

Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques

École doctorale : Physique en Ile-de-France

Doctorat

Physique

Aurianne Minneci

Quantum information :

Quantum optics in continuous variables

Information quantique :

Optique quantique en variables continues

Thèse dirigée par Pérola Milman et Thomas Coudreau

Soutenue le 4 octobre 2018

Jury

M.	Éric Lantz	Professeur	Université Besançon Franche-Comté	Président du jury
Mme	Eleni Diamanti	Chargée de recherche	Sorbonne Université	Rapporteur
Mme	Isabelle Zaquine	Professeur	Télécom ParisTech	Rapporteur
M.	Frédéric Grosshans	Chargé de recherche	Sorbonne Université	Examineur
Mme	Pérola Milman	Directrice de recherche	Université Paris 7	Directrice de thèse
M.	Thomas Coudreau	Professeur	Université Paris 7	Co-directeur de thèse

Abstract

Quantum information can be processed on different types of physical systems. It can also be processed in two fundamentally different ways, using either discrete or continuous variable implementations. In this thesis, we concentrate on quantum optics in continuous variables and the studied experiments are based on the use of photons. After an introduction to some basic notions of quantum mechanics, we present a sub-universal protocol of quantum computing, named Boson Sampling, preceded by a part exposing elements of complexity theory which are necessary to understand the quantum superiority proof of this protocol. Then, we propose a model to describe the creation of entangled qudits in an experiment done in the team. Finally, the last part of this thesis presents a more fundamental physical interpretation of the results obtained during Hong-Ou-Mandel experiments with frequency filters in front of the photodetectors, and shows that we have a part of a Schrödinger cat state, produced by postselection.

key-words : quantum information, quantum optics, continuous variables, entanglement, photon pairs, Boson Sampling.

Résumé

L'information quantique peut être traitée sur différents types de systèmes physiques. Elle peut également être traitée selon deux façons fondamentalement différentes, en usant soit des variables discrètes, soit des variables continues. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur l'optique quantique en variables continues et les expériences étudiées sont basées sur l'utilisation de photons. Après une introduction à quelques notions de base de la mécanique quantique, nous présentons un protocole sous-universel d'informatique quantique, appelé Boson Sampling, précédé d'une partie exposant des éléments de théorie de la complexité nécessaires pour comprendre la preuve de supériorité quantique de ce protocole. Puis, nous proposons un modèle pour décrire la création de qudits intriqués dans une expérience réalisée au sein de notre équipe. Enfin, la dernière partie de cette thèse présente une interprétation physique plus fondamentale des résultats obtenus lors d'expériences de type Hong-Ou-Mandel avec des filtres en fréquence devant les photodétecteurs, et montre qu'il s'agit d'une partie d'un état chat de Schrödinger produit par post-sélection.

Mots-clés : information quantique, optique quantique, variables continues, intrication, paires de photons, Boson Sampling.

En mémoire de mon oncle Patrick.

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier les membres du jury Eleni Diamanti, Isabelle Zaquine, Eric Lantz et Frédéric Grosshans d'avoir pris le temps de lire mon manuscrit et de m'avoir aidée à l'améliorer. Je suis reconnaissante envers chacun d'entre eux pour toute l'énergie qu'ils ont investie et toutes les questions pertinentes qu'ils ont posées à propos de ce travail.

Ensuite, je tiens à remercier très fortement Pérola et Thomas de m'avoir donné l'opportunité de faire ma thèse au sein de leur équipe. J'ai beaucoup apprécié travailler avec eux, car ils font preuve d'un savant mélange d'exigence et de bienveillance, ainsi que d'une grande patience. Après trois ans et demi à les cotoyer, leur complémentarité ne fait plus aucun doute et Thomas était toujours là pour ramener sur Terre les idées théoriques de Pérola. J'ai beaucoup appris à leur contact et aussi beaucoup ri. Merci infiniment pour tout ce que vous avez fait pour moi.

De plus, je remercie aussi Arne pour sa contribution aux réunions, au développement de mon travail et à la correction de mon manuscrit. Je suis impressionnée par ses connaissances dans tous les domaines abordés dans l'équipe et également dans les domaines des autres équipes du laboratoire.

D'autre part, un immense merci à Giulia, qui m'a énormément aidée lors de mon stage et le début de ma thèse. Son énergie intarissable et sa passion pour la physique (et la danse) sont communicatives. J'en profite pour remercier Simone, qui a pris la relève après le départ de Giulia, et dont les conseils m'ont été très utiles.

Merci également à mes camarades doctorants de l'époque, notamment Tom, qui a guidé mes premiers pas au sein du laboratoire ; Adrien, Peregrine, Saulo et Sergueï, avec qui j'ai partagé le bureau 512B : la cohabitation fut très facile et agréable. Merci à Andreas d'avoir ri à mes blagues. Merci à Guillaume pour toutes nos discussions sur notre futur professionnel. Merci à Gaël, Nicolas et Louis, les petits nouveaux de mon point de vue, pour leur sympathie et leur écoute. Je tiens à remercier aussi Sara, Maria, Luca, Florent, Jonathan, Adrian, Cynthia, Claire, Guillaume, Saverio, Giorgio, Vincent, Nicola, Riccardo, Alexandre, Romain et tous les autres.

Merci à mon professeur de physique de prépa, Christian Frère, qui me conseilla de faire une thèse.

Enfin, un grand merci à mes parents, qui ont tout fait pour moi et qui m'ont permis d'arriver où je suis. Merci également à ma sœur Daphné, qui, comme mes parents, a cru en moi. Merci à mon cousin Mathieu pour l'intérêt qu'il a porté à ma thèse. Merci à ma famille entière. Merci aussi à mes amis qui ne font pas de physique et qui m'ont encouragée. Merci à Nicolas et sa famille de m'avoir soutenue pendant ces trois ans de stage et thèse, et pour tout le reste.

Table des matières

I	Introduction	12
II	Contexte théorique	15
II.1	Principes de la mécanique quantique	15
II.1.1	Le principe de superposition	15
II.1.2	Mesures des quantités physiques	15
II.1.2.1	Principe de correspondance	15
II.1.2.2	Principe de quantification	15
II.1.2.3	Principe de décomposition spectrale	16
II.1.2.4	Réduction du paquet d'onde	16
II.1.3	Évolution temporelle	16
II.2	Notions de théorie de l'information quantique	16
II.2.1	Bits quantiques	16
II.2.2	Systèmes quantiques à d dimensions (qudits)	19
II.2.3	Systèmes à variables continues	22
II.3	Théorie quantique de la lumière	24
II.3.1	Quantification du champ électromagnétique	25
II.4	Indiscernabilité de deux photons	29
II.5	Fonction de Wigner	32
II.6	Quelques états intéressants	36
II.6.1	États de Fock	36
II.6.2	États cohérents	38
II.6.2.1	Représentation dans la base de Fock	38
II.6.2.2	Représentation en tant qu'état du vide déplacé	39
II.6.2.3	Représentation en position d'un état cohérent	41
II.6.3	États comprimés	42
II.6.4	États thermiques	44
II.6.5	États chats de Schrödinger	45
III	Le Boson Sampling comme preuve de la supériorité quantique	48
III.1	Théorie de la complexité	48
III.1.1	Machines de Turing	49
III.1.2	Classes de complexité et hiérarchies	52
III.1.2.1	Classe P	53
III.1.2.2	Classes NP et coNP	53
III.1.2.3	Classe #P	53
III.1.2.4	Hiérarchie polynomiale (PH) et classe PH	54
III.1.2.5	Classe BPP	54
III.1.3	Classes BQP et PostBQP	54

III.2	Formulation originale	55
III.3	Boson Sampling en variables continues	57
III.3.1	Base expérimentale	58
III.3.2	Résultats	60
III.3.2.1	Compression à deux modes	60
III.3.2.2	Représentation symplectique	60
III.3.2.3	Changement de base explicite des états TWB aux états comprimés indépendants	63
III.3.2.4	Correspondance entre les configurations	65
III.3.2.5	Différentes compressions	67
III.3.2.6	Conclusion	69
IV	Génération de qudits intriqués par conversion paramétrique descendante spontanée dans un semi-conducteur	70
IV.1	Introduction	70
IV.2	Principe de fonctionnement du dispositif	70
IV.3	Conversion paramétrique descendante	77
IV.4	Effets de la réflectivité des facettes sur l'amplitude spectrale jointe	80
IV.5	Modèle	82
V	L'expérience de Ou-Mandel revisitée	88
V.1	Description mathématique de l'expérience de Ou et Mandel	89
V.2	Interprétation avec post-sélection : le chat de Schrödinger biphoton	93
VI	Conclusions et Perspectives	96
A	Polynômes de Laguerre et d'Hermite	98
A.1	Polynômes de Laguerre	98
A.2	Polynômes d'Hermite	99
A.3	Relation entre les polynômes d'Hermite et ceux de Laguerre	100
B	Décomposition de Bloch-Messiah	101
B.1	Vérification du caractère symplectique de \mathcal{S}_2	104
B.2	Autre approche pour la diagonalisation de Σ_2	106
C	Données expérimentales d'une expérience au LKB	108
D	Calcul du taux de coïncidences	111
E	Détails de calcul des fonctions de Wigner du chapitre V	114
	Bibliographie	115

I Introduction

La mécanique quantique s'est progressivement développée à partir de théories permettant d'expliquer des observations impossibles à concilier avec la physique classique, comme par exemple la solution de Max Planck en 1900 au problème de rayonnement des corps noirs [Planck, 1901], ainsi qu'à partir de la correspondance entre énergie et fréquence dans le papier de 1905 d'Albert Einstein qui expliquait l'effet photo-électrique [Einstein, 1905]. Ces prémices de la théorie quantique furent profondément repensées au milieu des années 1920 par plusieurs grands scientifiques, notamment Max Born, Erwin Schrödinger, ou encore Werner Heisenberg. La théorie moderne est formulée dans des formalismes mathématiques spécialement développés, et elle présente des particularités que nous ne retrouvons pas en physique classique. Parmi ces particularités, l'intrication est probablement l'une des moins intuitives [Boucher, 2016]. Des sous-systèmes sont dits intriqués lorsque l'état qui décrit le système total ne peut pas être factorisé en produit d'états caractérisant chacun un sous-système individuel. Ainsi, la mesure de deux particules intriquées, qui peuvent être très éloignées l'une de l'autre, présente de fortes corrélations sur les résultats obtenus, alors même que les résultats des mesures individuelles sur l'une ou l'autre particule sont aléatoires [Gisin et al., 2002]. Einstein parlait d'une *étrange action à distance*, qui semblait contredire l'impossibilité pour l'information d'être transmise à une vitesse plus rapide que la célérité de la lumière. Néanmoins, l'intrication a permis de violer les inégalités de Bell [Bell, 1964], discréditant l'existence de variables locales cachées [Freedman and Clauser, 1972] [Fry and Thompson, 1976] [Aspect et al., 1981]. De plus, ces expériences respectent toujours la relativité restreinte, dans la mesure où un canal de communication classique est nécessaire pour échanger les résultats, et ainsi révéler les fameuses corrélations, ce qui empêche une transmission de données plus rapide que la lumière.

Une partie de ce manuscrit se penche sur l'informatique quantique et la possibilité d'un ordinateur quantique, au travers d'un protocole sous-universel, le Boson Sampling, réalisable avec les technologies actuelles [Tillmann et al., 2013] [Wang et al., 2018]. Ce protocole permettrait de montrer la supériorité quantique. Ainsi, l'engouement général pour créer le premier ordinateur quantique serait justifié.

L'informatique quantique cherche à comprendre comment les systèmes quantiques peuvent eux aussi traiter l'information et réaliser des calculs. Ce domaine est principalement un mélange entre les théories de la mécanique quantique et de la complexité en informatique, et il est apparu avec Feynman en 1982 [Feynman, 1982]. Ce dernier émit l'idée que les spécificités offertes par la mécanique quantique pouvaient être exploitées afin d'effectuer des simulations quantiques, voire de construire des ordinateurs quantiques. Cependant, l'informatique quantique fut formellement définie quelques années plus tard par Deutsch [Deutsch, 1985] : en définissant les ordinateurs quantiques comme une généralisation des machines de Turing classiques, il a permis d'inclure l'informatique quantique

dans la théorie de la complexité standard [Douce, 2016]. Puis arrivent les années 1990 et les premiers résultats théoriques et expérimentaux. Ainsi, plusieurs protocoles furent proposés, comme l'algorithme de Shor [Shor, 1997] pour la factorisation en nombres premiers, ou l'algorithme de Grover [Grover, 1997], qui, lorsqu'ils sont implémentés dans un ordinateur quantique, sont censés être plus efficaces que leurs homologues classiques. Des démonstrations de ces protocoles ont suivi, basées aussi bien sur la résonance magnétique nucléaire [Vandersypen et al., 2001] que sur des qubits supraconducteurs [Lucero et al., 2001] [Dewes et al., 2012], par exemple. Par ailleurs, le stockage de qubits a été réalisé avec des ions piégés [Home et al., 2009] et avec des atomes froids [Chanelière et al., 2005]. À vrai dire, chaque système physique présente des avantages et des inconvénients dans la réalisation de certaines tâches d'informatique quantique, et c'est pour cela qu'une multitude de systèmes physiques différents sont utilisés en informatique quantique, en fonction de la mission à effectuer [Ladd et al., 2010].

Notons que la plupart des tests et protocoles mentionnés ci-dessus ont été formulés pour des mesures avec un nombre fini de résultats possibles, décrites par des opérateurs sur des espaces de Hilbert de dimension finie, même si Einstein, Podolsky et Rosen s'étaient concentrés au début sur des systèmes caractérisés par des degrés de liberté continus, comme par exemple la position d'une particule [Ketterer, 2016]. Néanmoins, les variables continues ont regagné en popularité, ici encore, au début des années 1990, du fait de l'amélioration des capacités expérimentales qui ont permis de préparer efficacement les quadratures du champ électromagnétique, de les manipuler et de les mesurer [Leonhardt et al., 1997]. Mise à part ces quadratures, les variables continues apparaissent également dans l'étude des degrés de liberté vibrationnels des ions piégés, des atomes, et des petits oscillateurs mécaniques [Monroe et al., 1996] [Leibfried et al., 2003] [Rabl et al., 2009]. Parmi les plus importantes avancées en information quantique avec des variables continues, nous pouvons citer la réalisation de la téléportation quantique [Braunstein and Kimble, 1998] [Furusawa et al., 1998] [Grosshans and Grangier, 2001], ainsi que certains protocoles de cryptographie quantique [Grosshans and Grangier, 2002]. Ici encore, chaque dispositif expérimental possède ses propres avantages et inconvénients pour la création, la manipulation et la mesure des états en représentation à variables continues.

Le fil conducteur de cette thèse est donc l'information quantique en optique quantique : nous nous sommes concentrés sur les photons, que ce soit pour essayer d'implémenter un protocole de Boson Sampling pour démontrer la supériorité quantique, pour créer des *qudits* intriqués ou pour observer par post-sélection des états chats de Schrödinger optiques. En effet, les photons présentent de grands avantages en communication et cryptographie quantiques et seront certainement au centre du développement de technologies futures [Gisin and Thew, 2007] [Eisaman et al., 2011]. Grâce à leur grande vitesse et leur immunité quasi-totale contre la décohérence, les photons constituent un support idéal pour transporter l'information sur de longues distances, aussi bien à l'air libre que dans des fibres, et à des fréquences compatibles avec les réseaux de télécommunications existants [Ursin et al., 2007] [Stucki et al., 2009].

Organisation de la thèse

Après ces quelques mots d'introduction, nous apportons, dans le Chapitre II, la plupart des concepts basiques théoriques qui se révéleront importants, voire indispensables, pour les considérations faites ultérieurement tout au long de cette thèse. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques notions élémentaires de mécanique quantique. Ensuite, nous avons décrit quelques outils requis en informatique quantique, comme par exemple les bits quantiques (qubits). Nous avons également abordé le formalisme des variables continues. Enfin, nous avons montré comment représenter le champ électromagnétique en mécanique quantique, et nous avons passé en revue des états quantiques de la lumière typiques.

Dans le Chapitre III, nous avons commencé par présenter les grandes lignes de la théorie de la complexité de l'informatique, et notamment les machines de Turing, suivies des classes de complexité et hiérarchies nécessaires à la compréhension des démonstrations présentées dans le reste du chapitre. Ensuite, nous avons décrit la formulation originale du Boson Sampling par Aaronson. Puis, nous nous sommes intéressés au Boson Sampling avec photons annoncés et nous avons cherché le moyen de l'implémenter expérimentalement en variables continues.

Le chapitre IV commence par présenter une expérience réalisée au sien de l'équipe QITE. Il se poursuit par une description du phénomène responsable de la création de deux photons. Puis, nous abordons l'effet, sur ces deux photons, de la réflectivité des facettes du guide d'onde, point central de l'expérience. Enfin, nous exposons notre modèle qui décrit l'expérience et qui permet de montrer que nous sommes bien en présence de *qudits* intriqués, ressources intéressantes pour l'information quantique.

La première partie du chapitre V décrit mathématiquement l'expérience de Ou et Mandel [Ou and Mandel, 1988]. La seconde partie présente notre interprétation physique plus fondamentale des résultats de Ou et Mandel, et nous montrons qu'il s'agit d'une partie d'un état chat de Schrödinger produit par post-sélection.

Le dernier chapitre VI contient un résumé de cette thèse, ainsi que quelques perspectives.

II Contexte théorique

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions et concepts de base de la mécanique quantique. Il s'agit surtout de présenter ceux sur lesquels s'appuient les travaux des chapitres suivants. En aucun cas nous comptons faire ici une introduction complète de la mécanique quantique. Nous souhaitons juste apporter un support à la compréhension du contenu de ce manuscrit.

II.1 Principes de la mécanique quantique

Nous rappelons dans cette section les postulats de la mécanique quantique non-relativiste comme ils sont énoncés dans des manuels tels que [Basdevant and Dalibard, 2002]. Enfin, nous nous restreignons aux états purs.

II.1.1 Le principe de superposition

Tout système physique peut être associé à un espace de Hilbert \mathcal{H} . L'état du système est complètement déterminé, à tout temps t , par un vecteur normalisé $|\psi(t)\rangle$ de \mathcal{H} . Nous parlons de principe de superposition, car toute superposition linéaire normalisée $|\psi\rangle = \sum C_i |\psi_i\rangle$ de vecteurs d'état $|\psi_i\rangle$, avec C_i des nombres complexes, est aussi un vecteur d'état possible. De plus, deux vecteurs de \mathcal{H} représentent le même état s'ils ne diffèrent que d'une phase globale $e^{i\phi}$, avec ψ réel. En effet, la convention $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_j^* C_i \langle\psi_j|\psi_i\rangle = 1$ rend impossible la distinction entre les vecteurs $|\psi\rangle$ et $e^{i\phi} |\psi\rangle$ lors de mesures ou de l'évolution de l'état. À ne pas confondre avec les phases relatives de différents états d'un système, qui, elles, ne sont pas arbitraires. Ainsi, l'état représenté par la superposition $C_1 e^{i\phi_1} |\psi_1\rangle + C_2 e^{i\phi_2} |\psi_2\rangle$ est différent de celui représenté par $C_1 |\psi_1\rangle + C_2 |\psi_2\rangle$.

II.1.2 Mesures des quantités physiques

II.1.2.1 Principe de correspondance

À toute grandeur physique A peut être associé un opérateur linéaire hermitien \hat{A} de l'espace des vecteurs d'état \mathcal{H} . L'opérateur \hat{A} est appelé *observable* et représente la grandeur physique A .

II.1.2.2 Principe de quantification

Soit $|\psi\rangle$ l'état du système considéré avant que la mesure de la grandeur physique A ne soit effectuée sur le système. Alors, quelque soit $|\psi\rangle$, les seuls résultats possibles de la mesure sont les valeurs propres a de l'observable \hat{A} .

II.1.2.3 Principe de décomposition spectrale

Cas d'un spectre discret Soit $\hat{\mathbf{P}}_a$ le projecteur sur le sous-espace associé à la valeur propre a . Lors d'une mesure de A , la règle de Born dit que la probabilité de trouver la valeur a est

$$\mathcal{P}_\psi(a) = \langle \hat{\mathbf{P}}_a \rangle_\psi = |\langle \psi | \psi_a \rangle|^2, \quad \text{avec} \quad |\psi_a\rangle = \hat{\mathbf{P}}_a |\psi\rangle. \quad (\text{II.1})$$

Cas d'un spectre continu Dans ce cas, nous cherchons la probabilité qu'a un résultat d'avoir une valeur comprise dans $[a, a + da[$. Par exemple, pour l'observable position $\hat{\mathbf{x}}$ d'une particule ponctuelle, nous avons

$$\mathcal{P}(x) dx = |\psi(x)|^2 dx, \quad (\text{II.2})$$

avec $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ la fonction d'onde, bien que les états propres $|x\rangle$ de l'opérateur position ne soient pas normalisables.

II.1.2.4 Réduction du paquet d'onde

Tout de suite après une mesure qui a donné le résultat a , le nouvel état $|\psi'\rangle$ du système est

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{\mathbf{P}}_a |\psi\rangle}{\sqrt{\mathcal{P}_\psi(a)}}. \quad (\text{II.3})$$

II.1.3 Évolution temporelle

Soit $|\psi(t)\rangle$ l'état d'un système au temps t . Tant que le système n'est pas observé, son évolution temporelle est donné par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}} |\psi(t)\rangle, \quad (\text{II.4})$$

où $\hat{\mathbf{H}}$ est l'hamiltonien du système, *i.e.* l'observable d'énergie.

L'hamiltonien étant hermitien ($\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}^\dagger$), la norme $|\psi| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ d'un vecteur d'état est indépendante du temps.

II.2 Notions de théorie de l'information quantique

II.2.1 Bits quantiques

En information classique, le *bit* est un concept fondamental. L'information quantique se base sur un concept analogue, le *bit quantique*, ou *qubit* (contraction de l'anglais *quantum bit* [Schumacher, 1995]). Les deux seuls états possibles d'un bit classique sont souvent notés 0 et 1. Deux états possibles d'un qubit sont les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, qui correspondent aux états 0 et 1 d'un bit classique. Cependant, contrairement au bit, un qubit peut être dans un état autre que $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Il peut être dans une superposition (combinaison linéaire) de ces états :

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (\text{II.5})$$

où α et β sont des nombres complexes appelés amplitudes de probabilité. En effet, l'état d'un qubit peut être décrit par un vecteur dans un espace de Hilbert à deux dimensions, $\mathcal{H}^{(2)}$ (un état pur étant décrit par un vecteur unitaire). Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ forment une base orthonormale de cet espace vectoriel.

Lorsque nous mesurons un bit, nous pouvons déterminer dans quel état il se trouve, 0 ou 1. Mais, mesurer un qubit ne permet pas de remonter à son état quantique, c'est-à-dire aux valeurs de α et β . Cela permet plutôt, d'après la mécanique quantique, d'obtenir des informations plus restreintes sur cet état. Ainsi, mesurer un qubit donnera soit le résultat 0, avec une probabilité de $|\alpha|^2$, soit le résultat 1, avec une probabilité de $|\beta|^2$. Bien sûr, la normalisation des probabilités impose $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

La représentation géométrique suivante se révèle pratique pour penser les qubits [Nielsen and Chuang, 2010]. Comme nous avons la condition de normalisation ci-dessus, nous pouvons exprimer l'Éq.(II.5) comme

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle \right), \quad (\text{II.6})$$

où γ , θ et ϕ sont des nombres réels, avec $\theta \in [0, \pi[$ et $\phi \in [0, 2\pi[$. De plus, nous pouvons nous débarrasser de la phase globale $e^{i\gamma}$, car elle n'a pas d'effet observable. Nous pouvons donc écrire simplement

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (\text{II.7})$$

Les paramètres θ et ϕ définissent un point sur la sphère unité à trois dimensions, souvent appelée la *sphère de Bloch*, comme montré sur Fig.(II.1). De plus, nous pouvons

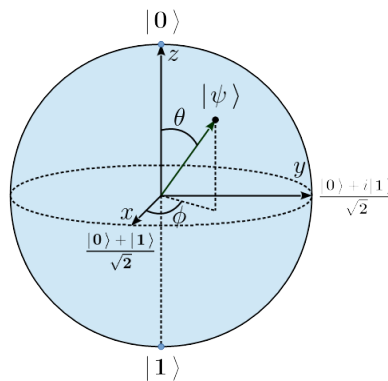


FIGURE II.1 – Représentation d'un qubit sur la sphère de Bloch. L'état pur quantique associé aux coordonnées sphériques (θ, ϕ) est $|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle$. Tous les états purs sont représentés par des vecteurs de Bloch unitaires. Ils touchent donc la surface de la sphère. De plus, les pôles de la sphère sur l'axe z correspondent aux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ de base. Les pôles sur l'axe x et l'axe y correspondent, respectivement, aux bases mutuellement impartiales $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ et $|i\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$ de la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

considérer des systèmes quantiques constitués de plusieurs qubits dans un espace de Hilbert composite $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k^{(2)} = \mathcal{H}_1^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n^{(2)}$, généré par la base formée par les produits des états des bases des qubits seuls. La dimension de \mathcal{H} est 2^n . Par exemple, l'espace de Hilbert à deux dimensions, $\mathcal{H}_1^{(2)} \otimes \mathcal{H}_2^{(2)}$, est généré par la base

$\{|i\rangle \otimes |j\rangle \mid i = \{0, 1\}, j = \{0, 1\}\}$. Par souci de concision, nous écrirons par la suite les produits tensoriels de façon plus courte comme suit : $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = |\phi\rangle |\psi\rangle = |\phi\psi\rangle$.

Les transformations de qubits sont des matrices unitaires 2×2 . Considérons ensuite les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.8})$$

Ces matrices sont associées aux opérateurs de Pauli :

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|, \quad (\text{II.9})$$

$$\hat{\sigma}_y = i |1\rangle \langle 0| - i |0\rangle \langle 1|, \quad (\text{II.10})$$

$$\hat{\sigma}_z = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|, \quad (\text{II.11})$$

qui vérifient la relation

$$\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta = \hat{\mathbf{I}} \delta_{\alpha,\beta} + i \sum_{\gamma=x,y,z} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma, \quad (\text{II.12})$$

ainsi que les relations de commutation et d'anti-commutation :

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta] &= 2i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma, \\ \{\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta\} &= 2\delta_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{I}}, \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

avec $\alpha, \beta = x, y, z$. $\delta_{\alpha,\beta}$ est la fonction delta de Kronecker, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ est le symbole de Levi-Civita et $\hat{\mathbf{I}}$ est l'opérateur identité. Ces relations, semblables à celles sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, permettent de dire que, d'une certaine façon, les matrices de Pauli génèrent $\mathfrak{su}(2)$.

L'état d'Éq.(II.5) que nous avons considéré est un état pur. Il peut être décrit par l'opérateur densité $\hat{\rho}$ défini comme

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (\text{II.14})$$

Un avantage de l'opérateur densité sur la représentation en terme d'états purs est que pour décrire un état physique donné, tout ket de la forme $\exp(i\theta) |\psi\rangle$, avec θ une phase arbitraire globale, convient, alors qu'il n'y a qu'un opérateur densité $\hat{\rho}$. De plus, un système peut être constitué d'un ensemble statistique de différents vecteurs d'état. Un tel système est un état mixte. L'opérateur densité est particulièrement utile pour les états mixtes, car, ici encore, tout état peut être caractérisé par un seul opérateur densité. En effet, un état mixte est un mélange statistique d'états purs et tout état mixte peut s'écrire sous la forme

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^N p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad (\text{II.15})$$

où N est un entier naturel, et les $|\psi_k\rangle \langle \psi_k|$ sont les différents états purs du système, pas nécessairement orthogonaux [Van Enk, 2009]. Les réels p_k sont les probabilités non

nulles et vérifient les relations

$$0 < p_k \leq 1; \quad \sum_{k=1}^N p_k = 1. \quad (\text{II.16})$$

La normalisation des p_k donne la condition $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$.

Dans la partie suivante, nous allons voir la généralisation de qubits à des systèmes quantiques de dimensions supérieures mais finies.

II.2.2 Systèmes quantiques à d dimensions (qudits)

Le concept de qubit peut se généraliser à des systèmes quantiques de plus grande dimension. Ces systèmes sont généralement décrits dans un espace de Hilbert à d dimensions ($d \geq 2$), \mathcal{H}_d , et sont appelés *qudits*. De plus, une base de \mathcal{H}_d est la base $\{|j_d\rangle | j = 0, \dots, d-1\}$ (nous retrouvons bien la base usuelle de qubit pour $d = 2$). Cela permet d'exprimer un état général de qudit sous la forme

$$|\Psi\rangle = \sum_j \alpha_j |j_d\rangle, \quad (\text{II.17})$$

avec la condition de normalisation $\sum_j |\alpha_j|^2 = 1$. Expérimentalement, différents éléments peuvent servir à implémenter des qudits. Par exemple, ces derniers peuvent être réalisés avec des ions à plusieurs niveaux avec un modèle de piège linéaire [Luo and Wang, 2014], ou en exploitant le moment angulaire orbital de photons uniques [Allen et al., 2003], ou encore avec des particules de spin S , ce qui donne un espace de Hilbert de dimension $d = 2S + 1$.

Par analogie avec Éq.(II.7), un état qudit pur général peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \prod_{j=1}^{d-1} \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |(0)_d\rangle + \prod_{j=1}^{d-2} \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{d-1}}{2}\right) e^{i\phi_{d-1}} |(1)_d\rangle \\ &+ \dots \\ &+ \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\phi_2} |(d-2)_d\rangle + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_1} |(d-1)_d\rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

avec $2(d-1)$ paramètres $\theta_j \in [0, \pi[$ et $\phi_j \in [0, 2\pi[$, où $j = 0, \dots, d-1$.

Une généralisation directe des opérateurs de Pauli pour les qubits se définit comme suit :

$$\hat{\sigma}_x^{(d)} = \sum_{j=0}^{d-1} |(j+1)_d\rangle \langle(j)_d|, \quad (\text{II.19})$$

$$\hat{\sigma}_z^{(d)} = \sum_{j=0}^{d-1} \omega^j |(j)_d\rangle \langle(j)_d|, \quad (\text{II.20})$$

avec $\omega = e^{i2\pi/d}$. Éq.(II.19), appliquée à un état de la base habituelle, effectue un déplacement unitaire modulo d . Ainsi, $(\hat{\sigma}_x^{(d)})^k$ correspond à un décalage de k unités, et

$(\hat{\sigma}_x^{(d)})^d = \hat{\mathbf{I}}$. De même, Éq.(II.20), appliquée à un état de la base habituelle, lui ajoute une phase ω^j . Donc, les opérateurs de Pauli généralisés, souvent appelés *opérateurs de Heisenberg-Weyl*, génèrent le groupe de Pauli, ou de Heisenberg-Weyl, pour qudits, muni de la multiplication.

Comme les opérateurs de Pauli des qubits correspondent aux générateurs du groupe spécial unitaire, $SU(2)$, nous pouvons également les généraliser aux dimensions supérieures en considérant les générateurs orthogonaux du groupe $SU(d)$ [Kimura, 2003]. Il s'agit d'un ensemble d'opérateurs $\hat{\lambda}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$ ($i = 1, \dots, d^2 - 1$), où $\mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$ dénote l'ensemble des opérateurs linéaire sur \mathcal{H}_d , qui vérifient

$$(1) \quad \hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_i^\dagger, \quad (2) \quad \text{Tr} \hat{\lambda}_i = 0, \quad (3) \quad \text{Tr} \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j = 2\delta_{ij}. \quad (\text{II.21})$$

Ils sont caractérisés par les constantes de structure f_{jkl} (tenseur complètement anti-symétrique par rapport aux indices de permutation) et g_{jkl} (tenseur complètement symétrique) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(d)$:

$$[\hat{\lambda}_j, \hat{\lambda}_k] = 2i \sum_{l=1}^{d^2-1} f_{jkl} \hat{\lambda}_l, \quad (\text{II.22a})$$

$$\{\hat{\lambda}_j, \hat{\lambda}_k\} = \frac{4}{d} \delta_{jk} \hat{\mathbf{I}}_d + 2 \sum_{l=1}^{d^2-1} g_{jkl} \hat{\lambda}_l, \quad (\text{II.22b})$$

où $[\cdot, \cdot]$ et $\{\cdot, \cdot\}$ sont, respectivement, une relation de commutation et une relation d'anti-commutation. Cependant, les généralisations à d dimensions ($d \geq 3$) des opérateurs de Pauli ne peuvent pas être hermitiennes et unitaires en même temps [Reich et al., 2014]. Les générateurs de $SU(d)$, qui généralisent les opérateurs de Pauli, peuvent être construits de manière systématique [Alicki and Lendi, 2007] : ils sont donnés par

$$\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^{d^2-1} = \{\hat{\mathbf{u}}_{jk}, \hat{\mathbf{v}}_{jk}, \hat{\mathbf{w}}_l\}, \quad (\text{II.23})$$

où

$$\hat{\mathbf{u}}_{jk} = |j\rangle \langle k| + |k\rangle \langle j|, \quad \hat{\mathbf{v}}_{jk} = -i(|j\rangle \langle k| - |k\rangle \langle j|), \quad (\text{II.24a})$$

$$\hat{\mathbf{w}}_l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \sum_{j=1}^l (|j\rangle \langle j-l| + |l+1\rangle \langle l+1|), \quad (\text{II.24b})$$

avec $1 \leq j \leq k \leq d$, et $1 \leq l \leq d-1$, et où $\{|m\rangle\}_{m=1}^d$ est une base orthonormale complète de \mathcal{H}_d . Ainsi, nous retrouvons bien les opérateurs de Pauli pour le cas particulier $d = 2$ ($\hat{\lambda}_1 = \hat{\mathbf{u}}_{12} \equiv \hat{\sigma}_x$, $\hat{\lambda}_2 = \hat{\mathbf{v}}_{12} \equiv \hat{\sigma}_y$, $\hat{\lambda}_3 = \hat{\mathbf{w}}_1 \equiv \hat{\sigma}_z$) avec les constantes de structure

$$f_{jkl} = \epsilon_{jkl}, \quad g_{jkl} = 0. \quad (\text{II.25})$$

Nous remarquons que pour le cas $d = 3$, nous obtenons les opérateurs de Gell-Mann ($\hat{\lambda}_1 = \hat{\mathbf{u}}_{12}$, $\hat{\lambda}_2 = \hat{\mathbf{v}}_{12}$, $\hat{\lambda}_3 = \hat{\mathbf{w}}_1$, $\hat{\lambda}_4 = \hat{\mathbf{u}}_{13}$, $\hat{\lambda}_5 = \hat{\mathbf{v}}_{13}$, $\hat{\lambda}_6 = \hat{\mathbf{u}}_{23}$, $\hat{\lambda}_7 = \hat{\mathbf{v}}_{23}$, $\hat{\lambda}_8 = \hat{\mathbf{w}}_2$)

représentés sous forme matricielle par

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{II.26}$$

avec les constantes de structure non nulles :

$$\begin{aligned}
f_{123} &= 1, \\
f_{458} &= f_{678} = \sqrt{3}/2, \\
f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = 1/2, \\
g_{118} &= g_{228} = g_{338} = -g_{888} = \sqrt{3}/3, \\
g_{448} &= g_{558} = g_{668} = g_{778} = -\sqrt{3}/6, \\
g_{146} &= g_{157} = g_{256} = g_{344} = g_{355} = -g_{247} = -g_{366} = -g_{377} = 1/2.
\end{aligned} \tag{II.27}$$

Maintenant que nous avons les générateurs de $SU(d)$, nous pouvons exprimer l'opérateur densité d'un état qubit général $\hat{\rho}$ dans sa représentation en vecteur de Bloch :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{d} \hat{\mathbf{I}}_d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d^2-1} v_i \hat{\lambda}_i, \tag{II.28}$$

où $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1}^{d^2-1}$ est le vecteur de Bloch généralisé. D'après l'Éq.(II.28), nous avons

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{d} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2. \tag{II.29}$$

Nous déduisons de l'Éq.(II.29) que la norme du vecteur de Bloch généralisé pour des états qudit purs ($\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$) vaut

$$|\mathbf{v}_{\text{pur}}| = \sqrt{2 \frac{d-1}{d}}. \tag{II.30}$$

Ainsi, nous avons bien $|\mathbf{v}_{\text{pur}}| = 1$ pour des états qubit purs. Mais, pour $d \geq 3$, les états purs se trouvent à la surface d'une hyper-sphère de rayon $\sqrt{2(d-1)/d}$ contenue dans un espace euclidien de dimension $(d^2 - 1)$. La représentation de qudits, dès que $d \geq 3$, par leur vecteur de Bloch est beaucoup moins utile que celle de qubits. En effet, contrairement au cas avec des qubits, la fonction qui relie l'espace des états qudit purs aux points de la sphère de Bloch généralisée, n'est généralement pas surjective, et donc tout point de cette sphère ne correspond pas forcément à un état qudit pur. Nous pouvons nous en rendre compte grâce à l'Éq.(II.18) : un état qudit pur général est caractérisé par $2(d-1)$ paramètres réels et, par conséquent, l'ensemble des états qudit

purs forme une sous-variété de dimension $2(d-1)$ de la sphère de Bloch généralisée de dimension (d^2-2) . De même, tout point à l'intérieur de la sphère de Bloch généralisée ne correspond pas forcément à un état qudit mixte.

II.2.3 Systèmes à variables continues

En mécanique quantique, un système à variables continues se définit comme un système dont les degrés de liberté pertinents sont associés à des opérateurs de spectre continu.

À partir du cas précédent à d dimensions, nous passons au cas de dimension infinie en prenant la limite $d \rightarrow \infty$. Alors, les nouveaux états analogues aux états de base de qudit sont des états propres infiniment localisés $|x\rangle$ caractérisés par un paramètre continu x et définis par

$$\hat{\mathbf{x}}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (\text{II.31})$$

où l'opérateur $\hat{\mathbf{x}}$ est non restreint.

La relation d'orthogonalité entre deux "vecteurs propres" $|x\rangle$ et $|x'\rangle$ devient :

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x'), \quad (\text{II.32})$$

où δ est la *distribution* de Dirac. En effet, ces états ne sont pas normalisables et n'appartiennent pas à l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, mais à des espaces plus grands.

L'opérateur $\hat{\mathbf{x}}$ est souvent associé à la position d'un système. Toutefois, il est possible d'y associer toute quantité physique au spectre continu, comme, par exemple, les quadratures du champ électromagnétique, ou la fréquence d'un système. De même, nous avons les états propres de la quantité de mouvement $|p\rangle$ associés à l'opérateur quantité de mouvement $\hat{\mathbf{p}}$ de spectre continu [Basdevant and Dalibard, 2002]. Ils sont définis par la relation

$$\hat{\mathbf{p}}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (\text{II.33})$$

Les opérateurs position $\hat{\mathbf{x}}$ et quantité de mouvement $\hat{\mathbf{p}}$ vérifient la relation de commutation canonique

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i\hbar. \quad (\text{II.34})$$

Nous prendrons $\hbar = 1$ dans la suite du manuscrit. Rappelons que toute fonction de carré sommable $\psi(x)$ peut s'écrire comme

$$\psi(x) = \int e^{ip_0x} \phi(p_0) dp_0 \quad (\text{Transformation de Fourier}), \quad (\text{II.35})$$

$$\psi(x) = \int \delta(x-x_0) \psi(x_0) dx_0 \quad (\text{Définition de la distribution de Dirac}). \quad (\text{II.36})$$

Considérons maintenant un vecteur $|\psi\rangle$ de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Calculons ensuite les produits scalaires $\langle x_0|\psi\rangle$ et $\langle p_0|\psi\rangle$:

$$\langle x_0|\psi\rangle = \int \delta(x-x_0) \psi(x) dx = \psi(x_0), \quad (\text{II.37})$$

$$\langle p_0|\psi\rangle = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_0x} \psi(x) dx = \phi(p_0), \quad (\text{II.38})$$

où $\phi(p)$ est la transformation de Fourier de $\psi(x)$. Éqs.(II.37) et (II.38) définissent des fonctions d'onde de carré sommable. Un exemple simple de fonction d'onde est une gaussienne centrée en l'origine et de largeur σ . Exprimée respectivement dans la représentation position et la représentation quantité de mouvement, une telle fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sigma^{1/2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad \text{et} \quad \phi(p) = \frac{\sigma^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-p^2\sigma^2/2}. \quad (\text{II.39})$$

Les incertitudes sur la position et la quantité de mouvement de cet état se calculent à partir du premier et second moment des opérateurs position et quantité de mouvement. Ainsi, les écarts-types sont :

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{\mathbf{x}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}. \quad (\text{II.40})$$

Nous en déduisons donc que l'état gaussien ci-dessus sature la *relation d'incertitude d'Heisenberg* : $\Delta x \Delta p \geq 1/2$.

Soit l'opérateur $\hat{\mathbf{O}} = \int |x\rangle \langle x| dx$ et deux vecteurs $|\psi\rangle$ et $|\chi\rangle$ de l'espace de Hilbert. Alors, la quantité $\langle \psi | \hat{\mathbf{O}} | \chi \rangle$ vaut

$$\langle \psi | \hat{\mathbf{O}} | \chi \rangle = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \chi \rangle dx = \int \psi^*(x) \chi(x) dx = \langle \psi | \chi \rangle. \quad (\text{II.41})$$

Éq.(II.41) est valide pour toute paire de vecteurs $|\psi\rangle, |\chi\rangle$, et nous en déduisons le résultat $\hat{\mathbf{O}} = \hat{\mathbf{I}}$. Donc, la relation de fermeture dans la base continue $\{|x\rangle\}$ peut s'écrire

$$\int |x\rangle \langle x| dx = \hat{\mathbf{I}}. \quad (\text{II.42})$$

De même, pour la base continue $\{|p\rangle\}$, nous avons

$$\int |p\rangle \langle p| dp = \hat{\mathbf{I}}. \quad (\text{II.43})$$

La décomposition discrète d'Éq.(II.17) se généralise, en base continue, comme suit :

$$|\psi\rangle = \int |x\rangle \langle x | \psi \rangle dx = \int \psi(x) |x\rangle dx \quad (\text{II.44})$$

$$= \int |p\rangle \langle p | \psi \rangle dp = \int \phi(p) |p\rangle dp. \quad (\text{II.45})$$

Ainsi, les nombres $\psi(x)$ et $\phi(p)$ peuvent être interprétés comme les composantes du vecteur $|\psi\rangle$ dans les bases continues $\{|x\rangle\}$ et $\{|p\rangle\}$, respectivement. Nous pouvons également exprimer les opérateurs position et quantité de mouvement dans ce langage par

$$\hat{\mathbf{x}} = \int x |x\rangle \langle x| dx, \quad \hat{\mathbf{p}} = \int p |p\rangle \langle p| dp. \quad (\text{II.46})$$

Finalement, la matrice de transformation permettant de passer de la base x à la base p

est donnée par

$$\langle x_0 | p_0 \rangle = \int \delta(x - x_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0 x_0}. \quad (\text{II.47})$$

Nous pouvons même passer d'une base à l'autre grâce à une version continue de l'opérateur transformée de Fourier [Braunstein, 2005],

$$\hat{\mathbf{F}} = e^{i\frac{\pi}{4}(\hat{\mathbf{x}}^2 + \hat{\mathbf{p}}^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{is's''} |s'\rangle_q \langle s''| ds' ds'', \quad (\text{II.48})$$

avec $|s\rangle_q$ ¹ un état dans une base continue q . Par exemple, si $q = x$, la base position, alors $\hat{\mathbf{F}}$ agit sur les états propres de position et de quantité de mouvement de la manière suivante : $\hat{\mathbf{F}} |s\rangle_x = |s\rangle_p$ et $\hat{\mathbf{F}}^\dagger |s\rangle_p = |s\rangle_x$, en utilisant Éq.(II.47).

Les analogues continus des opérateurs de Pauli, ou Heisenberg-Weyl, des Éqs.(II.19) et (II.20) correspondent aux opérateurs de déplacement en position et en quantité de mouvement :

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = e^{-is\hat{\mathbf{p}}} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{Z}}(s) = e^{is\hat{\mathbf{x}}}. \quad (\text{II.49})$$

L'action de ces opérateurs sur des états dans la base position ou quantité de mouvement donne :

$$\hat{\mathbf{X}}(s) |x'\rangle_x = |x' + s\rangle_x \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{Z}}(s) |x'\rangle_x = e^{isx'} |x'\rangle_x, \quad (\text{II.50})$$

$$\hat{\mathbf{X}}(s) |p'\rangle_p = e^{isp'} |p'\rangle_p \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{Z}}(s) |p'\rangle_p = |p' + s\rangle_p. \quad (\text{II.51})$$

Et comme pour les qudits, ces opérateurs génèrent un analogue continu du groupe de Heisenberg-Weyl muni de la multiplication.

II.3 Théorie quantique de la lumière

Avant la révolution quantique du début du XX^e siècle, le champ électromagnétique, à savoir la lumière, était traité comme un champ classique. Cette approche classique était largement justifiée par l'énorme succès de la théorie électromagnétique classique dans la description de toute une variété de phénomènes optiques, en particulier ceux liés à la propagation, la diffraction et l'interférence des ondes. Cependant, avec les technologies actuelles, nous expérimentons souvent des situations où seuls quelques quanta de lumière, appelés photons, sont présents. Dès lors, le champ électromagnétique ne peut plus être considéré comme continu, et une description classique inadéquate doit être remplacée par une description quantique. Ainsi, il faut traiter l'optique comme une partie de l'électrodynamique quantique, où les champs sont représentés par des opérateurs $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$.

1. Un indice accolé à un état précise dans quelle base est représenté l'état et permet ainsi d'éviter toute confusion.

II.3.1 Quantification du champ électromagnétique

Nous allons quantifier le champ électromagnétique dans le vide. Les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} satisfont les équations de Maxwell dans le vide :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{II.52})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{II.53})$$

où ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide, et \mathbf{r} et t représentent la position et le temps. *A posteriori*, il semble que la quantification soit plus facile lorsque nous écrivons les équations de Maxwell en fonction de potentiel vecteur et potentiel scalaire, donc c'est ce que nous allons faire. La divergence nulle du champ magnétique (première équation de l'Éq.(II.53)) permet d'exprimer \mathbf{B} en tant que rotationnel d'un potentiel vecteur \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{II.54})$$

Ensuite, en remplaçant \mathbf{B} dans l'équation de Maxwell-Faraday (seconde équation de l'Éq.(II.52)), cette dernière s'exprime désormais comme

$$\nabla \times \left(-\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{II.55})$$

Grâce à l'identité

$$\nabla \times \nabla \phi = 0, \quad (\text{II.56})$$

où ϕ est une fonction scalaire, le champ électrique se réécrit comme

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{II.57})$$

Substituons l'Éq.(II.54) et l'Éq.(II.57) dans les équations de Maxwell restantes, et nous obtenons les résultats suivants :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{II.58})$$

et

$$-\nabla^2 \phi - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad (\text{II.59})$$

où $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, avec c la célérité de la lumière. De plus, nous avons utilisé l'identité vectorielle

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{II.60})$$

Le couplage des termes en \mathbf{A} et ϕ complique les équations de champ Éq.(II.58) et Éq.(II.59). Mais elles peuvent être simplifiées en introduisant une autre condition sur les potentiels. En effet, plusieurs potentiels \mathbf{A} et ϕ différents peuvent représenter les mêmes champs physiques \mathbf{E} et \mathbf{B} . Soit f une fonction arbitraire de \mathbf{r} et de t , alors toute

transformation de ces potentiels définie par :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} f,\end{aligned}\tag{II.61}$$

mène aux mêmes expressions de \mathbf{E} et \mathbf{B} et est appelée *transformation de jauge*. De plus, les relations II.61 confèrent une certaine liberté dans le choix de la jauge $\{\mathbf{A}, \phi\}$, ce qui permet d'ajouter une condition supplémentaire. Celle que nous utilisons est connue sous le nom de jauge de Coulomb. Cette jauge correspond à avoir un potentiel vecteur \mathbf{A} de divergence nulle,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.\tag{II.62}$$

L'Éq. (II.59) s'exprime désormais comme

$$\nabla^2 \phi = 0,\tag{II.63}$$

une équation de Laplace, dont les solutions sont bien connues. Avec les conditions ci-dessus, une solution de l'Éq.(II.63) est $\phi = 0$. Ensuite, afin de découpler totalement l'Éq.(II.58), nous appliquons le théorème de Helmholtz selon lequel un champ vectoriel (satisfaisant certaines conditions) peut se décomposer en une composante "longitudinale" (irrotationnelle) et une autre composante "transverse" (solénoïdale ou encore de divergence nulle) [Loudon, 2000]. Nous obtenons donc l'équation suivante pour le potentiel vecteur

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0.\tag{II.64}$$

De plus, en imposant des conditions aux limites périodiques associées à un volume cubique de longueur L^2 , nous pouvons écrire la solution d'Éq.(II.64) comme une superposition d'ondes planes transverses :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \mathcal{A}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{r}, t),\tag{II.65}$$

où

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.\tag{II.66}$$

Ici, les éléments du vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ sont de la forme $k_i = 2\pi n_i / L$ ($i = x, y, z$ et $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). De plus, $\varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$ sont les vecteurs polarisation unitaires, et ils vérifient la condition de la jauge de Coulomb s'ils sont transverses :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \cdot \mathbf{k} = 0.\tag{II.67}$$

Les polarisations sont choisies perpendiculaires l'une à l'autre :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \cdot \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'},\tag{II.68}$$

où $\delta_{\lambda, \lambda'}$ est la fonction delta de Kronecker.

2. Cette région de l'espace est appelée *cavité de quantification* et n'est pas constituée de réelles barrières physiques.

Les éléments $\mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ du potentiel vecteur sont indépendants et chacun vérifie l'équation de champ (II.64)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t)}{\partial t^2} + k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = 0. \quad (\text{II.69})$$

Ainsi, les coefficients $\mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t)$, et leurs complexes conjugués, vérifient l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique simple,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = 0, \quad (\text{II.70})$$

où $\omega_k = ck$ est la pulsation.

Dès lors, la quantification du champ électromagnétique s'opère par la conversion de cet oscillateur harmonique classique en son homologue quantique. Pour ce faire, nous allons commencer par évaluer l'énergie du champ.

Nous prenons une solution de l'Éq.(II.70) de la forme

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = a_{\mathbf{k},\lambda} \exp(-i\omega_k t). \quad (\text{II.71})$$

Nous avons donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda} \left[a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]. \quad (\text{II.72})$$

Nous obtenons le champ électrique transverse complet correspondant à partir de l'Éq.(II.57) :

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda} i\omega_k \left[a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]. \quad (\text{II.73})$$

Et nous obtenons le champ magnétique à partir de l'Éq.(II.54) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{\mathbf{k} \times \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}}{\lambda} ik \left[a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]. \quad (\text{II.74})$$

L'énergie totale du rayonnement électromagnétique dans la cavité de volume V est donc

$$\mathcal{E}_{EM} = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_k^2 (a_{\mathbf{k},\lambda}^* a_{\mathbf{k},\lambda} + a_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}^*). \quad (\text{II.75})$$

L'hamiltonien quantique d'un oscillateur harmonique à une dimension (de masse m) est

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\mathbf{x}}^2 \quad (\text{II.76})$$

avec l'opérateur position $\hat{\mathbf{x}}$ et l'opérateur quantité de mouvement $\hat{\mathbf{p}}$ vérifiant la relation de commutation

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i. \quad (\text{II.77})$$

Il est pratique de remplacer $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ par une paire d'opérateurs sans dimension définis par

$$\hat{\mathbf{a}} = (2m\omega)^{-1/2} (m\omega \hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{p}}), \quad (\text{II.78})$$

et

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{p}}). \quad (\text{II.79})$$

Ces opérateurs $\hat{\mathbf{a}}$ et $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ sont appelés, respectivement, l'opérateur d'annihilation et l'opérateur de création d'un oscillateur harmonique, car ils détruisent ou créent un photon dans le champ :

$$\hat{\mathbf{a}}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (\text{II.80})$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (\text{II.81})$$

Les états propres sont appelés *états de Fock* (définis en II.6.1) et l'espace de Hilbert correspondant se nomme *espace de Fock*. Ce dernier est engendré par l'ensemble des états de Fock, qui sont également des vecteurs propres de l'opérateur nombre $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}$, dont les valeurs propres correspondent au nombre de photons dans le champ. De plus, nous avons

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger] = \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} = 1, \quad (\text{II.82})$$

et l'hamiltonien peut se réécrire sous la forme

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\omega \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger \right) = \omega \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{II.83})$$

Lorsqu'il y a plusieurs modes $\mathbf{k}\lambda$, chacun associé à un oscillateur harmonique, l'hamiltonien total s'obtient en sommant les différentes contributions des oscillateurs harmoniques, et nous avons ainsi

$$\hat{\mathcal{H}}_{EM} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad (\text{II.84})$$

où

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{1}{2}\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda} + \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \right). \quad (\text{II.85})$$

Comparons avec l'Éq.(II.75). Il apparaît que les quantifications des amplitudes classiques du potentiel vecteur en opérateurs quantiques doivent prendre les formes

$$a_{\mathbf{k},\lambda} \rightarrow \left(\frac{1}{2\epsilon_0 V \omega_k} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda} \quad \text{and} \quad a_{\mathbf{k},\lambda}^* \rightarrow \left(\frac{1}{2\epsilon_0 V \omega_k} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger. \quad (\text{II.86})$$

Avec ces substitutions, nous pouvons quantifier le potentiel vecteur classique de l'Éq.(II.72) en l'opérateur

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{1}{2\epsilon_0 V \omega_k} \right)^{1/2} \left[\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda} \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right]. \quad (\text{II.87})$$

Les opérateurs de champ électrique et champ magnétique sont obtenus par conversion des Éqs.(II.73) et (II.74). Nous définissons un angle de phase,

$$\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\pi}{2}, \quad (\text{II.88})$$

afin de simplifier l'expression de ces opérateurs.

L'opérateur champ électrique complet peut être commodément séparé en deux comme

$$\hat{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_T^+(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_T^-(\mathbf{r}, t), \quad (\text{II.89})$$

où les deux termes s'écrivent

$$\hat{\mathbf{E}}_T^+(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}, \lambda} \exp(-i\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)), \quad (\text{II.90})$$

et

$$\hat{\mathbf{E}}_T^-(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \exp(i\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)). \quad (\text{II.91})$$

Ces deux éléments s'appellent respectivement la *partie de fréquence positive* et la *partie de fréquence négative* de l'opérateur du champ électrique. L'opérateur de champ magnétique s'écrit sous forme analogue comme

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}^+(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{B}}^-(\mathbf{r}, t), \quad (\text{II.92})$$

avec

$$\hat{\mathbf{B}}^+(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{k} \times \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 V \omega_k} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}, \lambda} \exp(-i\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)), \quad (\text{II.93})$$

et

$$\hat{\mathbf{B}}^-(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{k} \times \varepsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 V \omega_k} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \exp(i\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)). \quad (\text{II.94})$$

Ainsi, les champs électrique et magnétique ont été quantifiés. Les opérateurs champ électrique et champ magnétique des $\hat{\mathbf{E}}_{qs}$ (II.89) et (II.92) sont hermitiens et ils représentent les champs électromagnétiques observables dans la cavité.

II.4 Indiscernabilité de deux photons

Les interférences à deux photons ont été démontrées pour la première fois expérimentalement par Hong, Ou et Mandel [Hong et al., 1987] en 1987, et théoriquement par Fearn et Loudon [Fearn and Loudon, 1987] la même année. Ces phénomènes montrent la nature quantique de la lumière, et ils ne peuvent être expliqués qu'avec la mécanique quantique. Pour obtenir ces interférences à deux photons, nous envoyons une paire de photons sur un séparateur de faisceau sans perte, chaque photon arrivant sur un port d'entrée différent du séparateur. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un interféromètre au sens originel du terme, où les ondes sont séparées puis recombinaées, nous observons néanmoins des effets d'interférence. La géométrie extrêmement simple du système a fait de ces interférences un critère largement répandu pour tester la qualité des sources de paires de photons [Ou, 2007].

Lorsqu'un photon arrive sur un séparateur de faisceau, il y a deux possibilités : soit il est réfléchi, soit il est transmis. Maintenant, si nous considérons deux photons arrivant sur chaque entrée d'un séparateur de faisceau 50/50 sans perte, il y a alors quatre possibilités de parcours, de probabilité égale, que peuvent suivre les photons : les deux

photons sont réfléchis (Fig.(II.2.a)); les deux photons sont transmis (Fig.(II.2.b)); ou bien un photon est transmis et l'autre est réfléchi (Figs.(II.2.c) et (II.2.d)). Lorsque

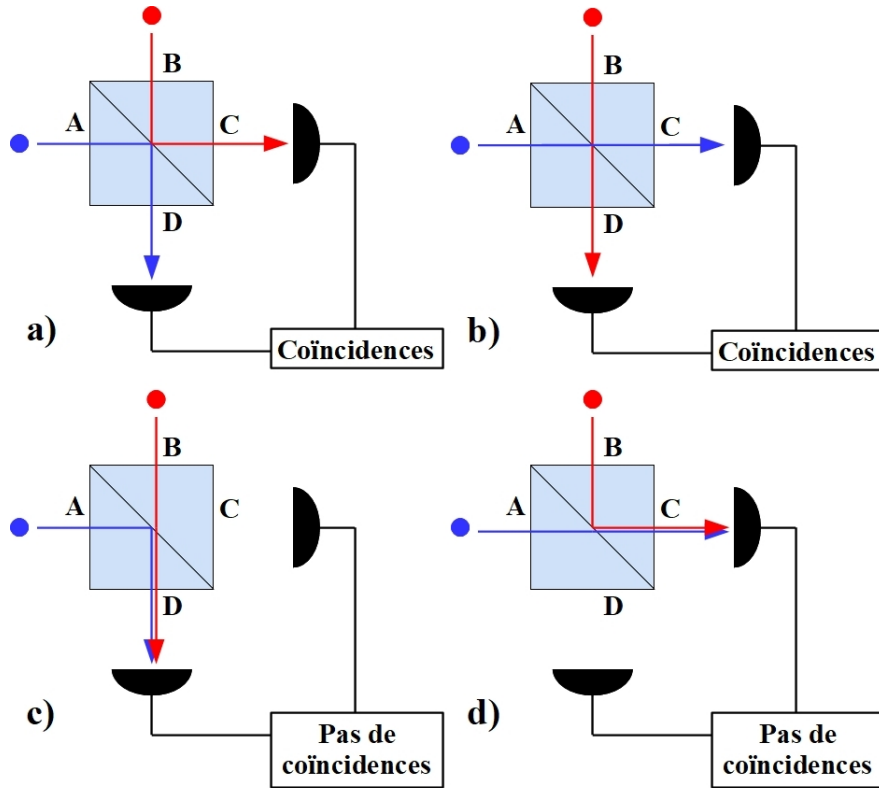


FIGURE II.2 – Les quatre configurations possibles pour deux photons arrivant sur deux entrées d'un séparateur de faisceau.

deux photons entrants sont indiscernables, c'est-à-dire lorsque toutes leurs propriétés physiques sont identiques, alors les deux dernières possibilités (Fig.(II.2.c et .d) sont indiscernables. En effet, dans cette configuration, nous retrouvons un photon à chaque sortie du séparateur de faisceau, sans pouvoir déterminer le chemin qu'a suivi chaque photon. Cela se traduit par des interférences [Autebert, 2016]. Toutefois, entre ces deux possibilités, il y a une différence de phase de π globale pour les deux photons, du fait de la conservation d'énergie au niveau du séparateur, car ce dernier est composé de deux milieux d'indices de réfraction différents. Ainsi, une réflexion sur le milieu de plus grand indice conduit à un déphasage relatif de π , alors qu'une réflexion sur le milieu d'indice plus faible n'induit aucun déphasage. De ce fait, les interférences sont destructives, et les deux chemins possibles s'annulent complètement l'un l'autre lorsque leurs amplitudes sont identiques. En conclusion, deux photons indiscernables vont toujours se grouper et sortir par la même sortie du séparateur de faisceau, de façon aléatoire entre les deux possibilités (Fig.(II.2.a et .b) [Brańczyk, 2017].

Dans ce qui suit, nous appelons A et B les deux ports d'entrée du séparateur de faisceau, et C et D les deux sorties. L'état initial, constitué de deux photons qui arrivent chacun sur un port d'entrée différent du séparateur, est obtenu en appliquant les

opérateurs de création (de photon) $\hat{\mathbf{a}}_{A,B}^\dagger$ sur l'état vide $|0_A, 0_B\rangle$ dans la base " (A, B) " :

$$|\Psi\rangle_{in} = \hat{\mathbf{a}}_A^\dagger \hat{\mathbf{a}}_B^\dagger |0_A, 0_B\rangle = |1_A, 1_B\rangle. \quad (\text{II.95})$$

L'effet d'un séparateur de faisceau sur un champ électrique peut être décrit par la transformation unitaire suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_A \\ \hat{\mathbf{a}}_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_C \\ \hat{\mathbf{a}}_D \end{pmatrix}, \quad (\text{II.96})$$

où $\hat{\mathbf{a}}_i$ ($i = A, B, C$ ou D) est l'opérateur d'annihilation de photon associé au port i du séparateur, et T et R sont les coefficients de transmission et de réflexion du séparateur, respectivement. Nous avons la même expression pour les opérateurs de création.

Pour un séparateur de faisceau sans perte, ces coefficients vérifient également les relations

$$T + R = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{TR^*} + \sqrt{RT^*} = 0. \quad (\text{II.97})$$

Avec la transformation unitaire d'Éq.(II.96), l'état en sortie, dans la base " (C, D) ", sera :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{out} &= |1_A, 1_B\rangle = \hat{\mathbf{a}}_A^\dagger \hat{\mathbf{a}}_B^\dagger |0_A, 0_B\rangle \\ &= (\sqrt{T}\hat{\mathbf{a}}_C^\dagger - \sqrt{R}\hat{\mathbf{a}}_D^\dagger)(\sqrt{R}\hat{\mathbf{a}}_C^\dagger + \sqrt{T}\hat{\mathbf{a}}_D^\dagger) |0_C, 0_D\rangle \\ &= (\sqrt{2TR}[\hat{\mathbf{a}}_C^{\dagger 2} - \hat{\mathbf{a}}_D^{\dagger 2}] + T\hat{\mathbf{a}}_C^\dagger \hat{\mathbf{a}}_D^\dagger - R\hat{\mathbf{a}}_D^\dagger \hat{\mathbf{a}}_C^\dagger) |0_C, 0_D\rangle \\ &= \sqrt{2TR}(|2_C, 0_D\rangle - |0_C, 2_D\rangle) + (T - R)|1_C, 1_D\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

Comme les opérateurs $\hat{\mathbf{a}}_C^\dagger$ et $\hat{\mathbf{a}}_D^\dagger$ n'agissent pas sur le même espace, leur commutateur est nul : $[\hat{\mathbf{a}}_C^\dagger, \hat{\mathbf{a}}_D^\dagger] = 0$. Ainsi, pour un séparateur de faisceau 50/50, c'est-à-dire avec $T = R = 1/2$, le terme en $|1_C, 1_D\rangle$ disparaît : les amplitudes à deux photons correspondantes interfèrent de façon destructive, et l'état de sortie est donc

$$|\Psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2_C, 0_D\rangle - |0_C, 2_D\rangle). \quad (\text{II.99})$$

La probabilité d'avoir des coïncidences entre les deux détecteurs, dans ce cas, est nulle, alors que la probabilité de voir les deux photons arriver sur le même détecteur, soit celui en C , soit celui en D , est de $1/2$.

Grâce à l'observation de ce phénomène, nous pouvons mesurer à la fois le degré d'indiscernabilité entre deux photons et la durée δt de leur paquet d'onde. Une mesure directe, à l'aide de détecteurs, de la durée du paquet d'onde est impossible, dans la mesure où cette durée, pour un paquet d'onde créé par conversion paramétrique, est de l'ordre de quelques picosecondes, alors que la résolution temporelle des détecteurs de photon unique est de l'ordre de quelques centaines de picosecondes. Lors de l'expérience d'interférence à deux photons, la résolution se trouve grandement améliorée, dans la mesure où elle ne dépend que de la différence entre les temps d'arrivée des photons sur le séparateur de faisceau, ce qui est contrôlé mécaniquement. Lorsqu'il y a une superposition parfaite des deux paquets d'onde, avec aucun décalage temporel, les deux photons vont se grouper et sortir du séparateur par le même port, donc il n'y aura pas de dé-

tection simultanée possible au niveau des deux détecteurs, *i.e.* aucune coïncidence. En revanche, lorsqu'il n'y a aucun recouvrement entre les deux paquets d'onde, les deux photons quittent le séparateur de faisceau par les deux ports de sortie avec une probabilité de $1/2$, ce qui entraîne des coïncidences. De ce fait, le nombre de coïncidences en fonction du délai relatif $\delta\tau$ entre les deux photons présente un creux centré en $\delta\tau = 0$ (Fig.). La largeur à mi-hauteur de ce creux est déterminé par la durée du paquet d'onde des photons ou le temps de cohérence des photons obtenues par conversion paramétrique. Enfin, la visibilité du creux fournit des informations sur le degré d'indiscernabilité entre les deux photons.

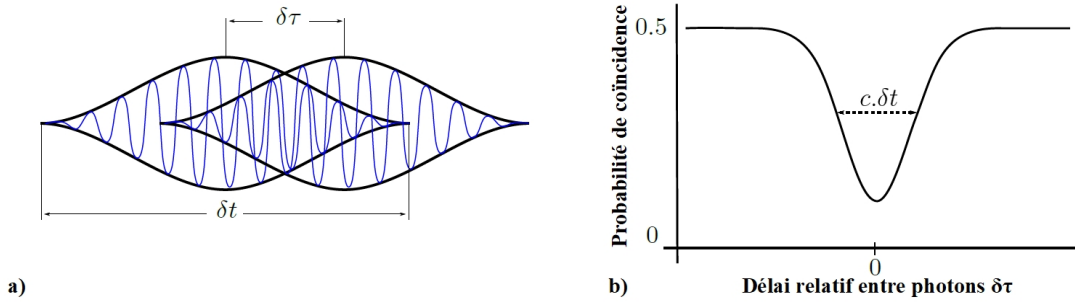


FIGURE II.3 – a) Recouvrement des deux paquets d'onde de durée δt , avec une différence de temps d'arrivée $\delta\tau$. Exemple de creux lors d'une expérience dite de Hong-Ou-Mandel. La largeur à mi-hauteur donne la durée du paquet d'onde, et la visibilité renseigne sur le degré d'indiscernabilité.

II.5 Fonction de Wigner

Lorsque nous travaillons avec des variables continues, la représentation avec vecteur de Bloch, qui se définit avec un ensemble continu d'opérateurs formant une base d'un espace de Hilbert de dimension infinie, reste possible, mais est souvent beaucoup moins pratique que dans le cas de dimensions finies. Nous avons donc besoin d'une représentation plus adaptée. Nous considérons donc une distribution sur l'espace des phases $W(x, p)$. Les coordonnées x et p peuvent correspondre tout aussi bien à la position et quantité de mouvement d'une particule qu'aux quadratures du champ électromagnétique.

Un grand ensemble d'observables (des opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert) peut être associé à des fonctions dans l'espace des phases [Bengtsson and Zyczkowski, 2006]. Nous pouvons donc avoir une fonction de l'espace des phases qui donne la distribution de probabilité d'obtenir le résultat x lors d'une mesure associée à l'opérateur \hat{x} . Il s'agit de la densité de probabilité habituelle pour un état pur, ou de $\langle x | \hat{\rho} | x \rangle$ pour un état mixte. La distribution $W(x, p)$ souhaitée doit permettre de récupérer cette densité de probabilité comme une distribution marginale de $W(x, p)$. Ce qui peut se traduire par

$$\langle x | \hat{\rho} | x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\hat{\rho}}(x, p) dp. \quad (\text{II.100})$$

Ou encore, Éq.(II.100) peut se réécrire comme la probabilité de trouver que la valeur x se trouve dans une bande infinie, bornée par deux droites parallèles $x = x_1$ et $x = x_2$, à savoir

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{bande}} W_{\hat{\rho}}(x, p) dx dp. \quad (\text{II.101})$$

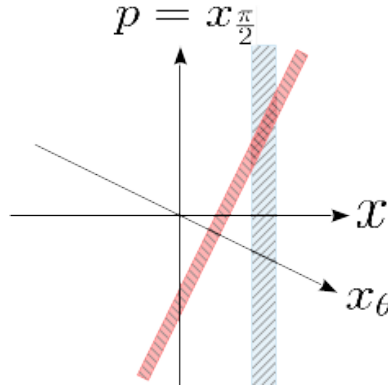


FIGURE II.4 – En mécanique quantique, la probabilité que x (et p) soit confiné dans une bande infinie est obtenue en intégrant la fonction de Wigner sur cette bande.

En mécanique quantique, il est possible de déterminer de manière unique la fonction $W_{\hat{\rho}}(x, p)$, bien qu'elle ne soit pas qualifiée de distribution de probabilité jointe, car elle peut ne pas être positive. Pour ce faire, considérons les opérateurs

$$\hat{\mathbf{x}}_{\theta} = \cos(\theta) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{p}}, \quad \hat{\mathbf{p}}_{\theta} = -\sin(\theta) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{p}}. \quad (\text{II.102})$$

Ces derniers sont intéressants, car il est possible de contrôler la phase lors d'expériences d'optique quantique. De plus, par un choix de la phase θ , $\hat{\mathbf{x}}_{\theta}$ peut être égalisé à soit $\hat{\mathbf{x}}$, soit $\hat{\mathbf{p}}$. Il en est de même pour $\hat{\mathbf{p}}_{\theta}$. Notons également que leur commutateur est indépendant de θ . Les valeurs propres de $\hat{\mathbf{x}}_{\theta}$ ($\hat{\mathbf{p}}_{\theta}$) sont notées x_{θ} (p_{θ}). Considérons maintenant le théorème suivant de [Bertrand and Bertrand, 1987] :

Théorème *La fonction $W_{\hat{\rho}}(x, p)$ est déterminée de manière unique par la condition requise que*

$$\langle x_{\theta} | \hat{\rho} | x_{\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\theta, \hat{\rho}}(x_{\theta}, p_{\theta}) dp_{\theta}, \quad (\text{II.103})$$

pour toute valeur de θ , avec $W_{\theta, \hat{\rho}}(x_{\theta}, p_{\theta}) = W_{\hat{\rho}}(x(x_{\theta}, p_{\theta}), p(x_{\theta}, p_{\theta}))$.

Nous ne montrerons pas l'unicité ici, mais nous verrons que la fonction de Wigner $W_{\hat{\rho}}(x, p)$ possède bien la propriété énoncée.

Une définition possible pour la fonction de Wigner est

$$W_{\hat{\rho}}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \chi_{\hat{\rho}}(u, v) e^{i(ux+vp)} du dv, \quad (\text{II.104})$$

où la fonction caractéristique est une "transformation de Fourier quantique" de l'opérateur densité,

$$\chi_{\hat{\rho}}(u, v) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{-i(u\hat{\mathbf{x}}+v\hat{\mathbf{p}})}) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{\frac{i}{2}uv} e^{-iu\hat{\mathbf{x}}} e^{-iv\hat{\mathbf{p}}}). \quad (\text{II.105})$$

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff³ est utilisée pour obtenir la deuxième égalité de l'Éq.(II.105). Nous avons donc

$$\begin{aligned}\chi_{\hat{\rho}}(u, v) &= \text{Tr}(\hat{\rho} e^{\frac{i}{2}uv} e^{-iu\hat{\mathbf{x}}} e^{-iv\hat{\mathbf{p}}}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}uv} \langle q | \hat{\rho} e^{-iu\hat{\mathbf{x}}} e^{-iv\hat{\mathbf{p}}} | q \rangle dq.\end{aligned}\quad (\text{II.106})$$

En plaçant Éq.(II.106) dans Éq.(II.104), nous obtenons l'expression de la fonction de Wigner dans la base de x :

$$\begin{aligned}W_{\hat{\rho}}(x, p) &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}uv} \langle q | \hat{\rho} e^{-iu\hat{\mathbf{x}}} e^{-iv\hat{\mathbf{p}}} | q \rangle e^{i(ux+vp)} du dv dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}uv} \langle q | \hat{\rho} e^{-iu\hat{\mathbf{x}}} | q + v \rangle e^{i(ux+vp)} du dv dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}uv} e^{-iu(q+v)} \langle q | \hat{\rho} | q + v \rangle e^{i(ux+vp)} du dv dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ivp} \langle q | \hat{\rho} | q + v \rangle \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(x-q-\frac{v}{2})} du}_{=2\pi\delta(x-q-\frac{v}{2})} dv dq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle e^{ivp} dv.\end{aligned}\quad (\text{II.107})$$

Nous pouvons aussi exprimer la fonction de Wigner à partir des opérateurs d'Éq.(II.102). Après vérification, cela revient à ajouter l'indice θ , et nous arrivons à la formule de Wigner :

$$W_{\theta, \hat{\rho}}(x_{\theta}, p_{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle x_{\theta} - \frac{q}{2} \left| \hat{\rho} \right| x_{\theta} + \frac{q}{2} \right\rangle e^{iqp_{\theta}} dq. \quad (\text{II.108})$$

L'intégrer sur p_{θ} ramène à l'Éq.(II.103).

Considérons l'opérateur point de l'espace des phases $\hat{\mathbf{A}}_{xp}$, qui est l'équivalent quantique du point classique dans l'espace des phases (x, p) [Watanabe et al., 2018], tel que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_{xp} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipr} \left| x + \frac{r}{2} \right\rangle \left\langle x - \frac{r}{2} \right| dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} \left| p + \frac{s}{2} \right\rangle \left\langle p - \frac{s}{2} \right| ds,\end{aligned}\quad (\text{II.109})$$

et

$$W_{\hat{\rho}}(x, p) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathbf{A}}_{xp}) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dx'' \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | \hat{\mathbf{A}}_{xp} | x'' \rangle. \quad (\text{II.110})$$

Ainsi, nous pouvons également définir l'opérateur point de l'espace des phases par ses

3. La formule s'exprime comme : $e^{\hat{\mathbf{A}}+\hat{\mathbf{B}}} = e^{\hat{\mathbf{A}}} e^{\hat{\mathbf{B}}} e^{-[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]/2}$. Elle est valide si $[\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] = [\hat{\mathbf{B}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] = 0$.

éléments de matrice dans la représentation x :

$$\langle x' | \hat{\mathbf{A}}_{xp} | x'' \rangle = \delta \left(x - \frac{x' + x''}{2} \right) \exp [i(x' - x'')p]. \quad (\text{II.111})$$

Cela nous permet d'écrire l'opérateur densité en terme de fonction de Wigner :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int W_{\hat{\rho}}(x, p) \hat{\mathbf{A}}_{xp} dx dp. \quad (\text{II.112})$$

Ainsi, il est clair que l'opérateur densité $\hat{\rho}$ et la fonction de Wigner se déterminent l'un l'autre : connaître W revient à connaître $\hat{\rho}$. Il s'agit d'une propriété intéressante, car, en considérant un ensemble de systèmes préparés de manière identique, nous pouvons mesurer les différentes distributions de probabilité marginales liées aux opérateurs tournés d'Éq.(II.102) (du moins un nombre suffisant). Alors, nous pouvons reconstruire la fonction de Wigner en utilisant des méthodes de vraisemblance maximale. Cette technique s'appelle la tomographie quantique, et elle est largement utilisée dans les laboratoires. La fonction de Wigner présente d'autres propriétés remarquables. Premièrement, nous pouvons associer une fonction de Wigner $W_{\hat{\mathbf{A}}}$ à n'importe quel opérateur $\hat{\mathbf{A}}$ en remplaçant $\hat{\rho}$ par $\hat{\mathbf{A}}$ dans Éq.(II.105). Cela permet d'écrire la valeur moyenne de mesures associées à l'opérateur $\hat{\mathbf{A}}$ sous la forme :

$$\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle_{\hat{\rho}} \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathbf{A}}) = \frac{1}{2\pi} \int W_{\hat{\mathbf{A}}}(x, p) W_{\hat{\rho}}(x, p) dx dp. \quad (\text{II.113})$$

Une formule analogue est utilisée en physique classique, où l'intégration porte sur une fonction correspondant à une grandeur physique et une densité de probabilité classique. Néanmoins, la mécanique quantique et la physique classique restent très différentes. Par exemple, considérons deux états purs $|\psi_1\rangle \langle\psi_1|$ et $|\psi_2\rangle \langle\psi_2|$ et leurs fonctions de Wigner associées. Nous avons d'après Éq.(II.113)

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \int W_1(x, p) W_2(x, p) dx dp. \quad (\text{II.114})$$

Si les deux états sont orthogonaux, l'intégrale est nulle. Nous en déduisons que la fonction de Wigner n'est pas toujours positive, d'où l'appellation de distribution de quasi-probabilité. Précisons que $W_{\hat{\rho}}(x, p)$ est bien une distribution réelle et normalisée :

$$\iint_{-\infty}^{\infty} W_{\hat{\rho}}(x, p) dx dp = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \hat{\rho} | x \rangle dx = 1. \quad (\text{II.115})$$

De plus, la fonction de Wigner est linéaire :

$$W_{p_1 \hat{\rho}_1 + p_2 \hat{\rho}_2 + \dots}(x, p) = p_1 W_{\hat{\rho}_1}(x, p) + p_2 W_{\hat{\rho}_2}(x, p) + \dots \quad (\text{II.116})$$

Enfin, la fonction de Wigner se généralise à des systèmes de N parties, suivant :

$$W_{\hat{\rho}}(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_N, p_N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_N e^{ix'_1 p_1 + ix'_2 p_2 + \dots + ix'_N p_N} \\ \times \left\langle x_1 - \frac{x'_1}{2} \left| \left\langle x_2 - \frac{x'_2}{2} \right| \dots \left\langle x_N - \frac{x'_N}{2} \right| \hat{\rho} \left| x_1 + \frac{x'_1}{2} \right\rangle \left| x_2 + \frac{x'_2}{2} \right\rangle \dots \left| x_N + \frac{x'_N}{2} \right\rangle \right\rangle. \quad (\text{II.117})$$

II.6 Quelques états intéressants

Cette section est consacrée aux états quantiques de la lumière incontournables qui pourront être utilisés dans le reste du manuscrit. Nous donnerons également quelques exemples de fonctions de Wigner associées à certains de ces états. Enfin, dans la suite de cette section, nous nous restreindrons à un champ électromagnétique à un mode généré par un ensemble d'états de Fock $\{|n\rangle | n = 1, 2, \dots\}$.

II.6.1 États de Fock

Commençons par nous pencher sur quelques propriétés de la base de Fock. Elle est composée des *états de Fock*, états propres de l'opérateur nombre \hat{N} qui permet d'observer le nombre de photons dans un mode [Haroche and Raimond, 2006]. Nous avons donc $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$. Les états de Fock forment bien une base orthogonale de l'espace de Hilbert :

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'} \quad \text{et} \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{\mathbf{I}}, \quad (\text{II.118})$$

donc tout état quantique à un mode peut s'exprimer comme

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (\text{II.119})$$

avec $c_n = \langle n|\psi\rangle$. Tous les états de Fock peuvent être générés à partir de l'état fondamental $|0\rangle$, le vide, par l'action répétée de l'opérateur de création :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (\text{II.120})$$

L'état du vide $|0\rangle$, quant à lui, se définit par le fait qu'il disparaît lorsque nous lui appliquons l'opérateur d'annihilation $\hat{\mathbf{a}}$, c'est-à-dire

$$\hat{\mathbf{a}}|0\rangle = 0. \quad (\text{II.121})$$

Cette caractéristique est logique, car nous ne pouvons pas retirer un photon au vide. La fonction d'onde d'un état de Fock $|n\rangle$ est [Mandel and Wolf, 1995]

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4} (2^n n!)^{1/2}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (\text{II.122})$$

où H_n est le polynôme d'Hermite d'ordre n (voir annexe A). Nous obtenons alors la fonction de Wigner suivante :

$$W_{|n\rangle\langle n|}(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} L_n(2(x^2 + p^2)), \quad (\text{II.123})$$

où L_n est le polynôme de Laguerre d'ordre n (voir annexe A). Pour l'exemple, nous avons représenté dans la figure les fonctions de Wigner des états de Fock de valeurs propres les plus faibles, c'est-à-dire avec $n = 0, 1, 2, 3$.

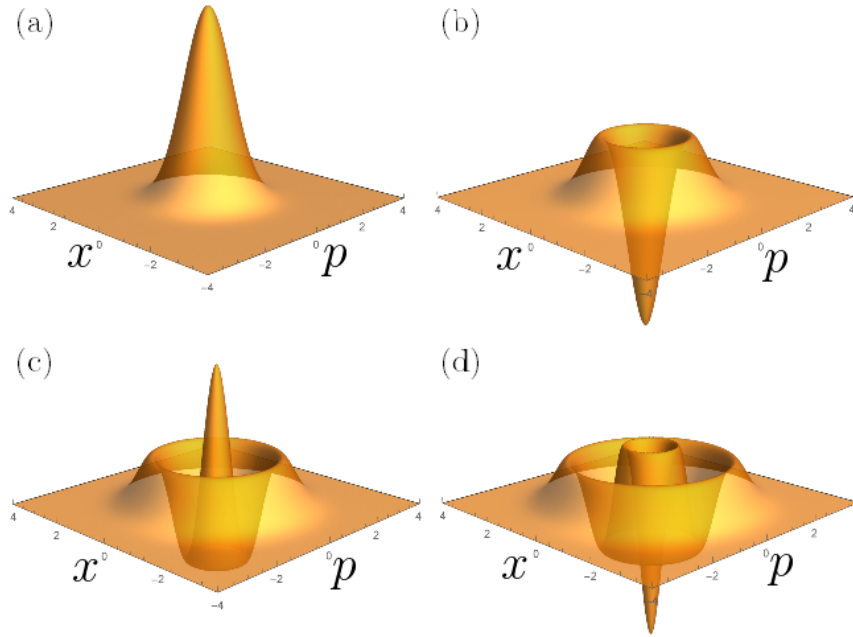


FIGURE II.5 – Représentation de la fonction de Wigner (II.123) de l'état de Fock $|0\rangle$ (a), $|1\rangle$ (b), $|2\rangle$ (c) et $|3\rangle$ (d). Nous remarquons que la fonction de Wigner de l'état du vide $|0\rangle$ n'est jamais négative, car $|0\rangle$ est l'analogie du vide classique et ne présente pas de forte caractéristique non classique, contrairement à $|1\rangle$, par exemple, qui représente un photon unique, ce qui est nettement non classique et sa fonction de Wigner présente une partie négative.

Il est également possible de calculer la fonction de Wigner d'un opérateur de la forme $|n\rangle\langle m|$:

$$W_{|n\rangle\langle m|}(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{m!}{n!}} \left(\sqrt{2}(x - ip) \right)^{n-m} e^{-(x^2+p^2)} L_m^{n-m}(2(x^2 + p^2)), \quad (\text{II.124})$$

ce qui permet d'exprimer, d'une façon pratique, la fonction de Wigner d'un opérateur densité quelconque à partir de ses éléments de matrice $\rho_{n,m} = \langle n | \hat{\rho} | m \rangle$:

$$W_{\hat{\rho}}(x, p) = \sum_{n,m} \hat{\rho}_{n,m} W_{|n\rangle\langle m|}(x, p). \quad (\text{II.125})$$

Ces états de Fock peuvent servir à exprimer d'autres états particuliers, comme, par exemple, les états cohérents, ce que nous allons voir dans la partie suivante.

II.6.2 États cohérents

Les états cohérents sont *l'équivalent quantique des ondes électromagnétiques mono-modes classiques*. De plus, la représentation en états cohérents est commode pour décrire les propriétés de cohérence optique du champ électromagnétique, comme son analogue classique, l'amplitude complexe. Cette représentation mène donc à une correspondance entre les fonctions de corrélation classiques et quantiques. Les états cohérents se rapprochent le plus possible d'être des états classiques d'amplitude complexe définie, d'où leur nom d'états quasi-classiques.

II.6.2.1 Représentation dans la base de Fock

Soit $|\alpha\rangle$ un état cohérent, avec α un nombre complexe. $|\alpha\rangle$ est un vecteur propre de valeur propre α de l'opérateur d'annihilation \hat{a} [Mandel and Wolf, 1995]

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (\text{II.126})$$

Par ailleurs, nous pouvons exprimer $|\alpha\rangle$ dans la base de Fock :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (\text{II.127})$$

avec c_n des nombres complexes qu'il reste à déterminer. Par substitution d'Éq.(II.127) dans Éq.(II.126), nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (\text{II.128})$$

qui permet d'obtenir la relation de récurrence

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1}, \quad (\text{II.129})$$

et ainsi, avec la condition de normalisation $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, d'exprimer les états cohérents sous la forme explicite :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{II.130})$$

Pour $\alpha = 0$, nous retrouvons bien l'état du vide $|0\rangle$, qui peut être considéré indifféremment comme un état cohérent ou un état de Fock. De plus, notons que pour tout nombre complexe α autre que zéro, l'état cohérent $|\alpha\rangle$ a une projection non-nulle sur tout état de Fock $|n\rangle$:

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (\text{II.131})$$

Prendre le module carré d'Éq.(II.131) permet d'obtenir la probabilité $p(n)$ d'avoir n photons dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$:

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (\text{II.132})$$

qui n'est autre qu'une distribution de Poisson en n , de paramètre $|\alpha|^2$. Nous en déduisons que, lorsque nous avons un état cohérent $|\alpha\rangle$, le nombre moyen de photons présents est donné par :

$$\langle \hat{\mathbf{n}} \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}} | \alpha \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n) = |\alpha|^2. \quad (\text{II.133})$$

Le produit scalaire de deux états cohérents s'exprime comme

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}} e^{\frac{(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)}{2}}. \quad (\text{II.134})$$

Éq.(II.134) ne s'annulant jamais, ces états cohérents ne sont jamais orthogonaux. Cependant, ils vérifient la relation [Mandel and Wolf, 1995]

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d\alpha = \hat{\mathbf{I}}, \quad (\text{II.135})$$

qui permet d'écrire tout état sous la forme d'une intégrale sur le plan complexe comme suit :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | \psi \rangle |\alpha\rangle d\alpha. \quad (\text{II.136})$$

II.6.2.2 Représentation en tant qu'état du vide déplacé

Définissons dans un premier temps l'opérateur unitaire de "déplacement" :

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^* \hat{\mathbf{a}}), \quad (\text{II.137})$$

où α est une amplitude complexe arbitraire [Raimond, 2016]. Cet opérateur est bien unitaire :

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha)^\dagger \hat{\mathbf{D}}(\alpha) = \hat{\mathbf{I}}. \quad (\text{II.138})$$

Notons également que

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha)^\dagger = \hat{\mathbf{D}}(-\alpha). \quad (\text{II.139})$$

Comme nous le montrons ci-dessous, nous pouvons alors définir un état cohérent $|\alpha\rangle$ comme l'action de l'opérateur déplacement sur le vide :

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha) |0\rangle. \quad (\text{II.140})$$

Comme $\hat{\mathbf{D}}(0) = \hat{\mathbf{I}}$, l'état du vide $|0\rangle$ n'est autre qu'un état cohérent dont l'amplitude est nulle.

En effet, lorsque nous combinons Éq.(II.120) avec Éq.(II.130), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger} |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.141})$$

Puis, nous ré-écrivons Éq.(II.141) sous une forme un peu plus symétrique par ajout de l'opérateur $e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}}$ devant $|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}} |0\rangle. \quad (\text{II.142})$$

Cet ajout est justifié, car l'opérateur $e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}}$ ne modifie pas le vide, d'après Éq.(II.121) :

$$\begin{aligned} e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}} |0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* \hat{\mathbf{a}})^n}{n!} |0\rangle \\ &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.143})$$

Comme le commutateur de $e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}}$ et $e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger}$ vaut :

$$[e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}}, e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger}] = |\alpha|^2, \quad (\text{II.144})$$

alors la formule de Baker-Campbell-Hausdorff donne :

$$e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^* \hat{\mathbf{a}}} = e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}, \quad (\text{II.145})$$

où nous voyons apparaître la définition de l'opérateur déplacement d'Éq.(II.137). Ainsi, nous retrouvons bien Éq.(II.140) : l'opérateur déplacement $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$ crée l'état cohérent $|\alpha\rangle$ à partir de l'état du vide $|0\rangle$.

La signification de α peut être comprise lorsque nous considérons un mode polarisé linéairement de fréquence angulaire ω enfermé dans une cavité de volume V [Fox, 2006]. En effet, dans ce cas, α peut se définir comme :

$$\alpha = X_1 + iX_2, \quad (\text{II.146})$$

où X_1 et X_2 sont des nombres réels et représentent les quadratures sans dimension du champ dans la cavité. Nous pouvons également écrire α sous la forme d'une amplitude avec une phase :

$$\alpha = |\alpha| e^{i\phi}, \quad (\text{II.147})$$

avec

$$|\alpha| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad (\text{II.148})$$

et

$$\begin{aligned} X_1 &= |\alpha| \cos(\phi), \\ X_2 &= |\alpha| \sin(\phi). \end{aligned} \quad (\text{II.149})$$

D'après ces définitions, nous pouvons représenter l'état cohérent $|\alpha\rangle$ comme un phaseur de longueur $|\alpha|$ et d'angle ϕ dans l'espace des phases, comme représenté en Fig.(II.6). De plus, un état cohérent est un état d'incertitude minimum, sans préférence pour l'une ou l'autre des deux quadratures, donc les incertitudes sur les quadratures doivent être identiques. D'où

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}, \quad (\text{II.150})$$

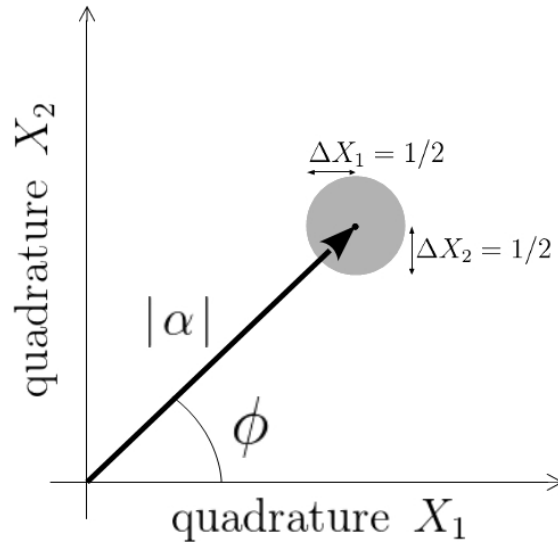


FIGURE II.6 – Représentation du phaseur correspondant à l'état cohérent $|\alpha\rangle$. La longueur du phaseur vaut $|\alpha|$, c'est-à-dire la racine carrée du nombre moyen de photons, car $\langle \hat{\mathbf{N}} \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{N}} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$. Et l'angle qu'il fait avec l'axe X_1 est la phase ϕ . L'incertitude quantique est symbolisée par un cercle de rayon $1/2$ au bout du phaseur.

comme pour l'état du vide, ce qui confirme l'interprétation d'un état cohérent comme état du vide déplacé.

II.6.2.3 Représentation en position d'un état cohérent

La représentation en position x correspond à la fonction d'onde $\psi_\alpha(x)$ de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ [Mandel and Wolf, 1995]. Elle est déterminée en évaluant l'élément de matrice $\langle x | \alpha \rangle$, où $|x\rangle$ est un état propre de l'opérateur x . D'après Éq.(II.126), nous avons

$$\langle x | \hat{\mathbf{a}} | \alpha \rangle = \alpha \langle x | \alpha \rangle \equiv \alpha \psi_\alpha(x). \quad (\text{II.151})$$

Substituons à l'opérateur $\hat{\mathbf{a}}$ son expression en termes de $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ d'Éq.(II.78), puis, mettons $\hat{\mathbf{p}}$ sous sa forme différentielle. Alors, nous obtenons d'Éq.(II.151) l'équation différentielle du premier ordre de la fonction d'onde $\psi_\alpha(x)$ suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_\alpha(x) = \alpha \psi_\alpha(x). \quad (\text{II.152})$$

La solution générale d'Éq.(II.152) s'écrit comme

$$\psi_\alpha(x) = A \exp \left(-\frac{\omega}{2} \left[x - \left(\frac{2}{\omega} \right)^{1/2} \alpha \right]^2 \right), \quad (\text{II.153})$$

où

$$A = \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{1/4} e^{\mathcal{I}(\alpha)^2}, \quad (\text{II.154})$$

est la constante de normalisation déterminée par la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\alpha}(x)|^2 dx = 1. \quad (\text{II.155})$$

Ainsi, $\psi_{\alpha}(x)$ a la forme d'une fonction gaussienne en x et le pic de cette gaussienne est distant de $(2/\omega)^{1/2}\alpha$ de l'origine. Comme $\alpha = 0$ donne l'état du vide, nous voyons bien qu'un état cohérent peut être considéré comme un déplacement de l'état du vide. D'ailleurs, la fonction de Wigner d'un état cohérent est la même que celle de l'état du vide, déplacée à la position (ν, μ) dans l'espace des phases, où ν et μ sont des réels tels que $\alpha = (\nu + i\mu)/\sqrt{2}$. La fonction de Wigner de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ s'écrit donc :

$$W_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(x-\nu)^2 - (p-\mu)^2}. \quad (\text{II.156})$$

II.6.3 États comprimés

Considérons deux opérateurs hermitiens $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ qui vérifient la relation de commutation [Scully and Zubairy, 1997]

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = i\hat{\mathbf{C}}. \quad (\text{II.157})$$

Alors, les incertitudes en A et B (observables associées aux opérateurs), définies comme $\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$, satisfont le principe d'indétermination d'Heisenberg :

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle|. \quad (\text{II.158})$$

Un état est dit *comprimé* si l'incertitude sur une des observables, par exemple A , vérifie la relation

$$(\Delta A)^2 < \frac{1}{2} |\langle C \rangle|. \quad (\text{II.159})$$

Ce nom provient de la "compression" effectuée sur les fluctuations d'une quadrature, aux dépens de fluctuations accrues de sa quadrature conjuguée, de sorte que le principe d'indétermination ne soit pas violé [Aspect and Grangier, 2004].

Si, en plus de vérifier l'Éq.(II.159), les variances saturent l'Éq.(II.158), i.e.,

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} |\langle C \rangle|, \quad (\text{II.160})$$

alors l'état est appelé *état comprimé idéal*, car il y a bien une compression suivant A , mais les fluctuations accrues de sa quadrature conjuguée restent minimales, de sorte qu'Éq.(II.158) soit saturée.

Un état comprimé à un mode peut être obtenu à partir d'un état non-comprimé par l'application de l'*opérateur de compression* :

$$\hat{\mathbf{S}}(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^* \hat{\mathbf{a}}^2 - \xi \hat{\mathbf{a}}^{\dagger 2})\right), \quad (\text{II.161})$$

avec $\xi = r e^{i\theta}$ le *paramètre de compression*, où r et θ sont réels. Dans la suite de cette section, nous supposons que cette phase est nulle. Par exemple, nous pouvons obtenir l'état du vide comprimé à partir de l'état du vide :

$$|0, r\rangle = \hat{\mathbf{S}}(r) |0\rangle = \exp\left(\frac{r}{2}(\hat{\mathbf{a}}^2 - \hat{\mathbf{a}}^{\dagger 2})\right) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} (-\tanh(r))^n |2n\rangle, \quad (\text{II.162})$$

et tous les autres états d'incertitude minimum peuvent être atteints en déplaçant le vide comprimé :

$$|\alpha, r\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha) |0, r\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha) \hat{\mathbf{S}}(r) |0\rangle, \quad (\text{II.163})$$

avec un nombre moyen de photons $\langle \hat{\mathbf{N}} \rangle_{|\alpha, r\rangle} = |\alpha|^2 + (\sinh(r))^2$. La fonction d'onde de cet état du vide comprimé déplacé s'écrit :

$$\langle x | \alpha, r \rangle = \frac{1}{\pi^{1/4} e^{-r/2}} e^{-\frac{(x - \nu)^2}{2e^{2r}} - i\mu x + i\mu\nu}, \quad (\text{II.164})$$

avec les μ et ν définis dans Éq.(II.156). Et la fonction de Wigner correspondante est

$$W_{|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r|}(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x - \nu)^2}{e^{2r}} - \frac{(p - \mu)^2}{e^{2r}}}. \quad (\text{II.165})$$

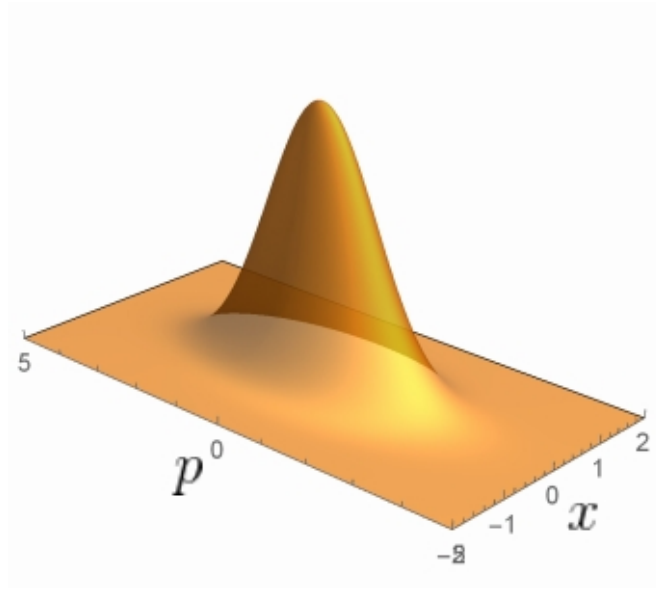


FIGURE II.7 – Représentations de la fonction de Wigner (II.165) d'un état du vide comprimé $|0, r\rangle$ avec $r = 0.5$.

La quantité de compression peut aussi être quantifiée par le facteur de compression s , défini comme la variance de l'état comprimé Δx^2 sur la limite de bruit quantique donnée

par la variance de l'état du vide Δx_0^2 . Ainsi, nous avons :

$$s = \frac{\Delta x^2}{\Delta x_0^2} = e^{-2r}. \quad (\text{II.166})$$

Dans les réalisations expérimentales, le facteur de compression s est souvent donné en décibel :

$$s_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(s). \quad (\text{II.167})$$

Il est possible également d'obtenir des états comprimés à plusieurs modes. Par exemple, pour les états à deux modes, nous avons l'opérateur de compression à deux modes qui s'écrit comme

$$\hat{\mathbf{S}}_2(\xi) = \exp\left(\xi \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^\dagger - \xi^* \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{b}}\right), \quad (\text{II.168})$$

où $\hat{\mathbf{a}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ sont les opérateurs d'annihilation de chaque mode d'un système bipartite. Ainsi, nous pouvons appliquer l'opérateur au vide à deux modes pour obtenir un vide comprimé à deux modes (TMSV pour *two-mode squeezed vacuum*) :

$$|r\rangle_{\text{TMSV}} = \hat{\mathbf{S}}_2(r) |0\rangle_a |0\rangle_b = \sqrt{1 - \chi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \chi^n |n\rangle_a |n\rangle_b, \quad (\text{II.169})$$

où $\chi = \tanh(r) \in [0, 1]$. La fonction de Wigner d'un tel état TMSV s'écrit :

$$W_{\text{TMSV}}(x_a, p_a; x_b, p_b) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\frac{(x_a - x_b)^2}{2e^{-2r}} - \frac{(x_a + x_b)^2}{2e^{2r}} - \frac{(p_a - p_b)^2}{2e^{2r}} - \frac{(p_a + p_b)^2}{2e^{-2r}}}. \quad (\text{II.170})$$

L'état TMSV (II.169) est aussi appelé état Einstein-Podolski-Rosen (EPR), car, en prenant la limite $r \rightarrow \infty$, Éq.(II.170) devient :

$$W_{\text{EPR}}(x_a, p_a; x_b, p_b) = \frac{1}{\pi^2} \delta_{x_a, x_b} \delta_{p_a, -p_b}, \quad (\text{II.171})$$

avec, ici, δ_{x_a, x_b} et $\delta_{p_a, -p_b}$ des fonctions delta de Kronecker. Et Éq.(II.171) correspond à la fonction de Wigner de l'état EPR [Einstein et al., 1935] :

$$|\text{EPR}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle_a |x\rangle_b dx = \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle_a |-p\rangle_b dp. \quad (\text{II.172})$$

II.6.4 États thermiques

Au lieu de considérer des superpositions cohérentes d'états de Fock, nous nous intéressons ici à des mélanges incohérents, dont le nombre moyen de photons $\langle n \rangle$ est fixé. Ce sont les états dits thermiques :

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{\exp[-\omega \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} / (k_b T)]}{\text{Tr}(\exp[-\omega \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} / (k_b T)])}. \quad (\text{II.173})$$

Dans la base de Fock, l'opérateur $\hat{\rho}_{\text{th}}$ devient :

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}} |n\rangle \langle n|, \quad (\text{II.174})$$

avec

$$\langle n \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} \hat{\rho}_{\text{th}}) = (\exp[\omega/(k_b T)])^{-1}. \quad (\text{II.175})$$

Ce qui mène à la distribution de Bose-Einstein :

$$\rho_{nn} = \langle n | \hat{\rho}_{\text{th}} | n \rangle = P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}}. \quad (\text{II.176})$$

La fonction de Wigner associée à $\hat{\rho}_{\text{th}}$ est :

$$W_{\text{th}}(x, p) = \frac{1}{\pi(2\langle n \rangle + 1)} \exp\left(-\frac{x^2 + p^2}{2\langle n \rangle + 1}\right). \quad (\text{II.177})$$

Les états cohérents sont des cas particuliers d'états gaussiens, et sont définis comme des états thermiques d'hamiltoniens quadratiques.

II.6.5 États chats de Schrödinger

Un état chat de Schrödinger se définit comme une superposition avec probabilités égales de deux états cohérents avec des amplitudes complexes α_1 et α_2 différentes [Haroche and Raimond, 2006] :

$$|\psi_{\text{cat}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left(e^{i\phi_1} |\alpha_1\rangle + e^{i\phi_2} |\alpha_2\rangle \right), \quad (\text{II.178})$$

avec \mathcal{N} une constante de normalisation qui prend en compte le chevauchement des deux états cohérents $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$. Si $|\alpha_1 - \alpha_2| \gg 1$ (comme nous le supposons dans la suite), alors le chevauchement est négligeable et l'état *chat* s'exprime plus simplement par

$$|\psi_{\text{cat}}\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\phi_1} |\alpha_1\rangle + e^{i\phi_2} |\alpha_2\rangle \right). \quad (\text{II.179})$$

La cohérence entre les deux états cohérents permet de distinguer l'état *chat* d'un mélange statistique. Elle est mise en évidence dans l'expression de l'opérateur densité associé à l'état *chat* :

$$\hat{\rho}_{\text{cat}} \approx \frac{1}{2} \left(|\alpha_1\rangle \langle \alpha_1| + |\alpha_2\rangle \langle \alpha_2| + e^{i(\phi_1 - \phi_2)} |\alpha_1\rangle \langle \alpha_2| + e^{i(\phi_2 - \phi_1)} |\alpha_2\rangle \langle \alpha_1| \right). \quad (\text{II.180})$$

En effet, les termes non-diagonaux de cet opérateur densité décrivent la cohérence. Nous allons regarder plus particulièrement les états *chats* dont les amplitudes des états cohérents ont même module. Considérons notamment deux superpositions d'états cohérents dont les phases diffèrent de π . Ces superpositions sont appelées états chats "pair" et "impair" :

$$|\psi_{\text{cat}}^{\pm}\rangle = \frac{|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}}. \quad (\text{II.181})$$

La cohérence de ces états chats est visible au travers de leurs distributions du nombre de photons :

$$p_{\text{cat}}^{(\pm)}(n) = \frac{|\langle n|\alpha\rangle|^2}{2} [1 \pm (-1)^n]^2. \quad (\text{II.182})$$

Les états $|\psi_{\text{cat}}^+\rangle$ et $|\psi_{\text{cat}}^-\rangle$ se développent, respectivement, seulement autour des états de Fock pairs et ceux impairs. Ainsi, dans la base de Fock, les états chats pair et impair s'écrivent :

$$|\psi_{\text{cat}}^+\rangle = \frac{2}{\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha|^2})}} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle, \quad (\text{II.183})$$

et

$$|\psi_{\text{cat}}^-\rangle = \frac{2}{\sqrt{2(1-e^{-2|\alpha|^2})}} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle. \quad (\text{II.184})$$

Ces variations dans la distribution du nombre de photons sont absentes dans les mélanges statistiques de $|\alpha\rangle$ et $|\alpha\rangle$, qui contiennent tous les nombres de photons possibles. Ce sont donc les "franges sombres" dans la distribution du nombre de photons qui indiquent la cohérence des états chats.

De plus, les états chats pair et impair sont états propres de l'opérateur parité du nombre de photons \mathcal{P} , de valeurs propres $+1$ et -1 , respectivement :

$$\mathcal{P} |\psi_{\text{cat}}^{\pm}\rangle = \pm |\psi_{\text{cat}}^{\pm}\rangle, \quad (\text{II.185})$$

avec

$$\mathcal{P} = \exp(i\pi\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}\hat{\mathbf{a}}). \quad (\text{II.186})$$

Toujours en considérant $\alpha = \frac{\nu + i\mu}{\sqrt{2}}$, avec ν et μ réels, la fonction de Wigner des états $|\psi_{\text{cat}}^{\pm}\rangle$ peut s'exprimer à partir des fonctions de Wigner des deux états cohérents formant les états chats et de l'état du vide, selon :

$$W_{\psi_{\text{cat}}^{\pm}}(x,p) = \frac{1}{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})} [W_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(x,p) + W_{|-\alpha\rangle\langle-\alpha|}(x,p) \pm W_{|0\rangle\langle 0|}(x,p) 2 \cos(2(x\mu - \nu p))]. \quad (\text{II.187})$$

Nous avons représenté sur Fig.(II.8) les fonctions de Wigner des états chats pairs et impairs avec des amplitudes α différentes. Nous remarquons que lorsque l'amplitude des états chats est assez grande, nous distinguons bien les deux gaussiennes dues aux deux premiers termes d'Éq.(II.187) (que nous appellerons les "yeux" du chat dans le chapitre V), et des franges d'interférence au niveau de l'origine (que nous appellerons "moustaches" du chat), qui correspondent à la dernière partie d'Éq.(II.187), c'est-à-dire à la fonction de Wigner de l'état du vide modulé par un cosinus. La seule différence entre les fonctions de Wigner d'états chats pair et impair réside au niveau des franges d'interférence à l'origine, dont les phases sont simplement décalées d'un facteur de π . Pour des états chats dont les amplitudes sont faibles ($\alpha \approx 1$), la distinction entre les différents termes de la fonction de Wigner n'est plus évidente. D'ailleurs, lorsque $|\alpha| \rightarrow 0$, la fonction de Wigner d'un état chat pair tend vers celle de l'état du vide et la fonction de Wigner d'un état chat impair tend vers celle d'un état à un photon.

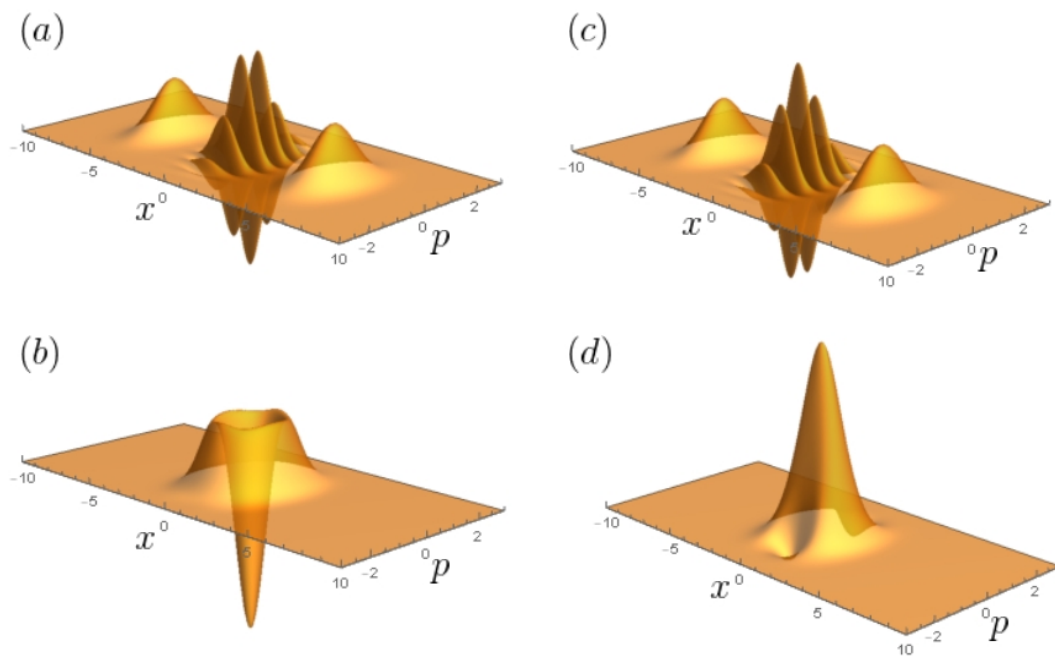


FIGURE II.8 – Représentations de la fonction de Wigner (II.187) d'états chats de Schrödinger impairs (à gauche) et pairs (à droite), avec des amplitudes $\alpha = 5$ (en haut) et $\alpha = 1$ (en bas).

III Le Boson Sampling comme preuve de la supériorité quantique

Le fait qu'un système quantique puisse effectuer un calcul fut souligné en premier lieu par Paul Benioff et Richard Feynman (indépendamment l'un de l'autre) au début des années 1980 [Benioff, 1980]. D'une certaine manière, c'était une question qui allait probablement finir par apparaître naturellement toute seule, en considérant l'envie incessante de miniaturiser l'électronique. Au bout d'un moment, nous finirons par approcher d'un régime où la mécanique quantique sera indispensable pour décrire le fonctionnement des dispositifs informatiques. Puis, l'idée d'ordinateur quantique a vu le jour. De plus, les ordinateurs quantiques devraient être plus efficaces dans l'exécution de certains calculs que n'importe quelle machine classique. Malheureusement, les défis technologiques associés à la construction d'un ordinateur quantique à grande échelle n'ont pas encore permis la vérification expérimentale d'une telle attente. Récemment, le Boson Sampling (échantillonnage de bosons) est apparu comme un problème suspecté être insoluble sur n'importe quel ordinateur classique à une échelle suffisamment grande, mais qui peut être implémenté efficacement avec un système d'optique quantique linéaire. Nous avons seulement dit "suspecté", parce que la preuve de complexité fournie par Scott Aaronson et Alex Arkhipov dans [Aaronson and Arkhipov, 2014] repose sur certaines conjectures en informatique qui sont généralement considérées comme vraies, mais qui n'ont toujours pas été prouvées (nous présenterons ces conjectures dans la suite de ce chapitre). Par conséquent, le Boson Sampling peut offrir un défi réalisable expérimentalement à la thèse étendue de Church-Turing¹. Cette remarquable possibilité a motivé en grande partie l'intérêt pour le Boson Sampling, au moins dans le contexte de la théorie de la complexité.

III.1 Théorie de la complexité

Nous nous intéressons ici à quelques notions de théorie de la complexité informatique afin de se faire une idée des arguments qui font du Boson Sampling un candidat idéal pour une démonstration de principe de la supériorité quantique.

La théorie de la complexité est un domaine des mathématiques, et plus précisément de l'informatique théorique, qui étudie formellement la quantité de ressources (temps, espace mémoire, etc.) minimale nécessaire à un algorithme pour résoudre un problème algorithmique. Il s'agit donc de déterminer la difficulté intrinsèque d'un problème, basée sur cette quantité de ressources nécessaire, afin de pouvoir organiser des classes de complexité, et enfin de trouver des relations entre ces classes. Cette définition de la

1. La thèse étendue de Church-Turing affirme qu'une machine de Turing peut simuler efficacement tout système physiquement réalisable. La définition d'une machine de Turing est exposée dans ce qui suit.

complexité doit être *universelle*, c'est-à-dire indépendante du matériel utilisé, pour être significative. C'est pourquoi la notion de modèle de calcul est utilisée lors de démonstration de complexité. De plus, le modèle de calcul le plus utilisé, bien qu'il ne soit pas le seul, est la machine de Turing.

III.1.1 Machines de Turing

Proposée en 1936 par Alan Turing, une machine de Turing est un modèle mathématique d'une machine informatique qui manipule un ensemble fini de symboles sur une bande infinie (qui constitue la mémoire) selon un ensemble de règles [Turing, 1936]. Plus en détail, une machine de Turing M est composée d'un programme fini contrôlant une tête de lecture/écriture se déplaçant sur une bande infinie [Cook, 2000]. La bande est divisée en cellules discrètes. Chaque cellule peut stocker un symbole d'un alphabet fini Γ contenant le symbole vide (vierge) b . Un alphabet d'entrée spécifique Σ (c'est-à-dire l'ensemble des symboles autorisés à apparaître dans le contenu initial de la bande), qui est un sous-ensemble de Γ sans b ($\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{b\}$), est associé à chaque machine M . Au début, une chaîne d'entrée finie sur Σ est écrite sur des cellules adjacentes de la bande vierge, i.e. toutes les autres cellules sont vides (contiennent b). Ensuite, la tête lit le symbole le plus à gauche de la chaîne d'entrée, et ainsi M est dans l'état initial q_0 . A chaque étape d'un calcul, M est dans un état q appartenant à un ensemble fini spécifié Q d'états possibles, et la tête analyse un symbole s dans une cellule. La fonction de transition de la machine (ou programme) δ précise l'action à effectuer en fonction de la paire (q, s) , c'est-à-dire suivant l'état actuel de la machine et du symbole lu sur la bande. L'action correspond à l'écriture d'un symbole sur la cellule scannée (celle où venait d'être lu le symbole s), puis au déplacement de la tête vers la gauche ou la droite d'une cellule, ce qui mène à un nouvel état. Ainsi, une machine de Turing (à une bande) peut être formellement définie comme un 7-uplet $M = \langle Q, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, où Q, Γ, b, Σ et q_0 ont été définis ci-dessus, $F \subseteq Q$ est l'ensemble des *états finaux* ou *états acceptants* (si M finit par s'arrêter dans un état de F , la chaîne initiale est dite *acceptée* par M), et $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times L, R$ est une fonction partielle connue sous le nom de fonction de transition. L et R signifient respectivement "déplacement à gauche" et "déplacement à droite" (dans une variante relativement peu commune, il y a aussi l'élément "pas de déplacement"). Si δ n'est pas définie sur l'état en cours et le symbole de la bande, alors M s'arrête.

Prenons l'exemple d'une machine capable de multiplier par deux un entier n représenté en binaire. Pour cela, il suffit de rajouter un 0 après le bit de poids le plus faible de n (c'est-à-dire le plus à droite). Dans ce cas, l'alphabet de bande Γ est $\Gamma = \{0, 1, b\}$, soit l'alphabet binaire plus le symbole vide b . L'alphabet d'entrée Σ , quant à lui, est simplement l'alphabet binaire, i.e. $\Sigma = \{0, 1\}$. Pour présenter les différents états et transitions possibles, il est pratique de représenter le diagramme des transitions de cette machine sur Fig.(III.1) [Zanotti, n.d.], ainsi que sa fonction de transition δ . L'ensemble des états est $Q = \{S, T, U, F\}$, l'état initial est $q_0 = S$ et l'état final est F . Cette machine est *déterministe*. Un exemple d'implémentation sur une machine de cet algorithme est représenté en Fig.(III.3).

Les machines de Turing sont utilisées dans des expériences de pensée pour explorer les capacités et les limites des ordinateurs. Il existe de nombreux modèles de machines de Turing, par exemple la machine de Turing non déterministe, dont l'ensemble de règles

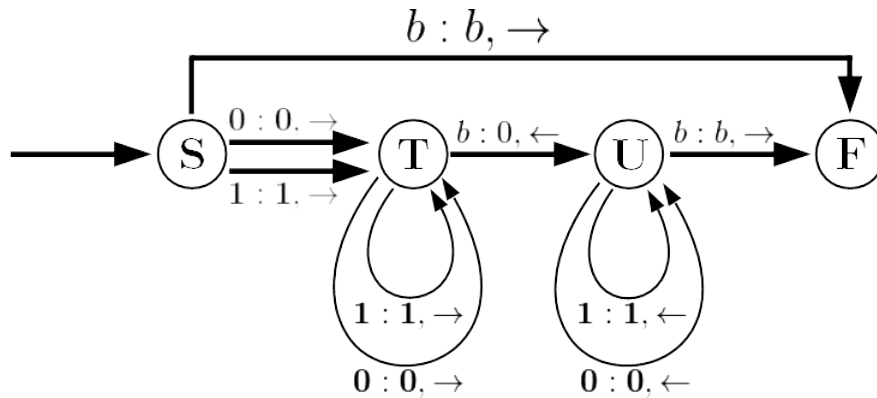


FIGURE III.1 – Diagramme des transitions. Les ensembles "étiquettes sur les flèches + flèches" représentent les transitions. Par exemple, " $b : 0, \leftarrow$ ", sur la flèche qui va de T vers U, signifie que la tête de lecture/écriture a lu b sur la case, puis y a écrit 0 avant de bouger vers la case de gauche, et l'état de la machine est passé de l'état T à l'état U.

δ	0	1	b
S	T,0,R	T,1,R	F,b,R
T	T,0,R	T,1,R	U,0,L
U	U,0,L	U,1,L	F,b,R
F			

FIGURE III.2 – Fonction de transition δ .

détermine plus d'une option d'action pour une situation donnée. Ainsi, les possibles actions de la machine sur une entrée α donnent lieu à un arbre de possibilité, et l'idée est d'accepter un mot α si une des branches de l'arbre contient une configuration acceptante. Un autre exemple est la machine de Turing probabiliste, qui est une machine de Turing non déterministe dont les transitions à chaque étape sont dictées par une distribution de probabilité.

Nous aurons aussi besoin des machines de Turing compteuses, dont la définition est dans [Valiant, 1979] et déclare qu'une machine de Turing compteuse est une machine de Turing non déterministe standard avec un périphérique de sortie auxiliaire qui imprime (par magie) en notation binaire sur une bande spéciale le nombre de calculs acceptants induits par l'entrée.

Un autre type de machine nécessaire pour les futures définitions est la machine de Turing avec oracle [Papadimitriou, 1994]. Cette variante de la machine de Turing dispose d'une boîte noire, appelée oracle, capable de résoudre un problème de décision en une seule étape élémentaire. Plus précisément, l'oracle peut résoudre en temps constant un problème de n'importe quelle classe de complexité, y compris un problème indécidable comme le problème de l'arrêt². Ceci fait de l'oracle un outil purement théorique car son fonctionnement nous échappe. Toutefois, considérons un langage A, alors on peut définir une machine de Turing avec oracle A comme une machine de Turing à plusieurs bandes, la bande habituelle d'une machine de Turing et la bande semi-infinie de l'oracle,

². Le problème de l'arrêt est le problème de décision qui détermine, à partir d'une description d'un programme et d'une entrée, si le programme s'arrête avec cette entrée ou non.

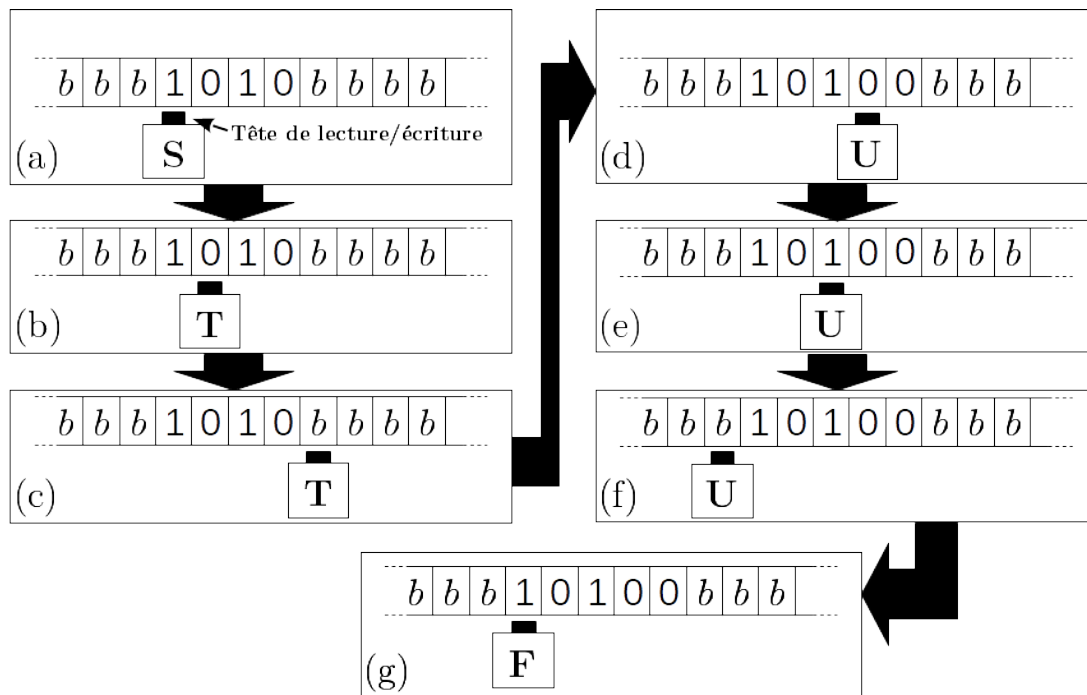


FIGURE III.3 – Déroulement des étapes pour multiplier par 2 le nombre 10 en binaire sur une machine de Turing. Pour cet algorithme, nous avons une bande infinie. En (a), la machine est dans l'état initial S et elle lit le symbole 1 dans la première case ainsi définie. D'après la fonction de transition, avec ces données, la machine va laisser la case telle quelle, se déplacer d'une case vers la droite et se retrouver dans l'état T (b). Elle reste dans l'état T, où elle lit le symbole 0 ou 1 et se déplace d'une case vers la droite, jusqu'à ce qu'elle lise un symbole vide b (c). La machine écrit alors dans cette case le symbole 0 à la place de b , puis se déplace maintenant vers la gauche et se retrouve dans l'état U (d). Elle reste dans l'état U (e), où elle lit une case contenant le symbole 0 ou 1, puis se déplace vers la gauche, jusqu'à ce qu'elle lise à nouveau un symbole vide b (f). Alors, la machine se déplace d'une case vers la droite et se retrouve dans l'état final F, avec la tête de lecture/écriture placée sur le bit de plus haut degré (g).

plus trois états particuliers, $q_?$, q_y et q_n . Pour consulter l'oracle, la machine écrit un mot sur le ruban d'oracle, puis entre dans l'état $q_?$ (état de demande). L'oracle décide alors en une unique étape de calcul si l'état suivant est q_y (réponse "oui") ou q_n (réponse "non"), suivant l'appartenance ou non du mot au langage A. Une telle machine peut consulter plusieurs fois un oracle, et même fonctionner avec plusieurs oracles. Ainsi, par exemple, P^{NP} est la classe des problèmes solubles en temps polynomial en utilisant un oracle qui résout le problème NP, défini dans la section suivante, en temps constant.

Il existe aussi les machines de Turing quantiques, proposées en 1985 dans [Deutsch, 1985] par David Deutsch et utilisées pour modéliser l'effet d'un ordinateur quantique. On peut les définir en repartant du 7-uplet d'une machine de Turing classique, $M = \langle Q, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, avec les différences suivantes : Q est un espace de Hilbert ; Γ est aussi un espace de Hilbert (généralement différent de Q) ; le symbole vierge $b \in \Gamma$ correspond au vecteur $|0\rangle$; les symboles d'entrée et de sortie de Σ constituent habituellement un ensemble discret, comme pour le système classique (par conséquent, ni l'entrée ni la sortie d'une machine quantique n'ont besoin d'être des systèmes quantiques) ; la fonction

de transition $\delta : \Sigma \times Q \otimes \Gamma \rightarrow \Sigma \times Q \otimes \Gamma \times \{L, R\}$ est une collection de matrices unitaires qui sont des automorphismes de l'espace de Hilbert Q ; l'état initial $q_0 \in Q$ peut aussi bien être un état mixte qu'un état pur; et enfin, l'ensemble F des états acceptants (ou finaux) est un sous-espace de l'espace de Hilbert Q . Il ne s'agit pas d'une définition formelle d'une machine quantique puisqu'elle laisse de côté certains détails importants comme, par exemple, la fréquence à laquelle une mesure est effectuée.

III.1.2 Classes de complexité et hiérarchies

Les ordinateurs que nous utilisons au laboratoire ne sont pas des ordinateurs quantiques. Cependant, ils sont tout de même supposés effectuer n'importe quel calcul concevable, en principe. En pratique, certains calculs nécessitent beaucoup trop de mémoire et/ou temps. Mais, si une mémoire et un temps infinis étaient à notre disposition, alors nos ordinateurs seraient capables de tout calculer. Dans ces conditions, ils sont appelés "ordinateurs universels". Nous rappelons que la théorie de la complexité se concentre sur la classification des problèmes calculatoires selon leur difficulté inhérente et sur la connexion entre les différentes classes de complexité. De plus, la difficulté des problèmes est basée sur la quantité de mémoire et de temps requise pour les résoudre. Cette quantité est définie dans le cadre du modèle de calcul des machines de Turing afin d'être indépendante du matériel utilisé, ce qui permet d'obtenir une définition de la complexité cohérente et universelle. L'ensemble des algorithmes est généralement dichotomisé en une partie "facile" et une partie "difficile", comprenant respectivement les algorithmes en "temps polynomial" et ceux en "temps exponentiel" [Preskill, 1998]. C'est la principale distinction qui existe dans la théorie de la complexité classique. Pour définir ces deux classes complémentaires, considérons un algorithme A . La longueur de l'entrée sur laquelle agit A peut être variable. Nous pouvons associer à A une *fonction de complexité* $T_A(N)$, où N est le nombre de bits qui constituent l'entrée. $T_A(N)$ correspond au nombre d'étapes de calcul fondamentales qu'il faut pour que l'algorithme se termine; elle est également appelée le plus long "temps" (pour compléter l'algorithme). Ensuite, un algorithme A en temps polynomial répond à la condition

$$T_A(N) \leq \text{Poly}(N), \quad (\text{III.1})$$

où $\text{Poly}(N)$ est un polynôme de N . Cela signifie donc que le temps requis pour résoudre un problème en temps polynomial est borné par une puissance du nombre de bits d'entrée. Par complémentarité, tout problème qui n'est pas en temps polynomial est dit en temps super-polynomial. La distinction entre polynomial et super-polynomial est vraiment indépendante du matériel utilisé grâce à un résultat central de l'informatique qui dit que n'importe quel ordinateur classique universel peut être simulé par un autre, au pire en temps polynomial. Cela signifie que si un algorithme tourne sur un ordinateur en temps polynomial, alors nous pouvons toujours le faire tourner sur un autre ordinateur (le nôtre par exemple) en temps polynomial. Si nous ne trouvons pas d'optimisation, nous pouvons toujours faire en sorte que notre ordinateur imite la façon d'opérer du premier ordinateur. Le coût pour faire tourner cette imitation n'est que d'ordre polynomial en temps. De même, le premier ordinateur peut également imiter le nôtre, de sorte que nous pourrions toujours nous accorder sur le fait qu'un algorithme soit en temps polynomial ou non. Dans ce qui suit, nous n'allons pas définir toutes

les classes de complexité qui existent, car il y en a déjà plus de 535³, et de nouvelles peuvent être créées à tout moment (le domaine n'est pas figé). Nous présenterons donc principalement les classes utiles pour déterminer la complexité du Boson Sampling.

III.1.2.1 Classe P

La classe de complexité P, pour "temps Polynomial", contient tous les problèmes de décision qui peuvent être résolus par une machine de Turing déterministe en temps polynomial [Aaronson, 2013]. Ce que nous entendons par "problème de décision" n'est autre qu'une question mathématique dont la réponse est soit "oui", soit "non". Un exemple de problème dans la classe P est de répondre à la question *deux nombres entiers non nuls a et b possèdent-ils un diviseur commun autre que 1 ?*. L'algorithme d'Euclide, qui trouve le plus grand commun diviseur en temps polynomial, permet aussi de répondre à la question posée en temps polynomial.

III.1.2.2 Classes NP et coNP

Formellement, la classe NP, pour l'anglais de "temps Polynomial Non déterministe", contient tous les problèmes de décision qui peuvent être résolus par une machine de Turing non déterministe en temps polynomial. Intuitivement, pour un problème de décision dans la classe NP, si la réponse est "oui", alors les preuves de ce fait peuvent être vérifiées avec un algorithme dans la classe P. Et pour un problème de décision cette fois dans coNP, si la réponse est "non", alors les "contre-exemples" sont vérifiés par des algorithmes dans la classe P. Il existe aussi les problèmes de décision dits "NP-complets" [Cook, 1971] comme pour tout autre problème de décision de la classe NP, il est possible de vérifier une solution efficacement (en temps polynomial), et, en plus, tous les problèmes de la classe NP peuvent se ramener à ces problèmes NP-complets via une réduction polynomiale ; en d'autres mots, un problème NP-complet est au moins aussi difficile que tous les autres problèmes de la classe NP. Bien sûr, tous les problèmes de décision de la classe P sont également dans la classe NP. On a donc l'inclusion $P \subseteq NP$. En ce qui concerne l'autre inclusion, à savoir si $NP \subseteq P$, il s'agit d'un des problèmes du prix du millénaire à un million de dollars.

III.1.2.3 Classe #P

La classe #P est l'ensemble des fonctions qui peuvent être calculées par des machines de Turing compteuses dont la complexité est en temps polynomial, d'après [Valiant, 1979]. Nous pouvons aussi dire que #P est la classe des fonctions qui comptent le nombre de certificats d'un problème de décision qui est dans la classe NP. Une fonction f est donc dans #P s'il existe une machine de Turing non-déterministe M fonctionnant en temps polynomial telle que pour tout mot x , $f(x)$ soit le nombre d'exécutions de M acceptant x comme mot d'entrée. Ainsi, cette classe est particulière dans la théorie de la complexité, puisqu'elle ne contient pas des problèmes de décision, mais des fonctions de comptage de solutions.

3. D'après le site internet "Complexity Zoo" créé par Scott Aaronson.

III.1.2.4 Hiérarchie polynomiale (PH) et classe PH

La hiérarchie polynomiale est une hiérarchie de classes de complexité qui étend la notion de classe P, NP et coNP. Elle est définie en termes de machines de Turing avec oracles bornées en temps polynomial. Pour en revenir aux classes de la hiérarchie polynomiale, Σ_k^p , Π_k^p et Δ_k^p pour un entier $k \geq 0$, elles peuvent être définies comme suit : $\Sigma_0^p = \Pi_0^p = \Delta_0^p = P$, et pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Sigma_{k+1}^p &= \text{NP}^{\Sigma_k^p}, \\ \Pi_{k+1}^p &= \text{coNP}^{\Sigma_k^p}, \\ \Delta_{k+1}^p &= P^{\Sigma_k^p}.\end{aligned}$$

Σ_{k+1}^p (Δ_{k+1}^p) est la classe des problèmes acceptés en temps polynomial par des machines de Turing non déterministes (déterministes) avec des oracles pour des problèmes dans la classe Σ_k^p . Et Π_{k+1}^p est la classe des problèmes dont les complémentaires sont dans Σ_{k+1}^p . Notons ainsi que $\Sigma_1^p = \text{NP}$ et aussi que $\Pi_1^p = \text{coNP}$. Nous ajoutons que la hiérarchie polynomiale possède une structure inclusive de la forme :

$$\Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subseteq \Delta_{k+1}^p \subseteq \Sigma_{k+1}^p \cap \Pi_{k+1}^p.$$

En revanche, nous ne savons pas si $\Sigma_k^p \neq \Sigma_{k+1}^p$ pour tout $k \geq 0$. Toutefois, un théorème [Stockmeyer, 1976] (important pour la suite) dit que si la hiérarchie s'effondre au k -ième niveau (c'est-à-dire, $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$), alors elle s'effondre aussi entièrement au-dessus du k -ième niveau (c'est-à-dire, $\Sigma_k^p = \Sigma_j^p$ pour tout $j \geq k$). La classe PH, quant à elle, est l'union de toutes les classes de la hiérarchie polynomiale, à savoir $\text{PH} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma_k^p$.

III.1.2.5 Classe BPP

Introduite en 1977 par Gill dans [Gill, 1977], la classe BPP, pour "Bounded-error Probabilistic Polynomial time", est une classe de problèmes de décisions, ou de façon équivalente de langages, pour lesquels il existe une machine de Turing probabiliste en temps polynomial qui satisfait les conditions d'acceptation suivantes :

- Si le mot d'entrée est dans le langage, la machine l'accepte avec une probabilité supérieure à $2/3$;
- si le mot n'est pas dans le langage, la machine le rejette avec une probabilité supérieure à $2/3$.

D'où le terme d'"erreur bornée" dans le nom de la classe, car la machine se trompe avec une probabilité inférieure à $1/3$. De plus, les machines peuvent avoir des erreurs plus petites sans changer les problèmes de classe. Nous soulignons qu'avec les notations de la hiérarchie polynomiale, le théorème de Sipser-Gács-Lautemann dans [Sipser, 1983] nous donne la relation $\text{BPP} \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$.

III.1.3 Classes BQP et PostBQP

La classe BQP, pour "Bounded-error Quantum Polynomial time", est la variante quantique de la classe BPP. Ainsi, il s'agit de l'ensemble des problèmes de décision

solubles par une machine de Turing quantique en temps polynomial, avec au pire une probabilité $1/3$ d'erreur. Cette classe BQP est souvent identifiée comme la classe des problèmes réalisables par des ordinateurs quantiques. De plus, la classe PostBQP est la classe BQP avec en plus de la post-sélection. Bien que la postsélection soit une caractéristique qu'un ordinateur réaliste, même quantique, n'aura probablement pas, les machines avec post-sélection sont intéressantes d'un point de vue théorique. La post-sélection d'un événement revient à conditionner un espace de probabilités à l'occurrence de l'événement en question. Ainsi, lorsque nous post-sélectionnons un événement A , la probabilité d'un autre événement B se retrouve changée d'une probabilité initiale $Pr(B)$ à la probabilité conditionnelle $Pr(B | A)$.

III.2 Formulation originale

Le Boson Sampling, dans sa formulation originale par Aaronson et Arkhipov [Aaronson and Arkhipov, 2014], est un modèle simplifié pour l'informatique quantique basée sur l'optique linéaire qui est peut-être la clé permettant d'implémenter le tout premier ordinateur quantique post-classique. Ce modèle n'est pas considéré comme universel, mais ses propriétés le rendraient non simulable efficacement par des ordinateurs classiques. Le problème de Boson Sampling consiste à échantillonner la distribution de probabilité associée à n bosons en sortie d'un interféromètre optique quantique linéaire de m ports, où la condition $m \gg n$ assure le fait que la probabilité de regroupement des bosons (plus d'un boson par port de sortie) est raisonnablement faible. Pour ce faire, des photons identiques sont générés, puis envoyés dans l'interféromètre et, enfin, ils sont mesurés de façon non-adaptative afin de compter le nombre de photons dans chaque mode.

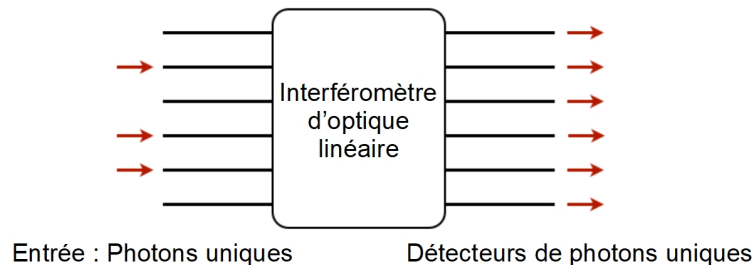


FIGURE III.4 – Expérience de pensée du Boson Sampling. L'interféromètre d'optique linéaire est composé de séparateurs de faisceau et de déphaseurs. Des photons uniques indiscernables sont injectés dans le réseau d'optique linéaire de guides d'onde à un mode. En raison des interférences quantiques entre photons traversant le réseau, ces derniers émergent en sortie dans un état intriqué compliqué.

Un essai commence avec l'état de départ

$$|\mathbf{T}\rangle = |T_1 \dots T_m\rangle \propto \prod_{i=1}^m (\hat{a}_i^\dagger)^{T_i} |0\rangle, \quad (\text{III.2})$$

qui décrit $n = \sum_{i=1}^m T_i$ particules distribués entre m modes d'entrée (T_i étant le nombre de particules qui occupent le i -ième mode d'entrée). L'état de sortie $|\psi_{\text{out}}\rangle$ est généré

suivant une application linéaire reliant les opérateurs de création de sortie à ceux d'entrée, $\hat{a}_i^{\text{fin}} = \sum_{j=1}^m U_{ij} \hat{a}_j^{\text{out}}$, où \mathbf{U} est une matrice $m \times m$ associée au réseau optique considéré. Enfin, les particules dans chaque mode de sortie sont comptées. La probabilité d'obtenir un résultat particulier $|\mathbf{S}\rangle = |S_1 \dots S_m\rangle$ (S_i étant le nombre de particules qui occupent le i -ième mode de sortie) est donnée par [Spring et al., 2013]

$$P_S = |\langle \mathbf{S} | \psi_{\text{out}} \rangle|^2 \propto |\text{Per}(\mathbf{U}^{(\mathbf{S}, \mathbf{T})})|^2, \quad (\text{III.3})$$

avec, d'une part, $\mathbf{U}^{(\mathbf{S}, \mathbf{T})}$ une sous-matrice $n \times n$ obtenue à partir de \mathbf{U} en ne gardant qu'un nombre T_i de copies de la i -ième ligne et qu'un nombre S_j de copies de la j -ième colonne de \mathbf{U} . Ainsi, seules les lignes et les colonnes de \mathbf{U} reliées à des modes contenant des particules sont gardées. Par exemple, considérons une matrice 4×4 , $\mathbf{U} = (u_{ij})$, un état en entrée $|\mathbf{T}\rangle = |0, 1, 2, 0\rangle$ et un résultat particulier $|\mathbf{S}\rangle = |2, 0, 1, 0\rangle$ (donc avec trois photons injectés en entrée ; ce n'est pas un cas idéal, puisque nous souhaitons avoir assez de modes par rapport au nombre de photons pour n'avoir de préférence que des 0 ou 1 dans chaque mode). Alors, la sous-matrice 3×3 $\mathbf{U}^{(\mathbf{S}, \mathbf{T})}$ est la suivante :

$$\mathbf{U}^{(\mathbf{S}, \mathbf{T})} = \begin{pmatrix} u_{21} & u_{21} & u_{23} \\ u_{31} & u_{31} & u_{33} \\ u_{31} & u_{31} & u_{33} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $\text{Per}(\mathbf{U}^{(\mathbf{S}, \mathbf{T})})$ est le permanent de $\mathbf{U}^{(\mathbf{S}, \mathbf{T})}$. Par définition, le permanent d'une matrice carrée $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, est

$$\text{Per}(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}, \quad (\text{III.4})$$

où S_n est le groupe des permutations de degré n .

Complexité du Boson Sampling

Un ordinateur basé sur le Boson Sampling peut être simulé par un ordinateur quantique "standard" (c'est-à-dire dans BQP). Nous considérons dans un premier temps, le problème d'échantillonnage exact, puis le cas approché. La distribution de probabilité du Boson Sampling est proportionnelle au permanent d'une sous-matrice de \mathbf{U} associée à l'interféromètre. Or, dans son théorème de 1979, Valiant démontre que calculer le permanent d'une matrice $n \times n$ est de difficulté $\#P$. Une autre preuve de ce théorème, basée sur l'optique linéaire et l'informatique quantique, a été donnée par Aaronson en 2011 dans [Aaronson, 2011]. Mais, ce qui nous intéresse vraiment, c'est de savoir si le Boson Sampling est bien insoluble par des ordinateurs classiques (non soluble en temps polynomial), de sorte que, si nous arrivons à remonter à la distribution de probabilité P_S , avec certitude, alors il peut bien y avoir une supériorité quantique pour certains problèmes. Or, le corollaire 4.5 de [Aaronson and Arkhipov, 2014] affirme la proposition suivante : supposons que le Boson Sampling exact puisse être réalisé par une machine classique en temps polynomial. Alors, nous avons $P^{\#P} = BPP^{\text{NP}}$, et par conséquent la hiérarchie polynomiale s'effondre à partir du troisième niveau, d'après le théorème de Toda [Toda, 1991]. Cependant, nous n'avons pas de preuve que la hiérarchie polynomiale

ne s'effondre à aucun niveau, ni qu'elle s'effondre à partir d'un certain niveau. Toutefois, les chercheurs en informatique tendent à croire fortement au fait que la hiérarchie polynomiale ne s'effondre pas, et cette conjecture est utilisée.

En ce qui concerne le Boson Sampling approché, il s'agit du cas le plus intéressant expérimentalement, car il intègre la possibilité de faire quelques erreurs dans l'échantillonnage, ce qui revient à des erreurs sur une fraction de la distribution de probabilités totale. Toutefois, il est possible de présumer raisonnablement que, malgré la partie erronée de la distribution de probabilités, le reste de cette dernière permet toujours de résoudre des problèmes de $\#P$, le tout restant non soluble pour des ordinateurs classiques. En effet, la supposition de complexité de [Aaronson and Arkhipov, 2014] est basée sur deux conjectures supplémentaires :

- Permanent de gaussiennes : approximer le permanent d'une matrice aléatoire gaussienne est de difficulté $\#P$.
- Anti-concentration du permanent : les permanents de matrices aléatoires gaussiennes (aux entrées indépendantes et identiquement distribuées) ne sont pas concentrés autour de zéro.

Si nous supposons que ces deux conjectures ci-dessus sont vraies, alors l'argument de complexité du Boson Sampling exact se transpose au cas du Boson Sampling approché. Les démonstrations ne sont pas développées ici, mais peuvent être retrouvées dans [Aaronson and Arkhipov, 2014].

Pour l'instant, il a été estimé que, pour qu'une réalisation expérimentale de Boson Sampling puisse valider la supériorité quantique, un minimum de cinquante photons indiscernables soient envoyés dans, au moins, deux mille cinq cents modes. En effet, l'ancienne estimation de vingt photons dans quatre cents modes a été dépassée : Neville *et al.* ont calculé un Boson Sampling de trente photons dans neuf cents modes sur un ordinateur portable [Neville et al., 2017] et un meilleur algorithme classique de simulation a été proposé par Clifford et Clifford [Clifford and Clifford, 2018].

III.3 Boson Sampling en variables continues

Le principal avantage des états à variables continues est qu'ils peuvent être produits de façon déterministe dans les laboratoires, même pour un grand nombre de modes, comme dans Ref.([Yokoyama et al., 2013]). Quelques états "simples" à variables continues sont les états gaussiens, dont, par exemple, les états cohérents générés par un laser, ou encore les états comprimés créés avec des effets non linéaires. Un état à m modes décrit par une matrice densité ρ est un état gaussien si sa fonction caractéristique, ou bien sa fonction de Wigner, est gaussienne [Olivares, 2012]. Un exemple simple d'état gaussien à deux modes est le vide comprimé à deux modes (TMSV), qui sera largement utilisé dans la suite.

La possibilité d'implémenter le protocole de Boson Sampling dans une configuration à variables continues a été proposée relativement récemment [Lund et al., 2014], et est basée sur des états gaussiens. Cependant, si elle est basée uniquement sur des transformations gaussiennes telles que des séparateurs de faisceau, des transformations de compression et des détections homodynes, alors l'approche optique à variables continues, bien que très pratique, ne suffit pas pour implémenter des protocoles d'information

quantique supérieurs à leurs homologues classiques. Ainsi, pour qu'il y ait supériorité du quantique sur le classique, tout protocole quantique nécessite au moins un élément non gaussien. Dans le cas représenté ici Fig.(III.5), l'élément non gaussien se retrouve dans le comptage de photon, réalisé grâce à des détecteurs de photons uniques. Dans la

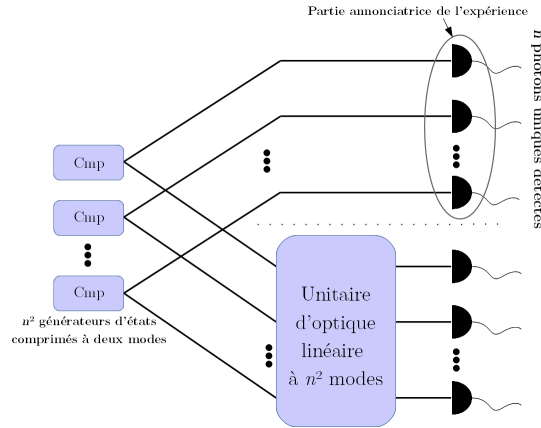


FIGURE III.5 – Boson Sampling avec photons annoncés de [Lund et al., 2014].

proposition ci-dessus, au maximum, n^2 TMSV en entrée, et dont la compression n'est pas trop grande. Puis, un mode de chaque paire constituant un TMSV est envoyé directement dans les détecteurs de photons uniques. L'autre mode de chaque paire est envoyé, avant détection, dans un réseau d'optique linéaire, dont sort un échantillon de la distribution de probabilité que nous cherchons. Comme les deux modes d'un TMSV sont intriqués, envoyer la moitié des modes d'une paire directement sur un détecteur permet d'annoncer les photons entrant dans le réseau linéaire, c'est-à-dire que leur présence est confirmée par la détection de l'autre mode de la paire sur un détecteur de photons uniques. De cette façon, nous pouvons en déduire précisément la configuration d'entrée du réseau optique, *i.e.* quels modes sont occupés par un photon en entrée pour chaque échantillonnage. Ensuite, nous collectons les échantillons des distributions de probabilité associées à chaque configuration d'entrée.

L'équipe de N. Treps du laboratoire Kastler Brossel (LKB) possède un montage expérimental capable de produire des états comprimés multi-modes de la lumière, ce qui est prometteur pour une implémentation du protocole de Boson Sampling en variables continues. Notre travail a porté sur ces états comprimés et notre objectif était d'adapter le protocole présenté par [Lund et al., 2014] à de tels états. C'est pourquoi nous détaillons le dispositif par la suite.

III.3.1 Base expérimentale

Les expériences au LKB sont basées sur la conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC) [Ferrini et al., 2013]. Dans ce genre d'expérience, ils utilisent un oscillateur paramétrique optique (OPO), composé d'un cristal non linéaire, afin de générer un état comprimé. Une particularité de cette expérience est une pompe multi-fréquences, donnée par un peigne de fréquence optique. Elle permet d'obtenir des *états comprimés multi-modes* de la lumière. Surtout, ces modes comprimés indépendants peuvent être

mesurés dans une base différente de celle dans laquelle ils sont indépendamment comprimés, c'est-à-dire qu'ils peuvent être vus comme des modes intriqués au niveau de la détection. Par exemple, ils peuvent être mesurés dans la base dite de "pixel de fréquence", où chaque pixel est une portion du spectre de fréquence. La transformation unitaire U_{pix} (la même U_{pix} qu'en Fig.(III.6)), qui transforme les modes comprimés indépendants en modes pixel dans le modèle jouet de l'expérience est

$$U_{\text{pix}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.5})$$

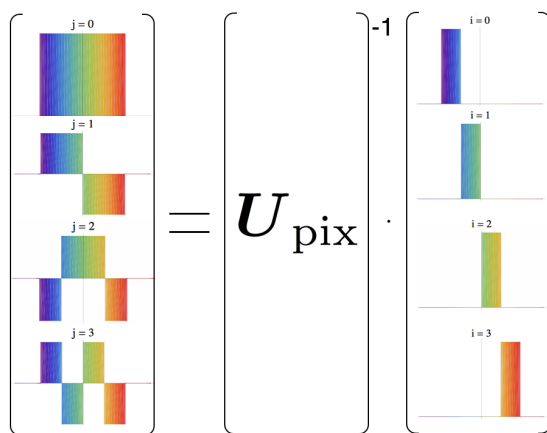


FIGURE III.6 – Des modes pixel aux modes indépendamment comprimés.

Ce qui implémente effectivement un réseau d'optique linéaire (fixé). Dans ce qui suit, nous avons étudié la possibilité d'exploiter ce réseau effectif pour implémenter le Boson Sampling. Pour ce faire, nous avons fourni une description alternative du système de [Lund et al., 2014], qui explicite l'utilisation d'états comprimés indépendamment comme ressource, car les configurations expérimentales qui nous intéressent, comme celle du LKB, produisent des états comprimés indépendants (voir annexe C pour les données expérimentales d'une expérience de Nicolas Treps). Une expérience possible étudiée est celle représentée en Fig.(III.7), où nous avons des états comprimés indépendamment en entrée, puis un unitaire ayant le même rôle qu'en Fig.(III.6), et l'élément non gaussien est apporté par les détecteurs de photons uniques en sortie. En effet, nous devons exprimer la proposition de Ralph de [Lund et al., 2014] d'une autre façon équivalente, car elle utilise à la place d'états comprimés indépendants, des états intriqués comprimés à deux modes pour implémenter le protocole de Boson Sampling. Pour établir une connection entre ces expériences en laboratoires qui utilisent des états comprimés indépendants et l'expérience proposée par Ralph, nous avons réexprimé, par un changement de base, les états intriqués comprimés à deux modes (ressource de la proposition de Ralph) en termes d'états comprimés indépendants, et nous avons également trouvé la matrice d'optique linéaire qui doit agir sur ces états comprimés indépendants afin d'implémenter une certaine configuration donnée du protocole de Boson Sampling.

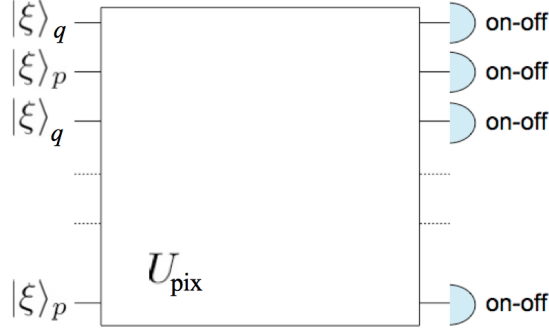


FIGURE III.7 – Expérience possible, réalisable au LKB, où $|\xi\rangle_q$ représente un état comprimé suivant la quadrature q .

III.3.2 Résultats

Nous présentons ici le changement de base qui est nécessaire pour interpréter les états intriqués à deux modes utilisés dans la proposition de [Lund et al., 2014] comme des états comprimés indépendamment.

III.3.2.1 Compression à deux modes

Nous détaillons la compression à deux modes entrevue au chapitre II, ainsi que certaines notations utilisées.

L'opération de compression à deux modes, qui est utilisée dans le modèle de Boson Sampling introduit dans [Lund et al., 2014], est une transformation active qui modélise la physique des amplificateurs paramétriques optiques et est régulièrement employée pour créer de l'intrication en variables continues. Nous rappelons que la transformation de compression à deux modes correspond à un hamiltonien de la forme $\hat{\mathbf{H}} \propto \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^\dagger + h.c.$ (avec $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ et $\hat{\mathbf{b}}^\dagger$ les opérateurs de création associés aux deux modes). L'opérateur d'évolution unitaire pour une paire de modes 1 et 2 est généralement écrit comme :

$$\hat{\mathbf{U}}_{1,2}(\xi) = \exp\left(\xi \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger - \xi^* \hat{\mathbf{a}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2\right), \quad (\text{III.6})$$

où $\xi = r e^{i\varphi}$. Considérons $\hat{\zeta}^{(0)} = (\hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}, \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)}, \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger}, \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger})$ le vecteur constitué des opérateurs d'annihilation et de création associés aux deux modes optiques, initialement dans l'état vide. Alors, son évolution est

$$\hat{\zeta} = \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)\dagger}(\xi) \hat{\zeta}^{(0)} \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi), \quad (\text{III.7})$$

où $\hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi) = \exp\left(\xi \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger} - \xi^* \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)}\right)$.

III.3.2.2 Représentation symplectique

Nous allons utiliser la représentation de Heisenberg, où l'évolution du champ sous des transformations physiques telles que celles engendrées par des compresseurs et des réseaux d'optique linéaire, est décrite par une évolution correspondante sur les opé-

rateurs d'annihilation et de création associés. Cette approche est appelée formalisme symplectique. Dans le formalisme symplectique, nous cherchons la matrice 4×4 \mathbf{S}_2 telle que

$$\hat{\zeta} = \mathbf{S}_2 \hat{\zeta}^{(0)}. \quad (\text{III.8})$$

Par exemple, l'évolution de $\hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)\dagger}(\xi) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi) = \exp\left(\xi^* \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)} - \xi \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}\right) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \exp\left(\xi \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger} - \xi^* \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)}\right). \quad (\text{III.9})$$

Ensuite, nous utilisons le lemme d'Hadamard [Adesso et al., 2014] :

$$e^{-\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}e^{+\hat{\mathbf{X}}} = \hat{\mathbf{Y}} - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}] + \frac{1}{2!}[\hat{\mathbf{X}}, [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]] + \dots \quad (\text{III.10})$$

Ainsi, nous obtenons l'opérateur $\hat{\mathbf{a}}_1$ à partir de l'évolution de $\hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_1 &= \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)\dagger}(\xi) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi) = \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} + \underbrace{[\xi^* \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)} - \xi \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}, \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}]}_{\xi \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}} \\ &+ \frac{1}{2!} \underbrace{[\xi^* \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)} - \xi \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}, [\xi^* \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)} - \xi \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}, \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}]}_{|\xi|^2 \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}} + \dots \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!} \right) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} + e^{i\varphi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger} \\ &= \cosh(r) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} + e^{i\varphi} \sinh(r) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}. \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Nous remarquons qu'un opérateur initial de chaque mode apparaît dans ce $\hat{\mathbf{a}}_1$ après évolution de $\hat{\mathbf{a}}_1^{(0)}$.

De la même façon, pour les autres opérateurs des deux modes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_2 &= \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)\dagger}(\xi) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)} \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi) = e^{i\varphi} \sinh(r) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} + \cosh(r) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)}, \\ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger &= \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)\dagger}(\xi) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi) = \cosh(r) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)\dagger} + e^{-i\varphi} \sinh(r) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)}, \\ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger &= \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)\dagger}(\xi) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger} \hat{\mathbf{U}}_{1,2}^{(0)}(\xi) = e^{-i\varphi} \sinh(r) \hat{\mathbf{a}}_1^{(0)} + \cosh(r) \hat{\mathbf{a}}_2^{(0)\dagger}. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Par conséquent, nous avons la matrice symplectique suivante d'Éq.(III.8), qui correspond à une transformation de compression à deux modes :

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \cosh(r) & 0 & 0 & e^{i\varphi} \sinh(r) \\ 0 & \cosh(r) & e^{i\varphi} \sinh(r) & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \sinh(r) & \cosh(r) & 0 \\ e^{-i\varphi} \sinh(r) & 0 & 0 & \cosh(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \nu \\ 0 & \mu & \nu & 0 \\ 0 & \nu^* & \mu & 0 \\ \nu^* & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (\text{III.13})$$

avec $\mu = \cosh(r)$ et $\nu = e^{i\varphi} \sinh(r)$. \mathbf{S}_2 d'Éq.(III.13) est appelée la *forme complexe* [Adesso et al., 2014], car elle agit sur le vecteur des opérateurs création et annihilation

$\hat{\zeta}^{(0)}$.

Maintenant, nous allons calculer l'équation d'évolution correspondante dans la représentation des quadratures. Pour ce faire, nous allons faire une transformation des opérateurs de chaque mode k , $\hat{\mathbf{a}}_k$, $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$, aux opérateurs de quadratures $\hat{\mathbf{q}}_k$ et $\hat{\mathbf{p}}_k$ (de même pour le passage de $\hat{\mathbf{a}}_k^{(0)}$, $\hat{\mathbf{a}}_k^{(0)\dagger}$ à $\hat{\mathbf{q}}_k^{(0)}$, $\hat{\mathbf{p}}_k^{(0)}$).

Ainsi, nous avons

$$\hat{\zeta} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \\ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{(c)} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 \\ \hat{\mathbf{q}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{L}_{(c)} \hat{\boldsymbol{\eta}}, \quad \text{with } \hat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 \\ \hat{\mathbf{q}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.14})$$

où, dans notre cas, la matrice de transfert est de la forme

$$\mathbf{L}_{(c)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & i\mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & -i\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.15})$$

Nous pouvons trouver la *forme quadrature* de la matrice écrite dans la base des modes via

$$\mathbf{S}_2 \mapsto \boldsymbol{\Sigma}_2 = \mathbf{L}_{(c)}^\dagger \mathbf{S}_2 \mathbf{L}_{(c)}. \quad (\text{III.16})$$

Donc, nous avons désormais

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Sigma}_2 \hat{\boldsymbol{\eta}}^{(0)}, \quad (\text{III.17})$$

avec, d'après l'Éq.(III.16),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_2 &= \begin{pmatrix} \cosh(r) & \sinh(r) \cos(\varphi) & 0 & \sinh(r) \sin(\varphi) \\ \sinh(r) \cos(\varphi) & \cosh(r) & \sinh(r) \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sinh(r) \sin(\varphi) & \cosh(r) & -\sinh(r) \cos(\varphi) \\ \sinh(r) \sin(\varphi) & 0 & -\sinh(r) \cos(\varphi) & \cosh(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Re}(\mu) & \text{Re}(\nu) & -\text{Im}(\mu) & \text{Im}(\nu) \\ \text{Re}(\nu) & \text{Re}(\mu) & \text{Im}(\nu) & -\text{Im}(\mu) \\ \text{Im}(\mu) & \text{Im}(\nu) & \text{Re}(\mu) & -\text{Re}(\nu) \\ \text{Im}(\nu) & \text{Im}(\mu) & -\text{Re}(\nu) & \text{Re}(\mu) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où $\text{Re}(x)$ et $\text{Im}(x)$ sont, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe x . Éq.(III.18) décrit sous une forme compacte l'opérateur de compression à deux modes dans la représentation des quadratures. Il est intéressant de décomposer cette matrice, qui exprime l'évolution des modes, en une série d'opérations fondamentales, à savoir, une première rotation dans l'espace des phases, puis une compression/dilatation et, enfin, une seconde rotation [Ferrini et al., 2014]. Cette décomposition est connue sous le nom de *réduction de Bloch-Messiah* (ou d'Euler) (voir annexe B). Il s'agit d'une spécialisation de la décomposition en valeurs singulières au cas des matrices symplectiques. De façon à isoler la compression en tant qu'opération préliminaire sur les modes optiques vides suivie par un changement de base, nous effectuons la réduction de Bloch-Messiah sur la matrice d'Éq.(III.18). Pour notre matrice

Σ_2 , cette décomposition s'écrit :

$$\Sigma_2 = P_{\text{TWB}} \cdot \text{Squeezing} \cdot P_{\text{TWB}}^T, \quad (\text{III.19})$$

où TWB veut dire "Twin-beam state", c'est-à-dire les états intriqués comprimés à deux modes que nous trouvons dans [Lund et al., 2014] et que nous pouvons appeler également états EPR, comme vu en II.6.3. La forme explicite suivante est calculée en détails dans l'annexe :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 \\ \hat{\mathbf{q}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \end{pmatrix}}^{P_{\text{TWB}}} \begin{pmatrix} e^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^r \end{pmatrix} \times \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right) \end{pmatrix}}^{P_{\text{TWB}}^T} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^{(0)} \\ \hat{\mathbf{q}}_2^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_1^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.20})$$

avec P_{TWB} une matrice orthonormale. Éq.(III.20) est la représentation diagonale que nous cherchions.

III.3.2.3 Changement de base explicite des états TWB aux états comprimés indépendants

Nous sommes désormais prêts à expliciter le changement de base des états intriqués comprimés à deux modes aux états comprimés indépendants dont nous avons besoin pour faire le lien entre l'implémentation du Boson Sampling en variables continues et l'expérience au LKB.

En agissant sur le vide, la matrice P_{TWB}^T ne produit aucun changement physique, donc nous retrouvons le vide. De plus, nous pouvons écrire l'opération de compression sur les modes pour le vide comme :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{q}}_2^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{p}}_1^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{p}}_2^{\text{sqz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^{(0)} \\ \hat{\mathbf{q}}_2^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_1^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_2^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.21})$$

Ainsi, nous pouvons réécrire Éq.(III.20) comme :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 \\ \hat{\mathbf{q}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix} \doteq P_{\text{TWB}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{q}}_2^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{p}}_1^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{p}}_2^{\text{sqz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{q}}_2^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{p}}_1^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{p}}_2^{\text{sqz}} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.22})$$

où \doteq nous permet d'indiquer que les modes $\mathbf{P}_{\text{TWB}}^T \hat{\boldsymbol{\eta}}^{(0)}$ ont été assimilés aux $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(0)}$, avec

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.23})$$

et

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.24})$$

Nous pouvons également écrire sous une forme plus compacte le vecteur des opérateurs créations et annihilation de deux modes :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \\ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}^{\text{sqz}\dagger} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.25})$$

avec

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & -e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.26})$$

Les opérateurs d'annihilation $\hat{\mathbf{a}}$ dans Éq.(III.25) décrivent l'état à deux modes, qui, dans la représentation de Shrödinger, s'écrit [Lund et al., 2014]

$$|\psi\rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^p |p\rangle_1 |p\rangle_2, \quad (\text{III.27})$$

où $|p\rangle_i = \frac{\hat{\mathbf{a}}_i^{\dagger p}}{\sqrt{p!}} |0\rangle$ est un état de Fock à p photons dans le i ème mode. Nous en déduisons que la matrice \mathbf{P}_{TWB} transforme un état intriqué à deux modes en un couple d'états indépendamment comprimés (dont les quadratures comprimées alternent). Ainsi, l'état dans [Lund et al., 2014] (où, par commodité, n^2 compresseurs à deux modes sont considérés)

$$|\phi\rangle = \left(1 - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{n^2}{2}} \prod_{h=1}^{n^2} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^p |p\rangle_{h,1} |p\rangle_{h,2}\right), \quad (\text{III.28})$$

équivalent à n^2 états à deux modes intriqués, est transformé en un ensemble d'états indépendamment comprimés par la matrice

$$\boldsymbol{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathfrak{u}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathfrak{u}}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{III.29})$$

avec \mathcal{U} la matrice diagonale par blocs suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & & & & \\ & \mathbf{U}_2 & & & \\ & & \mathbf{U}_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{U}_{n^2} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{U}_1 \dots \mathbf{U}_{n^2}, \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

et avec \mathbf{U}_k (où k varie de 1 à n^2), une matrice 2×2 telle que

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{k,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{k,2} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_k \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{k,1}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{k,2}^{\text{sqz}} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.31})$$

Nous avons donc

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,2} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^\dagger \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^\dagger \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,1}^\dagger \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,2}^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^{\text{sqz}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,1}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,2}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{\text{sqz}\dagger} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^{\text{sqz}\dagger} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,1}^{\text{sqz}\dagger} \\ \hat{\mathbf{a}}_{n^2,2}^{\text{sqz}\dagger} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.32})$$

III.3.2.4 Correspondance entre les configurations

Chaque élément des paires sont encore "à côté" après le changement de base précédent (Éq.(III.32)). Afin de rendre plus simple la découverte de la description équivalente du système de [Lund et al., 2014] en termes d'états d'entrée indépendamment comprimés, *i.e.* par exemple avoir tous les éléments i des paires en haut du vecteur, nous avons juste à multiplier le vecteur par la matrice $2n^2 \times 2n^2$ suivante :

$$U_{\text{order}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \end{pmatrix}. \quad (\text{III.33})$$

Par exemple, avec seulement quatre modes, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_{\text{order4}}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.34})$$

(afin de rendre le tout plus lisible, nous n'avons pas considéré les opérateurs de création, car ils sont évidents à trouver à partir de la partie des opérateurs d'annihilation). Fig.(III.8) montre la correspondance entre l'expérience de Ralph et le calcul où U_{suite} est visiblement de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{n^2} & 0 \\ 0 & U_{\text{Net}} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.35})$$

et où U_{Net} , la matrice $n^2 \times n^2$ correspondant au réseau optique linéaire de l'expérience considérée, s'écrit comme :

$$\begin{pmatrix} U_{\text{Net},11} & \cdots & U_{\text{Net},1n^2} \\ & \ddots & \\ U_{\text{Net},n^21} & \cdots & U_{\text{Net},n^2n^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.36})$$

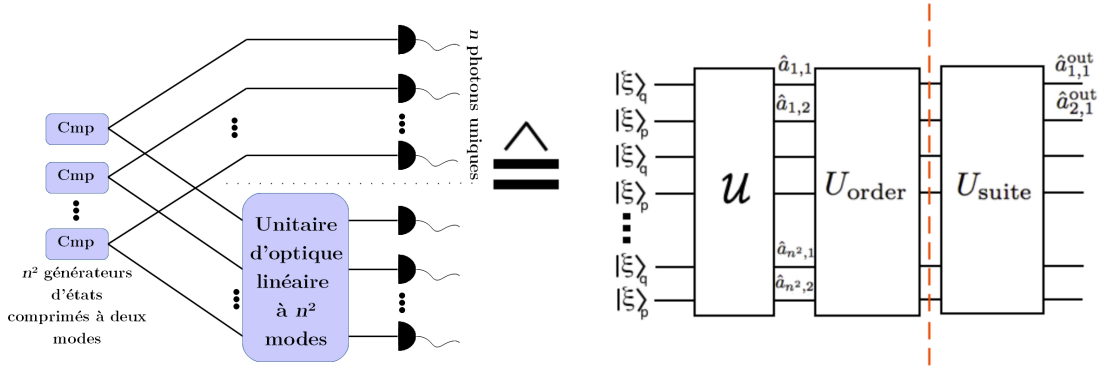


FIGURE III.8 – Correspondance entre la proposition de Ralph (gauche) et notre calcul (droite), où l'entrée est composée d'états comprimés indépendamment.

Pour notre exemple à quatre modes, nous avons

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{\text{out}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,1}^{\text{out}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^{\text{out}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,2}^{\text{out}} \end{pmatrix} = \underbrace{U_{\text{suite4}} \cdot U_{\text{order4}} \cdot U_4}_{U_{\text{tot4}}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,1}^{\text{sqz}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,2}^{\text{sqz}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

avec

$$\mathbf{U}_{\text{tot4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \exp\left(\frac{i\phi_1}{2}\right) & \exp\left(\frac{i\phi_1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(\frac{i\phi_2}{2}\right) & \exp\left(\frac{i\phi_2}{2}\right) \\ \exp\left(\frac{i\phi_1}{2}\right)U_{\text{Net},11} & -\exp\left(\frac{i\phi_1}{2}\right)U_{\text{Net},11} & \exp\left(\frac{i\phi_2}{2}\right)U_{\text{Net},12} & -\exp\left(\frac{i\phi_2}{2}\right)U_{\text{Net},12} \\ \exp\left(\frac{i\phi_1}{2}\right)U_{\text{Net},21} & -\exp\left(\frac{i\phi_1}{2}\right)U_{\text{Net},21} & \exp\left(\frac{i\phi_2}{2}\right)U_{\text{Net},22} & -\exp\left(\frac{i\phi_2}{2}\right)U_{\text{Net},22} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.38})$$

Éq.(III.38) est le résultat obtenu lorsque nous procédons à une diagonalisation complète (dans le sens où nous avons des vides comprimés indépendants en entrée). Immédiatement, nous voyons la différence avec la transformation unitaire \mathbf{U}_{pix} d'Éq.(III.5). Nous en déduisons que faire le seul changement en modes pixel ne suffit pas à implémenter correctement le Boson Sampling.

III.3.2.5 Différentes compressions

Jusqu'à présent, comme dans [Lund et al., 2014], nous avons considéré une compression uniforme pour toutes les paires EPR : dans chaque mode, il y avait la même compression.

Maintenant, nous allons étudier l'impact (d'une distribution) de compression non-uniforme sur la distribution de probabilité en sortie. Nous allons considérer une compression différente pour chaque paire de modes, de sorte que l'état au niveau de la ligne pointillée rouge de Fig.(III.8) peut s'écrire comme

$$|\phi\rangle = \prod_{h=1}^{n^2} (1 - \chi_h^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \chi_h^p |p\rangle_{h1} |p\rangle_{h2}, \quad (\text{III.39})$$

avec $\chi_i \neq \chi_j$ pour $i \neq j$.

Nous commençons par voir si la plate-forme quantique reste efficace pour échantillonner les bosons dans le cas où chaque paire de modes a sa propre compression (χ représente la force de la compression). Puis, nous devons nous ramener dans le cas de modes comprimés indépendamment, comme dans l'expérience à laquelle nous avons accès. En effet, notre objectif reste de savoir si les expériences proposées sont réalisables expérimentalement. Pour ce faire, nous avons calculé la probabilité d'avoir n photons uniques dans la partie annonciatrice de l'expérience, afin de vérifier qu'un nombre suffisant (pour montrer la supériorité quantique) de photons uniques puisse être envoyé dans l'interféromètre. Ce sont les modes $h1$ d'Éq.(III.39) qui sont envoyés dans cette partie annonciatrice. Donc, nous avons pris la trace partielle de l'opérateur densité $|\phi\rangle\langle\phi|$ sur les modes $h2$,

$$\text{Tr}_2[|\phi\rangle\langle\phi|] = \prod_{h=1}^{n^2} \left\{ (1 - \chi_h^2) \sum_{p=0}^{\infty} \chi_h^{2p} |p\rangle_h \langle p| \right\}. \quad (\text{III.40})$$

Il y a $\binom{n^2}{n}$ configurations possibles en sortie de la partie annonciatrice avec n photons uniques dans n modes. Cela correspond au nombre de permutations que nous pouvons obtenir à partir de la configuration

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_n, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n^2-n}. \quad (\text{III.41})$$

Considérons $\{\sigma\}$ l'ensemble de ces permutations. Pour une configuration particulière

$$|\sigma\rangle = \prod_{h=1}^{n^2} \hat{\mathbf{a}}^{\dagger\sigma_h} |0\rangle, \quad (\text{III.42})$$

avec $\sigma_h = 0$ ou 1 , et

$$\sum_{h=1}^{n^2} \sigma_h = n, \quad (\text{III.43})$$

nous avons la probabilité suivante d'avoir cette configuration en sortie :

$$P(\sigma) = \prod_{h=1}^{n^2} (1 - \chi_h^2) \chi_h^{2\sigma(h)}, \quad (\text{III.44})$$

où $\sigma(h)$ est le h ième élément de la permutation σ . Par exemple, dans l'Éq.(III.41), nous avons $\sigma(n^2) = 0$.

Afin de retrouver la probabilité totale d'obtenir n photons uniques en sortie de la partie annonciatrice, quelque soit la configuration dans laquelle ils arrivent sur les détecteurs, il nous suffit juste de sommer sur toutes les permutations possibles,

$$P(n \text{ photons uniques}) = \sum_{\sigma} P(\sigma) = \sum_{\sigma} \prod_{h=1}^{n^2} (1 - \chi_h^2) \chi_h^{2\sigma(h)}. \quad (\text{III.45})$$

Afin de pouvoir continuer les calculs, nous considérons une distribution de compression déterminée à partir d'une expression analytique. Ainsi, par définition,

$$\Delta^2 \chi_i = \Delta^2 \chi_0 \cdot \exp(-2r), \quad (\text{III.46})$$

avec r le paramètre de compression. Pour la suite, nous avons décidé de prendre

$$\Delta^2 \chi_h = \Delta^2 \chi_{\text{ref}} \cdot \exp\left(-\frac{h^2}{s}\right), \quad (\text{III.47})$$

de forme gaussienne, avec s réel. Nous déduisons d'Éqs(III.46) et (III.47) que

$$r(h) = \frac{h^2}{2s}, \quad (\text{III.48})$$

et

$$\chi_h = \tanh\left(\frac{h^2}{2s}\right). \quad (\text{III.49})$$

Étant donné Éq.(III.49), un calcul direct d'Éq.(III.45) semble numériquement intraitable, en raison du nombre colossal d'éléments dans la somme, dès que le nombre de photons augmente un peu.

Il nous reste une option : pour chaque n (nombre de photons uniques), nous cherchons le s_{optimal} qui maximise $P(n)$ (nous obtenons $P_{\text{max}}(n)$). Ensuite, nous pourrions tracer $P_{\text{max}}(n)$ en fonction de n , et savoir si la pente est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Regardons alors la dérivée de $P(n)$ par rapport à s . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(P(n)) = & \sum_{\sigma} \prod_{h=1}^{n^2} \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{h^2}{2s} \right) \right) \tanh \left(\frac{h^2}{2s} \right)^{2\sigma(h)} \\ & \times \left(\sum_{j=1}^{n^2} \frac{j^2}{s^2} \left[\tanh \left(\frac{j^2}{2s} \right) + \sigma(j) \frac{-2}{\sinh \left(\frac{j^2}{s} \right)} \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Nous ne pouvons pas facilement trouver de manière analytique un extremum. Nous avons donc tenté de procéder numériquement. Toutefois, dès cinq photons, la durée du calcul dépassait la journée sur le petit ordinateur du bureau. Nous ne sommes allés que jusqu'à $n = 4$, et ne pouvons pas déterminer la décroissance de la probabilité.

n	σ_{max}	P_{max}
1	0.567 ± 0.001	0.250 ± 0.001
2	7.15 ± 0.01	0.062 ± 0.001
3	38.1 ± 0.1	0.035 ± 0.001
4	130 ± 1	0.025 ± 0.001

FIGURE III.9 – Résolution numérique de σ_{max} et P_{max} .

III.3.2.6 Conclusion

En conclusion, nous avons réexprimé, par un changement de base, les états intriqués comprimés à deux modes, qui correspondent aux ressources utilisées dans la proposition de Ralph, en termes d'états comprimés indépendants, qui constituent les ressources disponibles au LKB et qui sont accessibles à volonté. Puis, nous avons déterminé la matrice qui correspond à une certaine configuration donnée du protocole de Boson Sampling, le tout avec la même compression pour tous les états : il s'agit de notre contribution au protocole sous-universel Boson Sampling et une expérience qui implémenterait cette matrice réaliserait un Boson Sampling. Une perspective intéressante serait d'étudier la flexibilité du dispositif expérimental du LKB, notamment la pompe, pour découvrir de nouvelles possibilités au niveau de l'implémentation. Une autre perspective qui présente un intérêt est d'étudier la possible implémentation de ce Boson Sampling dans d'autres laboratoires avec d'autres sources continues, notamment les états cluster intriqués de Pfister aux États-Unis, et ceux de Furusawa au Japon. De plus, la continuelle amélioration des sources de photons uniques permettra peut-être de réaliser une implémentation directe du Boson Sampling original proposé par Aaronson et Arkhipov.

IV Génération de qudits intriqués par conversion paramétrique descendante spontanée dans un semi-conducteur

Dans ce chapitre, nous présentons notre recherche d'un modèle qui montrerait que les sources monolithiques d'AlGaAs étudiées dans notre équipe QITE, génèrent bien des états intriqués en fréquence de grande dimension dans la bande télécom, le tout à température ambiante. En effet, la réflectivité et les propriétés de dispersion de leurs dispositifs permettent de produire des qudits avec une dimension d pouvant aller jusqu'à plusieurs dizaines.

IV.1 Introduction

Les états intriqués de grande dimension font partie des ressources prometteuses aussi bien pour les recherches fondamentales en mécanique quantique que pour les applications en information quantique (par exemple en métrologie, informatique, et distribution de clé quantique). Dans ce contexte, les qudits intriqués en fréquence présentent un intérêt particulier dans la mesure où ils pourraient être directement utilisés pour le traitement de l'information quantique dans des fibres optiques, par exemple pour augmenter la capacité des canaux et la sécurité des communications quantiques. Récemment, plusieurs expériences ont été dévouées à la préparation de qudits intriqués en fréquence, mais toutes nécessitaient des filtres spectraux et/ou des modulateurs, voire des cavités externes, afin de préparer l'état ciblé ; contrairement à la source miniature de qudits intriqués en fréquence, étudiée dans l'équipe, constituée d'un guide d'ondes en AlGaAs qui émet des paires de photons par conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC). Les propriétés de dispersion de leur dispositif couplées à la réflectivité modale sur les facettes du guide d'ondes, permettent de modifier le spectre joint de l'état de biphoton émis afin d'obtenir des corrélations spectrales ressemblant à un peigne et qui correspondent à des qudits intriqués en fréquence avec d pouvant valoir plusieurs dizaines, pour un échantillon long de deux millimètres.

IV.2 Principe de fonctionnement du dispositif

Le dispositif en AlGaAs est un guide d'ondes à réflexion de Bragg, qui émet des paires de photons à température ambiante et à la longueur d'onde des télécommunications [Autebert et al., 2016]. Il est basé sur un schéma d'accord de phase modal, dans lequel le décalage des vitesses est compensé par la dispersion multi-modes du guide d'ondes. La structure est composée de deux miroirs de Bragg, qui fournissent à la fois un confinement de la bande interdite photonique pour un mode pompe de Bragg TE autour de 780

nanomètres et des revêtements de réflexion interne totale pour les modes TE et TM des photons jumeaux centrés à 1560 nanomètres. Ce schéma d'accord de phase a déjà mené

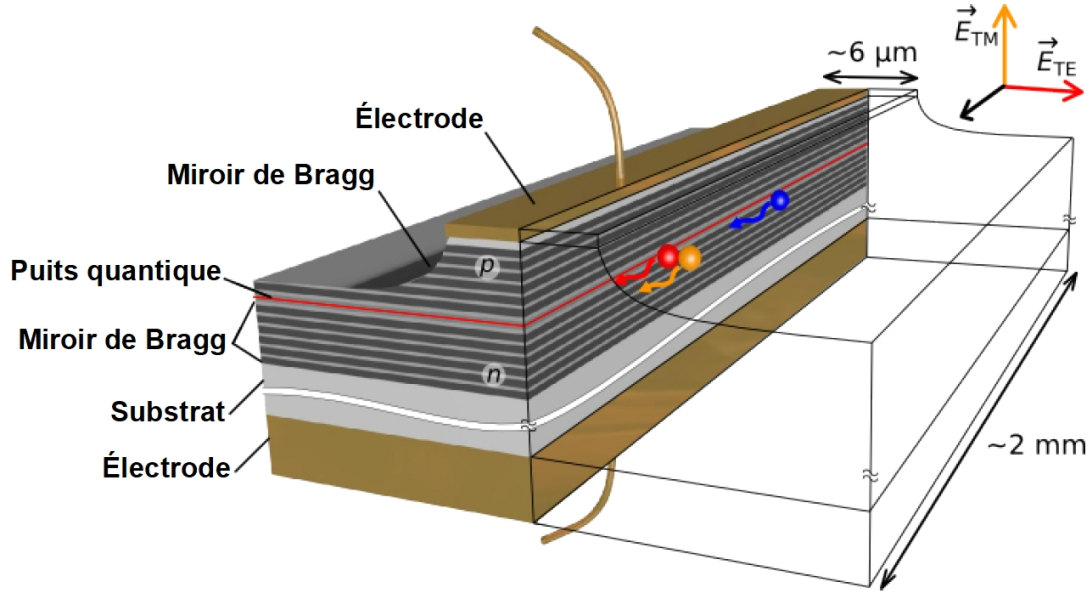


FIGURE IV.1 – Schéma de la source de paires de photons électriquement injectée. Le *gap* (largeur de la bande interdite) direct présente un intérêt dans la création de ce dispositif. La partie active de la structure est la jonction PIN (pour *Positive Intrinsic Negative* en anglais), dans laquelle un puits quantique permet l'émission laser dans le mode pompe autour de 780 nanomètres par injection électrique. De plus, du fait des règles de sélection, l'émission du puits quantique est polarisée suivant TE [Autebert, 2016].

à la démonstration d'une source de paire de photons injectée électriquement [Boitier et al., 2014]. Les longueurs d'onde des photons émis sont déterminées par les relations de conservation d'énergie et d'accord de phase suivantes [Autebert et al., 2017] :

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_i + \omega_s, \\ n_{TE_{Bragg}}(\omega_p) &= n_{TE_{00}}(\omega_i)\omega_i + n_{TM_{00}}(\omega_s)\omega_s, \\ n_{TE_{Bragg}}(\omega_p) &= n_{TM_{00}}(\omega_i)\omega_i + n_{TE_{00}}(\omega_s)\omega_s,\end{aligned}\tag{IV.1}$$

où ω_i et ω_s sont les pulsations optiques des photons obtenus par conversion descendante et les n_j (avec $j = TE_{Bragg}, TE_{00}$ et TM_{00}) sont les indices effectifs des modes guidés. Les propriétés de dispersion du dispositif conduisent à la génération de photons jumeaux sur une large bande spectrale, avec de fortes anti-correlations spectrales, c'est-à-dire que les photons d'une paire donnée sont émis à des fréquences symétriques par rapport à la fréquence de dégénérescence $\omega_p/2$.

De plus, le fort décalage d'indices au niveau des facettes du guide d'ondes crée une cavité Fabry-Pérot pour les deux modes de sortie. Ceci induit des délais temporels réguliers entre les photons directement transmis à travers la facette du guide d'ondes et les photons qui font un ou plusieurs allers-retours dans le guide d'ondes [Eckstein et al., 2014]. En prenant en compte ce qui vient d'être dit, l'expression de la densité spectrale

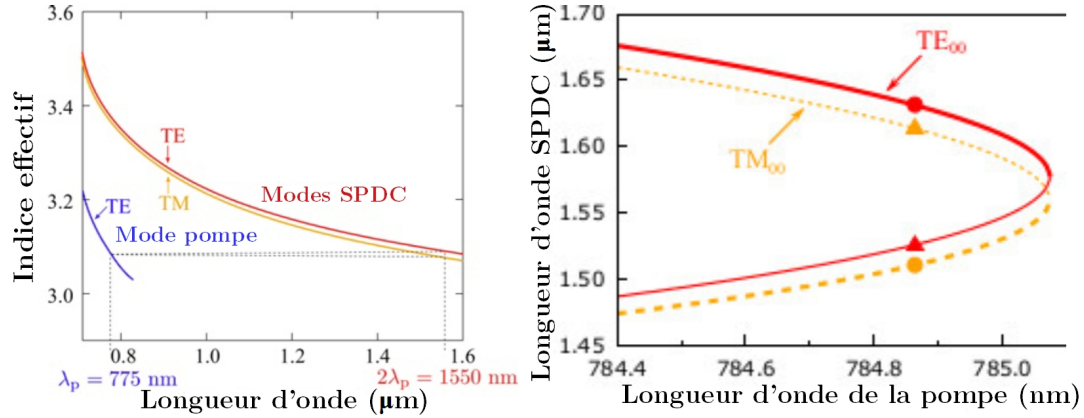


FIGURE IV.2 – Gauche : courbes de dispersion des indices effectifs des modes qui interagissent ; Droite : Courbes d'accordabilité.

jointe (DSJ), $|\phi(\omega_s, \omega_i)|^2$, de l'état biphoton émis est de la forme :

$$|\phi(\omega_s, \omega_i)|^2 = \frac{1}{N} |\alpha_p(\omega_s + \omega_i) \Phi_{PM}(\omega_s, \omega_i) f_{TE}(\omega_s, \omega_i) f_{TM}(\omega_s, \omega_i)|^2, \quad (IV.2)$$

$\phi(\omega_s, \omega_i)$ étant l'amplitude spectrale jointe (ASJ).

Dans Éq.(IV.2), $\alpha_p(\omega_s + \omega_i)$ est l'amplitude spectrale du faisceau de pompe, $\Phi_{PM}(\omega_s, \omega_i)$ est la fonction d'accord de phase de mélange à trois ondes, f_{TE} et f_{TM} décrivent l'effet des réflexions sur les facettes du guide d'ondes pour les photons générés polarisés suivant TE et TM, respectivement, et N est une constante de normalisation.

Les simulations numériques¹ de la DSJ pour un état biphoton émis par le dispositif

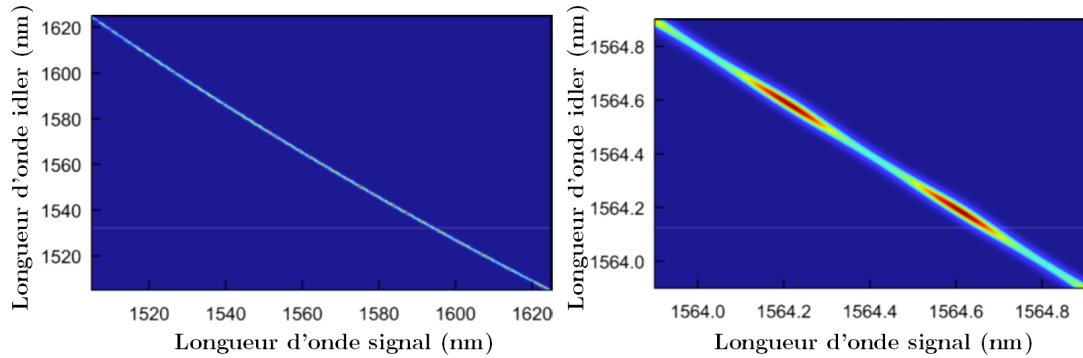


FIGURE IV.3 – Simulations numériques des densités spectrales jointes complète (gauche) et partielle (zoom) (droite) pour un échantillon long de deux millimètres.

avec un pompage à onde continue sont représentées en Fig.(IV.3). L'amplitude de la fonction d'onde du biphoton est distribuée le long de $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ et oscille avec des

1. Simulations obtenues avec les paramètres expérimentaux de l'équipe, comme par exemple la longueur du guide d'onde $L = 2$ mm.

pics à $\omega_s - \omega_i$. L'état généré a donc la structure de qudits intriqués,

$$|\psi\rangle = \sum_j^n a_j |\omega_j\rangle \otimes |\omega_{n-j}\rangle = \sum_j^n a_j |\omega_j; \omega_{n-j}\rangle, \quad (\text{IV.3})$$

comme dans [Jin et al., 2016]. L'équipe expérimentale a mesuré la DSJ à l'aide d'une technique de tomographie par émission stimulée [Eckstein et al., 2014].

La possibilité de générer un état mixte classique corrélé en fréquences, ou un état

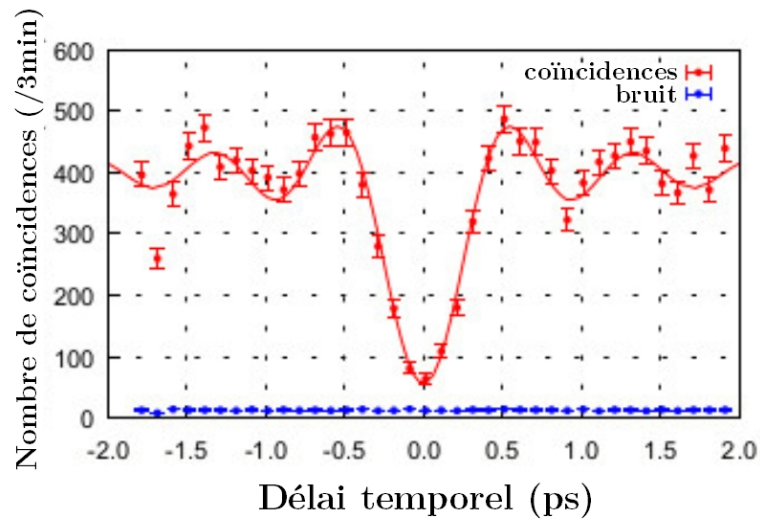


FIGURE IV.4 – Creux de Hong-Ou-Mandel (HOM), mesuré en pompant l'échantillon avec un laser Ti :Sa continu. Les photons générés sont filtrés sur une bande passante de 10.8 nanomètres.

mixte classique-quantique, est exclue par la mesure HOM réalisée sur le dispositif, avec une visibilité de 89% : cette mesure nous permet de démontrer l'existence de valeurs négatives pour la fonction de Wigner décrivant l'état, et ainsi de certifier sa nature intriquée. Nous allons rapidement démontrer la différence en terme de visibilité entre un état pur et un état mixte. Par souci de simplicité, nous considérerons des modes à seulement deux fréquences, mais la démonstration est généralisable à n fréquences.

État pur Notre état initial est $\frac{|\omega_1, \omega_2\rangle_{AB} + |\omega_2, \omega_1\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}$, avec A et B les entrées du séparateur de faisceau, comme en Fig.(II.2) (et C , ou E , et D , ou F , les sorties). Le dispositif utilisé pour faire des interférences HOM est représenté en Fig.(IV.5). Lorsqu'il

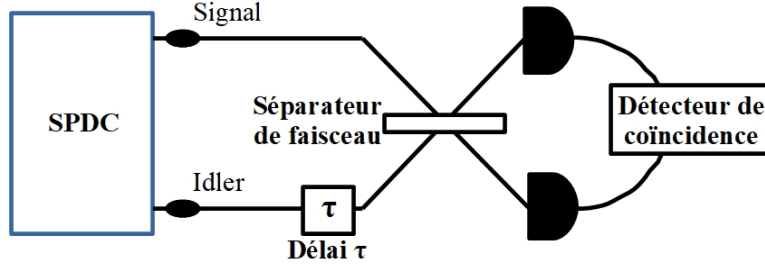


FIGURE IV.5 – Dispositif pour interférences HOM [Jin et al., 2016].

n'y a aucun délai entre les deux photons, l'état évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{|\omega_1, \omega_2\rangle_{AB} + |\omega_2, \omega_1\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} &= \frac{\hat{a}_{A1}^\dagger \hat{a}_{B2}^\dagger + \hat{a}_{A2}^\dagger \hat{a}_{B1}^\dagger}{\sqrt{2}} |00\rangle \\
 &= \frac{(\hat{a}_{D1}^\dagger + \hat{a}_{C1}^\dagger)(\hat{a}_{D2}^\dagger - \hat{a}_{C2}^\dagger) + (\hat{a}_{D2}^\dagger + \hat{a}_{C2}^\dagger)(\hat{a}_{D1}^\dagger - \hat{a}_{C1}^\dagger)}{2\sqrt{2}} |00\rangle \\
 &= \frac{\hat{a}_{D1}^\dagger \hat{a}_{D2}^\dagger - \hat{a}_{C1}^\dagger \hat{a}_{C2}^\dagger}{\sqrt{2}} |00\rangle \\
 &= \frac{|2, 0\rangle_{D1, D2} - |0, 2\rangle_{C1, C2}}{\sqrt{2}} \\
 &= |\psi\rangle_0,
 \end{aligned} \tag{IV.4}$$

avec 1 et 2 associés aux opérateurs correspondant aux fréquences ω_1 et ω_2 , respectivement. Mesurer le nombre de coïncidences revient à projeter l'état sur $|1, 1\rangle$. Ainsi, lorsque $\tau = 0$ (pas de délai entre les photons), la probabilité d'avoir des coïncidences vaut

$$P(\tau = 0) = |\langle 1, 1 | \psi \rangle_0|^2 = 0. \tag{IV.5}$$

En revanche, lorsque nous sommes très loin de $\tau = 0$, nous devons considérer des opérateurs de création en sortie différents pour chaque photons. Par exemple, le premier sortira dans la base " (C, D) ", et le second dans la base " (E, F) ". Ainsi, l'évolution de

l'état devient :

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega_1, \omega_2\rangle_{AB} + |\omega_2, \omega_1\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} &= \frac{\hat{a}_{A1}^\dagger \hat{a}_{B2}^\dagger + \hat{a}_{A2}^\dagger \hat{a}_{B1}^\dagger}{\sqrt{2}} |00\rangle \\
&= \frac{(\hat{a}_{D1}^\dagger + \hat{a}_{C1}^\dagger)(\hat{a}_{F2}^\dagger - \hat{a}_{E2}^\dagger) + (\hat{a}_{D2}^\dagger + \hat{a}_{C2}^\dagger)(\hat{a}_{F1}^\dagger - \hat{a}_{E1}^\dagger)}{2\sqrt{2}} |0, 0\rangle \\
&= \frac{\hat{a}_{D1}^\dagger \hat{a}_{F2}^\dagger - \hat{a}_{C1}^\dagger \hat{a}_{E2}^\dagger - \hat{a}_{D1}^\dagger \hat{a}_{E2}^\dagger + \hat{a}_{C1}^\dagger \hat{a}_{F2}^\dagger + \hat{a}_{D2}^\dagger \hat{a}_{F1}^\dagger - \hat{a}_{C2}^\dagger \hat{a}_{E1}^\dagger - \hat{a}_{D2}^\dagger \hat{a}_{E1}^\dagger + \hat{a}_{C2}^\dagger \hat{a}_{F1}^\dagger}{2\sqrt{2}} |0, 0\rangle \\
&= \frac{|0, 2\rangle_{D1, F2} - |0, 2\rangle_{C1, E2} - |1, 1\rangle_{D1, E2} + |1, 1\rangle_{C1, F2}}{2\sqrt{2}} \\
&\quad + \frac{|2, 0\rangle_{D2, F1} - |0, 2\rangle_{C2, E1} - |1, 1\rangle_{D2, E1} + |1, 1\rangle_{C2, F1}}{2\sqrt{2}} \\
&= |\psi\rangle_\infty.
\end{aligned} \tag{IV.6}$$

Cette fois-ci, la probabilité de coïncidence loin de $\tau = 0$ est

$$\begin{aligned}
P(\tau \rightarrow \infty) &= |{}_{D1, E2} \langle 1, 1 | \psi \rangle_\infty|^2 + |{}_{C1, F2} \langle 1, 1 | \psi \rangle_\infty|^2 + |{}_{D2, E1} \langle 1, 1 | \psi \rangle_\infty|^2 + |{}_{C2, F1} \langle 1, 1 | \psi \rangle_\infty|^2 \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{IV.7}$$

Nous en déduisons la visibilité de HOM théorique :

$$\frac{P(\tau \rightarrow \infty) - P(\tau = 0)}{P(\tau \rightarrow \infty)} = 100\%. \tag{IV.8}$$

État mixte Nous considérons maintenant un état initial qui est un état mixte à deux modes, associé à l'opérateur densité suivant :

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{|\omega_1, \omega_2\rangle_{AB} \langle \omega_2, \omega_1| + |\omega_2, \omega_1\rangle_{AB} \langle \omega_1, \omega_2|}{2} \\
&= \frac{\hat{a}_{A1}^\dagger \hat{a}_{B2}^\dagger |0, 0\rangle \langle 0, 0| \hat{a}_{B2}^\dagger \hat{a}_{A1}^\dagger + \hat{a}_{A2}^\dagger \hat{a}_{B1}^\dagger |0, 0\rangle \langle 0, 0| \hat{a}_{B1}^\dagger \hat{a}_{A2}^\dagger}{2}.
\end{aligned} \tag{IV.9}$$

Lorsqu'il n'y a pas de délai entre les deux photons, l'état après passage par le séparateur de faisceau est $\hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger$, où $\hat{\mathbf{B}}$ est l'opérateur associé au séparateur de faisceau, soit encore au final :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger &= \frac{1}{8} (|2, 0\rangle_{D1, D2} - |0, 2\rangle_{C1, C2} - |1, 1\rangle_{D1, C2} + |1, 1\rangle_{C1, D2}) \\
&\quad \times (\langle 2, 0|_{D1, D2} - \langle 0, 2|_{C1, C2} - \langle 1, 1|_{D1, C2} + \langle 1, 1|_{C1, D2}) \\
&\quad + \frac{1}{8} (|2, 0\rangle_{D1, D2} - |0, 2\rangle_{C1, C2} - |1, 1\rangle_{D2, C1} + |1, 1\rangle_{C2, D1}) \\
&\quad \times (\langle 2, 0|_{D1, D2} - \langle 0, 2|_{C1, C2} - \langle 1, 1|_{D2, C1} + \langle 1, 1|_{C2, D1}).
\end{aligned} \tag{IV.10}$$

Ici encore, pour mesurer les coïncidences, nous projetons l'état sur les $|1, 1\rangle$, c'est-à-dire que nous considérons les parties où les deux photons sortent par des ports de sortie différents. Nous en déduisons la probabilité de détecter des coïncidences, pour aucun délai, *i.e.* $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} P(\tau = 0) &= \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_1, C_2} + \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_2, C_1} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Ensuite, nous considérons le cas d'un délai entre les deux photons très important. Dans ce cas, après le séparateur de faisceau, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger &= \frac{1}{8} (|2, 0\rangle_{D_1, F_2} - |0, 2\rangle_{C_1, E_2} - |1, 1\rangle_{D_1, E_2} + |1, 1\rangle_{C_1, F_2}) \\ &\quad \times ({}_{D_1, F_2}\langle 2, 0| - {}_{C_1, E_2}\langle 0, 2| - {}_{D_1, E_2}\langle 1, 1| + {}_{C_1, F_2}\langle 1, 1|) \\ &\quad + \frac{1}{8} (|2, 0\rangle_{D_2, F_2} - |0, 2\rangle_{C_2, E_1} - |1, 1\rangle_{D_2, E_1} + |1, 1\rangle_{C_2, F_1}) \\ &\quad \times ({}_{D_2, F_1}\langle 2, 0| - {}_{C_2, E_1}\langle 0, 2| - {}_{D_2, E_1}\langle 1, 1| + {}_{C_2, F_1}\langle 1, 1|). \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Ainsi, nous pouvons calculer la probabilité de détection de coïncidence lorsque le délai entre les deux photons tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} P(\tau \rightarrow \infty) &= \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_1, E_2} + \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{C_1, F_2} \\ &\quad + \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_2, E_1} + \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{C_2, F_1} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

La visibilité vaut donc

$$\frac{P(\tau \rightarrow \infty) - P(\tau = 0)}{P(\tau \rightarrow \infty)} = 0. \quad (\text{IV.14})$$

Cette démonstration est aussi valable pour des états mixtes de la forme

$$\hat{\rho} = p_1 |\omega_1, \omega_2\rangle_{AB} \langle \omega_2, \omega_1| + p_2 |\omega_2, \omega_1\rangle_{AB} \langle \omega_1, \omega_2|, \quad (\text{IV.15})$$

avec $p_1 + p_2 = 1$.

En effet, quand il n'y a pas de délai entre les deux photons, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{B}}^\dagger &= \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{4} (|2, 0\rangle_{D_i, D_{n-i}} - |0, 2\rangle_{C_i, C_{n-i}} - |1, 1\rangle_{D_i, C_{n-i}} + |1, 1\rangle_{C_i, D_{n-i}}) \\ &\quad \times ({}_{D_i, D_{n-i}}\langle 2, 0| - {}_{C_i, C_{n-i}}\langle 0, 2| - {}_{D_i, C_{n-i}}\langle 1, 1| + {}_{C_i, D_{n-i}}\langle 1, 1|). \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Ainsi, nous obtenons la probabilité de coïncidence suivante :

$$\begin{aligned}
P(\tau = 0) &= \sum_{i=1}^2 p_i (\langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_i, C_{n-i}} + \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_{n-i}, C_i}) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{IV.17}$$

Loin de $\tau = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{B}}^\dagger &= \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{4} (|2, 0\rangle_{D_i, F_{n-i}} - |0, 2\rangle_{C_i, E_{n-i}} - |1, 1\rangle_{D_i, E_{n-i}} + |1, 1\rangle_{C_i, F_{n-i}}) \\
&\quad \times (\langle 2, 0|_{D_i, F_{n-i}} - \langle 0, 2|_{C_i, E_{n-i}} - \langle 1, 1|_{D_i, E_{n-i}} + \langle 1, 1|_{C_i, F_{n-i}}).
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

Nous en déduisons la probabilité de coïncidences :

$$\begin{aligned}
P(\tau \rightarrow \infty) &= \sum_{i=1}^2 p_i (\langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_i, E_{n-i}} + \langle 1, 1 | \hat{\mathbf{B}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{B}}^\dagger | 1, 1 \rangle_{D_{n-i}, F_i}) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{IV.19}$$

et donc, la visibilité vaut $[P(\tau \rightarrow \infty) - P(\tau = 0)]/P(\tau \rightarrow \infty) = 0$. Par conséquent, en présence d'états mixtes en entrée, nous n'observons aucun creux de HOM. Comme la démonstration se généralise aux états à d modes, nous déduisons des résultats expérimentaux avec un creux de HOM d'une visibilité de 89% que nous sommes en présence d'états purs intriqués en entrée. Cela nous permet de considérer un modèle de l'expérience avec des qudits intriqués.

IV.3 Conversion paramétrique descendante

À l'origine, le processus paramétrique fut développé dans le domaine des ondes radio et des micro-ondes à travers les amplificateurs à faible bruit, avant l'invention du laser [Louisell, 1960]. Cette notion fut adaptée au domaine optique des ondes électromagnétiques lors de l'émergence de l'optique non-linéaire [Ou, 2007], et l'amplification paramétrique dans ce domaine fut démontrée en premier par Giordmaine et Miller [Giordmaine and Miller, 1965] : le champ d'entrée amplifié, appelé "signal", est souvent accompagné d'un autre champ, appelé "idler", qui est nécessaire pour préserver la relation de commutation de la mécanique quantique. L'énergie, quant à elle, provient d'un autre champ, ou plusieurs, appelé "pompe". Toujours dans ce domaine, nous allons nous concentrer sur le processus basique de mélange à trois ondes.

En mécanique quantique, le processus paramétrique est décrit par l'hamiltonien d'in-

teraction suivant, avec les champs "signal" et "idler" chacun dans un mode :

$$\hat{\mathbf{H}}_I = i\chi \hat{\mathbf{a}}_s^\dagger \hat{\mathbf{a}}_i^\dagger + h.c., \quad (\text{IV.20})$$

où χ est un paramètre relié aux champs de pompe (qui sont souvent traités comme des champs classiques), $\hat{\mathbf{a}}_{s(i)}^\dagger$ est l'opérateur de création du champ signal (idler), et *h.c.* veut dire *hermitien conjugué*.

Dans la représentation de Heisenberg, l'évolution des opérateurs d'annihilation suit la transformation de Bogoljubov [Bogoljubov, 1958] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}'_s(t) &= (\mu \hat{\mathbf{a}}_s + \nu \hat{\mathbf{a}}_i^\dagger) e^{-i\omega t}, \\ \hat{\mathbf{a}}'_i(t) &= (\mu \hat{\mathbf{a}}_i + \nu \hat{\mathbf{a}}_s^\dagger) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

avec

$$\mu = \cosh(|\chi| t), \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\chi}{|\chi|} \sinh(|\chi| t). \quad (\text{IV.22})$$

Ces expressions ci-dessus décrivent le processus d'amplification paramétrique avec un gain d'amplitude de μ .

Dans la représentation d'interaction, l'état quantique évolue selon :

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{U}}(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (\text{IV.23})$$

où

$$\hat{\mathbf{U}}(t) = \exp(-i\hat{\mathbf{H}}_I t) = \exp(\eta \hat{\mathbf{a}}_s^\dagger \hat{\mathbf{a}}_i^\dagger - h.c.), \quad (\text{IV.24})$$

avec $\eta \equiv \chi t$. Nous obtenons donc un état comprimé à deux modes [Caves and Schumaker, 1985]. Afin de générer une grande compression, il faut se placer dans le régime $|\eta| \gg 1$, c'est-à-dire le régime à gain élevé de l'amplificateur paramétrique. Cependant, pour générer l'état à deux photons, nous sommes en régime de gain faible, *i.e.* $\mu \approx 1$, ou encore $|\eta| \ll 1$. Dans ce cas, nous pouvons approximer Éq.(IV.23) par

$$|\Psi(t)\rangle \approx \left(1 - \frac{|\eta|^2}{2}\right) |0\rangle + \eta |1, 1\rangle_{s,i} + \eta^2 |2, 2\rangle_{s,i}. \quad (\text{IV.25})$$

Nous n'avons pas tenu compte des termes d'ordre supérieur à deux en η . De plus, nous prenons le vide pour état initial $|\Psi(0)\rangle$. Étant donné que $|\eta| \ll 1$, la première contribution non triviale d'Éq.(IV.25) à la photo-détection est l'état à deux photons $|1, 1\rangle_{s,i}$. Cette équation nous permet de comprendre la signification physique de $|\eta|^2$ comme étant la probabilité de conversion d'un photon pompe en deux autres photons. Le dernier terme d'Éq.(IV.25) nous apprend que, comme la génération de paires est aléatoire, la probabilité d'avoir deux paires est proportionnelle à $|\eta|^4$.

Le principal intérêt du processus paramétrique, en plus de générer un état à deux photons, est que cet état à deux photons soit intriqué. En effet, en régime de gain faible ($|\eta| \ll 1$, un processus spontané [Burnham and Weinberg, 1970] crée le signal et idler, sans signal d'entrée à amplifier. Et souvent, plusieurs processus spontanés sont possibles. Cette possibilité d'avoir plusieurs chemins lors de la conversion paramétrique spontanée crée de l'intrication à deux photons entre les différents chemins. Prenons par exemple deux chemins possibles, l'hamiltonien, avec deux modes possibles pour chacun

des champs du signal et de l'idler, s'écrit comme :

$$\hat{\mathbf{H}}_I = \chi_1 \hat{\mathbf{a}}_{s1} \hat{\mathbf{a}}_{i1} + \chi_2 \hat{\mathbf{a}}_{s2} \hat{\mathbf{a}}_{i2} + h.c., \quad (\text{IV.26})$$

et produit un état intriqué à deux photons de la forme :

$$|\Psi\rangle \approx \dots + \eta_1 |1, 1\rangle_{s1, i1} + \eta_2 |1, 1\rangle_{s2, i2} + \dots, \quad (\text{IV.27})$$

en ne considérant que les termes dominants pour la détection de deux photons. Ici, $s1$, $s2$, $i1$ et $i2$ décrivent les différents modes du signal et de l'idler, et peuvent être n'importe quel degré de liberté pour un champ optique. Toutefois, il est courant de considérer la fréquence comme degré de liberté, car la conversion paramétrique spontanée a un large spectre.

Lors d'un mélange à trois ondes, processus non-linéaire, un faisceau lumineux (de fréquence plus élevée que celles des photons qui seront créés) interagit avec un milieu non-linéaire et le pompe jusqu'à un état virtuel (Fig.IV.6.a). Ce faisceau de lumière est appelé le faisceau de "pompe". Lors d'une conversion paramétrique non spontanée, un second faisceau, appelé "signal", de fréquence plus basse que le faisceau de pompe, est envoyé sur la région d'interaction, suivant une certaine direction, son intensité est alors amplifiée, tandis que le faisceau de pompe se retrouve appauvri et partiellement converti dans le faisceau signal. La conservation de l'énergie nécessite la génération simultanée d'un troisième faisceau, appelé "idler" (Fig.IV.6.b). La fréquence de l'idler est la dif-

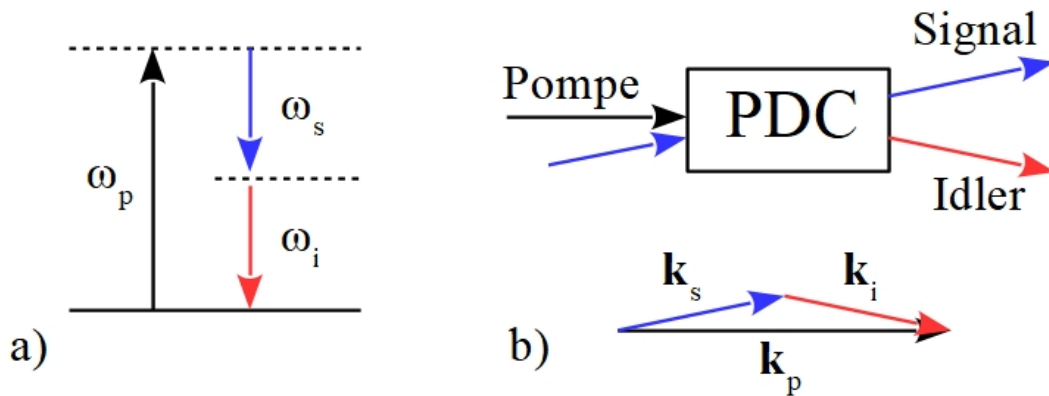


FIGURE IV.6 – Conversion paramétrique descendante (non-spontanée) : a) diagramme d'énergie ; b) géométrie du processus, au-dessus de l'accord de phase.

férence entre les fréquences des deux autres faisceaux. De plus, comme nous partons d'une certaine fréquence pour arriver à des fréquences plus faibles, ce processus s'appelle conversion paramétrique *descendante* (PDC pour *parametric down-conversion*).

En fonction de la polarisation des photons signal et idler, il existe deux types de PDC :

- PDC de type-I, qui produit deux photons de même polarisation ;
- PDC de type-II, qui crée deux photons de polarisations orthogonales.

Étant donné le caractère biréfringent de la plupart des milieux non-linéaires, les propriétés des photons convertis sont différentes entre les deux types de processus.

Enfin, la conversion paramétrique descendante *spontanée* peut être vue comme la conver-

sion d'un photon de pompe en deux photons signal et idler, après interaction avec le milieu non-linéaire. Nous retrouvons Éq.(IV.1), et les conservations de l'impulsion sont vérifiées seulement lorsque la condition d'accord de phase est satisfaite (Fig.IV.6.b). La première démonstration de conversion paramétrique descendante spontanée fut réalisée par Magde et Mahr [Magde and Mahr, 1967], par Akhmanov *et al.* [Akhmanov et al., 1967], et plus en détail par Byer et Harris [Byer and Harris, 1968].

IV.4 Effets de la réflectivité des facettes sur l'amplitude spectrale jointe

La différence entre les indices de réfraction de l'air et des composés en $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ induit une réflectivité partielle au niveau des facettes du guide d'onde [Boucher, 2016]. Les réflectivités modales ont pu être estimées à l'aide de simulations numériques basées sur la méthode des différences finies dans le domaine des fréquences. Ainsi, nous avons $R_{\text{TE}} = 26.7\%$ et $R_{\text{TM}} = 24.7\%$ pour les modes fondamentaux TE et TM, respectivement, lorsque les simulations sont faites pour $\lambda \approx 1550$ nm et pour des frontières typiquement de largeur $W = 5 \mu\text{m}$ [Orieux et al., 2011]. Par conséquent, les deux facettes du guide d'onde créent une cavité pour les modes signal et idler, qui, bien que d'une relative piètre qualité, a un impact non négligeable sur le comportement des photons dans la cavité. *A priori*, ce phénomène était plutôt néfaste, car il réduit la visibilité des interférences à deux photons lors des tests d'indiscernabilité des photons et donc la génération de photons indiscernables par la source n'est pas optimale [Caillet et al., 2010]. Or, il se trouve que pour la génération de qudits intriqués, l'impact de la réflectivité sur les photons se révèle cruciale.

L'approche considérée pour tenir compte de l'effet des réflectivités des facettes sur les propriétés temps-fréquence des photons créés, est celle de Jeronimo-Moreno *et al.* [Jeronimo-Moreno et al., 2010]. Ainsi, ils considèrent les facettes comme des séparateurs de faisceau, avec des opérateurs de création et d'annihilation associés aux modes de l'intérieure de la cavité et de l'espace vide à l'extérieur, ce qui leur permet de montrer que l'effet de la cavité peut se réduire à la multiplication de la ASJ originale par des fonctions de transfert décrivant la transmission de Fabry-Pérot pour les fréquences du signal et de l'idler, tant que la source reste en régime spontané, c'est-à-dire que les photons créés ne stimulent pas eux-mêmes l'émission d'autres photons. Dans notre cas, les photons créés sont colinéaires et se propagent dans la même direction. Donc, nous ne considérons qu'un seul côté du guide d'onde pour la sortie des photons. La figure IV.7) est un schéma de la situation que nous étudions, avec $\hat{\mathbf{a}}_{s/i,\sigma}^\dagger(\omega)$ et $\hat{\mathbf{a}}_{\text{back},s/i,\sigma}^\dagger(\omega)$ les opérateurs de création d'un photon signal/idler de polarisation σ et fréquence ω dans un mode intérieur à la cavité, et $\hat{\mathbf{b}}_{s/i,\sigma}^\dagger(\omega)$ et $\hat{\mathbf{b}}_{\text{back},s/i,\sigma}^\dagger(\omega)$ ceux dans un mode externe à la cavité. Les facettes gauche et droite sont représentées par des séparateurs de faisceau de coefficients de réflexion et transmission d'amplitude complexe, r_σ et t_σ , dépendants de la polarisation et qui vérifient $R_\sigma = |r_\sigma|^2 = \sqrt{1 - |t_\sigma|^2}$. Nous allons procéder par étape, et nous considérons seulement le signal, car il suffit de suivre une procédure analogue pour l'idler. Nous avons choisi l'origine de l'axe z au centre de l'échantillon de longueur L . Nous en déduisons le premier terme que nous devons considérer. Il s'agit de la phase

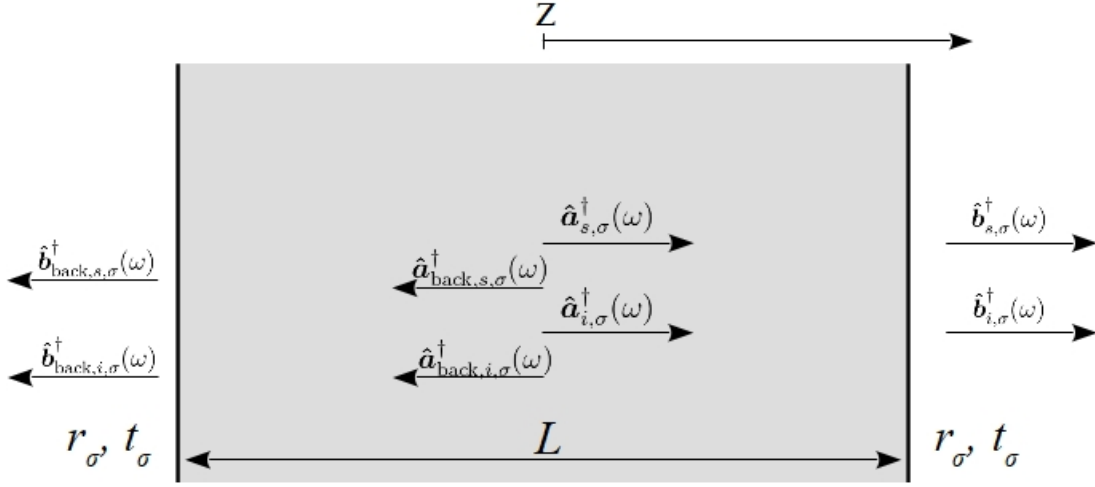


FIGURE IV.7 – Schéma de l'échantillon de longueur L aux facettes considérées comme des séparateurs de faisceau identiques avec des coefficients de réflexion et de transmission r_σ et t_σ dépendants de la polarisation σ .

de propagation du centre au bord droit du guide d'onde :

$$\hat{\mathbf{a}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \rightarrow \exp\left(\frac{ik_\sigma L}{2}\right) \hat{\mathbf{a}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega), \quad (\text{IV.28})$$

avec $k_\sigma = \frac{n_\sigma(\omega)\omega}{c}$. Ensuite, le photon qui atteint la facette droite est soit réfléchi dans le mode interne arrière $\hat{\mathbf{a}}_{\text{back},s,\sigma}^\dagger$, soit transmis dans le mode externe $\hat{\mathbf{b}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega)$:

$$\hat{\mathbf{a}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \rightarrow \exp\left(\frac{ik_\sigma L}{2}\right) \left(r_\sigma \hat{\mathbf{a}}_{\text{back},s,\sigma}^\dagger(\omega) + t_\sigma \hat{\mathbf{b}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \right). \quad (\text{IV.29})$$

Puis, au niveau de l'autre facette, le même scénario se produit, avec l'addition d'une phase correspondant à la propagation sur toute la longueur du guide d'onde. Comme nous l'avons dit précédemment, les photons transmis par cette facette gauche ne contribueront pas aux photo-détections, car tout le dispositif expérimental est placé d'un même côté du guide d'onde. Nous ne considérons donc aucun terme en $\hat{\mathbf{b}}_{\text{back},s,\sigma}^\dagger(\omega)$. Après, l'énergie réfléchié revient sur la facette de droite, cette fois avec une phase correspondant à un aller-retour dans la cavité, et elle est soumise de nouveau à une transformation du séparateur de faisceau. À ce moment, nous avons :

$$\hat{\mathbf{a}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \rightarrow \exp\left(\frac{ik_\sigma L}{2}\right) \left(r_\sigma^3 \exp(ik_\sigma 2L) \hat{\mathbf{a}}_{\text{back},s,\sigma}^\dagger(\omega) + t_\sigma [1 + r_\sigma^2 \exp(ik_\sigma 2L)] \hat{\mathbf{b}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \right). \quad (\text{IV.30})$$

Par conséquent, après n allers-retours dans le guide d'onde, nous avons l'opérateur de

création associé au mode signal suivant :

$$\hat{\mathbf{a}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \rightarrow \exp\left(\frac{ik_\sigma L}{2}\right) \left(r_\sigma^{2n+1} \exp(ik_\sigma 2nL) \hat{\mathbf{a}}_{\text{back},s,\sigma}^\dagger(\omega) + t_\sigma \sum_{j=0}^n [r_\sigma^2 \exp(ik_\sigma 2L)]^j \hat{\mathbf{b}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) \right). \quad (\text{IV.31})$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, toute l'énergie finit par être extraite de la cavité, c'est-à-dire que le terme en $\hat{\mathbf{a}}_{\text{back},s,\sigma}^\dagger(\omega)$ d'Éq.(IV.31) est négligeable, de sorte que l'opérateur de création original s'écrit

$$\hat{\mathbf{a}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega) = f_\sigma(\omega) \hat{\mathbf{b}}_{s,\sigma}^\dagger(\omega), \quad (\text{IV.32})$$

avec

$$f_\sigma(\omega) = \exp\left(\frac{ik_\sigma L}{2}\right) \frac{t_\sigma}{1 - r_\sigma^2 \exp(ik_\sigma 2L)}, \quad (\text{IV.33})$$

ce qui correspond à la fonction de transmission de Fabry-Pérot usuelle, à la phase de propagation sur la moitié de la longueur du guide d'onde près. L'amplitude spectrale jointe avec les facettes réfléchives est donc de la forme

$$ASJ_{\text{FP}}(\omega_s, \omega_i) = f_{\text{TE}}(\omega_s) f_{\text{TM}}(\omega_i) \alpha_{\text{pompe}}(\omega_s + \omega_i) \Phi_{\text{PM}}(\omega_s, \omega_i). \quad (\text{IV.34})$$

IV.5 Modèle

L'état théorique obtenu en sortie de la puce d'AlGaAs est un état continu de la forme

$$|\psi\rangle = \int \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_s d\omega_i \phi(\omega_s, \omega_i) \hat{\mathbf{a}}_s^\dagger(\omega_s) \hat{\mathbf{a}}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle_s |0\rangle_i, \quad (\text{IV.35})$$

où $\hat{\mathbf{a}}_{s,i}^\dagger$ est l'opérateur création du signal et de l'idler, respectivement, lors de la conversion paramétrique. $\phi(\omega_s, \omega_i)$ correspond à l'amplitude spectrale jointe (ASJ) ou la fonction d'onde du biphoton. Cette dernière est composée d'une fonction pompe (une gaussienne) (IV.37), d'une fonction représentant la condition d'accord de phase (un sinus cardinal) (IV.38), et des fonctions dues à la cavité de Fabry-Pérot (IV.39) [Boucher, 2016]

$$\phi(\omega_s, \omega_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \alpha(\omega_s, \omega_i) \phi_{\text{PM}}(\omega_s, \omega_i) f_{\text{TE}}(\omega_s) f_{\text{TM}}(\omega_i), \quad (\text{IV.36})$$

avec N une constante de normalisation, et

$$\alpha(\omega_s, \omega_i) = \text{sech}\left(\frac{\beta(\omega_s + \omega_i - \omega_p)}{\sigma}\right), \quad (\text{IV.37})$$

$$\phi_{\text{PM}}(\omega_s, \omega_i) = L \times \text{sinc}(2L\Delta k), \quad (\text{IV.38})$$

$$f_{\text{TE}}(\omega_s) = \frac{t_{\text{TE}} \exp\left(ik_{\text{TE}} \frac{L}{2}\right)}{1 - r_{\text{TE}}^2 \exp\left(i2Ln_{\text{TE}}(\omega_s) \frac{\omega_s}{c}\right)}, \quad (\text{IV.39})$$

$$f_{\text{TM}}(\omega_i) = \frac{t_{\text{TM}} \exp\left(ik_{\text{TM}} \frac{L}{2}\right)}{1 - r_{\text{TM}}^2 \exp\left(i2Ln_{\text{TM}}(\omega_i) \frac{\omega_i}{c}\right)},$$

où $\beta = 2.\text{sech}^{-1}(0.5)$, $k_{\text{TM}}(\omega_i) = n_{\text{TM}}(\omega_i)\frac{\omega_i}{c}$ et $k_{\text{TE}}(\omega_s) = n_{\text{TE}}(\omega_s)\frac{\omega_s}{c}$. L est la longueur du guide d'onde et

$$\Delta k = \frac{1}{c}(\omega_p n_p(\omega_p) - (\omega_s n_{\text{TE}}(\omega_s) + \omega_i n_{\text{TM}}(\omega_i))), \quad (\text{IV.40})$$

est le déphasage, avec ω_p la fréquence du champ de pompe [Autebert, 2016]. Comme la fonction de pompe dépend de la somme des fréquences, elle est symétrique par rapport à ω_s et ω_i . Cependant, ce n'est pas le cas de la fonction d'accord de phase $\Phi_{\text{PM}}(\omega_s, \omega_i)$. En effet, le cristal utilisé est généralement biréfringent, donc $k_{\text{TE}}(\omega) \neq k_{\text{TM}}(\omega)$, et par conséquent, $\Phi_{\text{PM}}(\omega_s, \omega_i)$ n'est pas symétrique par rapport à ω_s et ω_i . Donc, $\Phi_{\text{PM}}(\omega_s, \omega_i) \neq \Phi_{\text{PM}}(\omega_i, \omega_s)$. De ce fait, les paquets d'onde décrivant les deux photons produits par conversion paramétrique descendante de type-II, ne sont pas identiques, même lorsqu'ils sont dégénérés en leur fréquence centrale [Grice and Walmsley, 1997].

Avec l'expression de l'ASJ, nous avons cherché dans un premier temps à calculer la forme analytique du taux de coïncidences théoriquement obtenu lors d'une expérience type HOM, représentée en Fig.(IV.8). Grice et Walmsley avaient trouvé des expressions

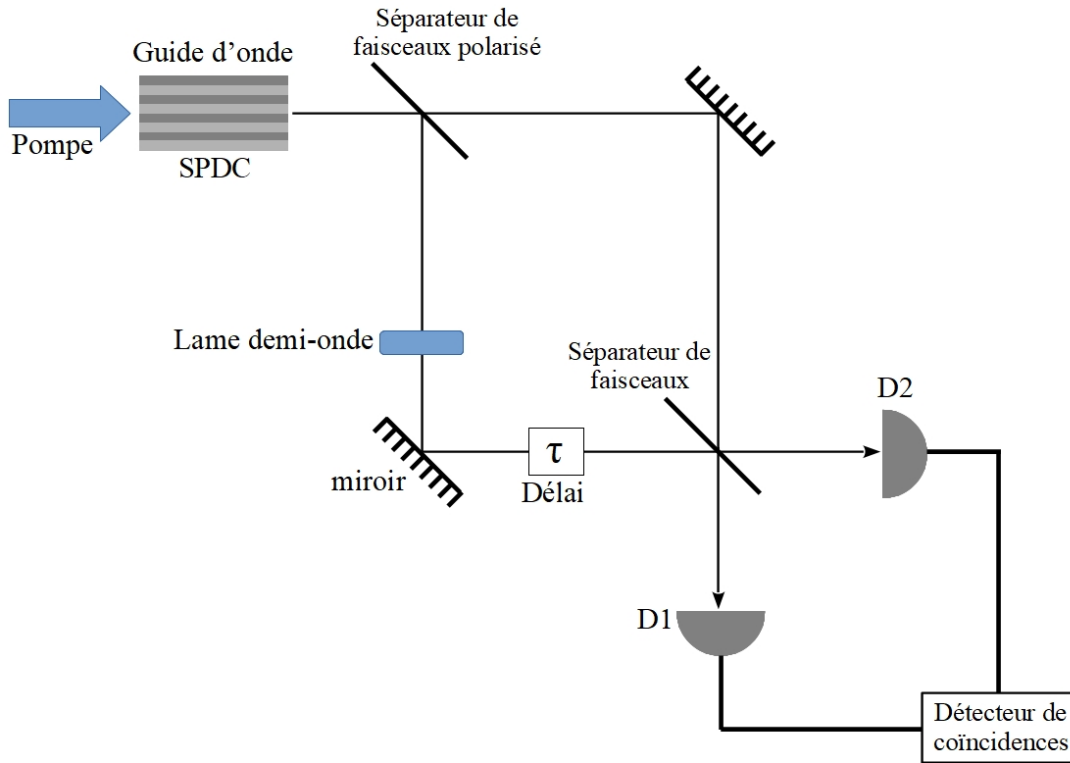


FIGURE IV.8 – Schéma de l'expérience réalisée au laboratoire.

analytiques pour une ASJ ne contenant pas les termes dus à la cavité dans [Grice and Walmsley, 1997]. Ils ont eu recours à des approximations très pratiques, comme par exemple n'utiliser que les premiers termes du développement en séries de Taylor des nombres d'onde. Nous avons pu nous servir des mêmes approximations, toutefois leur méthode de calcul n'est pas directement applicable en présence des termes dus

à la cavité. En effet, avec eux, il n'est plus possible d'avoir un produit de fonctions dépendant uniquement soit de la somme des fréquences, soit de leur différence.

Dans notre cas, nous avons finalement remplacé les fonctions dues à la cavité, f_{TE} et f_{TM} , par des sommes de pics gaussiens. En effet, le module du produit de f_{TE} et f_{TM} est représenté en Fig.(IV.9), et nous faisons l'hypothèse qu'une approximation par des pics gaussiens est raisonnable. Dans un premier temps, nous avons cherché la

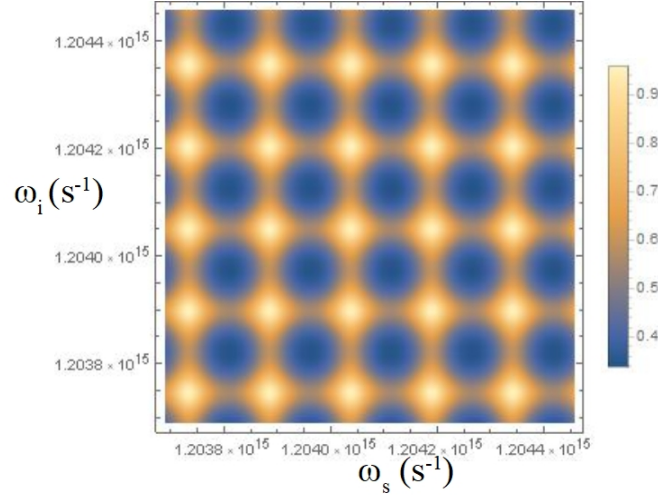


FIGURE IV.9 – Représentation du module du produit de f_{TE} et f_{TM} , en fonction de ω_s et ω_i .

position des pics, pour pouvoir centrer nos gaussiennes sur chaque pic. Pour ce faire, nous avons cherché à maximiser les modules de $f_{\text{TE}}(\omega_s)$ et $f_{\text{TM}}(\omega_i)$ en fonction de ω_s et ω_i , respectivement. Ici, maximiser le module de $f_{\text{TE}}(\omega_s)$ revient à trouver le $\omega_{s,max}$ tel que le dénominateur du module de $f_{\text{TE}}(\omega_s)$, c'est-à-dire $|1 - r_{\text{TE}}^2 \exp[i2Lk_{\text{TE}}(\omega_{s,max})]|$, soit le plus petit possible. Or, nous avons :

$$|1 - r_{\text{TE}}^2 \exp[i2Lk_{\text{TE}}(\omega_s)]|^2 = 1 + r_{\text{TE}}^4 - 2r_{\text{TE}}^2 \cos[2Lk_{\text{TE}}(\omega_s)]. \quad (\text{IV.41})$$

Minimiser Éq.(IV.41) mène à

$$\cos[2Lk_{\text{TE}}(\omega_{s,max})] = 1. \quad (\text{IV.42})$$

Nous en déduisons

$$2Lk_{\text{TE}}(\omega_{s,max}) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad k_{\text{TE}}(\omega_{s,max}) = \frac{\pi n}{L}. \quad (\text{IV.43})$$

À partir d'ici, nous allons utiliser l'approximation de Grice et Walmsley, qu'ils utilisent dans [Grice and Walmsley, 1997]. Elle consiste à ne prendre que les deux premiers termes du développement en séries de Taylor du nombre d'onde $k_{\text{TE}}(\omega)$. Ainsi, nous avons

$$k_{\text{TE},0} + \underbrace{\left(\omega_s - \frac{\omega_p}{2}\right)}_{\nu_s} k'_{\text{TE}} = \frac{\pi n}{L}, \quad (\text{IV.44})$$

avec ω_p la fréquence centrale de la pompe, $k_{\text{TE},0} = k_{\text{TE}}(\frac{\omega_p}{2})$ et $k'_{\text{TE}} = \left. \frac{\partial k_{\text{TE}}(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_p/2}$.

Éq.(IV.44) implique

$$\nu_{s,n} = \frac{1}{k'_{\text{TE}}} \left\{ \frac{\pi n}{L} - k_{\text{TE},0} \right\}, \quad (\text{IV.45})$$

ce qui nous donne la position des pics de type Fabry-Pérot pour le photon signal. Nous faisons de même pour le photon idler, et nous obtenons immédiatement :

$$\nu_{i,m} = \frac{1}{k'_{\text{TM}}} \left\{ \frac{\pi m}{L} - k_{\text{TM},0} \right\}, \quad (\text{IV.46})$$

avec $m \in \mathbb{Z}$.

Dans ce qui suit, nous allons pouvoir réécrire l'ASJ avec les approximations considérées. Pour simplifier un peu plus, la fonction de pompe est gaussienne :

$$\alpha(\nu_s + \nu_i) = \exp\left(-\frac{(\nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2}\right), \quad (\text{IV.47})$$

où nous rappelons que

$$\nu_j = \omega_j - \frac{\omega_p}{2}, \quad \text{avec } j = s, i, \quad (\text{IV.48})$$

et σ la largeur de la pompe.

La fonction d'accord de phase prend la forme suivante :

$$\Phi_{\text{PM}} = L \operatorname{sinc}\left(2L[\nu_s(k'_{\text{TE}} - k'_p) + \nu_i(k'_{\text{TM}} - k'_p)]\right), \quad (\text{IV.49})$$

car nous avons un accord de phase parfait pour les fréquences centrales, ce qui donne $k_{\text{TE},0} + k_{\text{TM},0} - k_{p,0} = 0$. Nous allons même la simplifier davantage pour le calcul, tout en gardant sa forme anti-diagonale (en fonction de ν_s et ν_i) :

$$\Phi_{\text{PM}} = L \exp\left(-4L^2[\nu_s \Delta k'_{\text{TE}} + \nu_i \Delta k'_{\text{TM}}]^2\right), \quad (\text{IV.50})$$

avec $\Delta k'_{\text{TE}/\text{TM}} = k'_{\text{TE}/\text{TM}} - k'_p$. Nous précisons que pour la pompe, le développement en séries de Taylor est pris autour de la fréquence centrale de la pompe, c'est-à-dire ω_p , et non pas autour de $\frac{\omega_p}{2}$, comme pour k_{TE} et k_{TM} .

Enfin, nous avons les sommes théoriquement infinies de gaussiennes pour remplacer les fonctions de type Fabry-Pérot :

$$\begin{aligned} f_{\text{TE}}(\nu_s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_E \exp(-b_E^2[\nu_s - \nu_{s,n}]^2), \\ f_{\text{TM}}(\nu_i) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_M \exp(-b_M^2[\nu_i - \nu_{i,m}]^2), \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

où A_E , A_M , b_E et b_M seront choisis afin d'avoir la plus grande fidélité entre ces fonctions approchées et les fonctions originales.

Comme nous cherchons une expression analytique pour le terme d'interférence HOM

lors d'une expérience HOM, nous nous concentrons sur le taux moyen de coïncidences en fonction du délai relatif τ entre les deux photons, $R_c(\tau)$, que nous obtenons avec une telle ASJ. En fait, nous cherchons juste à voir s'il y a un creux de HOM au niveau de $\tau = 0$, car cela suffirait à prouver que nous sommes bien en présence de qudits intriqués : la normalisation n'est pas nécessaire, et nous considérons des termes proportionnels à $R_c(\tau)$. Ainsi, nous avons :

$$R_c(\tau) \propto \iint d\nu_s d\nu_i |\alpha(\nu_s + \nu_i)|^2 [|\Phi_{\text{PM}}(\nu_s, \nu_i) f_{\text{TE}}(\nu_s) f_{\text{TM}}(\nu_i)|^2 - \Phi_{\text{PM}}(\nu_s, \nu_i) f_{\text{TE}}(\nu_s) f_{\text{TM}}(\nu_i) \Phi_{\text{PM}}^*(\nu_i, \nu_s) f_{\text{TE}}^*(\nu_i) f_{\text{TM}}^*(\nu_s) \exp(-i\{\nu_i - \nu_s\}\tau)] \quad (\text{IV.52})$$

Le premier terme d'Éq.(IV.52) représente une intégration sur l'entière distribution de probabilité des deux photons, et il est proportionnel à la probabilité totale d'observer une conversion paramétrique descendante, quelles que soient les fréquences des photons créés. D'ailleurs, lorsque τ est grand, le second terme d'Éq.(IV.52) oscille rapidement en tant que fonction de fréquence, et, de ce fait, ne contribue en rien à l'intégrale. Par conséquent, seul le premier terme constitue le niveau de fond. Ainsi, nous nous intéressons au second terme, qui est susceptible de faire tomber le taux de coïncidences lorsque le délai τ se rapproche de 0. De plus, nous n'allons pas considérer tous les pics formés par les fonctions de type Fabry-Pérot, mais seulement ceux qui forment une anti-diagonale superposée aux fonctions de pompe et d'accord de phase. Nous rajoutons donc une constante E dans f_{TE} et une autre, M , dans f_{TM} , qui sont choisies de telle façon que l'ASJ puisse s'écrire :

$$ASJ(\nu_s, \nu_i) = \alpha(\nu_s + \nu_i) \Phi_{\text{PM}}(\nu_s, \nu_i) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_E \exp(-b_E^2[\nu_s - \nu_{s,n} - E]^2) A_M \exp(-b_M^2[\nu_i - \nu_{i,-n} - M]^2). \quad (\text{IV.53})$$

Lorsque nous calculons le second terme d'Éq.(IV.52), ce qui est fait dans l'annexe D, le terme typique d'un creux de HOM, en $\exp\left(-\frac{\tau^2}{Z}\right)$ avec Z dépendant de certains paramètres choisis, sort des sommes, et il peut donc être directement interprété. En revanche, les termes susceptibles de renseigner sur la forme plus précise du creux, sont coincés dans les sommes.

En conclusion, le terme $\exp\left(-\frac{\tau^2}{Z}\right)$ valide la présence d'un creux de HOM dans le taux de coïncidences autour du délai relatif entre les deux photons, τ , nul. Cependant, pour obtenir d'autres informations afin de raffiner la forme du creux, une poursuite du calcul est nécessaire, afin de se débarrasser des sommes ou simplement d'y voir plus clair.

Nous avons donc présenté un modèle pour la génération de qudits intriqués en fréquence sur une puce d'AlGaAs à température ambiante, aux longueurs d'onde télécom et compatible avec l'injection électrique. La structure en peigne émise par le dispositif peut trouver des applications intéressantes en métrologie quantique. De plus, comme l'encodage en fréquence-temps présente plusieurs avantages pour les transmissions fi-

brées, nous pensons que ce dispositif est un candidat intéressant pour la distribution de clé quantique de grande dimension.

V L'expérience de Ou-Mandel revisitée

L'expérience de Hong-Ou-Mandel est l'une des expériences fondamentales en optique quantique. Elle illustre pour la première fois, de façon simple et efficace, le groupement de photons aux caractéristiques identiques en sortie d'un séparateur de faisceau. Dans le dispositif basique présenté en Fig.(V.1), deux photons produits par une source sont envoyés dans deux chemins différents, dont l'un est retardé en temps d'un certain τ par rapport à l'autre. Ce délai temporel induit un déphasage de $\omega\tau$ dans l'un des bras comparé à l'autre, où ω correspond à la fréquence du photon concerné. Ensuite, ces deux chemins indépendants sont combinés sur un séparateur de faisceau, chacun au niveau d'une entrée différente. En sortie du séparateur, nous effectuons des mesures de

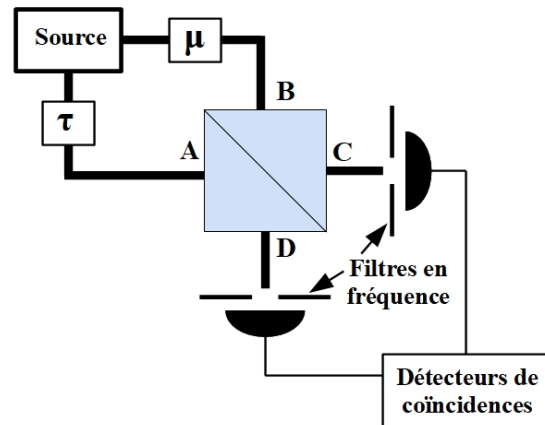


FIGURE V.1 – Schéma de l'expérience avec des filtres en fréquence devant les détecteurs.

coïncidences. Comme vu dans II.4, les photons étant des bosons, nous nous attendons à ce que, s'ils sont indiscernables, ils se regroupent, c'est-à-dire qu'ils prennent le même chemin en sortie du séparateur de faisceau, qui peut être soit C , soit D , d'après la Fig.(V.1), avec une même probabilité. Dans ce cas, aucune coïncidence ne sera observée. En revanche, si les photons sont distinguables, ils sont moins susceptibles de se regrouper, la probabilité de regroupement étant proportionnelle à leur distinction. Il en résulte que faire varier le délai τ et, par conséquent, la distinction entre photons (qui sont autrement indiscernables) dans chaque bras avant le séparateur de faisceau permet d'observer le creux de Hong-Ou-Mandel (HOM), représenté en Fig.(V.2.a).

Au début, l'intérêt des chercheurs était focalisé sur le phénomène de regroupement, *i.e.* sur l'apparition d'un creux, ou sur le phénomène opposé, le pic, signature du phénomène où les photons sont espacés plus régulièrement que dans un champ laser cohérent. Ainsi, lorsque quelqu'un cherche à démontrer une statistique bosonique ou fermionique pour différents types de particules quantiques, non seulement des photons [Amaral et al., 2016]-[Kaufman et al., 2018], mais également des atomes [Lopes et al., 2015] et des

électrons [Jonckheere et al., 2012]-[Ferraro et al., 2014], le creux et le pic servent de signature.

Dans [Ou and Mandel, 1988], les auteurs ont raffiné l'expérience de HOM en ajoutant des filtres en fréquence avant chaque détecteur, comme montré sur Fig.(V.1). Dans cette référence, les filtres étaient modélisés théoriquement par des fonctions gaussiennes dont la largeur était beaucoup plus petite que la distribution en fréquence des photons. Les résultats expérimentaux observés quand τ varie, montrent une structure à battements, représentée en Fig.(V.2.b). Le point intéressant mis en avant par les auteurs de la référence est le fait que la résolution des battements dans une telle expérience d'interférence à deux photons est plus grande que la résolution en fréquence des détecteurs. Dans ce

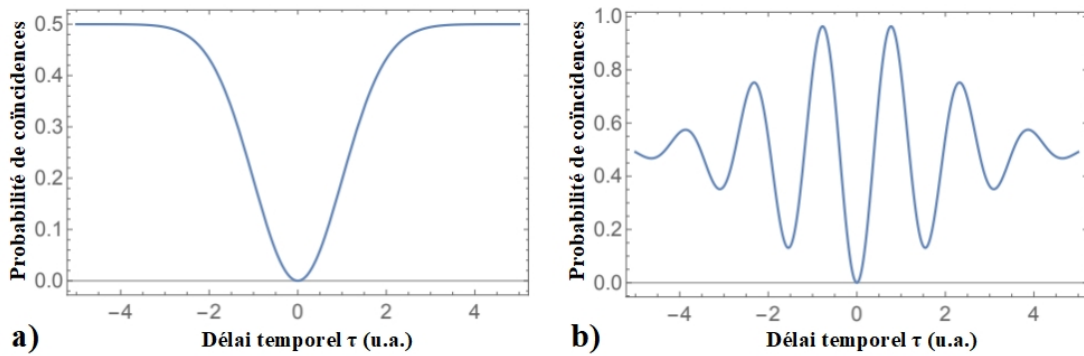


FIGURE V.2 – a) Creux de HOM. b) Battements en fréquence lors de l'utilisation de filtres en fréquence devant les détecteurs.

chapitre, nous présentons une nouvelle lecture des résultats des expériences de type Ou-Mandel (OM). Pour ce faire, nous avons utilisé les résultats obtenus dans [Douce et al., 2013], où il fut montré que l'expérience HOM n'est rien d'autre que la mesure directe de la fonction de Wigner associée à une variable collective de la paire de photons (par exemple la différence des fréquences). Suivant ce cheminement, nous avons développé une façon générale de lire les expériences de type OM utilisant des filtres de largeur arbitraire en fréquence. Ceci nous permet de donner une interprétation physique plus fondamentale de la forme des franges apparaissant dans [Ou and Mandel, 1988]. En particulier, nous avons montré que leur Fig.2 correspond aux "moustaches" (décrites en II.6.5) d'un chat de Schrödinger délocalisé, produit par post-sélection.

V.1 Description mathématique de l'expérience de Ou et Mandel

La partie centrale de cette expérience de type HOM est l'interférence des deux photons au niveau du séparateur de faisceau. Une façon pratique et couramment utilisée de créer deux photons est la conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC en anglais), où le laser de pompe est envoyé sur un cristal non linéaire, créant un état biphoton, souvent utilisée dans les chapitres précédents. En effet, les propriétés de la SPDC permettent d'obtenir des paires de photons fortement intriqués. Donc, avant le décalage temporel (τ) et le décalage en fréquence (μ), et avant le séparateur de faisceau,

l'état biphoton peut s'écrire comme :

$$|\Psi\rangle = \iint \psi(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle_A |\omega_i\rangle_B d\omega_s d\omega_i, \quad (\text{V.1})$$

où ω_s correspond à la variable (fréquence) associée, ici, au photon se propageant dans le bras A de l'interféromètre, et ω_i celle du photon dans le bras B (Fig.(V.1)), et ψ est la fonction d'onde du biphoton. Comme les deux photons de la paire sont intriqués, ψ ne peut pas s'écrire sous la forme séparée $\psi_A(\omega_s) \times \psi_B(\omega_i)$, avec ψ_A et ψ_B les fonctions d'onde décrivant l'état du photon dans le bras A et du photon dans le bras B seuls, respectivement. Cependant, ψ peut souvent être décomposée en deux parties : en $f_+(\omega_s + \omega_i)$ qui établit la conservation de l'énergie, et en $f_-(\omega_s - \omega_i)$ qui correspond à la conservation de l'impulsion (l'accord de phase); f_+ ne dépend que de la somme des fréquences, $\omega_+ = \omega_s + \omega_i$, et f_- que de la différence, $\omega_- = \omega_s - \omega_i$. Étant donné le caractère fini du temps d'interaction dans le cristal lors de la création du biphoton, ces deux fonctions ont des largeurs finies et sont généralement approchées par des gaussiennes. Par exemple, nous avons

$$f_-(\omega_-) = \exp\left(-\frac{\omega_-^2}{2\delta\omega^2}\right), \quad (\text{V.2})$$

avec $\delta\omega$ la largeur de l'accord de phase, et

$$f_+(\omega_+) = \exp\left(-\frac{\omega_+^2}{2\Delta^2}\right), \quad (\text{V.3})$$

où Δ représente la largeur en fréquence de la pompe. Si les conditions de conservation de l'énergie et de l'impulsion étaient parfaitement respectées, nous pourrions remplacer f_+ et f_- par des distributions de Dirac. Cette approximation est utilisée dans certains cas où elle est raisonnable, mais aussi parfois pour simplifier les calculs et obtenir une vision d'ensemble sur les résultats analytiques obtenus.

La distribution de Wigner d'un état factorisé en f_+f_- , prend elle-même la forme suivante :

$$W_\Psi(\omega_s, \omega_i, t_s, t_i) = W_+(\omega_+) W_-(\omega_-), \quad (\text{V.4})$$

où W_\pm correspondent aux distributions de Wigner des fonctions f_\pm .

Lorsque les photons sont très fortement corrélés, f_+ peut être assimilée à une distribution de Dirac, et, dans ce cas, nous avons :

$$W_\Psi(\omega_s, \omega_i, t_s, t_i) = \delta(\omega_s + \omega_i) \exp\left(-\frac{(\omega_s - \omega_i)^2}{\delta\omega^2}\right) \exp(-4(t_s - t_i)^2\delta\omega^2). \quad (\text{V.5})$$

Pour en revenir à l'expérience de Ou et Mandel, l'état initial est celui du biphoton représenté en Éq.(V.1), et chaque photon suit un chemin différent, celui du haut ou celui du bas.

Puis, un délai temporel est effectué sur le photon du chemin bas, et un décalage en fréquence sur le photon du haut. Ce décalage en fréquence peut être implémenté avec des dispositifs d'électro-optique [Poberezhskiy et al., 2003], ou d'acousto-optique [Chunmei

et al., 2014]. Ainsi, l'état total des deux photons avant le séparateur de faisceau est

$$|\Psi_{\mu,\tau}\rangle = \iint d\omega_s d\omega_i \psi(\omega_s + \mu, \omega_i) \exp(-i\omega_i\tau) |\omega_s\rangle_A |\omega_i\rangle_B. \quad (\text{V.6})$$

Pour un séparateur de faisceau 50 : 50 diélectrique, les faisceaux réfléchis et ceux transmis diffèrent d'une phase de $\frac{\pi}{2}$. Nous supposons que les faisceaux réfléchis subissent le déphasage de $\frac{\pi}{2}$, et qu'il n'y a donc pas de déphasage pour les faisceaux transmis. Ainsi, après le séparateur de faisceau, l'état du système devient :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mu,\tau}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint d\omega_s d\omega_i \psi(\omega_s + \mu, \omega_i) \exp(-i\omega_i\tau) \\ &\times \left(i |\omega_s, \omega_i; 0\rangle_{C,D} + i |0; \omega_s, \omega_i\rangle_{C,D} - |\omega_i; \omega_s\rangle_{C,D} + |\omega_s; \omega_i\rangle_{C,D} \right). \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Les deux premiers termes correspondent au regroupement des photons, et ne participent donc pas aux coïncidences, contrairement aux deux derniers termes. Comme nous nous intéressons aux coïncidences, nous ne considérons que les deux derniers termes par la suite. Après avoir effectué un changement de variables ($\omega_s \leftrightarrow \omega_i$ dans l'avant-dernier terme de l'Éq.(V.7)), l'état que nous avons est :

$$|\Psi_{\mu,\tau}\rangle_{SP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint d\omega_s d\omega_i (\psi(\omega_s + \mu, \omega_i) \exp(-i\omega_i\tau) - \psi(\omega_i + \mu, \omega_s) \exp(-i\omega_s\tau)) |\omega_s; \omega_i\rangle_{C,D}. \quad (\text{V.8})$$

Maintenant, nous modélisons l'action des filtres en fréquence, au niveau desquels les photons arrivent : chaque filtre est associé à un opérateur du type

$$\hat{\mathbf{F}}(\omega_1, \sigma) = \int d\omega f_{\omega_1}(\omega) |\omega\rangle \langle \omega|, \quad (\text{V.9})$$

où $f_{\omega_1}(\omega)$ est une fonction de la variable ω , centrée en ω_1 et de largeur σ . Nous en déduisons l'état après le filtrage :

$$|\Psi_{\mu,\tau}\rangle_F = \frac{\hat{\mathbf{F}}(\omega_1, \sigma) \hat{\mathbf{F}}(\omega_2, \sigma) |\Psi_{\mu,\tau}\rangle_{SP}}{\left\| \hat{\mathbf{F}}(\omega_1, \sigma) \hat{\mathbf{F}}(\omega_2, \sigma) |\Psi_{\mu,\tau}\rangle_{SP} \right\|}. \quad (\text{V.10})$$

Nous avons choisi des filtres de même largeur, mais pas de même fréquence centrale, et cette différence de fréquences centrales est cruciale. L'état après les filtres qui contribue aux coïncidences s'écrit donc

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mu,\tau}\rangle_{SP} &= \frac{1}{N\sqrt{2}} \iint d\omega_s d\omega_i (\psi(\omega_s + \mu, \omega_i) \exp(-i\omega_i\tau) \\ &\quad - \psi(\omega_i + \mu, \omega_s) \exp(-i\omega_s\tau)) f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(\omega_i) |\omega_s; \omega_i\rangle_{C,D}, \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

avec N la constante de normalisation. Nous remarquons que le premier terme de l'Éq.(V.11) représente la situation où les deux photons ont été transmis par le séparateur de faisceau et le second terme correspond à la situation où les deux photons ont été réfléchis. Cette remarque sera utile pour la suite.

Nous nous intéressons maintenant à la probabilité de détecter un photon dans chaque détecteur, c'est-à-dire la probabilité de coïncidences $I(\mu, \tau)$. Par définition,

$$I(\mu, \tau) = \iint d\omega_s d\omega_i | {}_{D,C} \langle \omega_i; \omega_s | \Psi_{\mu, \tau} \rangle_{SP} |^2. \quad (\text{V.12})$$

Nous en déduisons

$$I(\mu, \tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left[\iint d\omega_s d\omega_i \psi^*(\omega_s + \mu, \omega_i) \right. \right. \\ \left. \left. \times \psi(\omega_i + \mu, \omega_s) \exp(-i(\omega_s - \omega_i)\tau) | f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(\omega_i) |^2 \right] \right). \quad (\text{V.13})$$

Si nous enlevons les filtres et posons $\mu = 0$, nous retrouvons bien le creux à $\tau = 0$ qui caractérisent le regroupement de photons indiscernables.

Nous considérons désormais que l'amplitude spectrale jointe ψ peut se factoriser comme vu précédemment, *i.e.* $\psi(\omega_s, \omega_i) = f_+(\omega_+) f_-(\omega_-)$. Alors, la probabilité de coïncidences s'écrit :

$$I(\mu, \tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left[\iint d\omega_s d\omega_i | f_+(\omega_s + \omega_i + \mu) |^2 \right. \right. \\ \left. \left. \times f_-(\omega_s - \omega_i + \mu) f_-(\omega_i - \omega_s + \mu) \exp(-i(\omega_s - \omega_i)\tau) | f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(\omega_i) |^2 \right] \right). \quad (\text{V.14})$$

Dans le cas de l'expérience originelle de HOM, sans filtre, il est possible de séparer l'intégrale en deux parties : une dépendante de ω_+ et l'autre de ω_- . Ici, la présence des filtres empêche cette factorisation.

Afin de parvenir à bout des calculs analytiques, nous considérons une conservation de l'énergie parfaite, comme dans l'article original [Ou and Mandel, 1988], ce qui se traduit par $f_+(\omega_+) = \delta(\omega_+)$, avec δ la distribution de Dirac. Toutefois, contrairement à l'article original, nous ne supposons pas que la largeur des filtres soit beaucoup plus petite que la largeur de la condition d'accord de phase, et donc nous ne pouvons pas considérer la fonction d'accord de phase comme constante. De plus, nous prenons des filtres gaussiens :

$$f_{\omega_1}(\omega_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\omega_s - \omega_1)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{V.15})$$

et

$$f_{\omega_2}(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\omega_i - \omega_2)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{V.16})$$

Après intégration sur ω_i , la probabilité de coïncidences devient :

$$I(\mu, \tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left[\int d\omega_s f_-(2\omega_s + 2\mu) f_-(-2\omega_s) \exp(-i(2\omega_s + \mu)\tau) | f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(-\mu - \omega_s) |^2 \right] \right). \quad (\text{V.17})$$

Enfin, nous trouvons :

$$I(\mu, \tau) = \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau^2}{\alpha}\right) \exp(-\alpha\mu^2) \exp\left(-\mu \frac{\omega_1 + \omega_2}{\sigma^2}\right) \cos\left(\frac{2\tau(\omega_2 - \omega_1)}{\sigma^2\alpha}\right) \right], \quad (\text{V.18})$$

avec $\alpha = \frac{2}{\sigma^2} + \frac{4}{\delta\omega^2}$ et nous avons donc $N = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{\sigma^4\alpha}\right)$. Si la largeur des filtres est beaucoup plus petite que celle de la condition d'accord de phase, nous retrouvons le même argument dans le cosinus que dans l'équation (10) de [Ou and Mandel, 1988]. Expérimentalement, nous pouvons mesurer directement la probabilité de coïncidence $I(\mu = 0, \tau)$, et nous retrouvons les battements quantiques entre les deux fréquences centrales des filtres. Ces battements sont totalement indépendants de l'intrication de l'état : même si l'état était séparable, nous observerions ces franges d'interférence [Ou and Mandel, 1988]. Car il y a bien interférence, et elle provient des deux chemins possibles pour ω_s et ω_i . Nous allons voir dans la section suivante que ces

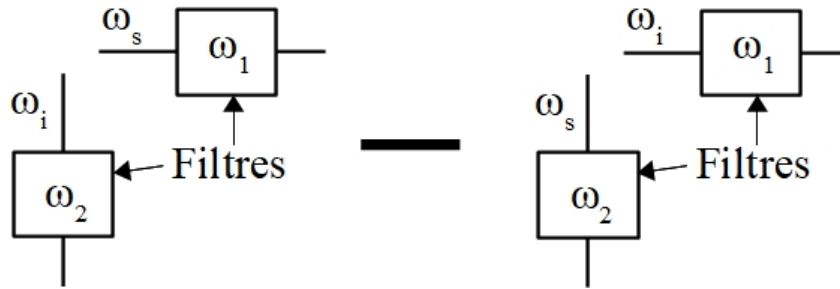


FIGURE V.3 – La probabilité de coïncidence peut être interprétée comme l'interférence de deux chemins différents pour ω_s et ω_i .

battements peuvent être interprétés comme un état chat en fréquence-temps, et que la probabilité de coïncidences n'est autre que la coupe en ω_- de la marginale de la distribution de Wigner $W_-(\omega_-, t_-)$.

V.2 Interprétation avec post-sélection : le chat de Schrödinger biphoton

Grâce aux résultats précédents, nous allons fournir une interprétation avec post-sélection de l'action des filtres. À partir de l'état d'Éq.(V.11), nous nous posons la question suivante : quelle partie de l'état original $|\Psi\rangle$ a été post-sélectionné par l'interféromètre de HOM suivi des filtres en fréquence ? Afin de répondre à cette question, nous pouvons "remonter la trace" des parties de l'état original qui sont détectées par le compte des coïncidences dans la configuration mentionnée, à savoir la partie où les deux photons sont réfléchis et celle où ils sont transmis. En procédant de la sorte, nous trouvons que l'état *avant* le séparateur de faisceau et les décalages en temps et fréquence, qui mène à l'état d'Éq.(V.11), est

$$|\Psi\rangle = \iint d\omega_s d\omega_i \psi(\omega_s, \omega_i) [f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(\omega_i) + f_{\omega_1}(\omega_i) f_{\omega_2}(\omega_s)] |\omega_s; \omega_i\rangle_{A,B}. \quad (\text{V.19})$$

La fonction d'onde peut être interprétée comme le photon signal allant au filtre 1 (quand le photon idler va au filtre 2) et allant au filtre 2 (quand le photon idler va au filtre 1). Ce qui est analogue à l'expérience des trous d'Young, où une particule passe "simultanément" par deux fentes (une fente correspondant à un filtre en position).

Nous allons maintenant montrer que le terme d'interférence de la fonction de Wigner de la précédente fonction d'onde est la probabilité de coïncidences.

La marginale de la fonction de Wigner de la fonction d'onde d'Éq.(V.19) est

$$W_-(\omega_-, \tau) = \int d\omega_+ W(\omega_s, \omega_i, t_s, t_i), \quad (\text{V.20})$$

et ne dépend pas de t_+ du fait de la distribution de Dirac traduisant une parfaite conservation de l'énergie. En considérant la même factorisation de la fonction d'onde du biphoton que précédemment et avec une parfaite conservation de l'énergie, nous avons, après intégration suivant ω_+ :

$$W_-(\omega_-, \tau) = W_{12}(\omega_-, \tau) + W_{21}(\omega_-, \tau) + W_{\text{beating}}(\omega_-, \tau). \quad (\text{V.21})$$

Les détails des calculs sont dans l'annexe E.

D'une part, le terme d'interférence $W_{\text{beating}}(\omega_-, \tau)$ vaut :

$$\begin{aligned} W_{\text{beating}}(\omega_-, \tau) &= \int d\omega_+ \delta(\omega_+) W_{\text{beating}}(\omega_s, \omega_i, \tau) \\ &= 2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\alpha}\right) \exp(-\alpha\omega_-^2) \cos\left(\frac{2\tau(\omega_2 - \omega_1)}{\sigma^2\alpha}\right). \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} W_{12}(\omega_-, \tau) &= \int d\omega_+ \delta(\omega_+) W_{12}(\omega_s, \omega_i, \tau) \\ &= \exp(-\alpha\omega_-^2) \exp\left(-\frac{(\omega_- - (\omega_1 - \omega_2))^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

La distribution de Wigner $W_-(\omega_-, \tau)$ est représentée en Fig.(V.4). Il s'agit de la distri-

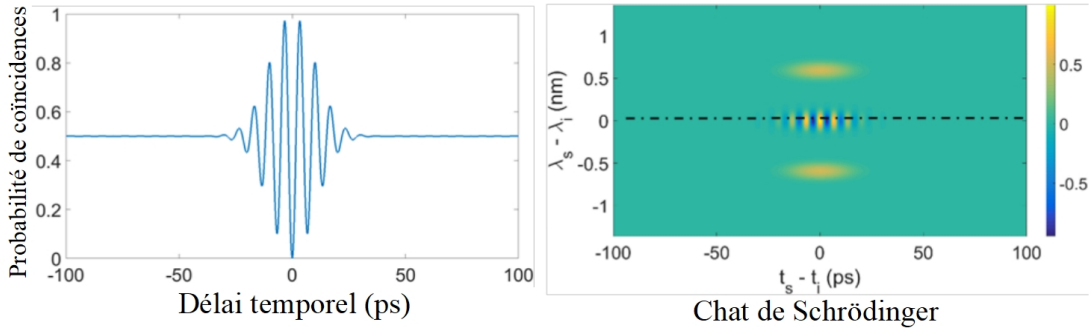


FIGURE V.4 – À gauche, la mesure des coïncidences présente des franges, et, à droite, la partie d'interférence de la fonction de Wigner $W_-(0, \tau)$ de l'état chat en fréquence-temps correspond aux franges de gauche, ce qui signifie que, grâce au filtrage en fréquence, la post-sélection permet de sélectionner seulement la partie "chat" de la fonction d'onde totale générée par SPDC.

bution de Wigner d'un état chat pair : nous voyons les deux "yeux" du chat, centrés en

$(\omega_1 - \omega_2)$ et $(\omega_2 - \omega_1)$, et ses moustaches suivant l'axe τ (elles correspondent au terme d'interférence).

Finalement, nous obtenons :

$$I(0, \tau) = \frac{1}{2}(1 - W_{\text{beating}}(\omega_- = 0, \tau)). \quad (\text{V.24})$$

Les simulations montrent une correspondance entre les deux formules. Si les filtres sont centrés sur la même fréquence, il n'y a pas de battement, mais seulement une gaussienne centrale. Et lorsque nous faisons varier les fréquences centrales des filtres, nous voyons apparaître deux gaussiennes centrées, l'une en $(\omega_1 - \omega_2)$, et l'autre en $(\omega_2 - \omega_1)$, ainsi qu'un terme d'interférence entre les deux, suivant l'axe τ . Malheureusement, $I(\mu, \tau)$ n'est pas reliée à la distribution de Wigner $W_-(\omega_-, t_-)$.

Revenons à l'analogie avec les fentes de Young. Lorsque les détecteurs sont placés juste après les fentes (filtres en position), nous observons juste les "yeux" du chat, ce qui correspond à la marginale en position de la distribution de Wigner. Nous pourrions observer la même chose dans l'expérience de HOM, si, au lieu de mesurer les coïncidences, nous mesurons directement l'intensité spectrale jointe.

Puis, lorsque nous observons les franges au niveau du plan focal d'une lentille, nous mesurons la transformée de Fourier du signal, qui est une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace des phases. Ceci correspond, dans l'expérience de HOM, à la mesure de la probabilité de coïncidences.

Ainsi, les fréquences des filtres permettent une manipulation de l'état chat en fréquence-temps, puisque nous pouvons changer la fréquence de battements (les moustaches du chat selon l'axe τ) et la position des "yeux" du chat (selon l'axe ω_-).

Toutefois, ce n'est pas suffisant pour avoir une tomographie complète du système. En effet, pour l'instant, nous ne faisons que du comptage de coïncidences, or la probabilité de coïncidences n'est qu'une coupe de la distribution de Wigner en $\omega_- = 0$. En particulier, nous n'apercevons pas les "yeux" du chat, mais seulement une coupe de la moustache dans [Ou and Mandel, 1988]. Ainsi, la généralisation de l'expérience de HOM proposée en [Douce et al., 2013] ne permet pas de réaliser une tomographie complète. Pour y arriver, il est nécessaire de poursuivre les recherches. Dans un article en cours de rédaction au sein de l'équipe, une méthode adéquate y est développée. Elle utilise entre autre des filtres en temps.

En conclusion, nous avons donné une nouvelle interprétation plus fondamentale des battements quantiques qui sont présents lors des expériences de types OM. Nous avons montré que, par post-sélection, nous voyions en réalité une coupe de la fonction de Wigner d'un état chat de Schrödinger. Une des perspectives pour poursuivre cette recherche est de trouver une méthode permettant de réaliser une tomographie complète du système, et ainsi de retrouver le chat en entier.

VI Conclusions et Perspectives

Depuis son émergence il y a plus de trente ans, le domaine de l'information quantique a connu de nombreuses avancées. Ces dernières ont commencé par la découverte de concepts fondamentaux et de protocoles, puis leurs démonstrations expérimentales. Les technologies actuelles se développent sur divers supports physiques, chacun ayant ses avantages et inconvénients. Nous assisterons probablement à l'hybridation de certains d'entre eux, afin de cumuler les avantages. Cependant, que ce soit pour l'ordinateur quantique ou la communication quantique, la communauté de l'information quantique cherche également à réduire les tailles des sources et éléments qui entrent en jeu dans les protocoles et systèmes quantiques, afin de manipuler des ensembles compacts, plus pratiques pour des développements à grande échelle.

La première partie de cette thèse est consacrée au Boson Sampling et à la tentative d'adapter une expérience du Laboratoire Kastler Brossel au protocole proposé par Ralph [Lund et al., 2014], le tout en variables continues. Dans un premier temps, nous avons procédé à un changement de base, afin de pouvoir comparer les systèmes. Dans un second temps, nous avons apporté des modifications sur les hypothèses, pour voir si cela apportait de nouvelles correspondances.

La deuxième partie de cette thèse s'occupe de la modélisation d'une expérience de l'équipe QITE, afin de caractériser précisément les éléments créés par cette source compacte de paires de photons. En effet, montrer que nous avons une source de *qudits* intriqués à température ambiante permet d'avoir des ressources en information quantique qui ne nécessitent pas de système cryogénique. Et comme ces photons sont émis à des longueurs d'onde télécom, ils sont directement compatibles avec les réseaux fibrés pour des communications sur de grandes distances.

La dernière partie de cette thèse est plus fondamentale. Nous avons apporté une nouvelle interprétation physique des franges obtenues lors d'une expérience de type OM [Ou and Mandel, 1988]. Nous avons montré qu'elles constituent en fait une coupe de la partie d'interférence d'un état chat de Schrödinger, obtenu par post-sélection grâce à des filtres en fréquence.

Ainsi, les perspectives sont nombreuses. Dans un premier temps, il serait intéressant d'obtenir une tomographie complète de l'état chat de la dernière partie. Il semble qu'une méthode intéressante pour y parvenir soit en cours de préparation. D'autre part, il serait utile de poursuivre la caractérisation des *qudits* intriqués formés dans le laboratoire. En plus d'avoir montré qu'il s'agissait bien de *qudits* intriqués, il serait avantageux de déterminer la provenance des moindres détails des spectres et des interférences de HOM. Enfin, nous nous rapprochons un peu plus chaque jour de la démonstration de la supé-

riorité quantique, notamment avec Google et leur puce contenant 72 qubits. Toutefois, la forme finale de l'ordinateur quantique sera probablement multi-plateformes, et les photons y auront leur place.

A Polynômes de Laguerre et d'Hermite

A.1 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ se définissent comme les solutions de l'équation différentielle de Laguerre [Szegö, 1939] :

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0 \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots \quad \text{et } \alpha > -1, \quad (\text{A.1})$$

et peuvent s'exprimer comme

$$e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}). \quad (\text{A.2})$$

Nous avons également la représentation plus explicite suivante :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}. \quad (\text{A.3})$$

Nous obtenons comme fonction génératrice

$$L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x)w + \dots + L_n^{(\alpha)}(x)w^n + \dots = (1-w)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xw}{1-w}\right). \quad (\text{A.4})$$

De plus, nous avons la formule de récurrence suivante :

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (\text{A.5})$$

avec

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1. \quad (\text{A.6})$$

À l'aide des Eqs.(A.3) et (A.4), nous obtenons les expressions suivantes :

$$\sum_{\nu=0}^n L_\nu^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x), \quad (\text{A.7})$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad (\text{A.8})$$

et

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = x^{-1} \left(nL_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \right). \quad (\text{A.9})$$

Les polynômes de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ peuvent être également définis, pour $\alpha > -1$, par les conditions d'orthogonalité et de normalisation suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n} \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.10})$$

avec la fonction spéciale Γ définie par

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{A.11})$$

pour $\Re(z) > 0$.

De plus, un théorème de [Le Roy, 1900] donne une représentation intégrale des polynômes de Laguerre en terme de fonctions de Bessel :

$$e^{-x} x^{\alpha/2} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\alpha/2} J_\alpha\{2(tx)^{1/2}\} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad \alpha > -1. \quad (\text{A.12})$$

Cette représentation reste valide pour $\alpha \leq -1$, si $n + \alpha > -1$.

A.2 Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite sont définis comme les solutions à l'équation différentielle d'Hermite [Szegö, 1939] :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n(x) \quad \text{avec} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.13})$$

Ces polynômes d'Hermite peuvent également être définis par les conditions

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n! \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.14})$$

Le coefficient de x^n du n -ième polynôme est positif.

Nous pouvons en déduire la propriété des polynômes d'Hermite suivante :

$$z'' + (2n + 1 - x^2)z = 0, \quad z = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad (\text{A.15})$$

ainsi que les expressions explicites

$$H_n(x) = n! \sum_{\nu=0}^{n/2} \frac{(-1)^\nu (2x)^{n-2\nu}}{\nu! (n-2\nu)!}, \quad (\text{A.16})$$

et

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (\text{A.17})$$

De plus, nous avons, par exemple, les propriétés suivantes :

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}, \quad H'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}, \quad (\text{A.18})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} H_n(x) = 2^n. \quad (\text{A.19})$$

La fonction génératrice s'écrit comme :

$$G(x, w) = \exp(2xw - w^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n. \quad (\text{A.20})$$

Les polynômes d'Hermitte vérifient aussi les formules de récurrence suivantes :

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (\text{A.21})$$

avec

$$H_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad H_1(x) = 2x, \quad (\text{A.22})$$

ainsi que

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x). \quad (\text{A.23})$$

A.3 Relation entre les polynômes d'Hermitte et ceux de Laguerre

Les polynômes d'Hermitte peuvent être entièrement réduits à des polynômes de Laguerre de paramètres $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ [Szegő, 1939]. En effet, nous avons

$$H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{(-1/2)}(x^2), \quad (\text{A.24})$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_m^{(1/2)}(x^2). \quad (\text{A.25})$$

Inversement, les polynômes de Laguerre peuvent être réduits, dans une certaine mesure, à des polynômes d'Hermitte. Nous avons [Uspensky, 1926]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \pi^{-1/2}}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{\alpha-1/2} H_{2n}(x^{1/2} t) dt, \quad \alpha > -\frac{1}{2}. \quad (\text{A.26})$$

Eq.(A.26) peut se démontrer à l'aide des Eqs.(A.3) et (A.16) et du fait que l'intégrale d'Euler de première espèce

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0, \quad (\text{A.27})$$

peut s'exprimer en fonction de Γ comme :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (\text{A.28})$$

B Décomposition de Bloch-Messiah

Le théorème de la réduction de Bloch-Messiah tel qu'énoncé dans [Braunstein, 2005] nous dit que, pour une transformation de Bogoliubov unitaire linéaire générale de la forme

$$\hat{\mathbf{b}}_j = \sum_k (A_{jk} \hat{\mathbf{a}}_k + B_{jk} \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger) + \beta_j, \quad (\text{B.1})$$

où $\hat{\mathbf{a}}_j$ et $\hat{\mathbf{b}}_j$ sont des opérateurs d'annihilation et les matrices A et B peuvent être décomposées en une paire de matrices unitaires U et V et une paire de matrices diagonales non négatives A_D et B_D qui vérifient

$$A_D^2 = B_D^2 + I \quad (\text{B.2})$$

avec I la matrice identité, suivant

$$A = U A_D V^\dagger \quad B = U B_D V^T. \quad (\text{B.3})$$

Et, de ce théorème, il existe un corollaire affirmant que, pour des modes optiques, la réduction de Bloch-Messiah montre que la forme générale d'une évolution multi-modes avec des transformations de Bogoliubov linéaires peut être décomposée en un interféromètre linéaire multi-ports, suivie par l'application en parallèle d'un ensemble de compresseurs à un mode, eux-mêmes suivis par un autre interféromètre linéaire multi-ports.

Dans notre cas vu à la section III.3.2.2, la matrice Σ_2 est symétrique et réelle, donc elle est diagonalisable, et il existe une matrice orthogonale \mathbf{P} , ainsi qu'une matrice diagonale \mathbf{D} (qui sont des matrices 4×4 réelles) telles que :

$$\Sigma_2 = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{D} (\mathbf{P}^T). \quad (\text{B.4})$$

Dans le but de diagonaliser la matrice Σ_2 , nous commençons par introduire les définitions suivantes.

Soit $\hat{\mathbf{q}}_+$, $\hat{\mathbf{q}}_-$, $\hat{\mathbf{p}}_+$ et $\hat{\mathbf{p}}_-$ tels que

$$\hat{\mathbf{q}}_\pm = \frac{\hat{\mathbf{q}}_1 \pm \hat{\mathbf{q}}_2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\mathbf{p}}_\pm = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1 \pm \hat{\mathbf{p}}_2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.6})$$

et de même pour $\hat{\mathbf{q}}_{\pm}^{(0)}$ avec $\hat{\mathbf{q}}_1^{(0)}$ et $\hat{\mathbf{q}}_2^{(0)}$, et $\hat{\mathbf{p}}_{\pm}^{(0)}$ avec $\hat{\mathbf{p}}_1^{(0)}$ et $\hat{\mathbf{p}}_2^{(0)}$. Nous en déduisons immédiatement que

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_+ \\ \hat{\mathbf{q}}_- \\ \hat{\mathbf{p}}_+ \\ \hat{\mathbf{p}}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_i \\ \hat{\mathbf{q}}_j \\ \hat{\mathbf{p}}_i \\ \hat{\mathbf{p}}_j \end{pmatrix} \equiv \Theta \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_i \\ \hat{\mathbf{q}}_j \\ \hat{\mathbf{p}}_i \\ \hat{\mathbf{p}}_j \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Nous trouvons que

$$\Theta = \Theta^T = \Theta^{-1}. \quad (\text{B.8})$$

Donc, avec

$$\hat{\zeta}_{\pm} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_+ \\ \hat{\mathbf{a}}_- \\ \hat{\mathbf{a}}_+^{\dagger} \\ \hat{\mathbf{a}}_-^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \hat{\eta}_{\pm} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_+ \\ \hat{\mathbf{q}}_- \\ \hat{\mathbf{p}}_+ \\ \hat{\mathbf{p}}_- \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

nous pouvons résumer les définitions et équations d'évolution introduites par

$$\hat{\zeta} = \mathbf{S}_2 \hat{\zeta}^{(0)}, \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{\zeta}_{\pm} = \Theta \hat{\zeta}, \quad (\text{B.11})$$

$$\hat{\zeta}_{\pm}^{(0)} = \Theta \hat{\zeta}_{\pm}^{(0)}, \quad (\text{B.12})$$

d'où

$$\boxed{\hat{\zeta}_{\pm} = \Theta \mathbf{S}_2 \Theta^T \hat{\zeta}_{\pm}^{(0)}}, \quad (\text{B.13})$$

qui peut être réexprimé comme :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\pm} \\ \hat{\mathbf{a}}_{\pm}^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \pm\nu \\ \pm\nu^* & \mu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\pm}^{(0)} \\ \hat{\mathbf{a}}_{\pm}^{(0)\dagger} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

et

$$\hat{\eta} = \Sigma_2 \hat{\eta}^{(0)}, \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{\eta}_{\pm} = \Theta \hat{\eta}, \quad (\text{B.16})$$

$$\hat{\eta}_{\pm}^{(0)} = \Theta \hat{\eta}_{\pm}^{(0)}, \quad (\text{B.17})$$

menant à

$$\boxed{\hat{\eta}_{\pm} = \Theta \Sigma_2 \Theta^T \hat{\eta}_{\pm}^{(0)}}, \quad (\text{B.18})$$

qui peut, à son tour, être réexprimé comme :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\pm} \\ \hat{\mathbf{p}}_{\pm} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\pm} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\pm}^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_{\pm}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mu \pm \nu) & -\text{Im}(\mu \mp \nu) \\ \text{Im}(\mu \pm \nu) & \text{Re}(\mu \mp \nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\pm}^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_{\pm}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Dans ce qui suit, nous appliquons la décomposition de Bloch-Messiah à la matrice d'Éq.(B.19). Nous ferons le calcul pour des μ et ν généraux. Puis, nous prendrons le cas

particulier de $\mu = \cosh(r)$ et $\nu = e^{i\varphi} \sinh(r)$.

Nous avons

$$\hat{\mathbf{a}}_+ = |\mu| e^{i\theta_\mu} \hat{\mathbf{a}}_+^{(0)} + |\nu| e^{i\theta_\nu} \hat{\mathbf{a}}_+^{(0)\dagger}, \quad (\text{B.20})$$

avec θ_μ et θ_ν les arguments de μ et ν , respectivement.

En multipliant les deux parties d'Éq.(B.20) par $\exp[-i(\theta_\mu + \theta_\nu)/2]$, nous obtenons immédiatement

$$\hat{\mathbf{a}}_+'' = |\mu| \hat{\mathbf{a}}_+^{(0)'} + |\nu| \hat{\mathbf{a}}_+^{(0)\dagger}, \quad (\text{B.21})$$

avec

$$\hat{\mathbf{a}}_+^{(0)'} \equiv e^{i\left(\frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\right)} \hat{\mathbf{a}}_+^{(0)}, \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_+'' \equiv e^{-i\left(\frac{\theta_\mu + \theta_\nu}{2}\right)} \hat{\mathbf{a}}_+^{(0)}. \quad (\text{B.23})$$

Afin de définir les rotations de la même manière pour le mode $-$, nous avons

$$\hat{\mathbf{a}}_-'' = |\mu| \hat{\mathbf{a}}_-^{(0)'} - |\nu| \hat{\mathbf{a}}_-^{(0)\dagger}, \quad (\text{B.24})$$

où nous avons défini

$$\hat{\mathbf{a}}_-^{(0)'} \equiv e^{i\left(\frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\right)} \hat{\mathbf{a}}_-^{(0)}, \quad (\text{B.25})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_-'' \equiv e^{-i\left(\frac{\theta_\mu + \theta_\nu}{2}\right)} \hat{\mathbf{a}}_-^{(0)}. \quad (\text{B.26})$$

Donc, nous avons

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_\pm'' \\ \hat{\mathbf{a}}_\pm''^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mu| & \pm |\nu| \\ \pm |\nu| & |\mu| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_\pm^{(0)'} \\ \hat{\mathbf{a}}_\pm^{(0)\dagger} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Ensuite, en utilisant Éq.(III.15) et Éq.(B.7), nous avons, avec les quadratures,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm'' \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mu| \pm |\nu| & 0 \\ 0 & |\mu| \mp |\nu| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm^{(0)'} \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm^{(0)'} \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_\pm \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm^{(0)'} \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm^{(0)'} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Le champ d'entrée (exprimé dans la représentation des quadratures ou des modes) subit les trois transformations successives suivantes pour devenir le champ de sortie :

- Une première rotation exprimée par Éq.(B.22),

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm^{(0)'} \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm^{(0)'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm^{(0)} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{W}^T \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

- Une amplification avec des coefficients réels et positifs, représentée en Éq.(B.28).
- Une seconde rotation exprimée par Éq.(B.23),

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm'' \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_\mu + \theta_\nu}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_\mu + \theta_\nu}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_\mu + \theta_\nu}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_\mu + \theta_\nu}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm'' \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm'' \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_\pm'' \\ \hat{\mathbf{p}}_\pm'' \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

Pour résumer, la matrice symplectique \mathbf{M}_{\pm} d'Éq.(B.19) peut être décomposée comme

$$\mathbf{M}_{\pm} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}_{\pm}\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mu| \pm |\nu| & 0 \\ 0 & |\mu| \mp |\nu| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

où θ et ϕ résultent d'Éqs.(B.22) et (B.23) dans

$$\theta = \frac{\theta_{\mu} + \theta_{\nu}}{2}, \quad (\text{B.32a})$$

$$\phi = -\frac{\theta_{\mu} - \theta_{\nu}}{2}. \quad (\text{B.32b})$$

Notons que dans ce cas spécifique, $\mathbf{U} = \mathbf{W}^T$, et la réduction de Bloch-Messiah coïncide avec une diagonalisation. Finalement, comme $\mu = \cosh(r)$ et $\nu = e^{i\varphi} \sinh(r)$, nous avons

$$|\mu| + |\nu| = \cosh(r) + \sinh(r) = e^r, \quad (\text{B.33})$$

$$|\mu| - |\nu| = \cosh(r) - \sinh(r) = e^{-r}, \quad (\text{B.34})$$

et $\theta_{\mu} = 0$ et $\theta_{\nu} = \varphi$, donc $\theta = \phi = \frac{\varphi}{2}$. Ainsi, nous avons

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_+ \\ \hat{\mathbf{q}}_- \\ \hat{\mathbf{p}}_+ \\ \hat{\mathbf{p}}_- \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{dec}} \begin{pmatrix} e^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_+^{(0)} \\ \hat{\mathbf{q}}_-^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_+^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_-^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

Maintenant, nous pouvons revenir à la représentation avec $\hat{\mathbf{q}}_i$, $\hat{\mathbf{q}}_j$, $\hat{\mathbf{p}}_i$ et $\hat{\mathbf{p}}_j$, à partir des Éqs.(B.7) et (B.8) :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 \\ \hat{\mathbf{q}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Theta}^T \cdot \mathbf{M}_{dec} \cdot \mathbf{\Theta} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^{(0)} \\ \hat{\mathbf{q}}_2^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_1^{(0)} \\ \hat{\mathbf{p}}_2^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

B.1 Vérification du caractère symplectique de S_2

Dans un premier temps, rappelons la définition d'une matrice symplectique. Une matrice $2n \times 2n$ S (avec n un entier naturel non nul) est symplectique, si et seulement

si elle vérifie l'expression [Rim, 2015]

$$S^T K S = K \iff S K S^T = K, \quad (\text{B.37})$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.38})$$

Une telle matrice S peut toujours s'écrire sous la forme d'une matrice par blocs :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{B.39})$$

où les entrées A , B , C et D sont des matrices $n \times n$. Les conditions (B.37) sont équivalentes aux deux ensembles de conditions suivantes, elles-mêmes équivalents :

$$A^T C, B^T D \text{ symétriques, et } A^T D - C^T B = I, \quad (\text{B.40})$$

$$A B^T, C D^T \text{ symétriques, et } A D^T - B C^T = I. \quad (\text{B.41})$$

Dans notre cas, \mathbf{S}_2 d'Éq.(III.13) est dans une forme complexe [Adesso et al., 2014] comme elle agit sur le vecteur de la base des modes $\hat{\zeta}$. Dans ce cas, la relation symplectique de définition en forme complexe est

$$\mathbf{S}_2 \mathbf{K} \mathbf{S}_2^T = \mathbf{K}, \quad (\text{B.42})$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.43})$$

\mathbf{S}_2 est de la forme

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^* & \boldsymbol{\alpha}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{B.44})$$

avec

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \cosh(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \sinh(r) \\ e^{i\varphi} \sinh(r) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.45})$$

et les conditions pour que S_2 soit symplectique, par exemple Éq.(B.41), se retrouvent dans les expressions

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^\dagger - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^\dagger = \mathbf{I}_2, \quad (\text{B.46})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T = (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T)^T. \quad (\text{B.47})$$

Cependant, injecter Éq.(B.45) dans la partie gauche d'Éq.(B.46) donne :

$$\begin{pmatrix} \cosh(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r)^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.48})$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \sinh(r) \\ e^{i\varphi} \sinh(r) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \sinh(r) \\ e^{-i\varphi} \sinh(r) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh^2(r) & 0 \\ 0 & \sinh^2(r) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

Comme " $\cosh^2(r) - \sinh^2(r) = 1$ ", Éq.(B.46) est bien vérifiée.

Ensuite, pour α et β d'Éq.(B.45), nous avons clairement $\alpha = \alpha^T$ et $\beta = \beta^T$, car α est diagonale et β est symétrique. Nous avons donc :

$$\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} \cosh(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \sinh(r) \\ e^{i\varphi} \sinh(r) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.50})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \sinh(r) \cosh(r) \\ e^{i\varphi} \sinh(r) \cosh(r) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.51})$$

et

$$(\alpha\beta^T)^T = \beta\alpha^T \quad (\text{B.52})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \sinh(r) \cosh(r) \\ e^{i\varphi} \sinh(r) \cosh(r) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.53})$$

Ainsi, Éq.(B.47) est aussi vérifiée. Donc, \mathbf{S}_2 est bien symplectique.

B.2 Autre approche pour la diagonalisation de Σ_2

Le polynôme caractéristique de Σ_2 est

$$\chi_{\Sigma_2}(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda \cosh(r) + 1)^2. \quad (\text{B.54})$$

Nous déduisons d'Éq.(B.54) le spectre de Σ_2 : la matrice 4×4 a deux valeurs propres dégénérées de multiplicité $g = 2$, qui sont

$$\lambda_1 = \cosh(r) - \sinh(r) = e^{-r}, \quad (\text{B.55})$$

$$\lambda_2 = \cosh(r) + \sinh(r) = e^r. \quad (\text{B.56})$$

Pour λ_1 , le sous-espace propre associé peut être caractérisé par

$$E_1 = \left(\left(\begin{pmatrix} -\csc(\varphi) \\ \cot(\varphi) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cot(\varphi) \\ -\csc(\varphi) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right), \quad (\text{B.57})$$

et pour λ_2 , par

$$E_2 = \left(\left(\begin{pmatrix} \csc(\varphi) \\ \cot(\varphi) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cot(\varphi) \\ \csc(\varphi) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right). \quad (\text{B.58})$$

Donc, les matrices \mathbf{P}' et \mathbf{D} d'Éq.(B.4) peuvent être écrites comme

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^r \end{pmatrix}, \quad (\text{B.59})$$

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} -\csc(\varphi) & \cot(\varphi) & \csc(\varphi) & \cot(\varphi) \\ \cot(\varphi) & -\csc(\varphi) & \cot(\varphi) & \csc(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.60})$$

Nous avons écrit \mathbf{P}' et non \mathbf{P} , car \mathbf{P}' est constituée des vecteurs propres de Σ_2 , mais n'est pas orthogonale.

Au moins, nous avons

$$\mathbf{P}'^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 1 \\ 0 & -\sin(\varphi) & 1 & \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & -\cos(\varphi) & 1 \\ 0 & \sin(\varphi) & 1 & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.61})$$

et

$$\Sigma_2 = \mathbf{P}' \mathbf{D} \mathbf{P}'^{-1}. \quad (\text{B.62})$$

Nous pouvons appliquer Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base des espaces propres associés à chaque valeur propre.

C Données expérimentales d'une expérience au LKB

Nous rappelons que le système expérimental de N. Treps est basé sur la conversion paramétrique descendante spontanée. Pour ce type d'expériences, ils utilisent un oscillateur paramétrique optique (OPO), composé d'un cristal non-linéaire, afin de générer des états comprimés. Une particularité de cette expérience est que l'OPO est pompé de manière synchrone par un peigne de fréquence optique. Ils ont donc un SPOPO pour "Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator" [Roslund et al., 2014]. Ce dernier permet d'obtenir un grand nombre d'**états de la lumière comprimés multi-modes indépendants** (seize en Fig.(C.2), non publiée). Nous rappelons également que, par exemple, la base "pixel de fréquence" permet de considérer les modes comme intriqués lorsque nous les détectons dans cette base. Ainsi, une transformation O_{pix} transforme les modes comprimés indépendants (appelés super-modes) en modes pixels :

$$\vec{a}_{\text{pix}} = O_{\text{pix}} \cdot \vec{a}_{\text{squ}}, \quad (\text{C.1})$$

où $\vec{a}_{\text{squ}/\text{pix}}$ correspond aux opérateurs annihilation associés aux modes comprimés/pixel, respectivement, *i.e.* nous avons effectivement un réseau d'optique linéaire (fixé). Quan-

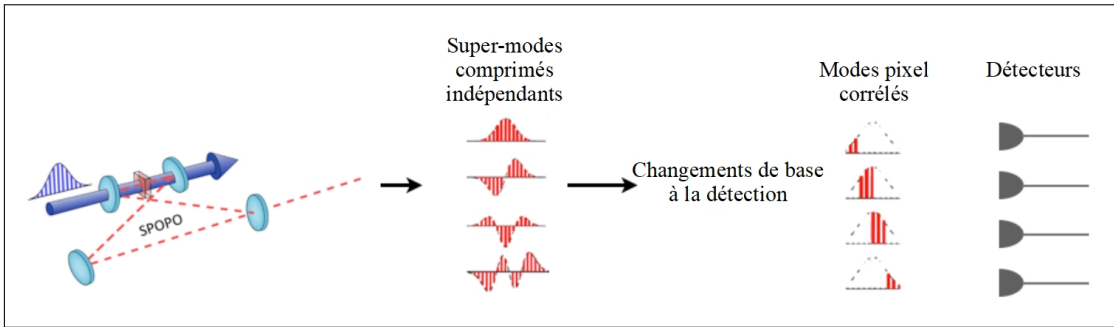


FIGURE C.1 – Des super-modes aux modes pixel.

titativement, dans l'expérience au LKB, en considérant les quadratures d'amplitude (\hat{q}) et de phase (\hat{p}) de N modes optiques, ils peuvent accéder expérimentalement à la matrice de covariance diagonale par blocs de dimension $2N$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\text{qq}} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\text{pp}} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

avec

$$\Sigma_{\text{qq}} = \begin{pmatrix} \Delta^2 q_1 & \langle q_1 q_2 \rangle & \cdots & \langle q_1 q_N \rangle \\ \langle q_2 q_1 \rangle & \Delta^2 q_2 & \cdots & \langle q_2 q_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle q_N q_1 \rangle & \langle q_N q_2 \rangle & \cdots & \Delta^2 q_N \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

et de manière similaire pour Σ_{pp} . Ici, $\Sigma_{\text{qp}} = \Sigma_{\text{pq}} = \mathbf{0}$, car il n'y a pas de corrélations "qp".

Nous notons

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

avec $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^t$ et $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^t$, associés aux quadratures d'amplitude et de phase des modes, respectivement.

Dans ce qui suit, nous fournissons les données correspondant à un parcours expérimental où $N = 16$ modes sont détectés dans la base pixel. En pratique, les super-modes expérimentaux sont récupérés par décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance. De plus, dans les super-modes obtenus, la compression alterne entre les quadratures q et p . Nous avons donc la matrice suivante, contenant la valeur de la compression pour chaque mode sur sa diagonale [Medeiros de Araújo et al., 2014],

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

et la matrice de vecteurs propres O_{pix} est

$$O_{\text{pix}} = \begin{pmatrix} -0.043 & 0.1 & -0.024 & -0.27 & -0.25 & -0.43 & 0.54 & -0.22 & 0.14 & 0.3 & -0.0058 & -0.37 & -0.11 & -0.13 & 0.16 & 0.14 \\ -0.059 & 0.19 & -0.14 & -0.33 & -0.33 & -0.04 & 0.19 & -0.16 & -0.14 & -0.36 & -0.17 & 0.13 & 0.23 & 0.24 & -0.29 & -0.52 \\ -0.11 & 0.25 & -0.28 & -0.3 & -0.3 & -0.023 & -0.23 & 0.47 & 0.054 & 0.042 & 0.14 & 0.15 & 0.039 & 0.25 & 0.52 & 0.12 \\ -0.18 & 0.4 & -0.35 & -0.11 & -0.08 & 0.11 & -0.22 & -0.19 & 0.039 & -0.038 & 0.19 & 0.0018 & -0.42 & -0.12 & -0.48 & 0.33 \\ -0.25 & 0.37 & -0.31 & 0.15 & 0.24 & 0.17 & 0.093 & 0.099 & 0.059 & 0.16 & -0.49 & 0.046 & 0.14 & -0.48 & 0.16 & -0.21 \\ -0.31 & 0.3 & -0.062 & 0.26 & 0.3 & 0.03 & 0.17 & -0.028 & -0.071 & -0.2 & 0.46 & -0.41 & 0.39 & 0.23 & 0.054 & 0.02 \\ -0.35 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.069 & -0.51 & 0.065 & -0.032 & -0.0079 & 0.022 & -0.091 & 0.45 & -0.29 & 0.28 & 0.03 & -0.04 \\ -0.37 & -0.063 & 0.36 & -0.061 & -0.24 & -0.16 & -0.25 & -0.023 & 0.22 & -0.49 & 0.09 & -0.07 & 0.055 & -0.51 & 0.13 & -0.013 \\ -0.37 & 0.011 & 0.35 & 0.02 & -0.24 & 0.3 & -0.15 & 0.11 & 0.34 & 0.44 & -0.17 & -0.24 & 0.068 & 0.29 & -0.25 & -0.11 \\ -0.34 & -0.028 & 0.23 & -0.2 & -0.034 & 0.32 & 0.011 & -0.33 & -0.67 & 0.14 & -0.018 & 0.08 & -0.099 & -0.013 & 0.28 & 0.11 \\ -0.34 & -0.27 & 0.011 & -0.34 & 0.26 & -0.12 & 0.28 & 0.51 & -0.14 & -0.017 & -0.031 & 0.14 & 0.12 & -0.078 & -0.37 & 0.26 \\ -0.27 & -0.34 & -0.26 & -0.23 & 0.28 & 0.16 & 0.073 & -0.41 & 0.5 & -0.012 & 0.12 & 0.29 & 0.00097 & 0.14 & 0.19 & -0.05 \\ -0.24 & -0.38 & -0.34 & 0.1 & 0.023 & -0.078 & -0.1 & 0.16 & -0.16 & -0.14 & -0.11 & -0.45 & -0.49 & 0.11 & 0.078 & -0.33 \\ -0.14 & -0.26 & -0.32 & 0.13 & -0.18 & -0.37 & -0.37 & -0.18 & -0.2 & 0.38 & 0.14 & 0.061 & 0.44 & -0.14 & -0.14 & -0.048 \\ -0.085 & -0.19 & -0.21 & 0.34 & -0.35 & 0.13 & 0.16 & -0.094 & 0.024 & -0.29 & -0.42 & -0.027 & 0.18 & 0.17 & 0.031 & 0.55 \\ -0.062 & -0.14 & -0.094 & 0.34 & -0.4 & 0.3 & 0.42 & 0.19 & 0.00012 & 0.1 & 0.45 & 0.26 & -0.12 & -0.24 & -0.033 & -0.2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Pour résumer, un état pur approximant l'état expérimental mesuré (obtenu en égalisant les niveaux d'anti-compression exactement avec ceux de compression dans la totalité des seize modes optiques) donne :

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_{\text{pix}} \\ \vec{p}_{\text{pix}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{\text{pix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{O}_{\text{pix}} \end{pmatrix}}_{\text{changement de base } \mathbf{O}_{\text{pix}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}_{\text{compression}} \begin{pmatrix} \vec{q}_{\text{vac}} \\ \vec{p}_{\text{vac}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

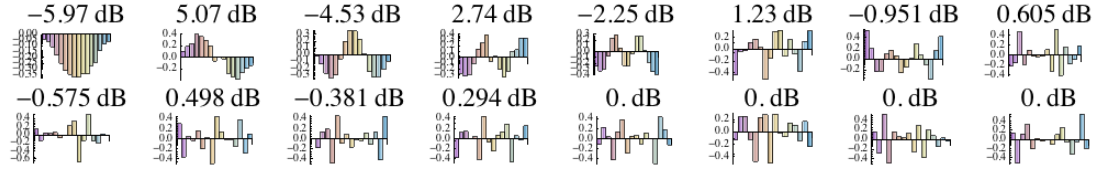


FIGURE C.2 – Modes comprimés expérimentaux retrouvés (supermodes) dans le domaine des fréquences et les degrés de compression correspondants $\Delta^2 q_i / \Delta^2 q_{\text{vac}}$ en dB.

D Calcul du taux de coïncidences

Nous nous intéressons au second terme d'Éq.(IV.52). Il vaut

$$\begin{aligned}
I_{int} &= \frac{1}{2} A_E^2 A_M^2 \iint d\nu_s d\nu_i |\alpha(\nu_s + \nu_i)|^2 \Phi_{PM}(\nu_s, \nu_i) \Phi_{PM}^*(\nu_i, \nu_s) \\
&\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-b_E^2[\nu_s - \nu_{s,n} - E]^2) \exp(-b_M^2[\nu_i - \nu_{i,-n} - M]^2) \\
&\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-b_E^2[\nu_i - \nu_{s,m} - E]^2) \exp(-b_M^2[\nu_s - \nu_{i,-m} - M]^2) \exp(-i\{\nu_i - \nu_s\}\tau) \\
&= \frac{1}{2} L^2 \sum_{n,m} A_E^2 A_M^2 \exp\left(-2b_M^2\left(\frac{k_{TM,0}}{k'_{TM}} - M\right)^2 - 2b_E^2\left(\frac{k_{TE,0}}{k'_{TE}} - E\right)^2\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{2\pi(m+n)}{L}\left(E\frac{b_E^2}{k'_{TE}} - M\frac{b_M^2}{k'_{TM}}\right) - \frac{(m^2+n^2)\pi^2}{L^2}\left(\frac{b_E^2}{k_{TE}^{\prime 2}} + \frac{b_M^2}{k_{TM}^{\prime 2}}\right)\right. \\
&\quad \left.- b_M^2\frac{2k_{TM,0}(m+n)\pi}{k_{TM}^{\prime 2}L} - b_E^2\frac{2k_{TE,0}(n-m)\pi}{k_{TE}^{\prime 2}L}\right) \\
&\times \int d\nu_+ \exp\left(-\nu_+^2\left(\frac{1}{\sigma^2} + 2L^2\Delta k_+^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2\right)\right. \\
&\quad \left.- 2\nu_+\left[\frac{b_E^2 k_{TE,0}}{k'_{TE}} + \frac{b_M^2 k_{TM,0}}{k'_{TM}} + \frac{\pi(n+m)}{2L}\left(\frac{b_M^2}{k'_{TM}} - \frac{b_E^2}{k'_{TE}}\right) - Eb_E^2 - Mb_M^2\right]\right) \\
&\times \int d\nu_- \exp\left(-\nu_-^2(2L^2\Delta k_-^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2)\right. \\
&\quad \left.- 2\nu_-\left[\frac{\pi(m-n)}{2L}\left(\frac{b_M^2}{k'_{TM}} + \frac{b_E^2}{k'_{TE}}\right) - i\frac{\tau}{2}\right]\right)
\end{aligned} \tag{D.1}$$

avec $\Delta k_+^{\prime} = (\Delta k_{TE}^{\prime} + \Delta k_{TM}^{\prime})$ et $\Delta k_-^{\prime} = (\Delta k_{TE}^{\prime} - \Delta k_{TM}^{\prime})$.
Or, nous avons, pour $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \exp(-2bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right). \tag{D.2}$$

Le terme d'interférence vaut donc

$$\begin{aligned}
I_{int} = & \frac{1}{2} L^2 \sum_{n,m} A_E^2 A_M^2 \exp \left(-2b_M^2 \left(\frac{k_{TM,0}}{k'_{TM}} - M \right)^2 - 2b_E^2 \left(\frac{k_{TE,0}}{k'_{TE}} - E \right)^2 \right) \\
& \times \exp \left(-\frac{2\pi(m+n)}{L} \left(E \frac{b_E^2}{k'_{TE}} - M \frac{b_M^2}{k'_{TM}} \right) - \frac{(m^2+n^2)\pi^2}{L^2} \left(\frac{b_E^2}{k'_{TE}} + \frac{b_M^2}{k'_{TM}} \right) \right. \\
& \left. - b_M^2 \frac{2k_{TM,0}(m+n)\pi}{k'^2_{TM}L} - b_E^2 \frac{2k_{TE,0}(n-m)\pi}{k'^2_{TE}L} \right) \\
& \times \pi \left(\frac{1}{\sigma^2} + 2L^2 \Delta k_+^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(2L^2 \Delta k_-^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
& \times \exp \left[\left(\frac{b_E^2 k_{TE,0}}{k'_{TE}} + \frac{b_M^2 k_{TM,0}}{k'_{TM}} + \frac{\pi(n+m)}{2L} \left(\frac{b_M^2}{k'_{TM}} - \frac{b_E^2}{k'_{TE}} \right) - E b_E^2 - M b_M^2 \right)^2 \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{\sigma^2} + 2L^2 \Delta k_+^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2 \right)^{-1} \right] \times \exp \left[\left(2L^2 \Delta k_-^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2 \right)^{-1} \right. \\
& \left. \times \left[\frac{\pi(m-n)}{2L} \left(\frac{b_M^2}{k'_{TM}} + \frac{b_E^2}{k'_{TE}} \right) - i \frac{\tau}{2} \right]^2 \right].
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Il en ressort un terme caractéristique des creux de HOM, en $\exp \left(-\frac{\tau^2}{4} \left(2L^2 \Delta k_-^{\prime 2} + b_E^2 + b_M^2 \right)^{-1} \right)$.

Par ailleurs, pour comparer le résultat obtenu, nous avons besoin de valeurs numériques pour les différents nombres d'onde et leurs dérivées. Pour cela, nous avons à disposition des valeurs numériques des deux premiers termes du développement en série de Taylor des indices de réfraction. Ainsi, nous avons

$$n_{j,0}|_{2\lambda_p} + (\lambda - 2\lambda_p) \left. \frac{\partial n_j}{\partial \lambda} \right|_{2\lambda_p}, \tag{D.4}$$

avec λ_p la longueur d'onde de la pompe, et $j = \text{TE, TM}$. Les valeurs que nous avons sont :

$$\begin{aligned}
n_{\text{TE},0}|_{1550 \text{ nm}} &= 3.3875, \\
n_{\text{TM},0}|_{1550 \text{ nm}} &= 3.3850, \\
n_{\text{TE},0}|_{775 \text{ nm}} &= 3.3863, \\
\left. \frac{\partial n_{\text{TE/TM}}}{\partial \lambda} \right|_{1550 \text{ nm}} &= -1.25 \times 10^5 \text{ m}^{-1}, \\
\left. \frac{\partial n_p}{\partial \lambda} \right|_{775 \text{ nm}} &= -7.27 \times 10^5 \text{ m}^{-1}.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Nous en déduisons les dérivées partielles par rapport à ω grâce à $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ et nous avons donc

$$n_{j,0}|_{\omega_p/2} + (\omega - \omega_p/2) \left. \frac{\partial n_j}{\partial \omega} \right|_{\omega_p/2}, \tag{D.6}$$

avec la même forme d'équation pour la pompe, sauf que la fréquence utilisée est celle

de la pompe. Les nouvelles données sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\text{TE/TM}}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_p/2} &= 1.59431 \times 10^{-16} \text{ s}, \\ \frac{\partial n_p}{\partial \omega} \Big|_{\omega_p} &= 2.33308 \times 10^{-16} \text{ s}.\end{aligned}\tag{D.7}$$

D'autre part, nous avons la relation $k = \frac{n(\omega)\omega}{c} = \frac{2\pi n(\lambda)}{\lambda}$. Par conséquent, nous avons

$$k_{\text{TE/TM},0} \Big|_{\omega_p/2} = n_{\text{TE/TM},0} \Big|_{\omega_p} \frac{2\pi}{2\lambda_p},\tag{D.8}$$

et

$$\frac{\partial k_{\text{TE/TM}}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_p/2} = \frac{1}{c} \left[n_{\text{TE/TM}}(\omega) + \frac{\partial n_{\text{TE/TM}}(\omega)}{\partial \omega} \omega \right] \Big|_{\omega_p/2}.\tag{D.9}$$

Ainsi, nous obtenons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned}k_{\text{TE},0} \Big|_{\omega_p/2} &= 1.37318 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \\ k_{\text{TM},0} \Big|_{\omega_p/2} &= 1.37217 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \\ k_{p,0} \Big|_{\omega_p} &= 2.74539 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \\ \frac{\partial k_{\text{TE}}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_p/2} &= 1.19458 \times 10^{-8} \text{ s.m}^{-1} \\ \frac{\partial k_{\text{TM}}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_p/2} &= 1.19374 \times 10^{-8} \text{ s.m}^{-1} \\ \frac{\partial k_p}{\partial \omega} \Big|_{\omega_p} &= 1.3187 \times 10^{-8} \text{ s.m}^{-1}\end{aligned}\tag{D.10}$$

E Détails de calcul des fonctions de Wigner du chapitre V

Lorsque la fonction d'onde peut être factorisée, la probabilité de coïncidences est :

$$I(\mu, \tau) = \frac{1}{2} (1 - \text{Re}[\iint d\omega_s d\omega_i |f_+(\omega_s + \omega_i + \mu)|^2 \times f_-(\omega_s - \omega_i + \mu) f_-(\omega_i - \omega_s + \mu) \exp(-i(\omega_s - \omega_i)\tau) |f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(\omega_i)|^2]). \quad (\text{E.1})$$

Soit

$$|\Psi\rangle = \iint d\omega_s d\omega_i \psi(\omega_s, \omega_i) [f_{\omega_1}(\omega_s) f_{\omega_2}(\omega_i) + f_{\omega_1}(\omega_i) f_{\omega_2}(\omega_s)] |\omega_s; \omega_i\rangle_{A,B}, \quad (\text{E.2})$$

alors la distribution de Wigner vaut

$$\begin{aligned} W(\omega_s, \omega_i, t_s, t_i) &= \iint d\omega' d\omega'' \exp(2i\omega' t_s) \exp(2i\omega'' t_i) \langle \omega_i - \omega''; \omega_s - \omega' | \Psi \rangle \langle \Psi | \omega_s + \omega'; \omega_i + \omega'' \rangle \\ &= \iint d\omega' d\omega'' \exp(2i\omega' t_s) \exp(2i\omega'' t_i) f_+(\omega_s + \omega' + \omega'') f_+(\omega_s - \omega' - \omega'') \\ &\quad \times f_-(\omega_s - \omega_i - \omega' + \omega'') f_-(\omega_s - \omega_i + \omega' - \omega'') \\ &\quad \times [f_{\omega_1}(\omega_s - \omega') f_{\omega_2}(\omega_i - \omega'') + f_{\omega_1}(\omega_i - \omega'') f_{\omega_2}(\omega_s - \omega')] \\ &\quad \times [f_{\omega_1}(\omega_s + \omega') f_{\omega_2}(\omega_i + \omega'') + f_{\omega_1}(\omega_i + \omega'') f_{\omega_2}(\omega_s + \omega')]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

En prenant f_+ telle une distribution de Dirac, et après avoir intégré sur ω_+ , nous obtenons la marginale suivante :

$$\begin{aligned} W_-(\omega_-, \tau) &= \int d\omega_+ W(\omega_s, \omega_i, t_s, t_i) \\ &= \int d\omega' \exp(2i\omega' \tau) f_-(\omega_- - 2\omega') f_-(\omega_- + 2\omega') \\ &\quad \times [f_{\omega_1}(\frac{\omega_-}{2} - \omega') f_{\omega_1}(\frac{\omega_-}{2} + \omega') f_{\omega_2}(\frac{-\omega_-}{2} + \omega') f_{\omega_2}(\frac{-\omega_-}{2} - \omega') \\ &\quad + f_{\omega_1}(\frac{-\omega_-}{2} + \omega') f_{\omega_1}(\frac{-\omega_-}{2} - \omega') f_{\omega_2}(\frac{\omega_-}{2} - \omega') f_{\omega_2}(\frac{\omega_-}{2} + \omega') \\ &\quad + f_{\omega_1}(\frac{\omega_-}{2} - \omega') f_{\omega_1}(\frac{-\omega_-}{2} - \omega') f_{\omega_2}(\frac{-\omega_-}{2} + \omega') f_{\omega_2}(\frac{\omega_-}{2} + \omega') \\ &\quad + f_{\omega_1}(\frac{\omega_-}{2} + \omega') f_{\omega_1}(\frac{-\omega_-}{2} + \omega') f_{\omega_2}(\frac{\omega_-}{2} - \omega') f_{\omega_2}(\frac{-\omega_-}{2} - \omega')]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Les deux premiers termes de l'équation précédente correspondent aux "yeux" du chat (que nous noterons 1 et 2), et les deux derniers termes forment les moustaches du chat (noté "beating"), et nous pouvons écrire :

$$W_-(\omega_-, \tau) = W_{12}(\omega_-, \tau) + W_{21}(\omega_-, \tau) + W_{\text{beating}}(\omega_-, \tau), \quad (\text{E.5})$$

où

$$W_{12}(\omega_-, \tau) = \exp\left(-\frac{(\omega_- - (\omega_1 - \omega_2))^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{\alpha}\right). \quad (\text{E.6})$$

Nous rappelons que pour des états mixtes, la définition de l'opérateur densité est

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (\text{E.7})$$

où les $|\psi_j\rangle$ sont des états purs, les probabilités de chaque état p_j sont positives et $\sum_j p_j = 1$. La fonction de Wigner est calculée suivant une de ses formes bien connues :

$$W(\omega, t) = \frac{1}{\pi} \int \exp(-2it\mu) \left\langle \omega + \frac{\mu}{2} \left| \hat{\rho} \right| \omega - \frac{\mu}{2} \right\rangle d\mu, \quad (\text{E.8})$$

et nous avons

$$W(\omega, t) = \sum_j p_j W_j(\omega, t), \quad (\text{E.9})$$

où $W_j(\omega, t)$ est la fonction de Wigner obtenue pour $|\psi_j\rangle$ seul. Ainsi, il y a une linéarité des états mixtes dans l'espace des phases.

Bibliographie

- [Aaronson, 2011] Aaronson, S. *A linear-optical proof that the permanent is #P-hard*. Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences **467**, 3393 (2011).
- [Aaronson, 2013] Aaronson, S. *Quantum Computing Since Democritus* (Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2013).
- [Aaronson and Arkhipov, 2014] Aaronson, S. and Arkhipov, A. *The Computational Complexity of Linear Optics*. Research in Optical Sciences **417**, QTh1A.2 (2014).
- [Adesso et al., 2014] Adesso, G., Ragy, S., and Lee, A. R. *Continuous Variable Quantum Information : Gaussian States and Beyond*. Open Systems & Information Dynamics **21**, 1440001 (2014).
- [Akhmanov et al., 1967] Akhmanov, S. A., Fadeev, V. V., Khokhlov, R. V., and Churnae, O. N. *Quantum Noise in Parametric Light Amplifiers*. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **6**, 85 (1967).
- [Alicki and Lendi, 2007] Alicki, R. and Lendi, K. *Quantum dynamical semigroups and applications*. Lectures Notes in Physics (Springer, Berlin, 2007).
- [Allen et al., 2003] Allen, L., Barnett, S., and Padgett, M. *Optical Angular Momentum*. Optics and Optoelectronics (Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2003).
- [Amaral et al., 2016] Amaral, G. C., Calliari, F., Ferreira da Silva, T., Temporão, G.-P., and von der Weid, J.-P. *Sub-Poisson States Heralded at a Hong-Ou-Mandel Interference Peak*. ArXiv e-prints (2016).
- [Medeiros de Araújo et al., 2014] Medeiros de Araújo, R., Roslund, J., Cai, Y., Ferrini, G., Fabre, C., and Treps, N. *Full characterization of a highly multimode entangled state embedded in an optical frequency comb using pulse shaping*. Phys. Rev. A **89**, 053828 (2014).
- [Arons and Peppard, 1965] Arons, A. B. and Peppard, M. B. *Einstein's Proposal of the Photon concept—a Translation of the Annalen der Physik Paper of 1905*. American Journal of Physics **33**, 367 (1965).
- [Aspect and Grangier, 2004] Aspect, A. and Grangier, P. *Optique quantique 2 : Photons* (2004).
- [Aspect et al., 1981] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G. *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*. Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [Autebert, 2016] Autebert, C. *AlGaAs photonic devices : from quantum state generation to quantum communications*. Ph.D. thesis, Université Paris Diderot-Paris 7 (2016).
- [Autebert et al., 2016] Autebert, C., Bruno, N., Martin, A., Lemaitre, A., Carbonell, C. G., Favero, I., Leo, G., Zbinden, H., and Ducci, S. *Integrated AlGaAs source of highly indistinguishable and energy-time entangled photons*. Optica **3**, 143 (2016).

- [Autebert et al., 2017] Autebert, C., Minneci, A., Maltese, G., Belhassen, J., Lemaître, A., Amanti, M., Baboux, F., Coudreau, T., Milman, P., and Ducci, S. *On-chip generation of frequency-entangled qudits*. In *Quantum Information and Measurement (QIM) 2017* (Optical Society of America, 2017).
- [Basdevant and Dalibard, 2002] Basdevant, J.-L. and Dalibard, J. *Quantum mechanics* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002).
- [Bell, 1964] Bell, J. S. *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*. *Physics Physique Fizika* **1**, 195 (1964).
- [Bengtsson and Życzkowski, 2006] Bengtsson, I. and Życzkowski, K. *Geometry of Quantum States : An Introduction to Quantum Entanglement* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [Benioff, 1980] Benioff, P. *The computer as a physical system : A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines*. *Journal of Statistical Physics* **22**, 563 (1980).
- [Bertrand and Bertrand, 1987] Bertrand, J. and Bertrand, P. *A Tomographic Approach to Wigner's Function*. *Foundations of Physics* **17**, 397 (1987).
- [Bogoljubov, 1958] Bogoljubov, N. N. *On a new method in the theory of superconductivity*. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **7**, 794 (1958).
- [Boitier et al., 2014] Boitier, F., Orioux, A., Autebert, C., Lemaître, A., Galopin, E., Manquest, C., Sirtori, C., Favero, I., Leo, G., and Ducci, S. *Electrically Injected Photon-Pair Source at Room Temperature*. *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014).
- [Boucher, 2016] Boucher, G. *Biphoton Frequency-Correlations Engineering and Measurement with a Semiconductor Microcavity*. Ph.D. thesis, Université Paris Diderot-Paris 7 (2016).
- [Brańczyk, 2017] Brańczyk, A. M. *Hong-Ou-Mandel Interference*. ArXiv e-prints (2017).
- [Braunstein, 2005] Braunstein, S. L. *Squeezing as an irreducible resource*. *Phys. Rev. A* **71**, 055801 (2005).
- [Braunstein and Kimble, 1998] Braunstein, S. L. and Kimble, H. J. *Teleportation of Continuous Quantum Variables*. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [Burnham and Weinberg, 1970] Burnham, D. C. and Weinberg, D. L. *Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs*. *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).
- [Byer and Harris, 1968] Byer, R. L. and Harris, S. E. *Power and Bandwidth of Spontaneous Parametric Emission*. *Phys. Rev.* **168**, 1064 (1968).
- [Caillet et al., 2010] Caillet, X., Orioux, A., Lemaître, A., Filloux, P., Favero, I., Leo, G., and Ducci, S. *Two-photon interference with a semiconductor integrated source at room temperature*. *Opt. Express* **18**, 9967 (2010).
- [Caves and Schumaker, 1985] Caves, C. M. and Schumaker, B. L. *New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states*. *Phys. Rev. A* **31**, 3068 (1985).

- [Chanelière et al., 2005] Chanelière, T., Matsukevich, D. N., Jenkins, S. D., Lan, S.-Y., Kennedy, T. A. B., and Kuzmich, A. *Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories*. *Nature* **438**, 633 (2005).
- [Chunmei et al., 2014] Chunmei, W., Zhiyu, W., Zuwei, Z., and Yingyi, Z. *Development of Raman acousto-optic frequency shifter based on SAW*. *Journal of Semiconductors* **35**, 084009 (2014).
- [Clifford and Clifford, 2018] Clifford, P. and Clifford, R. *The Classical Complexity of Boson Sampling*. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA '18*, 146–155 (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2018).
- [Cook, 2000] Cook, S. *The P versus NP problem*. In *Clay Mathematical Institute; The Millennium Prize Problem* (2000).
- [Cook, 1971] Cook, S. A. *The Complexity of Theorem-proving Procedures*. In *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '71*, 151–158 (ACM, New York, NY, USA, 1971).
- [Deutsch, 1985] Deutsch, D. *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer*. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **400**, 97 (1985).
- [Dewes et al., 2012] Dewes, A., Lauro, R., Ong, F. R., Schmitt, V., Milman, P., Bertet, P., Vion, D., and Esteve, D. *Quantum speeding-up of computation demonstrated in a superconducting two-qubit processor*. *Phys. Rev. B* **85**, 140503 (2012).
- [Douce, 2016] Douce, T. *Realistic quantum information processing : from devices to computational models*. Theses, Université Sorbonne Paris Cité (2016).
- [Douce et al., 2013] Douce, T., Eckstein, A., Walborn, S. P., Khoury, A. Z., Ducci, S., Keller, A., Coudreau, T., and Milman, P. *Direct measurement of the biphoton Wigner function through two-photon interference*. *Scientific Reports* **3** (2013).
- [Eckstein et al., 2014] Eckstein, A., Boucher, G., Lemaître, A., Filloux, P., Favero, I., Leo, G., Sipe, J. E., Liscidini, M., and Ducci, S. *High-resolution spectral characterization of two photon states via classical measurements*. *Laser & Photonics Reviews* **8**, L76 (2014).
- [Einstein, 1905] Einstein, A. *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*. *Annalen der Physik* **322**, 132 (1905). For a translation in English, see [Arons and Peppard, 1965].
- [Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?* *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [Eisaman et al., 2011] Eisaman, M. D., Fan, J., Migdall, A., and Polyakov, S. V. *Invited Review Article : Single-photon sources and detectors*. *Review of Scientific Instruments* **82**, 071101 (2011).
- [Fearn and Loudon, 1987] Fearn, H. and Loudon, R. *Quantum theory of the lossless beam splitter*. *Optics Communications* **64**, 485 (1987).
- [Ferraro et al., 2014] Ferraro, D., Wahl, C., Rech, J., Jonckheere, T., and Martin, T. *Electronic Hong-Ou-Mandel interferometry in two-dimensional topological insulators*. *Phys. Rev. B* **89**, 075407 (2014).

- [Ferrini et al., 2014] Ferrini, G., Fsaifes, I., Labidi, T., Goldfarb, F., Treppe, N., and Bretenaker, F. *Symplectic approach to the amplification process in a nonlinear fiber : role of signal-idler correlations and application to loss management*. J. Opt. Soc. Am. B **31**, 1627 (2014).
- [Ferrini et al., 2013] Ferrini, G., Gazeau, J. P., Coudreau, T., Fabre, C., and Treppe, N. *Compact Gaussian quantum computation by multi-pixel homodyne detection*. New Journal of Physics **15**, 093015 (2013).
- [Feynman, 1982] Feynman, R. P. *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics **21**, 467 (1982).
- [Fox, 2006] Fox, M. *Quantum Optics : An Introduction* (Oxford University Press, 2006).
- [Freedman and Clauser, 1972] Freedman, S. J. and Clauser, J. F. *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*. Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [Fry and Thompson, 1976] Fry, E. S. and Thompson, R. C. *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*. Phys. Rev. Lett. **37**, 465 (1976).
- [Furusawa et al., 1998] Furusawa, A., Sørensen, J. L., Braunstein, S. L., Fuchs, C. A., Kimble, H. J., and Polzik, E. S. *Unconditional Quantum Teleportation*. Science **282**, 706 (1998).
- [Gill, 1977] Gill, J. *Computational Complexity of Probabilistic Turing Machines*. SIAM Journal on Computing **6**, 675 (1977).
- [Giordmaine and Miller, 1965] Giordmaine, J. A. and Miller, R. C. *Tunable Coherent Parametric Oscillation in LiNbO₃ at Optical Frequencies*. Phys. Rev. Lett. **14**, 973 (1965).
- [Gisin et al., 2002] Gisin, N., Ribordy, G., Tittel, W., and Zbinden, H. *Quantum cryptography*. Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [Gisin and Thew, 2007] Gisin, N. and Thew, R. *Quantum communication*. Nature Photonics **1**, 165 (2007).
- [Grice and Walmsley, 1997] Grice, W. P. and Walmsley, I. A. *Spectral information and distinguishability in type-II down-conversion with a broadband pump*. Phys. Rev. A **56**, 1627 (1997).
- [Grosshans and Grangier, 2001] Grosshans, F. and Grangier, P. *Quantum cloning and teleportation criteria for continuous quantum variables*. Phys. Rev. A **64**, 010301 (2001).
- [Grosshans and Grangier, 2002] Grosshans, F. and Grangier, P. *Continuous Variable Quantum Cryptography Using Coherent States*. Phys. Rev. Lett. **88**, 057902 (2002).
- [Grover, 1997] Grover, L. K. *Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack*. Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [Haroche and Raimond, 2006] Haroche, S. and Raimond, J. M. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities, and Photons* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2006).
- [Home et al., 2009] Home, J. P., Hanneke, D., Jost, J. D., Amini, J. M., Leibfried, D., and Wineland, D. J. *Complete Methods Set for Scalable Ion Trap Quantum Information Processing*. Science **325**, 1227 (2009).

- [Hong et al., 1987] Hong, C. K., Ou, Z. Y., and Mandel, L. *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*. Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
- [Jeronimo-Moreno et al., 2010] Jeronimo-Moreno, Y., Rodriguez-Benavides, S., and U'Ren, A. B. *Theory of cavity-enhanced spontaneous parametric downconversion*. Laser Physics **20**, 1221 (2010).
- [Jin et al., 2016] Jin, R.-B., Shimizu, R., Fujiwara, M., Takeoka, M., Wakabayashi, R., Yamashita, T., Miki, S., Terai, H., Gerrits, T., and Sasaki, M. *Simple method of generating and distributing frequency-entangled qudits*. Quantum Science and Technology **1**, 015004 (2016).
- [Jonckheere et al., 2012] Jonckheere, T., Rech, J., Wahl, C., and Martin, T. *Electron and hole Hong-Ou-Mandel interferometry*. Phys. Rev. B **86**, 125425 (2012).
- [Kaufman et al., 2018] Kaufman, A. M., Tichy, M. C., Mintert, F., Rey, A. M., and Regal, C. A. *The Hong-Ou-Mandel effect with atoms*. ArXiv e-prints (2018).
- [Ketterer, 2016] Ketterer, A. *Modular variables in quantum information*. Theses, Université Paris 7, Sorbonne Paris Cité (2016).
- [Kimura, 2003] Kimura, G. *The Bloch Vector for N-Level Systems*. Journal of the Physical Society of Japan **72**, 185 (2003).
- [Ladd et al., 2010] Ladd, T. D., Jelezko, F., Laflamme, R., Nakamura, Y., Monroe, C., and O'Brien, J. L. *Quantum computers*. Nature **464**, 45 (2010).
- [Le Roy, 1900] Le Roy, d. *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor*. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques **2**, 317 (1900).
- [Leibfried et al., 2003] Leibfried, D., Blatt, R., Monroe, C., and Wineland, D. *Quantum dynamics of single trapped ions*. Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [Leonhardt et al., 1997] Leonhardt, U., Knight, P., and Miller, A. *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge Studies in Modern Optics (Cambridge University Press, 1997).
- [Lopes et al., 2015] Lopes, R., Imanaliev, A., Aspect, A., Cheneau, M., Boiron, D., and Westbrook, C. I. *Atomic Hong-Ou-Mandel experiment*. Nature **520** (2015).
- [Loudon, 2000] Loudon, R. *The Quantum Theory of Light*. Oxford science publications (OUP Oxford, 2000).
- [Louisell, 1960] Louisell, W. *Coupled mode and parametric electronics* (Wiley, 1960).
- [Lucero et al., 2001] Lucero, E., Barends, R., Chen, Y., Kelly, J., Mariantoni, M., Megrant, A., O'Malley, P., Sank, D., Vainsencher, A., Wenner, J., White, T., Yin, Y., Cleland, A. N., and Martinis, J. M. *Computing prime factors with a Josephson phase qubit quantum processor*. Nature Physics **8**, 719 (2001).
- [Lund et al., 2014] Lund, A. P., Laing, A., Rahimi-Keshari, S., Rudolph, T., O'Brien, J. L., and Ralph, T. C. *Boson Sampling from a Gaussian State*. Phys. Rev. Lett. **113**, 100502 (2014).
- [Luo and Wang, 2014] Luo, M. and Wang, X. *Universal quantum computation with qudits*. Science China Physics, Mechanics & Astronomy **57**, 1712 (2014).

- [Magde and Mahr, 1967] Magde, D. and Mahr, H. *Study in Ammonium Dihydrogen Phosphate of Spontaneous Parametric Interaction Tunable from 4400 to 16 000 Å*. Phys. Rev. Lett. **18**, 905 (1967).
- [Mandel and Wolf, 1995] Mandel, L. and Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995).
- [Monroe et al., 1996] Monroe, C., Meekhof, D. M., King, B. E., and Wineland, D. J. *A "Schrödinger Cat" Superposition State of an Atom*. Science **272**, 1131 (1996).
- [Neville et al., 2017] Neville, A., Sparrow, C., Clifford, R., Johnston, E., Birchall, P. M., Montanaro, A., and Laing, A. *Classical boson sampling algorithms with superior performance to near-term experiments*. Nature Physics **13**, 1153 (2017).
- [Nielsen and Chuang, 2010] Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information : 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010).
- [Olivares, 2012] Olivares, S. *Quantum optics in the phase space*. The European Physical Journal Special Topics **203**, 3 (2012).
- [Orieux et al., 2011] Orieux, A., Caillet, X., Lemaître, A., Filloux, P., Favero, I., Leo, G., and Ducci, S. *Efficient parametric generation of counterpropagating two-photon states*. J. Opt. Soc. Am. B **28**, 45 (2011).
- [Ou, 2007] Ou, Z. *Multi-Photon Quantum Interference* (Springer US, 2007).
- [Ou and Mandel, 1988] Ou, Z. Y. and Mandel, L. *Observation of Spatial Quantum Beating with Separated Photodetectors*. Phys. Rev. Lett. **61**, 54 (1988).
- [Papadimitriou, 1994] Papadimitriou, C. M. *Computational complexity* (Addison-Wesley, 1994).
- [Planck, 1901] Planck, M. *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*. Annalen der Physik **309**, 553 (1901). For a translation in English, see [Planck and Kangro, 1972].
- [Planck and Kangro, 1972] Planck, M. and Kangro, H. *Planck's original papers in quantum physics : German and English edition*. Classic papers in physics (Taylor and Francis, , 1972).
- [Poberezhskiy et al., 2003] Poberezhskiy, I. Y., Bortnik, B. J., Kim, S.-K., and Fetterman, H. R. *Electro-optic polymer frequency shifter activated by input optical pulses*. Opt. Lett. **28**, 1570 (2003).
- [Preskill, 1998] Preskill, J. *Lecture notes on the theory of quantum information and quantum computation, chapter 1*. <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/> (1998).
- [Rabl et al., 2009] Rabl, P., Cappellaro, P., Dutt, M. V. G., Jiang, L., Maze, J. R., and Lukin, M. D. *Strong magnetic coupling between an electronic spin qubit and a mechanical resonator*. Phys. Rev. B **79**, 041302 (2009).
- [Raimond, 2016] Raimond, J.-M. In *Atoms and photons* (2016).
- [Reich et al., 2014] Reich, D. M., Gualdi, G., and Koch, C. P. *Optimal qudit operator bases for efficient characterization of quantum gates*. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical **47**, 385305 (2014).

- [Rim, 2015] Rim, D. *An Elementary Proof That Symplectic Matrices Have Determinant One*. ArXiv e-prints **1505.04240** (2015).
- [Roslund et al., 2014] Roslund, J., de Araújo, R. M., Jiang, S., Fabre, C., and Treps, N. *Wavelength-multiplexed quantum networks with ultrafast frequency combs*. *Nature Photonics* **8**, 109 (2014).
- [Schumacher, 1995] Schumacher, B. *Quantum coding*. *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
- [Scully and Zubairy, 1997] Scully, M. O. and Zubairy, M. S. *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997).
- [Shor, 1997] Shor, P. W. *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. *SIAM J. Comput.* **26**, 1484 (1997).
- [Sipser, 1983] Sipser, M. *A Complexity Theoretic Approach to Randomness*. In *Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '83*, 330–335 (ACM, New York, NY, USA, 1983).
- [Spring et al., 2013] Spring, J. B., Metcalf, B. J., Humphreys, P. C., Kolthammer, W. S., Jin, X.-M., Barbieri, M., Datta, A., Thomas-Peter, N., Langford, N. K., Kundys, D., Gates, J. C., Smith, B. J., Smith, P. G. R., and Walmsley, I. A. *Boson Sampling on a Photonic Chip*. *Science* **339**, 798 (2013).
- [Stockmeyer, 1976] Stockmeyer, L. J. *The polynomial-time hierarchy*. *Theoretical Computer Science* **3**, 1 (1976).
- [Stucki et al., 2009] Stucki, D., Barreiro, C., Fasel, S., Gautier, J.-D., Gay, O., Gisin, N., Thew, R., Thoma, Y., Trinkler, P., Vannel, F., and Zbinden, H. *Continuous high speed coherent one-way quantum key distribution*. *Opt. Express* **17**, 13326 (2009).
- [Szegő, 1939] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*. Number vol.23 in American Mathematical Society colloquium publications (American Mathematical Society, 1939).
- [Tillmann et al., 2013] Tillmann, M., Dakić, B., Heilmann, R., Nolte, S., Szameit, A., and Walther, P. *Experimental boson sampling*. *Nature Photonics* **7**, 540 (2013).
- [Toda, 1991] Toda, S. *PP is as Hard as the Polynomial-Time Hierarchy*. *SIAM Journal on Computing* **20**, 865 (1991).
- [Turing, 1936] Turing, A. M. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. *Proceedings of the London Mathematical Society* **2**, 230 (1936).
- [Ursin et al., 2007] Ursin, R., Tiefenbacher, F., Schmitt-Manderbach, T., Weier, H., Scheidl, T., Lindenthal, M., Blauensteiner, B., Jennewein, T., Perdigues, J., Trojek, P., Ömer, B., Fürst, M., Meyenburg, M., Rarity, J., Sodnik, Z., Barbieri, C., Weinfurter, H., and Zeilinger, A. *Entanglement-based quantum communication over 144 km*. *Nature Physics* **3**, 481 (2007).
- [Uspensky, 1926] Uspensky, J. V. *On the Development of Arbitrary Functions in Series of Hermite's and Laguerre's Polynomials*. *Annals of Mathematics* **28**, 593 (1926).
- [Valiant, 1979] Valiant, L. *The complexity of computing the permanent*. *Theoretical Computer Science* **8**, 189 (1979).
- [Van Enk, 2009] Van Enk, S. J. *Mixed states and pure states*. https://pages.uoregon.edu/svanenk/solutions/Mixed_states.pdf (2009). Accédé : Juin 2018.

- [Vandersypen et al., 2001] Vandersypen, L. M. K., Steffen, M., Breyta, G., Yannoni, C. S., Sherwood, M. H., and Chuang, I. L. *Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*. *Nature* **414**, 883 (2001).
- [Wang et al., 2018] Wang, H., Li, W., Jiang, X., He, Y.-M., Li, Y.-H., Ding, X., Chen, M.-C., Qin, J., Peng, C.-Z., Schneider, C., Kamp, M., Zhang, W.-J., Li, H., You, L.-X., Wang, Z., Dowling, J. P., Höfling, S., Lu, C.-Y., and Pan, J.-W. *Toward Scalable Boson Sampling with Photon Loss*. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 230502 (2018).
- [Watanabe et al., 2018] Watanabe, D., Hashimoto, T., Horibe, M., and Hayashi, A. *Unitary Representation of Symplectic Group for Phase Point Operators on Discrete Phase Space*. ArXiv e-prints **1802.09891** (2018).
- [Yokoyama et al., 2013] Yokoyama, S., Ukai, R., Armstrong, S. C., Sornphiphatphong, C., Kaji, T., Suzuki, S., Yoshikawa, J.-i., Yonezawa, H., Menicucci, N. C., and Furusawa, A. *Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain*. *Nature Photonics* **7**, 982 (2013).
- [Zanotti, n.d.] Zanotti, J.-P. *La machine de Turing*. <http://zanotti.univ-tln.fr/turing/> (n.d.). Accédé : Mai 2018.