débats

[266] Cet effet pourrait aussi être lié au fait d'avoir reçu une expérimentation de didactique, autorisant les élèves à questionner l'enseignement. Mais le groupe témoin avait lui aussi, eu connaissance de l'existence de cette expérimentation visant à travailler sur l'enseignement des mathématiques.

concernant la nature des mathématiques et de l'histoire. Nous avons pu documenter des arguments plus variés dans le groupe test, ainsi que des débats plus longs.

Il convient toutefois de noter que ces résultats n'excluent pas l'utilisation de formulations « condescendantes[267] » envers le passé, même par certains étudiants du groupe test. Le travail mathématique ancien exposé à la classe, peut être utilisé comme un argument pour glorifier le présent et sa simplicité, plutôt que de considérer la diversité. Ces positions « positivistes[268] » doivent, cependant, être nuancées, et ne sont pas adoptées tout le temps; un même élève peut adopter une position relativiste, à d'autres moments. En effet, de nombreux arguments prouvant la capacité de « se mettre dans les chaussures » de l'auteur ancien, de considérer les outils à sa disposition et ses objectifs possibles, sont également récurrents, parfois chez un même élève. Il est nécessaire de s'intéresser davantage à l'avenir, à l'augmentation possible du nombre d'arguments « relativistes » entre un groupe témoin et un groupe test.

Ici, le rôle du professeur d'histoire, après la séquence, pourrait être fondamental, et les débats décrits dans l'expérimentation pourraient être guidés. De la même manière, les remarques spontanées qui nous ont semblé intéressantes pourraient servir de sol fertile dans la classe d'histoire (les remarques sur le rôle de l'historien, la disponibilité ou le manque de disponibilité de l'information sur l'auteur et sa subjectivité, les diverses possibilités de présenter la source [intacte ou traduite], la place donnée à l'interprétation, etc.).

D'un point de vue méthodologique, dans cette partie de l'entretien nous avons utilisé des questions ouvertes, qui ont pu induire des réponses plutôt générales, voire floues, par les élèves et ne pas donner accès à toute leur finesse. Malgré tout ces questions donnent parfois accès indirectement à des traces de conceptions des élèves, sur d'autres points. En outre, il est aussi discutable de tenir compte des effets hypothétiques de nos séances peu de temps après[269] qu'elles aient eu lieu, les résultats devraient donc être pris comme base de discussion pour d'autres études.

Les résultats ont été construits à partir de la comparaison des deux groupes. Je n'ai pas interrogé le groupe test avant d'assister aux séances d'histoire, car ils auraient pu chercher à se conformer à notre contrat didactique (Mason et Johnston-Wilder 2004). Il me semblerait quand même intéressant d'étudier un entretien d'avant/après les séances sur le groupe test dans une future étude et de comparer cette démarche à la présente étude.

La comparaison des deux groupes a permis de mettre en évidence les différents types d'arguments. Notre choix de discussion semi-guidée a donné libre cours à la discussion, ce qui a permis, malgré des questions directes, l'apparition spontanée de débats avec des arguments variés (comme mentionné ci-dessus) nous permettant de documenter des différences entre les groupes sur des points ne relevant pas de questions trop directives.

Enfin, certaines questions directes ont conduit indirectement les étudiants à utiliser des arguments sur la nature des sciences (les questions sur la « nature des mathématiques » et les mathématiques en Mésopotamie, la « présentation d'une source historique », par exemple), ce qui fournit des indications sur leurs conceptions. Ainsi, les questions ouvertes ont pu donner accès à certains aspects de la nature de l'histoire ou de la nature des mathématiques.

[267] Au sens littéral du terme : penser que le travail scientifique ancien est assimilable à du travail élémentaire parce qu'il est ancien.

[268] Au sens élargi, et non historique, du terme.

[269] Du fait des conditions qui nous ont été proposées, le temps entre les séances et les entretiens n'a pas été le même, malheureusement, pour tous les groupes.

4.3.3 Extraits de dialogues

Je vais présenter ici de façon linéaire quelques extraits de dialogues qui ne sont pas forcément significatifs d'une majorité d'élèves, mais qui peuvent alimenter la recherche future. Je vais utiliser des extraits liés aux questions qui n'ont été posées qu'au groupe test, dont je présente les premières analyses en Annexe.

J'ai distingué six groupes dans ces extraits :

-une discussion sur les étapes de l'algorithme ancien

-un lien établi par les élèves entre les difficultés mathématiques rencontrées dans l'entrée dans le système ancien et la vision de histoire des mathématiques

-des extraits faisant appel à des postures (positiviste, relativiste)

-des extraits sur l'image des mathématiques, en lien avec les mathématiques rencontrées

-un extrait montrant un effet des mathématiques anciennes sur les mathématiques actuelles

-un extrait montrant un point de vue en évolution sur la Mésopotamie

Discussion sur les étapes de l'algorithme

Groupe Heliopsis

Les étapes du calcul d'aire sont associées ici à une conversion du type « changement d'unité de mesure ».

A0 : 'fin... pour moi y'a juste 2/3 étapes en plus je pense, par rapport à nous, p'ceque nous ça dépend si heu si heu...

C : tu trouves qu'ya plus d'étapes du coup

A0 : oui p'ceque ça dépend si nous on nous donne en centimètre ou si on nous donne dans une autre heu unité qu'après on nous d'mande heu notre heu ... par exemple, demander en centimètre et en fait heu la consigne c'est calculer heu le, ben l'aire, mais donnez-nous la réponse en mètres

C : ah oui

C : oui heu tu veux dire, on pourrait avoir à convertir aussi

A0 : voilà sauf que nous on convertirait pas dès l'début, on convertirait à la fin, ou alors au début, 'fin ça dépend.... de... de la personne.

Groupe Richelieu

Les étapes du calcul d'aire semblent ici aussi associées à une conversion du type « changement d'unité de mesure ». L'impression est que dans le système actuel, on passe de centimètres… à centimètre.

B : J'pense qu'on fait moins d'étapes parce que...

F : Oui nous on reste en centimètre à la fin. Parce que eux ils changent carrément de trucs.

B : Ouais ben ouais

F : Alors que nous on reste en centimètre. Même si ça passe au carré j'veux dire ça reste en centimètre. 'fin des fois on convertit en passant(?) mais on va pas d'passer de...'fin j'pense pas que dans un problème ils nous disent de calculer un champ et qu'à la fin on finisse avec une ville ou 'chais pas quoi.

Groupe Magnolia (2)

La mise en correspondance avec les tables métrologiques est associée au changement de centimètre en centimètre carré, ce qui particulièrement intéressant :

B?: oui mais nous, oui c'est ce que je dis mais eux le fait de changer leurs chiffres c'est comme si nous on mettait en cm^2. On change les cm en cm^2. Eux peut-être en changeant leurs nombres c'est comme si... au lieu de changer la valeur tu changes...

Difficultés mathématiques et difficultés avec l'histoire des mathématiques

Groupe Heliopsis

Ce groupe a explicité un lien entre difficultés en mathématiques et découragement lié à l'entrée dans le calcul d'aire. Cette difficulté pourrait être liée aux perturbations que le calcul d'aire devait justement permettre de générer afin de créer des questions spontanées. Ces questions sont peut-être d'ailleurs remplacées par du découragement.

C : [...] vous vous souv'nez un peu c'qu'yavait écrit heu sur... à droite ?

?: heu... pas trop

C : y'avait écrit heu... Ah ! Toi ça te décourage ?

(rires)

A2: Ouich

C : tu l'avais trouvé compliqué cet exercice ?

A2 : Heu ouich parce que déjà qu'jsuis pas bonne en maths alors heu si en plus faut ...qu'j'prenne un truc en mésopotamien...

C : tu trouves qu'ça complique ?

/

A2 : ouais.

[...]

A2 : ben l'problème en fait c'est que heu ça fait p'tet heu j'sais plus combien d'années qu'on apprend les maths là, depuis le CP, ça doit faire bien heu 7 heu, 7-8 ans, et heu on nous a appris cette méthode heu, que... généraliste, donc heu apprendre comme ça là, ça chamboule tout, c'est comme si on r'tournait en CP, mais en CP mésopotamie.

C : d'accord, ça chamboule tout tu trouves ?

A2 : oui.

Posture positiviste

Groupe Heliopsis

Suite aux difficultés exprimées, et peut-être en relation avec celles-ci, les groupes témoignent tous de positions « positivistes ».

C : pourquoi on met cm^2 en fait dans notre calcul à nous ?

[…]

A2 : parce que heu y'a les grecs y'zont inventé une mé… une bonne façon de faire. Et heu qu'a évolué depuis la Mésopotamie. Et heu depuis… depuis qu'on apprend les maths ben on s'réfère à ça… 'fin nos profs se réfèrent à ça du coup heu ben à force ben ça… ça rentre quoi.

C : d'accord.

A1 : ben à la base, on a les centimètre c'est notre unité d'mesure,

C : oui ?

A1 : donc heu ben après on… quand on les multiple ensemble ça fait cm^2

Posture relativiste

Groupe Heliopsis

Suite aux difficultés exprimées, ce groupe, qui comme tous les autres, a pu avoir des paroles liées à une forme de condescendance, par rapport au système ancien, adopte ici une posture plus « relativiste ». Ces postures « relativistes » émergent dans certains groupes, et peuvent cohabiter avec des postures plus « positivistes », condescendantes, à d'autres moments, dans un même groupe.

D'autre part, les difficultés et le découragement rencontrés plus haut continuent d'être exprimés, en lien cette fois avec une certaine frustration liée à un niveau « élémentaire » associé au calcul d'aire. Mais cela amène à une discussion relativiste intéressante sur le fait d'évoluer dans des systèmes mathématiques différents. D'une manière générale, ces moments peuvent être rapprochés des analyses de Guillemette autour du dépaysement (Barbin 1997, Guillemette 2015).

A0 : c'est, ils le connaissent le mot, c'est, là on s'imagine qu'on est des mésopotamiens, on est censé savoir heu c'que c'est comment ça s'dit un carré, et tout, c'est pas comme si on était censé l'apprendre demain, c'est pas ça la question.

C : tu veux dire que pour eux c'est plus simple ?

A0 : ben oui, parce que eux ils parlent déjà la langue, on leur dit ça on leur montre c'que c'est, nous l'problème c'est qu'aujourd'hui heu, on essaye de nous expliquer, l'problème c'est que nous comme elle dit Y faut qu'on r'tourne en CP parce qu'on va pas comprendre, pac'que c'est pas not' langue, c'est pas c'quon a appris

[…]

C : heum est-ce que tu dirais que ton point de vue a changé sur les maths ?

A0 : j'ai un peu 'fin j'dirais pas ça, j'dirais pas qu'mon point de vue sur les maths a changé, j'dirais plutôt qu'on m'a 'fin qu'on nous a montré une façon différente de calculer, c'est juste que j'avais 'fin j'pense, on va parler de porte hein, on nous a montré une porte heu on nous a ouvert un univers de mathématiques qu'on connait depuis le CP, et là c'est qu'on connait qui est actuel, et là on nous a ouvert un nouvel univers, heu donc heu des maths heu des mathématiques heu plutôt à l'époque heu Mésopotamie, donc heu j'pense pas qu'mon point de vue ait changé heu c'est juste une nouvelle façon de calculer, une nouvelle façon de…
[…]
A0 : moi pour moi ça me paraît plus dur mais peut-être parce que on nous a appris un calcul et comme on calcule aujourd'hui, c'est sûr que si en CP on nous avait appris à calculer heu en mesure en en 60 heu 2, on aurait eu l'habitude, donc heu pour nous nôtre façon de calculer aujourd'hui aurait été différente on aurait trouvé ça difficile aussi
C : d'accord
A0 : mais après c'est comme on a appris en fait
A2 : mais moi 'fin quand j'vois ça j'me dis que j'suis bien contente heu ben que 'fin j'suis quand même assez contente heu de que les maths heu que j'comprenne quand même un peu les maths parce que heu là c'est comme si vous me…
C : t'as l'impression qu'ça pourrait être bien pire ?
A2 : là heu c'est comme si vous me montriez ça en chinois quoi.

Groupe Alabama :

L?: moi j'pense aussi que c'était intéressant de savoir comment ils calculaient parce que heu y'a… y'a trois millénaires avant J.C. on avait une toute autre méthode de calcul, contrairement à maintenant heu en base 60 alors que maintenant on utilise… heu on a une technique universelle qui est dans le monde et qui est… je sais pas si c'est plus pratique mais à mon avis si y'avait heu les mésopotamiens nous voyaient calculer maintenant j'pense pas que c'était plus dur, alors que nous on pense que c'est plus dur pour eux. Voilà.

Groupe Magnolia 2 :

B2?: ben c'est plus facile en fait parce que nous après 60 c'est 61 alors qu'eux c'est 1
B?: ouais
C : ça ça te… c'est le changement heu à partir de 60 qui te paraît… d'accord
B2?: en gros c'était facile parce que 'fin voilà c'est comme si nous on était nés avec ça parce que nous on est nés avec les chiffres comme ça donc heu c'est facile mais…

Image des mathématiques et histoire

Le contenu mathématique est associé à une pratique supposée sur ces mathématiques. La relation concret-abstrait est associée à l'opposition pratique-théorique. Cet extrait montre qu'il n'est pas possible de se passer de se poser la question de l'accompagnement historique de l'histoire des mathématiques enseignées, car les élèves possèdent leurs propres représentations à ce sujet, qui y seront associées naturellement.

Groupe Heliopsis

A3 : Ben moi j'pense que ça reste des mathématiques, après j'pense que ils… ils avaient une méthode de calcul différente de la nôtre, mais heu et aussi un mode de fonctionnement différent heu 'fin les calculs servaient à autre chose que à faire des calculs comme nous, ou alors à calculer heu par exemple heu ils avaient pas de soldes donc ils pouvaient pas calculer les %, alors que là c'est… 'fin avant c'était juste pour calculer heu les champs combien ils devaient planter de 'fin d'arbres, ou combien ils devaient cultiver, alors que nous c'est complètement aut'chose, et on a plus de méthodes, plus de techniques alors qu'eux c'était, ça restait des calculs simples.
C : d'accord.
A3 : Donc heu voilà. Donc ça reste toujours des mathématiques.
C : Donc tu veux dire que c'est… d'venu plus… plus perfectionné ?
A3 : Voilà c'est ça.
C : et ça servait pas à la même chose.
A3 : voilà.
A1 : ben oui c'est des maths, sauf que eux ils en font des choses plus concrètes pa'c'qu'ils s'forment pour un certain métier, j'crois que c'était pour calculer les terrains et tout ça, et c'tai… c'tai concret quoi alors que nous ben… Thalès et Pythagore heu pour l'instant ça nous sert pas trop…

L'histoire des mathématiques est opposée dans cet extrait à l'histoire des sciences. L'histoire des mathématiques est représentée comme plus statique que celle des sciences. Il est possible qu'après avoir identifié des éléments qu'il considère comme mathématiques dans ces extraits en cunéiforme, l'élève ait changé sa vision de l'histoire des mathématiques, ce qui serait intéressant.

Groupe Tournesol

P ?: heu… des sciences pour moi c'est heu justement l'évolution heu ben moi quand on me dit sciences j'pense plutôt à la médecine heu tout ce qui est ça donc pour moi dans ma tête c'était l'évolution d'la médecine
C : oui
P ?: après heu c'qu'on a vu moi c'était surtout l'évolution heu des maths heu
(rires)
[…]
C : parce que les mathématiques ça te paraissait un peu différent ?
P ?: ben dans les sciences moi j'pensais plutôt c'était la physique, la SVT, les maths j'aurais pas pensé.
C : d'accord.
[…]
P ?: bon après… si vu que c'est scientifique mais bon.

[…]

P ?: ouais j'pense que ça fait heu longtemps qu'c'est comme ça et que heu même si y'a des adaptations ça a pas énormément changé.

L'histoire des mathématiques est opposée à l'histoire dans l'extrait suivant, l'élève exprime le fait que dans les maths mésopotamiennes il a retrouvé des objets mathématiques.

Groupe Coquelicot

I?: pour moi c'est 'fin l'histoire des sciences en fait c'est pour moi il devrait… 'fin y'a histoire mais on fait pas d'histoire en fait. 'Fin on parle juste des lieux comme Mésopotamie ou ces choses-là mais pour moi c'est vraiment… l'histoire des sciences c'est vraiment les maths quoi c'est… on parle vraiment des maths avant heu avant aujourd'hui quoi.

Effet des mathématiques anciennes sur les mathématiques actuelles

L'histoire des mathématiques d'Euclide est exprimée comme un élément perturbateur en cours de mathématiques, ce qui montre une entrée dans la diversité. L'extrait est axé sur la difficulté à concilier les cours de mathématiques et d'histoire des mathématiques à cause de problèmes de vocabulaire.

Groupe Richelieu

C : Alors j'passe à une aut' question. Est-ce que vous trouvez que cette façon, le fait de fait de faire différemment, ça vous aide à comprendre, ou ça vous complique, ou ça fait rien du tout par rapport à vos mathématiques à vous?

[…]

N : Parce que moi j'avais rien compris, et après on avait cours de géométrie,

C : Tu parles d'Euclide ?

N : Ouais, on avait cours de géométrie après, et j'ai fait n'importe quoi avec le cours de la…

C : Ca t'a perturbée ?

N : Ouais.

C : Est-ce que tu peux m'expliquer quel moment ? Parce que je sais pas du coup.

N : Ben tout parcequ'en fait heu le segment, pour eux c'est la ligne, alors que nous on a toujours appris qu'le segment ben c'est

B : C'était fermé

N : Alors que pour eux un segment ça s'finit pas

F?: C'est comme une droite

N : C'est ça. Un cercle c'est pas un cercle, c'est une sphère ou je sais pas quoi une boule

F?: Ché plu

N : Un disque

F : Nan c'est nous c'est un disque et eux c'est un cercle

N : Peut-être

B?: 'fin en tous cas c'est pas les mêmes

N : C'est pas les mêmes mots et c'est pas les mêmes trucs, donc ça perturbe et vu qu'après on avait cours de géométrie c'était vraiment très dur

C : D'accord, ok. Et vous faisiez quoi en géométrie ce jour-là ?

N : Heu les cercles et les triangles (rires)

C : Ah ! justement !

N : Donc j'ai absolument rien compris aux exercices qu'on a fait.

Point de vue en évolution sur la Mésopotamie

Groupe Dietes

Ce groupe a explicité le décalage entre leur point de vue initial sur la Mésopotamie et ce qu'ils ont rencontré ; et fait un lien surprenant avec l'apprentissage par cœur des formules.

C : hum… est-ce que vous saviez avant qu'on faisait des maths heu… comme ça en Mésopotamie ?

F : nan du tout (rires)

[…]

D : moi des trucs préhistoriques genre ché pa, dans des grottes et tout (rires)

F: c'est pas la préhistoire (rires)

I : nan jme suis toujours dit qu'y ptet avec des boules d'argile comme ça un truc comme ça, ils comptaient comme ça, mais jme suis jamais…

F : moi j'pensais pas en fait qu'y savaient même 'fin… c'… c'est bizarre de dire ça, mais

D : moi j'pensais pas y'avait les aires et tout

F : oui exactement, ça m'a…

D : j'croyais y savaient juste dire 1, 2, 3, 4, 5

F : nan… (rires), en fait j'pense qu'y avaient leur langue, qui savaient de quoi y parlaient, mais sans chercher à comprendre, ça ça fsait quoi…

I : ben c'est comme nous en fait, avec le carré hein, c'est ça, on cherche pas non plus à comprendre vraiment heu… la signification…

F : ben voilà.

Maintenant que j'ai présenté des extraits ponctuels qui me paraissent intéressants pour enrichir les résultats, et participer au développement de futures expérimentations, je passe aux conclusions générales de l'expérimentation.

4.3.4 Conclusion

D'une manière générale, les résultats révèlent deux points importants : d'une part les hypothèses sur les mathématiques (actuelles) que nous avions faites sur la compréhension par les élèves de l'algorithme actuel de calcul d'une aire sont en grande partie, vérifiées. D'autre part, les questions dues à la rencontre avec la tablette n'émergent pas spontanément, signifiant très probablement la difficulté à expliciter les distinctions entre les différents systèmes mathématiques et à les faire dialoguer. Pourtant, des différences entre les groupes test et témoin permettent de constater des différences de conceptions dont je fais l'hypothèse (argumentée) qu'elles sont très probablement liées à la rencontre avec le texte ancien.

Les résultats de la partie mathématique montrent d'une part, que la présence de difficultés envisagées (en mathématiques actuelles) est vérifiée : la formule n'a pas de justification, le cadre géométrique associé à la grille n'est pas mobilisé et des représentations géométriques erronées sont associées aux unités de mesure. Faute d'accompagnement, les élèves pourraient construire des conceptions nouvelles géométriquement erronées, liées entre autres, à un (non)-apprentissage du sens à donner aux équations aux dimensions.

D'autre part, les mathématiques du texte ancien affectent effectivement la perception des mathématiques actuelles, et les conceptions touchant aux objets mathématiques prévus ; mais ces effets épistémologiques sont difficiles à expliciter par l'élève, et ne touchent pas toute la classe de la même façon. De plus, les traces sont fines et les indices difficiles à identifier.

Les questions sur les mathématiques et des différences statistiquement significatives entre les groupes pourraient avoir donné accès indirect à un changement dans la conception qu'ont les élèves des mathématiques, du fait de la rencontre avec l'Histoire. Ce changement concernerait la « nature des mathématiques », notamment en ce qui concerne la justification.

On peut faire l'hypothèse que si le texte ancien constituait un milieu complètement favorable, les comparaisons entre les algorithmes ancien et actuel conduiraient à l'émergence de questions spontanées sur lesquels l'enseignant pourrait rebondir pour institutionnaliser ensuite. Or ces comparaisons sont difficiles, et nécessitent d'expliciter la présence d'une absence (de « conversion » ou mise en correspondance à l'aide d'une table métrologique).

De plus, l'explicitation orale par l'historien de ces comparaisons n'était pas souhaitée par la spécialiste : il y a là une tension entre plusieurs objectifs, liée aux contraintes disciplinaires dans le cadre d'une interdisciplinarité symétrique, ce qui me semble être le résultat le plus important.

Dans la partie « nature des sciences » des entretiens, les résultats révèlent que la séquence d'histoire des sciences pourrait avoir eu un effet sur le nombre de débats concernant la nature des mathématiques et de l'histoire ainsi que la complexité des arguments mobilisés.

Des formulations « condescendantes » peuvent être utilisées spontanément par les élèves envers le passé ; un même élève adopte cependant parfois une position relativiste à d'autres moments. Il faudrait documenter l'augmentation possible du nombre d'arguments « relativistes » chez le groupe test, dans une prochaine étude.

D'un point de vue méthodologique, dans cette partie de l'entretien, les questions étaient ouvertes, ce qui a induit des réponses générales. Cependant, la comparaison des deux groupes a permis de mettre en évidence les différents types d'arguments. La discussion semi-dirigée a permis l'apparition spontanée de débats avec des arguments variés et certaines questions ouvertes ont conduit indirectement à fournir des indications sur les conceptions des élèves à travers les arguments mobilisés.

Les extraits ponctuels fournissent aussi des pistes. Malgré certains arguments positivistes, le point de vue des élèves sur la Mésopotamie semble en évolution. Il est fait état de mathématiques « plus complexes que prévu ». Mais surtout, les élèves reconnaissent des mathématiques dans ces autres sciences, selon des critères qui correspondent globalement à ceux que le groupe témoin utilise pour définir les mathématiques (mais avec une légère augmentation du répertoire). Il est très intéressant que certains élèves du groupe test explicitent le fait qu'il s'agisse d'un système mathématique différent, et développent des positions relativistes du type « si j'avais appris cela depuis l'enfance je trouverais cela facile ».

Globalement, les débats témoignent de deux tensions : premièrement, la difficulté ressentie pour entrer dans le système malgré le caractère élémentaire du calcul, qui génère une frustration. Il serait intéressant peut-être, d'institutionnaliser le caractère complexe de ce calcul d'aire, dont le caractère élémentaire est tout à fait discutable.

La deuxième tension semble être pour les élèves qui expriment se sentir plus en difficulté en mathématiques, qui n'entrent pas dans les séances avec autant de plaisir, et n'y reconnaissent pas visiblement aussi bien les objets. Certains extraits de dialogue semblent permettre d'objectiver cette impression. Pourtant des effets intéressants se constatent aussi sur les groupes plus faibles ou sur ceux qui se sentent « littéraires ». Par exemple le groupe « Magnolia 2 » a pu faire une remarque sur le « passage » de centimètre à centimètre carré (voir p.337). Le groupe Alabama était aussi intéressant de ce point de vue. Ainsi des études par groupe de niveau, ou par élève, me paraissent intéressantes pour l'avenir. La piste de l'étude de la transmission des mathématiques en cunéiforme par les élèves de seconde aux élèves de CM2 me semble intéressante à suivre, et a donné accès à des groupes qui explicitaient moins leurs points de vue pendant les entretiens.

La rencontre avec les mathématiques anciennes a généré des débats complexes, sur la nature des mathématiques. Ce qui est considéré comme mathématique, et peut être retrouvé dans l'exemple ancien, diffère selon les élèves. L'exemple de l'extrait de débat concernant l'opposition entre pratique et théorie par exemple, montre que les cours d'histoire des sciences vont entrer en relation avec les représentations existantes des élèves. La didactique de la philosophie et la didactique de l'histoire pourraient donc être concernées par une progression sur ces thèmes.

D'une manière générale, j'ai montré que la question d'une expérimentation visant une interdisciplinarité symétrique interpelle sur le besoin de mener une double ingénierie, se basant également sur des aspects de didactique de l'histoire. Quels aspects du savoir savant sont à enseigner ? Quels seront alors les conflits avec la didactique des mathématiques ? Peut-on les résoudre par la mise en place d'une progression dans les attentes dans les savoirs des élèves ?

Quoi qu'il en soit, je pense que cette thèse dans son ensemble montre que la transmission de connaissances liées à l'histoire des sciences est nécessaire pour l'élève, bien que les effets soient liés en partie au long terme, et à la façon dont sera encadré ce nouveau savoir, dans une dynamique liée à la fois à l'apprentissage de l'histoire et de la philosophie.

La question du bénéfice de cet apprentissage pour les mathématiques est complexe, il me semble avéré du point de vue de l'image des mathématiques (avec les mêmes nuances que ci-dessus) et conceptuel. En revanche, l'intégration de cet apprentissage dans le cours même de mathématiques pose question, et des études croisées avec les didacticiens de l'histoire me paraissent nécessaires.

5 CONCLUSION DE LA THESE

Je vais orienter la conclusion de ma thèse autour de plusieurs axes :

1. Je vais présenter les résultats obtenus sur les concepts liés au calcul d'aire grâce à l'analyse croisée entre histoire et didactique et les perspectives pour l'enseignement.

2. Je vais discuter les résultats de la thèse concernant les apports réciproques de la didactique et de l'histoire des sciences.

3. Enfin, j'ouvrirai sur les questions méthodologiques et les perspectives de recherche à venir.

1 RESULTATS : LES CONCEPTS LIES AUX UNITES DE MESURE DANS LE CALCUL D'AIRE ET LEUR ENSEIGNEMENT

1.1 Conclusion historico-épistémologique

J'ai mené une analyse historico-épistémologique de plusieurs tablettes en cunéiforme de différentes périodes, dans le contexte de métrologies semi-indépendantes.

La tablette des Dynasties Archaïques VAT 12-593 (voir 2.4.2 p. 112) témoignait d'un contexte additif unidimensionnel. La tablette paléo-babylonienne UM 29-15-192 (voir 2.2, p. 48) permettait d'avoir accès à une situation bidimensionnelle multiplicative. Dans la tablette achéménide W 23-291 (voir 2.4.3, p.123) le même type d'algorithme que dans la précédente tablette était utilisé, mais dans le problème commenté, le calcul d'aire était mené pour plusieurs systèmes de tables métrologiques. Le nombre en système SP obtenu était donc explicitement différent selon la table métrologique utilisée. Une conversion en mesure de capacité, à l'aide d'un coefficient, permettait d'obtenir le même résultat quel que soit le système de tables choisis. Dans la tablette hellénistique AO 6484 (voir 2.4.4, p.132), qui présentait un problème de recherche d'inverse multiplicatif, le calcul d'aire intervenait sans la mesure, dans le registre des figures.

Le travail historico-épistémologique a ainsi permis de faire une analyse précise des concepts liés au calcul d'aire, en particulier les unités de mesure, et de l'implication du choix d'un cadre géométrique, numérique ; d'une structure additive, multiplicative, etc sur ces objets. Je les ai regroupés selon les catégories suivantes :

-la conception du nombre dans l'algorithme de calcul d'aire

-le lien entre opération physique et opération sur les nombres

-l'entrée en jeu de la bidimensionnalité et son lien avec les cadres géométrique, arithmétique, et la mesure

-la conception de l'unité de mesure selon les registres et l'opération (addition, multiplication)
-l'opération mathématique et son lien avec l'opération physique, ainsi que les objets mathématiques qui entrent en jeu
-le mesurage et sa présence explicite ou non dans l'algorithme
-le recours au cadre géométrique et ses implications, son lien existant ou non avec l'idée de report d'un étalon (mesurage)
-l'algorithme
-en général, les implications du système métrologique (dépendant ou non) sur la conception de l'unité de mesure et les objets qui entrent en jeu dans l'algorithme

Les relations entre ces différents éléments sont importantes à analyser, et les textes proposent des équilibres différents. En ouverture, dans le texte issu des *Neuf chapitres*, la mesure dans le cadre de la bidimensionnalité et d'une structure multiplicative est accompagnée, dans le registre des figures, par une transformation du rectangle. Dans le commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya,* dans le cadre de l'élévation au carré, le concept de nombre semble influencé par une relation (non visible au premier abord) à la mesure, et l'algorithme semble en porter les traces. J'ai montré en ouverture comment les questions soulevées sur les concepts liés aux unités de mesure se retrouvent aussi dans le cadre d'autres situations multiplicatives.

L'analyse historico-épistémologique permet de dresser un inventaire précis des objets mathématiques qui sont liés à la question de la mesure dans le cas de l'aire du carré. Ce sont grâce aux allers-retours entre histoire et didactique que j'ai pu nommer ces catégories. Les travaux de recherche en didactique m'ont permis de nommer ce qui était observé dans les textes.

J'ai utilisé les catégories ci-dessus et les liens entre ces catégories, pour mener une analyse didactique : en réunissant des travaux de recherche, puis en conduisant une analyse de manuels scolaires de CM2. La question de la transition entre les cadres et de la conceptualisation des objets mathématiques dans cette transition, est apparue particulièrement importante à traiter. Ce travail m'a guidée vers l'analyse didactique de la transition, dans le cadre de l'enseignement de l'aire du carré, du cadre géométrique à la formule.

1.2 Conclusion croisée avec l'analyse didactique

Le travail d'analyse historico-épistémologique a conduit à réunir des travaux de didactique issus de différents champs, pour éclairer les questions issue de l'analyse historico-épistémologique: comment enseigner le concept d'« unité de mesure » alors qu'il intervient dans différents registres ? De plus, comment enseigner les objets mathématiques liés au calcul d'aire et assurer une bonne transition conceptuelle entre les cadres ?

En reprenant les catégories précédentes, je me suis attachée à questionner :

-la conception du nombre dans la transition entre l'algorithme additif puis multiplicatif de calcul d'aire et son lien avec la mesure
-les implications du lien facilité entre opération physique et opération sur les nombres sur des éventuels implicites d'enseignement
-l'accompagnement de la bidimensionnalité dans le cadre géométrique en lien avec la mesure
-le mesurage et sa présence explicite ou non dans l'algorithme

-la conception de l'unité de mesure dans les transitions entre les registres et l'opération (addition, multiplication)

Pour tenter de répondre à ces questions j'ai été amenée à réunir de nombreux champs de recherche en didactique. Ainsi il apparaît que ces champs se rejoignent autour de l'unité de mesure. J'ai construit un tableau permettant de voir quels sont les intersections de champs de recherche concernés, et quels champs ont effectivement adressé ces questions. A l'heure actuelle il me semble notamment que la recherche, si elle a étudié la question en profondeur par de très nombreux aspects, ne s'est pas explicitement intéressée à l'unité de mesure en tant qu'objet d'étude central, dans son caractère indépendant et inter-cadres.

D'autre part, l'analyse épistémologique permet aussi de dresser un panel qui me paraît assez complet, des objets concernés. Elle incite à faire des liens entre les travaux de recherche, ou à interroger l'absence de ces liens, le cas échéant. Il me semble que c'est une caractéristique de l'analyse épistémologique, qui, proposant plusieurs chemins, explicite ainsi quelles sont les transitions entre registres qui sont affectées.

L'analyse croisée a confirmé l'importance de certaines questions et les difficultés potentielles évoquées par les travaux de recherche en didactique. Sur d'autres points, comme la transition conceptuelle de l'unité de mesure entre les registres, je n'ai pas trouvé de réponse ; mais des éclairages du point de vue du savoir de référence.

L'analyse croisée m'a alors permis d'étudier les manuels scolaires, et en particulier la transition du cadre géométrique au cadre numérique et algébrique lors de l'enseignement des formules de l'aire du carré et du rectangle, en conservant pour ce faire les catégories issues de l'analyse historico-épistémologique.

1.3 Conclusion de l'analyse des manuels scolaires

Grâce aux catégories issues de l'analyse historico-épistémologique et aux questions soulevées dans l'analyse préalable, je me suis intéressée aux points suivants, dans l'analyse de treize manuels scolaires de CM2, pour la séance d'introduction à la formule de l'aire du carré et du rectangle :

- Les représentations de l'unité de mesure d'aire dans la séance, les distinctions éventuelles de forme, la présence d'un accompagnement dans le registre symbolique

- L'accompagnement de la transition entre cadres géométrique et numérique ou algébrique, de la conceptualisation des objets mathématiques (nombres, opérations, unités de mesure), du changement de structure (additif à multiplicatif) et du mesurage, présent ou non dans l'algorithme

En fonction de ces points je me suis demandé ce que l'élève pouvait associer à la lettre ou au nombre dans l'expression multiplicative. Le travail d'analyse a permis d'agréger un important nombre de points sur lesquels certains manuels sont conduits à prendre des décisions, et la majorité ne se prononce pas. Cependant, le tableau que j'ai constitué avec les réponses apportées par l'ensemble des manuels, me semble permettre d'offrir des pistes pratiques pour cette séance, à réinvestir par exemple dans une prochaine ingénierie.

Faute de réponses du point de vue des recherches en didactique, ou faute de prise en compte de certaines préconisations comme les travaux que j'ai présentés sur la distinction entre aire et nombre par Perrin-Glorian ; ou encore des travaux australiens de Outhred, Mitchelmore et Owens, les pratiques ne sont pas uniformes selon les manuels.

Cependant, la liste des points que j'ai pu dresser, sur lesquels ils se prononcent (ou non, majoritairement), montre clairement qu'il y a bien un objet d'apprentissage autour de l'unité de mesure d'aire, sur lequel il me semble nécessaire de prendre position en recherche.

L'introduction de l'unité de mesure d'aire arrive au même moment que d'autres apprentissages-clés : la bidimensionnalité, l'introduction de la lettre et implicitement, la dépendance fonctionnelle. Le passage de la structure additive à la structure multiplicative est aussi réinvesti (il est généralement travaillé en amont dans le cadre géométrique). Cette analyse a permis de mettre en valeur le fait que le passage de l'unité de mesure de longueur à l'unité de mesure d'aire (présent dans la formule, plus ou moins explicitement) n'est pas assuré (1 à 4 manuels sur 13 ont traité ce problème). Ainsi, il me semble que l'unité de mesure, dans son aspect symbolique « cm » ou « cm^2 » est un objet qui concerne aussi la recherche en didactique de l'algèbre. L'absence de références ou la non prise en compte de celles-ci conduit à une difficulté importante : l'introduction de l'algèbre, ici avec « c × c » ou « l × L » ne peut s'appuyer sur une cohérence conceptuelle, un parallélisme avec l'algorithme connu dans le cadre des figures, du point de vue de l'unité de mesure. La lettre « c » peut être liée au nombre de carreaux sur une ligne ou au nombre d'unités de mesure de longueur, ou encore au « côté » en général (pouvant faire référence au segment ou à sa mesure). L'unité de mesure elle-même est alors représentée par une lettre et peut se retrouver incluse dans une notation multiplicative. Il est fort probable que dans ce contexte, le cadre géométrique et la grille, pourtant objet de justification de la formule, ne soient rapidement abandonnés par les élèves.

1.4 Conclusion de l'expérimentation en classe du point de vue mathématique

Dans le cadre de mon expérimentation en classe, j'ai utilisé les catégories issues de l'analyse historico-épistémologique ainsi que l'analyse préalable basée sur ces catégories, pour dresser une liste des difficultés qu'il serait probable de constater en seconde. Les élèves de seconde ont reçu d'autres enseignements, ce qui interdit de faire un lien trop direct entre les manuels de CM2 et leurs conceptions. Malgré tout, l'analyse des manuels a permis de soulever des hypothèses sur les difficultés des élèves, qui sont confirmées par l'expérimentation.

Je me suis demandé si le texte ancien pouvait, dans ce contexte de difficultés, activer les questions que se poseraient les élèves sur l'utilisation « automatique » d'une formule qu'ils connaissent bien. J'y reviendrai. Je vais d'abord rappeler ici les résultats strictement mathématiques de l'expérimentation.

Je m'étais posé les questions suivantes : est-ce que les changements de cadres ont des effets sur la représentation que se font les élèves des objets mathématiques comme l'unité de mesure ? Comment coordonnent-ils les registres, le registre des figures est-il abandonné ? Le contrôle du sens de ce qui est fait (que les manuels souhaitent favoriser dans la façon dont ils introduisent la formule par le compte des carreaux) est-il encore possible dans ce contexte troublé ?

Les résultats sont clairs : si la formule est majoritairement retenue (quelques erreurs seulement), les élèves n'arrivent pas à la justifier. Ils ne font pas appel à la grille. Les élèves utilisent en majorité des formulations hybrides du type : « $2 \times 2 = 4\ \ cm^2$ », qui semblent représenter en une seule expression toutes les étapes de l'algorithme. Lorsqu'il est demandé de détailler ces étapes, environ 30% des élèves mentionnent l'ajout de l'unité de mesure à la fin. Mais quand il est demandé d'expliquer « pourquoi on met cm^2 à la fin », la majorité des élèves indique une forme de justification « contextuelle » (il s'agirait de préciser le contexte). Si les élèves pensent globalement que le cm^2 est un carreau, l'idée de report n'est pas mobilisée. Parfois le cm^2 est le résultat de la « multiplication » : cm × cm. Lorsqu'il est demandé « qu'est-ce qu'on multiplie », aucun élève ne répond « un nombre de carreaux ». Il s'agit plutôt du « côté » ou de la « longueur ». L'exercice de la piscine confirme le fait que la grille n'est plus mobilisable : même s'il paraît plus facile de répondre en donnant le nombre de carreaux, les élèves calculent l'aire globale du fond de la piscine, puis divisent par la mesure d'aire d'un carreau. De plus, l'absence de questions spontanées et le fait que la comparaison des deux algorithmes (ancien et actuel) soit difficile dans le groupe test, pourrait confirmer le fait que l'algorithme actuel soit surtout assimilé à une multiplication, en lien avec le système métrique (qui est dépendant).

En l'absence d'un travail général de réflexion lié à l'unité de mesure et au parallélisme entre les opérations (sur les figures et sur les nombres) entre les registres, les élèves ont peut-être construit leur propre interprétation. Faute d'une transition conceptualisable entre les registres (des figures et des nombres et symboles), ils ont associé des représentations géométriques erronées aux objets mathématiques, en lien avec la notation multiplicative et l'apprentissage de l'algèbre[270].

2 Apports reciproques de la didactique et de l'histoire des sciences : resultats et perspectives

2.1 Apports pour l'histoire

2.1.1 L'analyse historique des petites variations

L'analyse historique des « petites variations » (voir 2.3, p.62) a été inspirée par le regard didactique porté sur les textes. J'ai analysé le choix des mesures de longueur initiales dans un groupe de six tablettes[271] d'exercices de calcul d'aire du carré à Nippur, période paléo-babylonienne.

Cette démarche était inspirée par le regard porté sur les textes, du point de vue de l'étude de la transmission ; j'ai notamment été influencée par certains outils de didactique comme la notion de variable didactique (Brousseau, 1998), la notion d'assortiment (Genestoux-Esmenjaud, 2000) et en ouverture, la T.A.D (voir p.106).

L'analyse du corpus a permis d'identifier des tâches principales, c'est-à-dire nécessaires dans chaque exemple, et des sous-tâches (sous-types de tâches, pour la T.A.D) présentes ou non en fonction du choix de la mesure de longueur choisie. Il y a donc des différences didactiques profondes dans ces exercices, en apparence homogènes. L'analyse a mené à un

[270] Le travail est peut-être lié également à la question de la progression sur l'enseignement de la dépendance fonctionnelle et de l'équation aux dimensions.
[271] Il s'agissait des tablettes CBS 11318, UM 29-15-192, Ni 18, UM 55-21-076, IM 57846, IM 57828, NBC 8082 et NCBT 1913.

classement des tablettes, certaines ne présentant aucune ou très peu de sous-tâches. J'ai relevé des arguments permettant de penser que l'apprentissage de certaines sous-tâches liées à la circulation dans les tables métrologiques ait pu être un objectif d'enseignement. La mesure de longueur pourrait alors constituer une forme de « variable didactique », étant donné l'implication qu'elle a sur les sous-tâches qui entrent en jeu dans la résolution. L'outil de didactique qu'est « l'assortiment » (Genestoux-Esmenjaud, 2001) permet d'obtenir des critères qui semblent objectiver l'idée d'une différence entre l'entraînement du déjà appris et l'apprentissage du nouveau.

Du point de vue méthodologique, les outils de la didactique sont intéressants pour fournir des outils d'observation. Enfin, les outils de la T.A.D (voir p.102) sont pertinents pour observer à l'avenir, la façon dont l'apprentissage de certains (sous)-types de tâches semble être l'objectif d'enseignement ; comment un type de tâches principal peut devenir un type de tâche classique, secondaire dans les objectifs d'apprentissage, dans un autre problème

2.1.2 L'analyse historico-épistémologique : intérêt pour l'histoire

La sélection de textes a été faite pour des raisons didactiques : il s'agissait d'illustrer la diversité des points de vue autour des concepts liés à l'aire du carré. Cette analyse, sous certains aspects, me semble avoir un intérêt historique (malgré d'immenses sauts dans le temps).

Premièrement, elle montre l'existence de diverses possibilités mathématiques et de divers éclairages des concepts liés au calcul d'aire, dans une même zone géographique : au sein des sources issues de Mésopotamie, en cunéiforme. Elle participe ainsi à la conflexification de la notion de culture.

Deuxièmement, l'ensemble des textes illustre le fait que, pour un « même » calcul (le calcul d'aire du carré), les contextes et les objectifs sont très différents.

Troisièmement, selon les contextes, qu'ils soient liés à des besoins concrets ou scolaires (UM 20-15-192), qu'ils portent sur de petites surfaces, ou de grandes propriétés et d'exploitation par les élites (VAT-15-192), que le travail soit associé à l'astronomie (AO 6484) ou au contrôle de propriétés (W 23-291), le calcul d'aire est toujours lié à un travail mathématique et il en produit également (circulation dans les tables, arithmétique et géométrie, calcul d'inverse, recherche d'inconnue et géométrie, travail sur les calculs à partir de plusieurs systèmes de référence, conversions et liens avec d'autres grandeurs, etc.).

Enfin, toutes ces situations nous informent sur les différentes façons de conceptualiser des objets mathématiques qui pourraient sembler uniformes dans l'algorithme de calcul d'aire ; insistant particulièrement sur le besoin d'une analyse historique conceptuelle développée.

2.2 Apports pour la didactique

J'ai déjà précisé dans la conclusion, les apports détaillés de l'analyse historico-épistémologique dans l'analyse conceptuelle. Je vais ici entamer une discussion plus générale et méthodologique. L'analyse historico-épistémologique a permis :

-une mise en commun de travaux de recherche en didactique (analyse préalable, chapitre II)

-une analyse des manuels scolaires de CM2 et quelques pistes concrètes pour une prochaine ingénierie
-une expérimentation en classe
Je vais détailler ces points.

2.2.1 Au niveau de la recherche

L'analyse historico-épistémologique est le fruit d'un dialogue entre les textes anciens et les travaux de didactique. Ce dialogue a permis de sélectionner des textes et de les analyser du point de vue des concepts liés à l'aire du carré. Ce travail a fait émerger une liste d'objets mathématiques concernés par le calcul d'aire, et conceptualisés différemment selon les registres et structures adoptés. La question de la transition entre les registres et de son influence sur les concepts a aussi été mise en valeur.

Aurait-on pu arriver à ce résultat sans l'histoire ? Il est vrai, l'analyse préalable permet de montrer que les travaux de didactique, issus de champs de recherche divers, ont largement investi la question, par diverses entrées.

Il me semble pourtant que s'il est vrai que ce travail d'analyse épistémologique est coûteux en temps, il permet d'une part, de souligner des points qui n'ont pas été jusque-là, mis en avant si clairement, ou rarement :

-l'importance de penser l'enseignement de l'unité de mesure comme élément central, dans son ensemble, et la transition entre cadres pour cet objet ;
-les champs de la didactique de l'algèbre et de l'algorithmique me semblent sont concernés par l'enseignement de l'unité de mesure ; de même que l'enseignement de la géométrie est concerné par l'action de mesurage (par report) et le fait d'assurer sa transition dans le cadre numérique et algébrique ; or les travaux sur ce point me semblent peu nombreux et pour ceux qui existent, très généralement non utilisés par les manuels.

D'autre part, l'analyse historico-épistémologique a conduit à analyser des manuels scolaires de CM2 sous un angle particulier, et à identifier :

-un ensemble de points sur lesquels les manuels ont à se positionner, autour de la transition entre cadres et du mesurage ; qui ne font pas tous l'objet de préconisations au stade de la recherche (certains points font l'objet de préconisations en recherche, dont certaines semblent prises en compte et d'autres non, je l'ai détaillé)
-des absences : la différenciation d'étapes (passage de l'addition itérée à la multiplication pour la mesure d'aire puis de la multiplication pour obtenir un nombre de carreaux à la mesure du côté, notamment) et l'absence d'accompagnement clair (sauf 1/13 manuels) des objets qui entrent en jeu dans la formule ou le calcul, derrière la lettre ou le nombre. Ainsi l'analyse sous forme algorithmique, qui provient de l'histoire, permet de constater clairement ces absences.

Quelques pistes concrètes ont aussi pu être évoquées, notamment le fait d'utiliser la « grille effacée ».

2.2.2 L'expérimentation en classe

L'expérimentation en classe doit être analysée sous deux aspects :
-les effets pour l'apprentissage des mathématiques

-les effets sur la conception de l'histoire et des sciences (nature des sciences)

Effets conceptuels mathématiques

L'utilisation de l'histoire, dans ce contexte précis, semble avoir permis une forme de travail conceptuel, mais qui reste souterrain, et ne donne pas lieu dans ces conditions expérimentales en tous cas, à des questions spontanées sur lesquelles il serait possible de rebondir.

D'une manière générale, la question de revenir directement (sans l'histoire) sur ces notions liées au calcul d'aire, reste légitime. Pourquoi faire ce détour, si l'on souhaite travailler sur le système métrique et ses implicites ? L'entrée par la constatation des différences (algorithmes ancien et actuel) est une entrée possible, mais elle n'affecte pas tous les élèves uniformément.

Il faut tout de même nuancer, car il est possible que les effets constatés soient le symptôme d'un questionnement plus avancé, qui n'ait pas donné lieu à des questions spontanées des élèves. Auquel cas, l'analyse de leur transmission des mathématiques cunéiformes aux élèves de CM2 sera très intéressante à analyser[272].

La question de l'institutionnalisation par l'enseignant, des différences entre les algorithmes ancien et actuel, est importante. Cependant elle se heurte aux contraintes historiques. En effet, dans la perspective d'une interdisciplinarité symétrique, il semble que la comparaison directe explicite des algorithmes soit problématique.

Effets sur la nature des sciences

L'utilisation de l'histoire, pour travailler sur l'image qu'ont les élèves des mathématiques et de l'histoire, ainsi que plus directement sur la Mésopotamie, semble confirmée.

Des effets sont constatés et probablement liés aux séances d'histoire (distinction entre les groupes test et témoin) sur l'image des mathématiques, sur la discipline historique, sur la richesse des débats des élèves, et sur l'idée qu'ils se font de l'histoire des sciences.

Ce principe à lui seul, peut à mon sens justifier l'enseignement de l'histoire des sciences (bien qu'il pose la question du cadre dans lequel cet enseignement aura lieu). Peut-on se passer d'une réflexion complexifiée sur l'évolution historique du progrès ? De la connaissance de diverses formes d'intelligence, certaines non occidentales, même si elles ne sont pas reconnaissables au premier coup d'œil ?

La question que pose Maurines et Beaufils (2011) est celle de l'entrée par les textes. Faut-il nécessairement passer par huit heures de mathématiques en cunéiforme pour travailler sur la nature de la science ? Le problème est bien sûr complexe. Certains aspects peuvent sûrement faire l'objet d'un accès plus facile, la piste mérite d'être exploitée très sérieusement.

Du point de vue conceptuel en tous cas, il me semble qu'être convaincu de l'existence d'une diversité de points de vue sur les objets mathématiques prend du temps. Si la façon d'aborder cette différence mérite d'être traitée plus avant, je pense qu'il ne sera pas possible de faire l'économie de prendre le temps d'en convaincre des élèves, dont l'âge est à

---

[272] Michèle Artigue me signale d'ailleurs que la situation ne favorisait peut-être pas assez une posture réflexive pour que les interrogations des élèves puissent donner lieu à des indices oraux qui soient observables. Je pense qu'il serait intéressant d'envisager un dispositif de type « narration de recherche » ou autre dispositif favorisant l'émergence d'éléments qui puissent être observés, à l'avenir. L'analyse de la transmission en CM2 est une autre entrée possible. Enfin, il faut noter que des débats spontanés inattendus ont en revanche, émergé.

déterminer. Ce qui est en jeu, c'est d'être convaincu que l'on peut penser différemment, et qu'il existe une forme de créativité et de diversité en mathématiques.

Je passe maintenant, après ces conclusions, aux perspectives qui me semblent importantes pour l'avenir.

3 OUVERTURE : METHODOLOGIE ET PERSPECTIVES

3.1 L'analyse historique et épistémologique

L'analyse historique a permis de dégager ce qui est probablement une situation de transmission progressive autour des tables métrologiques (les petites variations). Il serait intéressant d'utiliser plus précisément les outils de la T.A.D pour caractériser les relations entre technique, tâche et type de tâche selon les textes, afin de dégager des dynamiques dans les thèmes abordés.

De plus, pour avancer dans les conclusions liées au système métrologique, il serait intéressant de travailler avec les données de Middeke-Conlin (*à paraître*) sur les valeurs qui ont été arrondies dans d'autres contextes de la même période, pour permettre d'avancer dans les hypothèses sur le travail métrologique.

L'analyse historico-épistémologique a permis un travail d'éclairage sur les concepts liés à l'aire du carré. Il me paraîtrait intéressant de croiser cette analyse avec des analyses épistémologiques liées à d'autres situations multiplicatives, toujours en lien avec l'unité de mesure, afin de poursuivre l'éclairage des concepts liés à la mesure.

Ce travail a donné lieu à deux travaux d'histoire en lien avec les sources en sanskrit et chinois. Le premier devrait permettre de continuer à penser à la question du diagramme (et donc des opérations selon les registres) et au lien entre nombre et valeur numérique dans un contexte où la mesure est absente. Le second s'intéresse aux petites variations dans le contexte de l'aire du rectangle, qui est assimilé à un travail sur la multiplication dans le cadre d'autres grandeurs.

3.2 L'analyse préalable

L'analyse préalable incite fortement à penser l'enseignement des unités de mesure et de la dépendance fonctionnelle dans une forme de progressivité et de transition entre les registres. Il me paraîtrait intéressant de poursuivre la recherche didactique. Les travaux récents de Lehrer, Schauble et Holmes (2013), présentés dans une communication à ICME 13 (Hamburg), pourraient être intéressants à analyser en ce sens. La didactique de l'algèbre me semble pouvoir donner des éclairages importants également, sur l'évolution conceptuelle de l'unité de mesure entre les registres.

3.3 L'analyse de manuels

L'analyse de manuels scolaires est à croiser avec une analyse de manuels de sixième ainsi que les pratiques des enseignants, pour permettre un panorama plus complet. J'ai également évoqué certains points de travaux de didactique qui ne semblent pas faire l'objet d'un travail spécifique dans la majorité des manuels, notamment ceux de Perrin-Glorian autour de la distinction entre aire et nombre. Il faudrait analyser d'autres séances pour le vérifier, et analyser sur ce point la question de la transmission des travaux de recherche.

3.4 L'expérimentation en classe

L'expérimentation en classe pose plusieurs questions méthodologiques. D'abord, le niveau est-il bien choisi ? Il pourrait être envisageable que du point de vue historique, pour avoir accès à une complexification de la notion de progrès, les élèves doivent pouvoir envisager la forme d'ingéniosité que constitue le système SP. Les élèves de seconde n'ont peut-être pas un niveau mathématique suffisant. Pour autant, cela justifie-t-il de ne pas les faire travailler sur cette tablette, étant donné les résultats de l'expérimentation sur la nature des sciences par exemple ? La question du niveau apparaît comme un point complexe et doit pouvoir être envisagée du point de vue historique et mathématique, mais aussi du point de vue des enjeux propres à la transmission de l'histoire des *sciences*, ce qui engage la didactique de l'histoire.

Ensuite, la question de la préservation de la diversité mathématique ne s'applique pas toujours de la même manière selon le type de source (sanskrit, chinois, cunéiforme par exemple) et selon l'historien. D'autres sources auraient peut-être appelé à une traduction par exemple. De plus, la diversité mathématique est un principe qui peut être illustré de plusieurs façons : par exemple, par le fait de travailler une source différente de notre système, ou bien en présentant un corpus de plusieurs sources, de provenances différentes en même temps par exemple[273]. Quels sont les compromis possibles ?

Du point de vue didactique, j'ai montré que le repérage des indices était complexe. Il me semble que certaines questions ouvertes ont donné accès à des observables sur d'autres points. De plus les questions de mathématiques ont peut-être également donné accès indirectement à des différences de perception entre les groupes test et témoin. Enfin, la perspective qui me paraît la plus intéressante est maintenant d'étudier la transmission par les lycéens aux élèves de CM2. J'ai pu assister aux séances en CM2, qui me semblent prometteuses pour avoir accès aux conceptions d'élèves.

Le point le plus important pour moi est celui de l'interdisciplinarité. Il me semble qu'il serait très profitable de travailler à une double ingénierie avec un didacticien de l'histoire (en parallèle de l'ingénierie mathématique). D'une manière générale, les compromis entre le savoir savant de référence et l'enseignement en classe, ne sont pas ici cadrés par des programmes. Ainsi, une progression n'est pas encore instituée, dans l'accès des élèves à la complexité de pensée sur la diversité ou le progrès, par exemple. Il faudrait à la fois penser une progression et l'expliciter, pour pouvoir situer la double ingénierie dans le temps de l'apprentissage.

D'une manière générale, il me semble important de continuer avec l'aide des didacticiens de l'histoire, à penser l'enseignement d'une discipline qui me paraît fondamentale, pour que

[273] La question du corpus est aussi intéressante à envisager, comme l'a fait émerger une discussion avec Cécile de Hosson et Nicolas Décamp, du point de vue de la rétroaction du milieu. De ce point de vue, il faut noter que le fait de travailler plus précisément sur le fonctionnement du système métrologique à partir de tables métrologiques favoriserait peut-être une rétroaction efficace également. Il faudrait de plus pouvoir séparer les variables : est-ce qu'il faut travailler sur la rétroaction du milieu, ou sur les conditions d'émergences d'indices (un travail pour engager une posture réflexive de l'élève, selon une proposition de Michèle Artigue) ? L'idéal serait de pouvoir enquêter séparément sur ces points à l'avenir, afin de séparer les variables. Enfin, une difficulté m'est inspirée par une remarque de Dominique Tournès sur le vocabulaire. Ici, il n'est pas proposé une meilleure transposition du savoir savant de référence, du point de vue mathématique, il s'agissait de constater les effets mathématiques (positifs ou non) de la rencontre avec d'autres mathématiques, avant institutionnalisation. De ce fait, il n'est pas proposé de travail avec les élèves sur les distinctions permises notamment par le VIM par exemple. Si la situation pourrait avoir favorisé l'installation d'une institutionnalisation sur ces points auprès des élèves (à étudier), il serait toutefois intéressant d'étudier ce type de transposition indépendemment de l'introduction de l'histoire. La place de la séance d'histoire des sciences en amont est d'ailleurs discutable sur ce point.

les élèves puissent avoir les clés nécessaires à la compréhension d'une société de plus en plus scientifique, tout en sachant reconnaître l'existence d'une diversité de rationnalités, quelle qu'en soit la forme.

BIBLIOGRAPHIE

Airasian, P. W., Anderson, L. W., et Krathwohl, D. R. (2013). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Harlow: Pearson Education Limited.

Albe, V. (2009). *Enseigner des controverses*. Rennes, France : Presses universitaires de Rennes

Allchin, D. (1999). Values in science: An educational perspective. *Science & Education*, (8), 1-12.

Allchin, D. (2011). *How school science lies.* Communication présentée à la 5e conférence internationale : History, philosophy and science teaching, Como-Pavia. Consulté à l'adresse http://members.tcq.net/allchin/papers/lies.pdf

Amundsen, C., Weston, C., et McAlpine, L. (2008). Concept mapping to support university academics' analysis of course content. *Studies in Higher Education*, (33.6), 633-652.

A.P.M.E.P. (1982). *Grandeur, mesure*. (Collection Mots, brochure n° 46).

Artigue M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (9.3), 281-308.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (10.2-3), 241-286.

Astolfi, J.-P. et Peterfalvi, B. (1997). Stratégies de travail des obstacles : Dispositifs et ressorts. *Aster*, (25), 193-216.

Attinger, P. (2002). *Edubbâ A (5.1.1)*. Consulté à l'adresse : www.unibe.ch/unibe/portal/fak_historisch/dga/iaw/.../5_1_1.pdf

Baker, H. D. (2004). The "small cubit": a note on Late Babylonian surface mensuration. *Nabu*, (70.3), 59-84.

Baker, H. D. (2011). Babylonian land survey in socio-political context. Dans J. Selz et K. Wagensonner, (dir.) *The Empirical Dimension of Ancient Near Eastern Studies / Die* *empirische Dimension altorientalischer Forschungen* (6). (293-323). Vienna et Berlin: LIT Verlag.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? Bulletin de l'Association mathématique du Québec, (37.1), 20–25.

Bell, D., Hughes, R., et Rogers, J. (1975). *Area, Weight, and Volume*. London: Nelson.

Bell, A., Costello, J., et Kichemann, D. (1983). *Research on Learning and Teaching. Part A.* London: NFER - Nelson.

Bernard, A., (2016). Penser la place des sciences humaines dans la formation des enseignants de sciences et techniques : quels types de recherches possibles? Dans B. Marin et D. Berger (dir.), *Recherches en éducation, recherches sur la professionnalisation : consensus et dissensus. Le Printemps de la recherche en ESPE 2015* (p. 217-229). Paris : Réseau national des ESPE. 2016.

Bernard, A., Brechenmacher, F., et Husson, M. (2014). Points cardinaux pour la conception de formations universitaires pluridisciplinaires en épistémologie et histoire des sciences pour les enseignants du secondaire, ou comment s'appuyer sur des dilemmes. *SHS Web of Conferences*, (13), 05004. doi : 10.1051/shsconf/20141305004

Bernard, A. et Proust, C. (dir). (2014). Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History: Problems and Perspectives. Boston : Springer.

Bernardes, A. (2018). History of matrices. Dans Clark, K.M., Kjeldsen, T.H., Schorcht, S., Tzanakis, C. (dir.) *ICME-13 Monographs : Mathematics, Education and History, Towards a Harmonious Partnership*. (209-227). Springer.

Bessot, A. et Eberhard, M. (1983). Une approche didactique des problèmes de mesure, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (4.4), 293- 324. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Biggs, R. D. (1974). Inscriptions from Tell Abu Salabikh, Oriental Institute Publications. Chicago: The University of Chicago Press

Boucheny G., et Guérinet A. (1930). *L'arithmétique au cours élémentaire (1re et 2e année).* Paris : Librairie Larousse.

Bosch, M., et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (19.1), 77–124.

Bosdeveix, R. (2016). Entre classifications fonctionnelle et phylogénétique : le groupe des végétaux : une reconstruction didactique fondée sur l'histoire des sciences dans le cadre de la formation des enseignants de sciences de la vie et de la Terre. (Thèse de doctorat). Université Paris 7 Diderot.

Bottéro, J. (2012). Babylone et la Bible: Entretiens avec Hélène Monsacré. Paris: Fayard/Pluriel.

Brousseau G (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Dans *Recherches en didactique des mathématiques*, (7.2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Canguilhem, G. (1979). Préface. Dans F. Delaporte, Le second règne de la nature : Essai sur les questions de la végétalité au XVIII^{e} siècle. Paris: Flammarion.

Cariou, J.-Y. (2011). Histoire des démarches en sciences et épistémologie scolaire. *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, (3), 83–106.

Carpenter, T., Coburn, T., Reys, R., et Wilson, J. (1975). Notes from National Assessment : basic concepts of area and volume. *The Arithmetic Teacher*, (22) 501-507.

Castela, C., El Idrissi, A. et Moungabio, F. (2016). Les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines dans les formations générale et professionnelle. Dans *Actes de la conférence EMF 2015*. Alger, Algérie (p.424-430).

Chambris, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, (69), 5–31.

Chambris, C. (2009). Contribution de l’étude des grandeurs à l’étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et

3ème années de primaire). Dans C. Ouvrier-Buffet et M.J. Perrin-Glorian (dir.) *Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques.* (p. 211–222) Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Chemla, K. (2014). Shedding Some Light on a Possible Origin of a Concept of Fractions in China Division as a link between the newly discovered manuscripts and The Gnomon of the Zhou [Dynasty]. *Sudhoffs Archiv;Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte, Sudhoffs Archiv; Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte*, (97.2), 174-198.

Chemla, K. (2018). Abstraction as a Value in the Historiography of Mathematics in Ancient Greece and China: A Historical Approach to Comparative History of Mathematics. Dans G. Lloyd et J. Zhao (dir.), *Ancient Greece and China Compared* (p. 290-325). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/9781316091609.012

Chemla, K. (*à paraître*). Working on and with division in early China.

Chemla, K. et Guo, S. (2004) *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris : Dunod. Réalisé grâce à l'accord cadre CNRS-CAS. Karine Chemla en collaboration avec Shuchun Guo (CAS, Pékin).

Chevalarias, T., de Ligt, F., Guichard, J.-P., Lebot, B., Merci J.-P., Mesnier, W., Pacaud, G., … Guilbault, M. (2010). *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les AIRES*. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Poitiers.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. Dans *Recherches en didactique des mathématiques*, (17.3), 17-54.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été de la Rochelle : 4-11 Juillet 1998.* (p. 91-120) ; Clermont-Ferrand : IREM.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, (55), 5-32.

Chorlay, R. (*à paraître*) Justifier une technique opératoire en cycle 3 : le cas de la division par deux. Dans *Actes de la conférence EMF 2018.* Paris, France.

Chorlay, R. et Hosson, C. de (2016). History of science, epistemology and mathematics education research. Dans B.R. Hodgson, A. Kuzniak, et J-B. Lagrange (dir.), *The didactics of mathematics:Approaches and issues. A homage to Michèle Artigue.* New York: Springer.

Civil, M. (1985). Miscellanea Babylonica. Mélanges offerts à Maurice Birot. Dans J.-M. Durand et J.R. Kupper (dir.), *Sur les « livres d'écolier » à l'époque paléo-babylonienne.* (p. 67-78). Paris : Editions recherche sur les civilisations.

Clancier, P. (2009), Les bibliothèques en Babylonie dans la deuxième moitié du Ier millénaire (Vol. 363), Münster: Ugarit Verlag.

Clark, K. M. (2011). Reflection and revision: Evolving conceptions of a "Using History" course. Dans V. Katz, et C. Tzanakis (dir.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (p. 213-222). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Clark, K.M., Kjeldsen, T.H., Schorcht, S. et Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. Dans Clark, K.M., Kjeldsen, T.H., Schorcht, S., Tzanakis, C. (dir.) *ICME-13 Monographs : Mathematics, Education and History, Towards a Harmonious Partnership*. (18-23). Springer.

Clements, M. A., et Ellerton, N. (1995). Assessing the effectiveness of paper-and-pencil tests for school mathematics. Dans B. Atweh et S. Flavel (dir.), *Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia,* (vol.1), 184-188. Darwin, NT: Mathematics Education Group of Australasia.

Crépin-Obert, P. (2010). Construction de problèmes et obstacles épistémologiques à propos du concept de fossile: étude épistémologique comparative entre des situations de débat à l'école primaire et au collège et des controverses historiques du XVIIe au XIXe siècle. Université de Nantes. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00493027/

Crépin-Obert, P. (2011). Raison ou obstacle en histoire de la paléontologie et en classe de collège: analogie ou analogisme? *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, (3), 21–54.

Damerow, P., Nissen, H. J., et Englund, R.. (1993). Archaic Bookkeeping. Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East. Chicago: University of Chicago Press.

Décamp, N. et Hosson C. de (2012). Implementing Eratosthenes' Discovery in the Classroom: Educational Difficulties Needing Attention? Some educational cares. *Science and Education*, (21.6), 911-920. doi :10.1007/s11191-010-9286-3

Deimel, A. (1923). Die Inschriften von Fara II. Schultexte aus Fara. *Wissenschaftliche Veröffentlichungen der Deutschen Oriental Gesellschaft*. (43), Leipzig.

Delnero, P. (2012). Memorization and the Transmission of Sumerian Literary Compositions. *Journal of Near Eastern Studies*, (71.2), 189-208. doi: 10.1086/666645

Dickson, L. (1989). The area of a rectangle. Dans K. Hart, D. Johnson, M. Brown, L. Dickson, et R. Clarkson (dir.), *Children's Mathematical Frameworks*, (8.13), UK: NFER Nelson

Doig, B., Cheeseman, J., et Lindsay, J. (1995). The medium is the message: measuring area with different media. Dans B. Atweh et S. Flavel (dir.), *Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia*, (vol. 1), 229-240. Darwin,NT: Mathematics Education Group of Australasia.

Dorier, J.-L. (2006). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, perspectives théoriques sur leurs interactions. *Cahiers Leibniz*, (12).

Douady R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. *Recherches en didactique des Mathématiques*, (1.1), 77-110.

Douady R. (1987). L'ingénierie didactique un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe. Dans J.C.Bergeroa, N. Herscovics, C.Kieran (dir.), *Actes du Congrès PME XI.* (p.222-228). Montréal.

Douady, R., et Perrin-Glorian, M.-J. (1983). *Mesure des longueurs et des aires*. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université Paris VII. Consulté à l'adresse http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IPS97022.htm

Douady, R. et Perrin-Glorian, M. (1984). Aire de surfaces planes. *Petit x*, (6), 5–33.

Douady, R., et Perrin-Glorian, M.-J. (1985). Aires de surfaces planes (2ème partie). *Petit x*, (8), 5–30.

Doussot, S. et Grandjean, J. Enseigner les sciences sociales pour éduquer le citoyen : une étude de cas sur l'histoire, la géographie et l'EDD. *Éducation et socialisation* (36 | 2014). doi : 10.4000/edso.893

Draffkorm Kilmer, A. (1992). Musical practice in Nippur. Dans M. deJong Ellis (dir.), *Nippur at the Centennial.* (p.101-112). Philadelphie : Occasional Publications of the Samuel Noah Kramer Fund.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (5), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Errecalde, P., Hocquenghem, S. et Rogalski, J. (1984). Utilisation de logiciels pour étudier les relations nombre-espace chez les élèves de 10 à 13 ans. Dans A.D.I (dir.), *Actes du premier colloque scientifique francophone sur l'enseignement assisté par ordinateur*, (p.113-131), Lyon.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2000). Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques. (Thèse de doctorat). Université Bordeaux 1.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2001). Médiation entre la classe et le travail à la maison: le rôle des assortiments. *Dans Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques, équipe DIDIREM*, *Université Paris 7*, Paris.

Fabre, M. (2010). Du bon usage des controverses. *Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies*, (1), 153-170.

Falkowitz, R. S. (1984). Round Old Babylonian School Tablets from Nippur. *Archiv fur Orientforschun*, (30), 18-45.

Feliu, L. (2013). A New Early Dynastic IIIb Metro-Mathematical Table Tablet of Area Measures from Zabalam. *Altorientalische Forschungen*, (39), 218-225.

Foxman, D., Ruddock, G., Joffe, L., Mason, K., Mitchell, P., et Sexton, B. (1983). *Mathematical Development*. Slough: National Foundation for Educational Research.

Friberg, J. (1993). On the structure of cuneiform metrological table texts from the first millennium. Dans H. D. Galter, (dir.) *Die Rolle der Astronomie in den Kulturen Mesopotamiens* (Vol. 3), 383-405.

Friberg, J. (1997). Seed and Reeds Continued. Another metro-mathematical topic text from Late Babylonian Uruk. *Baghdader Mitteilungen*, (28), 251-365, pl. 245-246.

Friberg, J. (2005). On the Alleged Counting with Sexagesimal Place Value Numbers in Mathematical Cuneiform Texts from the Third Millennium BC. *CDLI*. Consulté à l'adresse: https://cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2005/cdlj2005_002.html

Friberg, J. (2007). A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts: Manuscripts in the Schøyen Collection: Cuneiform Texts I. Springer.

Friberg, J., Hunger, H., et Al-Rawi, F. N. H. (1990), "Seed and Reeds", a metro-mathematical topic text from Late Babylonian Uruk. *Baghdader Mitteilungen*, (21), 483-557, pl. 446-448.

Fried, M. N. (2008). ICMI, the history of mathematics, and the future of mathematics education. *International Journal for the History of Mathematics Education*, (8.3), 103–108.

Glassner, J.-J. (2000). Ecrire à Sumer. L'invention du cunéiforme. Paris : Seuil.

Gohau, G. (1995). Traquer les obstacles épistémologiques à travers les lapsus d'élèves et d'écrivains. *Aster*, (20), 21-41.

Gosztonyi, K. (2015). Traditions et réformes de l’enseignement des mathématiques à l’époque des ‘mathématiques modernes’ : le cas de la Hongrie et de la France. (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot - Paris 7; University of Szeged, 2015.

Guedj, M., Laubé, S., et Savaton, P. (2007). Éléments de problématiques et de méthodologie pour une didactique de l’épistémologie et de l’histoire des sciences et des techniques (EHST). *Actes du colloque AREF Actualité de la recherche en éducation et en formation*, Strasbourg.

Gueudet, G., et Trouche, L. (2010). Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques. Rennes; Lyon: PU Rennes.

Guillemette, D. (2015). L’histoire des mathématiques et la formation des enseignants du secondaire: sur l'expérience du dépaysement épistémologique des étudiants. (Thèse de doctorat). Université du Québec.

Hart, K. (1987). Practical work and formalisation: too great a gap. Dans J. Bergeron, N. Herscovics, et C.Kieren (dir.), *Actes de la 11ème conférence PME*, (2) Montreal, Canada.

Hart, K. (1993). Confidence in success. Dans I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, et F. Lin (dir.), *Actes de la 17ème conférence PME* (1). Tsukuba, Japan.

Hartshorne, R. (2000). Geometry: Euclid and beyond, New York, Berlin, Heidelberg : Springer.

Hébert, E. (dir.) (2004). *Instruments scientifiques à travers l’histoire*. Paris: Ellipses Marketing.

Hilprecht, H. V. (1906). *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*. Philadelphie: University of Pennsylvania Museum of Archaeology and Anthropology.

IREM de Rennes. (2017). *Les encarts historiques dans les manuels scolaires*. Consulté à l'adresse : http://irem.univ-rennes1.fr/histoireencarts

Höttecke, D., Henke, A., et Riess, F. (2012). Implementing history and philosophy in science teaching: Strategies, methods, results and experiences from the european HIPST project. *Science & Education*, (21.9), 1233-1261.

Hosson, C. de. (2011). *L'histoire des sciences: un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement de la physique*. Université Paris-Diderot-Paris VII. Consulté à l'adresse : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00655594/

Hosson, C. de, et Schneeberger, P. (2011). Orientations récentes du dialogue entre recherche en didactique et histoire des sciences. *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, (3), 9-20.

Høyrup, J. (1999). Mathematik. I. Mesopotamien. II. Ägypten. III. Mesopotamische und Agyptische Einflüsse auf die Griechische Mathematik. *in Der Neue Pauly. Enzyklopädie der Antike*, (7), 10-1016. Stuttgart & Weimar: Metzler

Høyrup, J. (2002). Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin, Studies and Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. Berlin et Londres: Springer.

Hulin, N. (1984). L'histoire des sciences dans l'enseignement scientifique: Aperçu historique. *Revue française de pédagogie*, (66.1), 15-27. doi : 10.3406/rfp.1984.1578

Irzik, G. et Nola, R. (2014). New directions for nature of science research. Dans M. R. Matthews (dir.), International handbook of research in history, philosophy and science teaching (p. 999-1021). Dortrecht: Springer.

Irwin, A. R. (2000). Historical case studies: Teaching the nature of science in context. *Science Education*, (84.1), 5-26.

Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. Dans J. Fauvel et J. van Maanen (dir.). *History in Mathematics Education*, The ICMI Study, (p.291-328), Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, (71.3), 235-261. doi :/10.1007/s10649-008-9174-9

JCGM. (2012). International vocabulary of metrology : Basic and general concepts and associated terms (VIM). (3e édition). Consulté à l'adresse : https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf

Jestin, R. R. (1937). Tablettes sumériennes de Šuruppak conservées au musée de Stamboul. Paris: De Boccard.

Jestin, R. R. (1957). Nouvelles tablettes de Šuruppak du musée de Stamboul. Paris : De Boccard.

Joram, E. (2003). Benchmarks for measurement units. Dans D. H. Clements et G. W. Bright (dir.), *Learning and teaching measurement (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (p. 195-207). Reston : NCTM

Karp, A., et Schubring, G. (dir). (2014). *Handbook on the History of Mathematics Education* (2014 ed.). New York: Springer-Verlag New York Inc.

Keller, A. (2006) Expounding the mathematical seed, A translation of Bhāskara I, on the mathematical chapter of the *Āryabhaṭīya* (2 vol.). "Science Networks", Historical Studies Book 30, Basel: Birkhäuser.

Kramer, S. N. (2015). *L'histoire commence à Sumer* (1ère éd. 1986). Paris: Flammarion.

Krebernik, M. (1998). Die Texte aus Fara und Tell Abu Salabih. Dans J. Bauer, R. K. Englund et M. Krebernik (dir.) *Mesopotamien. Späturuk-Zeit und Frühdynastische Zeit*, Freiburg : Göttingen.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F., et Vivier, L. (*à paraître*). Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. *Actes de la 18ième école d'été de didactique des mathématiques,* Brest.

Lam L. Y. (1977). *A Critical Study of the Yang Hui suan fa*, Singapore : NUS Press.

Laugier A. et Dumon A. (2000). Histoire des sciences et modélisation de la transformation chimique en classe de seconde. *Bulletin de l'union des physiciens*, (826), 1261-1283.

Lecompte, C. (à paraître). Dans K. Chemla et C. Michel (dir.), Mathematical practices in the context of administration.

Lederman, N. G. (2006). Research on nature of science: Reflections on the past, anticipations of the future. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, (7.1), 1-11.

Lederman, N. G. (2007). Nature of science: Past, present and future. Dans S. K. Abell et N. G. Lederman (dir.), *Handbook of research on science education* (p. 831–879). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Lehrer, R., Schauble, L. et Holmes, A. (2016, juillet). Transitions in teacher's pedagogical practices and conceptions of measurement support children's conceptual change. Communication présentée à ICME 13, Hamburg.

Li Jimin. (1990). Dongfang Shuxue Dianji Jiuzhang suanshu ji qi Liu Hui Zhu Yanjiu (Research on the Oriental mathematical Classic The Nine Chapters on Mathematical Procedures and on its Commentary by Liu Hui). Xi'an (en chinois.).

Li Jimin. (1998). *Juzhang suanshu daodu yu yizhu* (*Guidebook and annotated translation of* The Nine Chapters on Mathematical Procedures). Xi'an (en chinois.).

Liverani, M. (1996). Reconstructing the Rural Landscape of the Ancient Near East. *Journal of the Economic and Social History of the Orient*, (39.1), 1-41.

Lodge, A. (1888). The Multiplication and Division of Concrete Quantities. *Nature*. (28), 281–283.

McCall, H. (1993). *Mesopotamian Myths* (2e éd.). London : British Museum Publications in cooperation with the University of Texas Press, Austin.

Margolinas, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l’analyse de situations d’enseignement. Dans R. Noirfalise, *Actes de l’Université d’été de La Rochelle 1998*, France.

Mason, J., et Johnston-Wilder, S. (dir.). (2004). *Fundamental constructs in mathematics education.* London: RoutledgeFalmer.

Matthews, M. R. (2014). International handbook of research in history, philosophy and science teaching. Dordrecht : Springer.

Maurines, L. et Beaufils, D. (2011). Un enjeu de l'histoire des sciences dans l'enseignement : L'image de la nature des sciences et de l'activité scientifique. *Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies*, (3), 271-305.

Maurines, L. et Beaufils, D. (2012). Teaching the nature of science in physics courses : the contribution of classroom historical inquiries. *Science and Education*. doi :10.1007/s11191-012-9495-z.

Melville, D. J. (2002). Ration Computations at Fara: Multiplication or Repeated Addition? Dans J. M. Steele et A. Imhausen (dir.) *Under One Sky. Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*, Münster: Ugarit-Verlag.

Michalowski, P. (2010). Learning Music: Schooling, Apprenticeship, and Gender in Early Mesopotamia. Dans R. Pruzsinsky et D. Shehata (dir.) *Musiker und Tradierung*. Vienne : Lit.

Middeke-Conlin, R. (à paraître), The Making of a Scribe: Errors, mistakes, and rounding numbers in the Old Babylonian kingdom of Larsa, Paris: Springer.

Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. (2016). EDUSCOL : *Grandeurs et mesures au cycle 3* (Publication no 609168) Consulté à l'adresse : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf.

Moyon, M. (2016). *Surfaces de rectangles et unités de mesure chez Léonard de Pise (13e siècle).* Communication présentée à la Journée d'étude du projet ERC SAW « Mathematical work on measurement units », Paris.

Munier, V., et Passelaigue, D. (2012). Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma*, (38), 106–147.

Nemet-Nejat, K. R. (1995). Systems for learning mathematics in Mesopotamian scribal schools, *Journal of Near Estern Studies*, (54.4), 241-260.

Neugebauer, O. (1935). *Mathematische Keilschrifttexte I*, Berlin: Springer. Page citée: p.96-99

Neugebauer, O.E., et Sachs, A.J. (1945). Mathematical Cuneiform Texts, *American Oriental Studies*, (29), New Haven.

Neugebauer, O. E., et Sachs, A. J. (1984). Mathematical and Metrological Texts. *Journal of Cuneiform Studies*, (36), 243-251.

Neugebauer, O. et Waschow, H. (1932). Bemerkungen über Quadratwurzeln und Quadratwurzel-Approximationen in der babylonische Mathematik. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, (B2), 291-297. Pages citées: p.292-295

Nunes, T. Light, P., Mason, J. A 3-Dimension Conceptual Space of Transformations for the Study of Intuition of Infinity in Plane Geometry. Dans Furinghetti, F. (dir.), *Actes de la 15ème conférence PME.* (3) Assisi, Italie.

Orange, C. (2003). Un exemple de problématisation en biologie : Claude Bernard et le milieu intérieur. *Actes des troisièmes rencontres scientifiques de l'ARDiST* , 231-237.

Ossendrijver, M. *(à paraître)*. Scholarly Mathematics in the Rēš Temple. Dans: C. Proust et J. Steele (dir.), *Scholars and Scholarship in Late Babylonian Uruk*, Leiden: Brill.

Outhred, L., et Mitchelmore, M. (1992). Representation of area: a pictorial perspective. Dans W. Geeslin et K. Graham (dir.), *Actes de la 16ème conférence PME, 2* (p. 194–201). University of New Hampshire, Durham, NH (USA) : International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Outhred, L., et Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. Dans L.Puig et A. Gutiérrez (dir.), *Actes de la 21ème conférence PME, 3* (p. 312–319). Lahti, Finlande : International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Outhred, L., et Owens, L. (1997). Early representations of tiling areas. Dans E. Pehkonen (dir.), *Actes de la 20ème conférence PME, 4* (p. 91–98). Valencia, Spain: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Ouyang, X. et Proust, C. (*à paraître*), Place value notations in the Ur III period: marginal numbers in administrative texts. Dans K. Chemla, A. Keller, et C. Proust (dir.), *Cultures of computation and quantification*, Springer.

Perrin-Glorian, M.-J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, (24), 5–36.

Perrin-Glorian, M.-J. (2001). Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (dir.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques.* (p. 299–315). Corps (Isère): La Pensée Sauvage éditions.

Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Revue internationale de didactique des mathématiques*, (9), 67-82.

Perrin-Glorian, M.-J. (2017). *Quelques commentaires du point de vue didactique*. Communication présentée à la journée du 13 Mars « séries de problèmes et petites variations » du séminaire HPM du laboratoire SPHERE, Paris.

Plessz, E. (2018). Les passerelles entre Mathématiques, Histoire et Astronomie (Mémoire de maîtrise inédit). ESPE de Paris.

Pomponio, F. et Visicato, G. (1994). *Early Dynastic Administrative Tablets of Šuruppak*. Naples : Instituto universitario orientale.

Powell, M. A. (1972). Sumerian Area Measures and the Alleged Decimal Substratum. *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie,* (62), 165–222.

Powell, M. A. (1973). On the reading and meaning of $GANA_2$. *Journal of Cuneiform Studies* (25).

Powell, M. A. (1984). Late Babylonian Surface Mensuration. *Archiv für Orientforschung*, (31), 32-66.

Powell, M. A. (1987-1990). Masse und Gewichte. *Reallexikon der Assyriologie,* (7), 457-530.

Pressiat, A. (2001). Grandeurs et mesures : l'évolution des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (dir.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques.* (p. 283-293). Corps (Isère): La Pensée Sauvage éditions.

Proust, C. (s.d.). Une numération sexagésimale de principe additif en Mésopotamie : le système S. Consulté à l'adresse : http://culturemath.ens.fr/materiaux/nombres/nombres-systemeS.htm

Proust, C. (2007). *Tablettes mathématiques de Nippur* (Vol. XVIII). Istanbul: IFEA, De Boccard.

Proust, C. (2008). Tablettes mathématiques de la collection Hilprecht. Leipzig : Harrassowitz.

Proust, C. (2010). Mesopotamian Metrological Lists And Tables : Forgotten Sources. Dans F. Bretelle-Establet (dir.), *Looking at it from Asia: The Processes that Shaped the Sources of History of Science*, Dordrecht ; New York : Springer.

Proust, C. (2012, juin). *Vers une didactique de l'histoire des mathématiques*. Présenté au colloque La didactique des mathématiques : approches et enjeux**.** Hommage à Michèle Artigue, Paris.

Proust, C. (2013). Du calcul flottant en Mésopotamie. *Gazette des Mathématiciens*, 23-48.

Proust, C. (2016). Mathématiques en Mésopotamie : étranges ou familières ? Dans *Actes de la conférence EMF 2015. Alger, Algérie* (p.17-39).

Proust, C. (2017). La chanson des mathématiques dans l' *Edubba*. Dans M.-C. Bustamante (dir.), *Scientific Writings and Orality*. (p.19-49). Brepols : AIHS 65/2. Pages citées : p.21-27

Proust, C. (*à paraître*). Early-Dynastic tables from Southern Mesopotamia, or the multiple facets of the quantification of surfaces. Dans K. Chemla et C. Michel (dir.), *Mathematical practices in the context of administration.*

Proust, C. (*à paraître*). Volume, brickage and capacity in Old Babylonian mathematical texts from southern Mesopotamia. Dans K. Chemla, A. Keller et C. Proust (dir.), *Cultures of computation and quantification*.

Proust, C. *(à paraître)*. A mathematical collection found in the "House of āšipus": the art of metrology in Achaemenid Uruk. Dans: C. Proust et J. Steele (dir.), *Scholars and Scholarship in Late Babylonian Uruk*, Leiden: Brill.

Proust, C. et Middeke-Conlin, R. (2014). Interest, Price, and Profit: An Overview of Mathematical Economics in YBC 4698. *CDLI*. Consulté à l'adresse: *https://cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2014/cdlj2014_003.html*

Proust, C. et Steele, J. (*à paraître*). Astronomical and related cuneiform texts from Uruk in the Istanbul Museum.

Raichvarg, D. (1987). La didactique a-t-elle raison de s'intéresser à l'histoire des sciences ? *Aster,* (5) *Didactique et histoire des sciences,* 3-34.

Riess, F. (1995). Teaching science and the history of science by redoing historical experiments. Dans F. Finley *et al*. (dir.), *Proceedings of the Third International History, Philosophy, and Science Teaching Conference,* (2), Minneapolis : University of Minnesota.

Robson, E. (1999). Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education, Oxford: Oxford Editions of Cuneiform texts.

Robson, E. (2000). Mathematical cuneiform tablets in Philadelphia. Part 1 : problems and calculations. *Sources and Commentaries in Exact Sciences*, (1), 11-48.

Robson, E. (2001b). The tablet House: a scribal school in old Babylonian Nippur. *Revue d'assyriologie et d'archéologie Orientale*, (93.1), 39-66. doi : 10.3917/assy.093.0039

Robson, E. (2002). More than metrology: mathematics education in an Old Babylonian scribal school. Dans J.-M. Steele et A. Imhausen (dir.), *Under One Sky. Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*. (p.325-367) Münster: AOAT 297.

Robson, E. (2003). Tables and tabular formatting in Sumer, Babylonia, and Assyria, 2500 BCE - 50 CE. Dans M. Campbell-Kelly, M. Croarken, R. Flood et E. Robson (dir.) *History of mathematical tables: from Sumer to spreadsheets*. Oxford: Oxford University Press.

Robson, E. (2008). Secrets de famille: prêtre et astronome à Uruk à l'époque hellénistique. Dans C. Jacob (dir.), *Les lieux de savoir, I: Lieux et communautés*. (p. 440-461). Paris: Albin Michel.

Robson, E. (2008a). *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*. Princeton: Princeton University Press.

Roditi, E. (2005). Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique. Paris: Editions L'Harmattan.

Rogalski, J. (1984). Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire. (Thèse de doctorat). Accessible par HAL (tel-01267409).

Rogalski, J., Samurcay, R., Ricco, G. (1983). Analyse d'un prétest-posttest sur le volume. *Recherches en didactique des mathématiques*, (4.1), (121-131).

Rozier, S. (1989). Le raisonnement linéaire causal en thermodynamique élémentaire. (Thèse de doctorat). Université Paris 7, L.D.P.E.S.

Saltiel, E. et Viennot, L. (1984). What do we learn from similarities between historical ideas and the spontaneous reasoning students ? Dans P. Linjse (dir.), *The many faces of teaching and learnin mechanics.* (p. 199-214). Utrecht: GIREP/SVO/UNESCO.

Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. Dans J.-M. Baudouin et J. Friedrich (dir.), *Théories de l'action et éducation* (p. 202-224). Bruxelles : De Boeck.

Simon, M., et Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, (25), 472-494.

D.E. Smith. (1900). The Teaching Of Elementary Mathematics. Consulté à l'adresse : http://digital.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;cc=math;view=toc;subview=short;idno=01600002

Solares, D. (2016). Ecritures numériques et calcul en plein champ. Dans *Actes de la conférence EMF 2015.* Alger, Algérie (p.517-526).

Steele, F. (1951). Writing and history: the new tablets from Nippur, *University Museum Bulletin* (16.2), 21-27.

Steele, J. (2016). Late Babylonian Metrological Tables in the British Museum, *Sources and Commentaries in the Exact Sciences*, (16), 75-90.

Tanret, M. (2002). Per aspera ad astra. L'apprentissage du cunéiforme à Sippar-Amnanum pendant la période paléo-babylonienne tardive. Mesopotamian History and Environment. Series III Texts I/2, Gand. 14. Page citée : p.25

Thureau-Dangin, F. (1922). Textes Mathématiques Babyloniens. *Textes cunéiformes du Louvre, VI*, (33).

Thureau-Dangin, F. (1932). Le théorème de Pythagore, Notes assyriologiques LXVIII. *Revue d'Assyriologie*, (29), 131-132.

Thureau-Dangin, F. (1936). Notes sur la mathématique babylonienne. *Revue d'Assyriologie*, (33), 161-168.

Thureau-Dangin, F. (1938). *Textes Mathématiques Babyloniens*, Leiden: Ex Oriente Lux.

Tierney, C., Boyd, C., et Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. Dans G. Booker, P. Cobb, et T. Mendicuti (dir.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, (2) 307-314. Oaxtepec, Mexico: Program Committee.

Tournès D. (dir.) (*à paraître*). History of numerical tables : Springer.

Varent, C. de (2016, septembre). *David Eugene Smith's works, History of sciences and Education: a determining relation-ship*. Communication présentée à la journée : The history of ancient mathematics in relation to its uses : the case of the classroom, around David Eugene Smith (ERC SAW), Paris.

Veldhuis, N. (1997). *Elementary education at Nippur. The lists of trees and wooden objects*. (Thèse de doctorat). University of Groningen, Groningen.

Vergnaud, G. (dir.) (1983). Didactique et Acquisition du Concept de Volume. *N° spécial de Recherches en Didactique des Mathématiques*, (4).

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (10.2), 133-170.

Viennot, L. (1992). Raisonnement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster*, (14), 127-141 doi :10.4267/2042/9088

Viennot, L. (1996). Raisonner en physique: La part du sens commun. De Boeck Supérieur.

Viennot, L., Grataloup, C., Besson, U., Rogalski, M.,… (2008). *Didactique, épistémologie et histoire des sciences : Penser l'enseignement*. Paris: Presses Universitaires de France - PUF.

Visicato, G. (1995). *The Bureaucracy of Shuruppak,* Münster **:** Ugarit-Verlag.

Weiher, E. von (1993). *Uruk, Spätbabylonische Texte aus dem Planquadrat U 18, Uruk Teil IV* (AUWE 12), Mainz am Rhein; Philipp von Zabern.

Ziegler, N. (2007). Les Musiciens et la musique d'après les archives de Mari. Paris: SEPOA.

Teach your children well,
Their father's hell did slowly go by,
And feed them on your dreams
The one they picks, the one you'll know by.

Crosby, Stills, Nash & Young