



Université
de Paris

UNIVERSITÉ DE PARIS

LABORATOIRE MATIÈRE ET SYSTÈMES COMPLEXES

Z.STUDIO ARCHITECTES

THÈSE DE DOCTORAT

de l'école doctorale de physique en Ile-de-France - n ° 564

par

Romain POUSSE

Caractérisation et modélisation du réseau viaire

sous la direction de
Stéphane DOUADY

Domaine
Physique

Présentée et soutenue le 04 Février 2020

Thèse soutenue le 04 Février 2020 devant un jury composé de :

Olivier BONIN	Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées	Université Gustave Eiffel
Philippe BONNIN	Directeur de Recherche CNRS	Université Paris 8 Vincennes St-Denis
Stéphane DOUADY	Directeur de Recherche CNRS	Université de Paris
Hervé HENRY	Maître de conférence	École Polytechnique
Andrea PERNA	Maître de conférence	Université de Roehampton
Cécile TANNIER	Directrice de Recherche CNRS	Université de Besançon
Pierre VINCENT	Architecte	Z.Studio architectes

Résumé

La ville est un système composé de multiples structures, d'activités, d'espaces ou de réseaux en perpétuelle évolution. Au vu de sa complexité, elle devient un objet d'étude difficile à appréhender dans sa globalité. Par contre, s'intéresser à une de ses composantes a été à l'origine de nombreuses études scientifiques de tout horizons et de tout domaines. C'est cette démarche que nous avons entrepris en s'intéressant au réseau viaire et plus particulièrement à sa trace spatiale. Nous faisons l'hypothèse que ce réseau est un indicateur sensible de la forme urbaine dont nous cherchons à comprendre sa logique de développement.

Pour cela, une représentation du réseau sous forme de graphe et une reconstruction des voies (continuité entre les segments) ont permis de développer des outils pour sa compréhension, par l'intermédiaire d'indicateurs liés à la théorie des graphes ou d'indicateurs statistiques. Pour cette dernière catégorie, nous observons une distribution des longueurs des voies similaires pour de nombreuses villes (Londres, Paris, San Francisco), proche d'une distribution en log-normale. À partir de modèles artificiels, notre objectif est de comprendre le développement d'une telle courbe en fonction des données et de la compréhension que nous avons de ce graphe spatial. Nous cherchons tout d'abord à mieux caractériser les distributions observées puis de développer plusieurs processus en fonction des caractéristiques établies sur ce graphe afin de retrouver cette statistique. Nous nous basons notamment sur des principes de création de voies à partir de découpages de parcellaires liés à leurs tailles ou à leur positionnements dans le réseau. Nous constatons la forte influence de la distance topologique dans le choix de découpe de parcelles pour former une distribution proche d'une loi log-normale.

Mots-clés : morphogenèse – réseau viaire – théorie des graphes - modélisation – loi log-normale - auto-organisation – systèmes dynamiques

Abstract

The city is a system composed of multiple structures, activities, spaces or networks in constant evolution. In view of its complexity, city as a whole is an hard study object. On the contrary, taking an interest in one of its components has been at the origin of many scientific studies from all horizons and all fields. In this work, we keep the same approach and we are interested of the road network and more particulary the space trace. We make hypothesis this network is a sensible indicator of the urban form whose we research to understand the logic development.

Therefore, an graph representation of this network and an ways reconstruction (continuity between segments) have permitted the development of analysis tools by means of graphs theory indicators or statistical indicators. For this last category, we observe a log-normal distribution for the ways lenght in many cities (London, Paris, San Francisco). Using artificials models, our goal is to understand the development of this distribution depending to city data and understanding of this graph. We first research to better characterize the observed distributions and then to develop several processes depend characteristics established on this graph in order to find this stastic. We based in particular on the principles of ways creation on the division of parcels related to their sizes or their network position. We note that strong influence of topologique distance in the choice of parcels cuts to form an log-normal distirbution.

Keywords : morphogenesis – roads network – graph theory – modelisation – log-normale law – auto-organisation – dynamic systems

Avant-Propos

Cette thèse se situe dans la continuité des travaux effectués par l'équipe pluridisciplinaire Morphocity. Constituée avant 2010, cette équipe dirigée par Stephane Douady (CNRS-MSC et directeur de cette thèse) et Philippe Bonnin (CNRS-AUS-LAVUE et co-encadrant) a été soutenue par le CNRS-PIRVE (*Programme Interdisciplinaire de Recherche Ville-Environnement*) ainsi que par l'ANR-MN-2012 MoNu-MoVi. Elle met en relation différents spécialistes de la ville : urbanistes, architectes (dont Pierre Vincent, co-encadrant entreprise de la thèse), archéo-géographes, sociologues et anthropologues, avec des “modélisateurs” : physiciens, informaticiens, géomaticiens sur l'analyse du réseau viaire urbain et de son développement. Deux thèses ont déjà été soutenue depuis la création de cette équipe de recherche : celle de Thomas Courtat (2011) qui a initié le travail d'analyse spatial des réseaux urbains et de modélisation de sa croissance, ainsi que celle de Claire Lagesse (2015) qui a prolongé et affiné l'analyse des réseaux spatiaux à l'aide des SIG (*Systèmes d'Information Géographique*). Nous allons revenir plus en détails sur leurs travaux respectifs dans la première partie de cette thèse.

Table des matières

	i
Résumé	iii
Abstract	v
Avant-Propos	vii
partie 1. Introduction à l'étude de la forme urbaine	1
Chapitre 1. La ville comme système complexe	3
1. Qu'est-ce qu'une ville ?	3
2. L'étude des formes	5
3. Comprendre la forme urbaine	7
4. Le choix du réseau viaire	11
Chapitre 2. De la ville aux graphes spatiaux	15
1. La théorie des graphes	15
2. Construction de la notion de voie	18
3. Lecture de la spatialité	23
4. La distribution des longueurs de voies	31
5. La morphogenèse viaire	37
partie 2. Modélisation du réseau viaire	41
Chapitre 3. Analyse statistique et premières modélisations	43
1. Outil de caractérisation des distributions	43
2. Premières tentatives de modélisation	52
3. Subdivision du parcellaire sans hiérarchie	59
Chapitre 4. Construction du modèle dynamique	67
1. Processus de densité de carrefours	67
2. Exploration de l'espace des paramètres	70
3. Les conditions limites	73
4. Analyse des distributions des longueurs de voies	78
Chapitre 5. Outils de caractérisation des réseaux issus du modèle dynamique	81
1. Arbre généalogique	81
2. Outils de caractérisation des pôles	86

3. Simplification du modèle dynamique	90
Chapitre 6. Considération de la distance topologique	95
1. Modification du modèle dynamique	95
2. Couplage des distances euclidiennes et topologiques	106
Conclusion et perspectives	111
Conclusion issues de notre étude du réseau viaire	112
Perspective	115
Annexes	121
Chapitre 7. Analyses statistiques	123
1. Test K-S et Anderson sur les distributions des longueurs des voies	123
2. Méthodologie du test statistique	124
3. Application du test sur les réseaux viaires	129
Chapitre 8. Modélisation	133
1. Modèle avec angle	133
2. Algorithme de Box-Muller	134
3. Condition tiltée	135
Références bibliographiques	137
Bibliographie	139

Première partie

Introduction à l'étude de la forme urbaine

*La science s'est toujours efforcée de définir - sinon de domestiquer - le monde des
forces à partir de l'observation des formes.*

René Thom

La ville comme système complexe

1. Qu'est-ce qu'une ville ?

En cherchant la définition du mot “ville” dans un dictionnaire notoire¹, nous remarquons qu'elle correspond à celle² de l'INSEE (*Institut National de la Statistique et des Études Économiques*), décrivant une notion de continuité du bâti, d'un nombre d'habitants minimal (2000 habitants) et un ensemble d'activités professionnelles liées au secteur tertiaire. Elle est opposée aux notions de “village” et de “ruralité” par des secteurs d'activités différents (proches de l'agriculture) et d'une population plus faible. Ce parti pris cumulant une variable spatiale (la densité de bâti) et des variables fonctionnelles et statistiques (secteurs d'activités professionnelles, nombre d'habitants) nous a amené à nous questionner sur la pertinence de cette définition. Autrement dit, peut-on résumer une ville à ces seuls paramètres ?

Si on compare cette définition avec celle d'autres pays [1], on remarque que le seuil du nombre d'habitants diffère notablement (par exemple 10000 habitants pour l'Italie et l'Espagne). En outre, on observe de grandes disparités d'organisation comme par exemple entre New York, très planifiée (plan hippodamien sur l'île de Manhattan), connue pour son réseau quadrillé et constituée de nombreux gratte-ciels, et la ville mongole d'Oulan-Bator, plus organique et adaptée aux modes de vies nomades avec ces nombreuses yourtes (habitat traditionnel des nomades en Asie) à la périphérie de la ville. Dans les deux cas, ce sont de grandes agglomérations mais qui se distinguent architecturalement, socialement et culturellement.

Dans la littérature spécialisée, il est encore plus flagrant de remarquer toute la complexité de la ville. En parcourant des ouvrages de sciences humaines, on se rend compte de l'abondance d'éléments à étudier. Dans les domaines de géographie ou d'urbanisme, des termes spatiaux prédominent tels que “le paysage”, “l'organisation de l'espace” ou “la forme urbaine” [2]. En sociologie, c'est l'aspect fonctionnel qui est mis en avant : les modes de vie des habitants, leur rapport au bâti ou encore le poids politique et économique que la ville peut avoir sur le territoire. Chez les historiens, on rappelle les évolutions temporelles dans l'organisation et les pratiques, comme par exemple les différences et les comparaisons entre la ville en France en période du Moyen-Age (très rurale) et en période de révolution industrielle (développement de nouveaux secteurs d'activités, nouveau type d'urbanisme et de planification[3, 4]).

1. Edition Larousse, définition “ville”, 2019 : <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/ville/82000>

2. voir le lien : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/4171583>

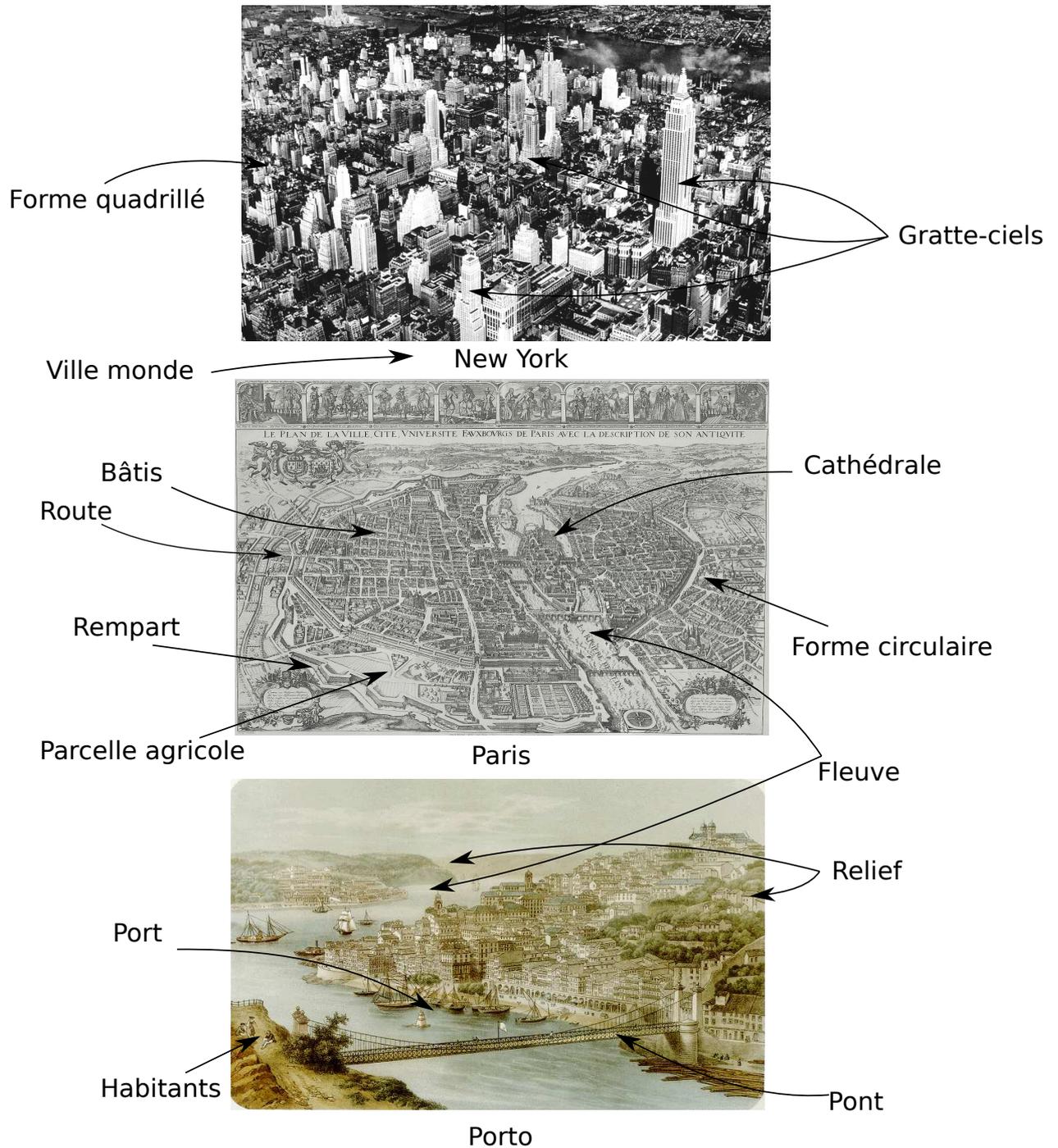


FIGURE 1.1. Ces trois images représentent trois villes (à des époques différentes) n'ayant pas les mêmes architectures, ni de formes urbaines ou d'activités économiques similaires. Quelles sont leurs caractéristiques communes pour pouvoir les définir en tant que "villes"? - Haut : Photographie de New York, 1932 - Milieu : Plan de Paris, Melchior Tavernier, 1630 - Bas : Peinture de Porto, "Vue de Porto", Isidore Laurent Deroy, 1850

Chacun de ces domaines scientifiques ainsi que d'autres comme l'anthropologie, l'architecture, la géomatique, l'économie ou la physique, qui n'ont pas encore été évoqués, possède une vision singulière qui se complète et révèle toute la complexité de la ville et de la difficulté à l'appréhender [Fig 1.1].

En tant que physiciens, le fait d'observer un système ayant autant de structures, d'espaces, de réseaux et d'activités interdépendantes et en perpétuelle évolution pose la question de sa dynamique. Un domaine à part entière de la physique se consacre à ce genre de système que l'on dit "complexe". Ce qui nous intéresse ici, c'est de comprendre la ville de part son étalement spatial, sa forme urbaine et sa morphogénèse. Cette approche est liée à celle des géographes et des urbanistes qui ont introduit un domaine de recherche spécifique : la morphologie urbaine.

2. L'étude des formes

La morphologie est une question centrale des sciences naturelles. La description des formes présentes dans la nature et l'étude de leurs émergences sont des questions très anciennes remontant jusqu'aux philosophes de l'Antiquité (Platon, Aristote) et qui a alimenté toute la connaissance notamment en physique ou en biologie jusqu'à aujourd'hui. De la cosmologie (formation des planètes, étoiles et l'Univers en général) en passant par la mécanique des fluides (phénomènes de turbulence), l'embryogenèse (développement des êtres vivants) ou l'écologie (les mouvements collectifs comme les bancs de poissons, nuées d'oiseaux), l'enjeu est toujours de comprendre le développement de ces structures, leurs mécanismes ainsi que leur stabilité [Fig 1.2]. Le physicien va chercher à mieux appréhender ces mécanismes, permettant ainsi la découverte de nouvelles lois physiques, de les modéliser et de les appliquer à des structures de formes analogues.

La morphogénèse possède un intérêt encore plus important sur le vivant car le caractère évolutif des espèces, lié à la notion de sélection naturelle, doit être pris en compte. La question est donc de comprendre l'importance du génome et celle des processus mécaniques dans le développement des espèces. Un des nombreux exemples connus dans la littérature scientifique sur ce sujet est donné par les motifs de Turing. En partant de la théorie de réaction-diffusion, le mathématicien et informaticien Alan Turing [5] développe un modèle mathématique très simple donnant des motifs complexes similaires aux formes de certaines plantes, aux tâches de certains animaux (guépards, zèbres, *Tetraodon MBu* comme dans la figure 1.3) ou forme de l'embryon lors de différentes phases de développement (notamment la gastrulation³). Ce type d'étude a donc enrichi la réflexion d'ensemble sur les mécanismes qui engendrent le vivant.

3. La gastrulation est une étape précoce du développement embryonnaire d'un animal.

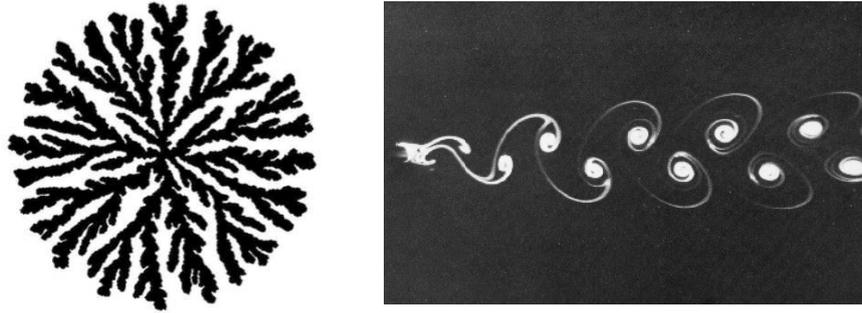


FIGURE 1.2. Illustration de deux phénomènes de mécanique des fluides donnant des formes singulières. Gauche : L'instabilité de Saffman-Taylor qui est issue de l'interface entre deux fluides de viscosité différentes. L'ajout du fluide moins visqueux dans le milieu du second fluide à une position donnée va se propager en créant une structure en forme de doigts (<https://web.njit.edu/~kondic>). - Droite : Une allée de tourbillons de Von Karman créée lors de la séparation d'un écoulement autour d'un corps peu profilé. Ces tourbillons se forment pour des régimes d'écoulement dits turbulents correspondant à un ratio élevé entre les forces d'inertie (vitesse du fluide, dimension de l'écoulement) et la viscosité (<http://wavelets.ens.fr/>).

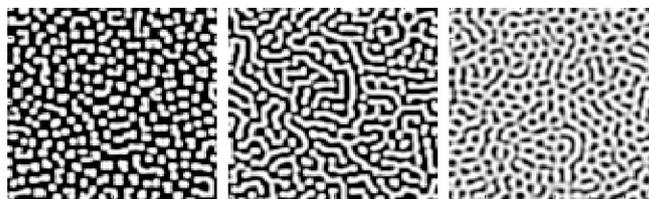


FIGURE 1.3. Les motifs de Turing (Bas) engendrés par un système de réaction-diffusion sont similaires aux tâches observées sur le Tetraodon MBu (Haut). Ce processus physique pourrait expliquer l'origine des tâches et remettre en question notre vision du vivant ainsi que le rôle du génome. - *Wikipedia*

3. Comprendre la forme urbaine

Dans cette étude, nous ne nous intéressons pas à la biologie mais aux sciences humaines. Comme évoqué précédemment, de nombreux éléments constituent la ville et peuvent expliquer son fonctionnement (social, politique, économique, historique, etc), il est évident que les aspects humains ont un rôle central dans son développement et qu'il est nécessaire d'en tenir compte dans notre démarche. Néanmoins, nous choisissons d'aborder l'urbain par rapport à sa géométrie en premier lieu donc, sans se focaliser directement sur sa complexité sociale. Nous cherchons un indicateur de l'étalement spatial de la ville afin de la caractériser et de la représenter par des mécanismes simples. Cette modélisation permettrait de décrire qualitativement de nombreux phénomènes urbains comme la planification, l'apparition de percements, de lotissements, etc. Pour cela, nous devons nécessairement nous confronter à l'expertise des chercheurs en sciences humaines afin d'affiner notre représentation de la ville.



FIGURE 1.4. Photo satellitaire de Toulon prise par Thomas Pesquet depuis la Station Spatiale Internationale. Nous pouvons reconnaître la rade et le port qui s'est structuré autour. La topographie joue un rôle majeur dans la morphogenèse de la ville. Dans le cas de Toulon, elle contraint son développement. - Image satellitaire de Toulon, *Thomas Pesquet, 2017*

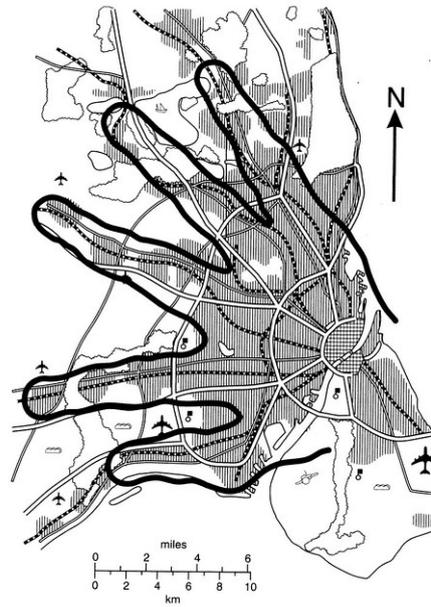


FIGURE 1.5. Plan d'urbanisation pour la ville de Copenhague (1947). Elle s'effectue autour du réseau de transport représentant la forme de doigts d'une main, preuve de l'influence de ce réseau sur l'étalement spatial de la ville. - Finger Plan Copenhagen, *Image extrait de*[6]

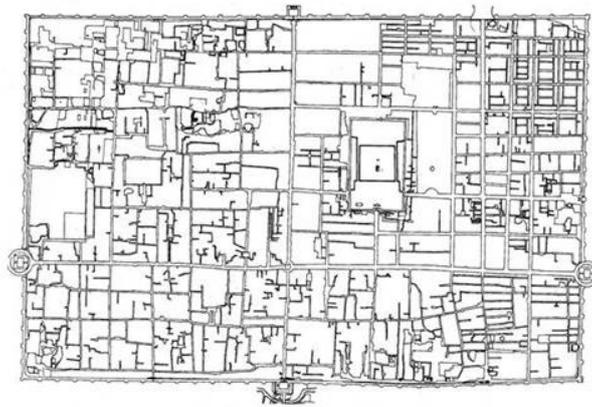


FIGURE 1.6. Plan du centre ancien de Xi'an en 1949. La forme de la ville est caractérisée par son parcellaire et ses murailles rectangulaires. *Image extrait de* [7]

Afin de mettre en évidence un indicateur de l'étalement spatial nous devons sélectionner un élément caractéristique de la forme urbaine. Face à une carte ou une image satellitaire (comme illustré sur les figures 1.4, 1.5, 1.6), nous pouvons reconnaître une ville de part l'observation de sa géométrie et des structures particulières faisant partie de son identité. Nous pouvons reconnaître Paris en parlant de sa forme circulaire avec la Seine qui la traverse en plein coeur, du centre ancien de Xi'an en Chine délimité par ses murailles, ou de la ville portuaire de Venise et de l'ensemble des canaux qui la compose. Mais est-ce suffisant à leur description ?

La question de la description ainsi que de la modélisation de la ville par les physiciens, géographes et urbanistes est relativement récente. Depuis la moitié du XXème siècle, des lois empiriques ont permis de caractériser son aspect multi-échelle [8]. Nous pouvons citer la découverte de la loi rang-taille [9] (voir la figure 1.7), liée à la loi de Zipf. C'est une des premières lois observant l'évolution de la taille des populations des villes, inversement proportionnelle à leur rang. Autrement dit, pour une région donnée, la population de la plus grande ville est deux fois plus importante que la seconde, trois fois plus importante que la troisième et ainsi de suite. À la fin des années 80, une corrélation inverse a également été exhibée entre la densité urbaine et la consommation énergétique. Moins une ville est dense et plus sa consommation est élevée (loi de Newman [10]). Ces lois mettent en évidence une structure multi-échelle qui peut être appréhendé sous le prisme des fractales, structures géométriques invariantes aux changements d'échelle et découvertes par Mandelbrot en 1974 [11] (voir exemple des triangles de Sierpinski dans la figure 1.8). De nombreux modèles de villes ont été créés afin de reproduire ces différentes lois. L'approche majoritaire est basée sur une compréhension du bâti reliée à des contraintes économiques, sociales ou de déplacements telles que l'accessibilité à des services, au lieu de travail ou bien à la proximité des espaces verts [12, 13, 14, 15, 16] (voir la figure 1.9).

Au delà du bâti, d'autres éléments sont susceptibles d'être développé. En effet, la ville peut être perçu comme [1] "*articulation et la disposition des vides et des pleins, du bâti et des espaces ouverts ou libres (parcelles et voirie), à l'intérieur d'un ensemble urbain, entendu comme ensemble bâti ayant un fort degré de continuité [...]*" (citation de P. Bonnin [17]).

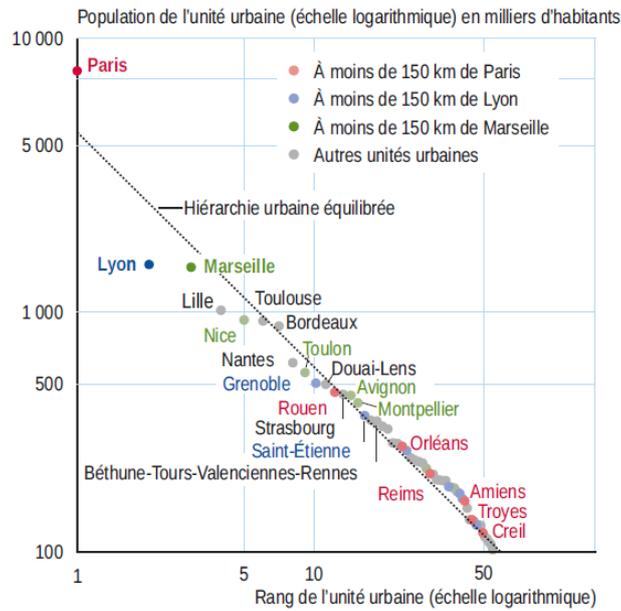


FIGURE 1.7. Exemple de loi rang-taille sur la classification de la population urbaine française de 2015 (en échelle logarithmique en fonction de son rang). En première approximation, nous observons une loi d'échelle où la population diminue de manière constante en fonction du rang de l'unité urbaine. - INSEE, 13 Juin 2019, <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/definition/c1501>



FIGURE 1.8. Exemple de fractale avec le triangle de Sierpinski. Les cinq premières étapes sont illustrées sur cette image. Partant d'un triangle équilatéral (en noir, itération 1), on enlève un plus petit triangle central (blanc) dont les sommets correspondent au milieu de chaque côté (itération 2). La même opération est répétée une nouvelle fois pour les trois triangles noirs résultants, et ainsi de suite - Triangle de Sierpinski - *Wikipedia* .

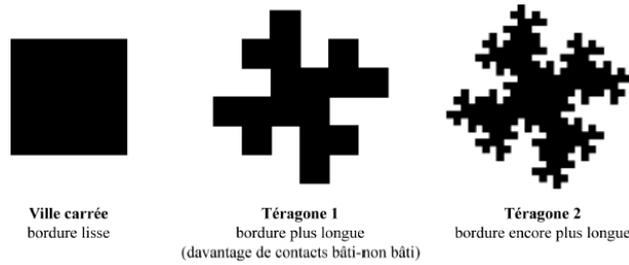


FIGURE 1.9. Exemple de modélisation de forme de ville en structure fractale par l'intermédiaire d'un téragone (objet ayant un très grand nombre de côtés, néologisme créé par Mandelbrot). - [16], d'après [11]

4. Le choix du réseau viaire

Si nous analysons séparément chacun des éléments constituant la forme urbaine, le choix du réseau viaire est le plus pertinent. D'une part, il est stable dans le temps. En effet, le bâti est un élément très fragile qui subit les aléas de l'Histoire, que ce soit social (économique, politique, guerre, incendie, etc) ou naturels (inondation, tsunami, séisme, etc), il est donc en constant renouvellement. De même, les murailles et fortifications marquant les limites physiques de la ville, est un choix restreint puisqu'elles peuvent se déplacer au rythme de son développement. En outre, des villes n'en ont jamais eu, ou pendant de courtes périodes, voir même elles s'étendent au-delà sans en créer de nouvelles. Un autre élément, plus discret mais qui est régulièrement représenté sur les plans de villes : le parcellaire, c'est-à-dire l'ensemble des parcelles qui constituent le territoire de la ville et en indiquent donc son étalement spatial (agricole, bâti, industrielle, etc). Il subit de nombreux redécoupages (exemple des lotissements sur une parcelle agricole) ou de ré-assemblages (par exemple lors de remembrements agricoles) ce qui le rend difficile à analyser. Entourant généralement un ensemble de parcelles, le réseau viaire a une fonction sociale cruciale : c'est par lui que tous les flux et échanges sont effectués dans la ville. Majoritairement, il persiste dans le temps. En effet, nous trouvons de nombreuses voies encore fonctionnelles qui datent de l'Antiquité, comme par exemple les rues St-Jacques et Vaugirard à Paris⁴ (voir la figure 1.12). Plus généralement, dans de nombreuses villes italiennes et françaises, nous retrouvons le *cardo-decumanus*, c'est-à-dire les voies romaines qui suivent respectivement les axes Nord-Sud et Est-Ouest [Fig 1.10]. Par conséquent, comme l'écrit Fernand Braudel : "*La ville, ce sont des routes, des routes qui se recoupent, encore faut-il bien d'autres ingrédients pour assurer l'implantation d'une vraie ville*"[3], nous considérons le réseau viaire comme un élément essentiel à la description de sa structure mais insuffisant pour la résumer.

Le réseau de voirie est un élément très riche et complexe, marquant l'évolution urbaine, et modifiant sa forme (largeur de rue, revêtement, trottoir, stationnement...)

4. Voir le site *Paris, ville antique* : http://www.paris.culture.fr/fr/ville_he_frm_plan1.htm

et ses fonctions au cours du temps (voies piétonnes ou pour véhicules, sens de circulation...). Toutefois, en se limitant seulement à sa trace spatiale, le réseau viaire fluctue très peu malgré les différents aléas que peuvent subir les agglomérations. Un exemple flagrant est donné par le tsunami de 2011 au Japon ; la voirie fût le premier élément remis en fonction à l'identique dans de nombreuses villes afin que les secours puissent se déplacer facilement d'une zone à une autre [Fig 1.11].

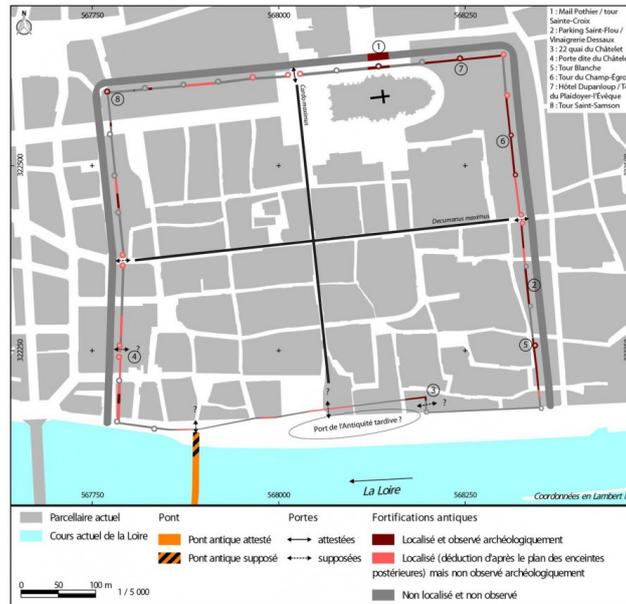


FIGURE 1.10. Représentation de l'enceinte antique de la ville d'Orléans sur la carte actuelle de son centre urbain. Nous retrouvons toujours le tracé du cardo-decumanus créée à l'époque romaine. - *Pôle d'archéologie d'Orléans Métropole, 2013*, <http://archeologie.orleans-metropole.fr/r/524/de-l-enceinte-antique-a-l-hotel-dupanloup/>

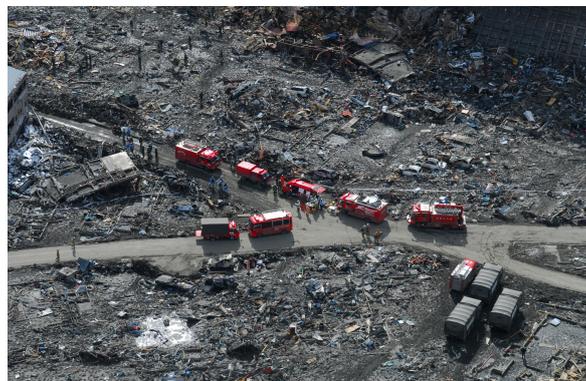


FIGURE 1.11. Ville d'Otsushi (Japon) dévastée par le tsunami de 2011. Le réseau viaire est le premier élément remis en place après cette catastrophe. - Otsushi, *U.S Navy*, 8 Mars 2011

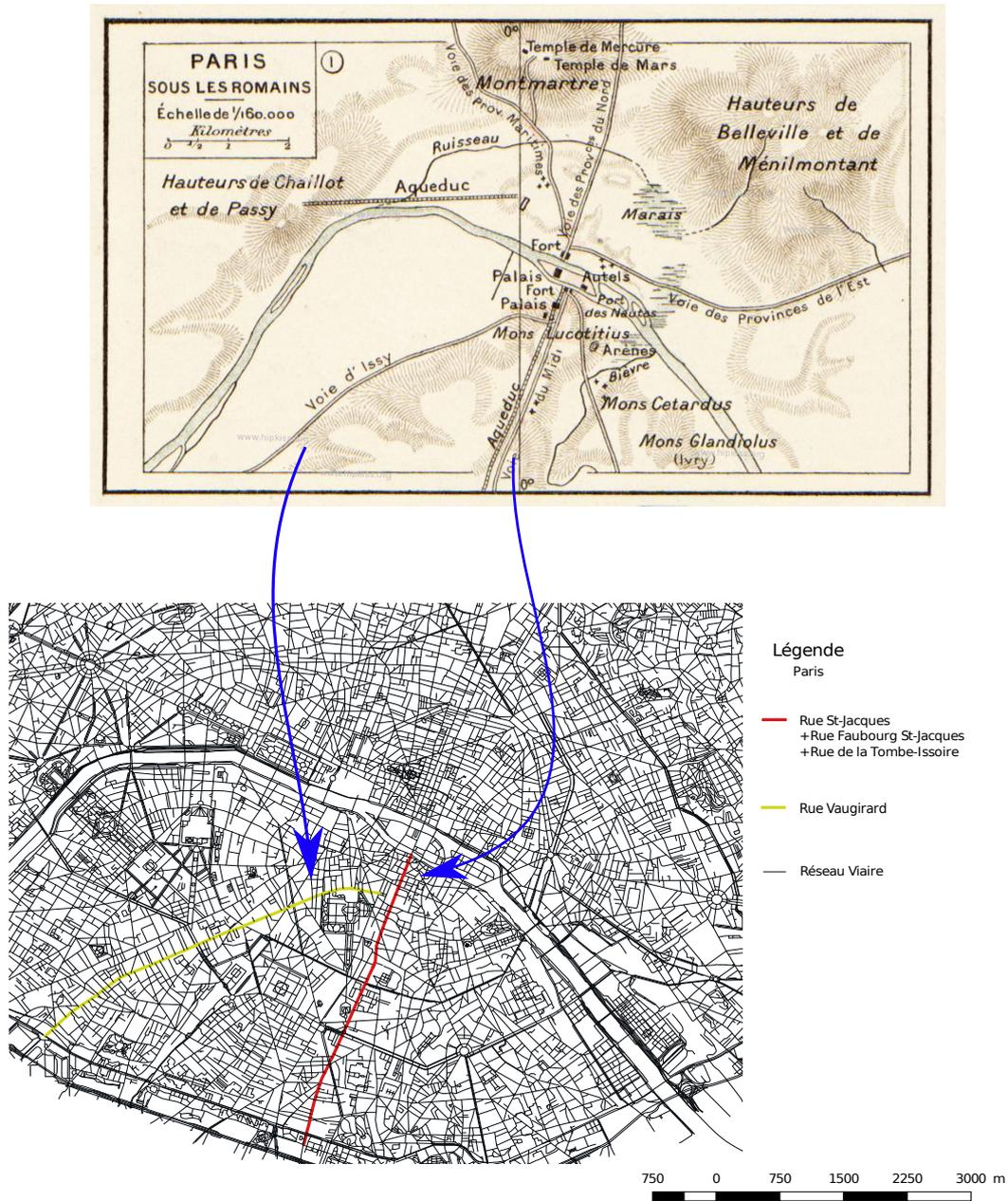


FIGURE 1.12. Exemples de voies datant de l'Antiquité dont le tracé est encore présent dans le réseau parisien aujourd'hui. Les tracés des rues Vaugirard et de la rue Saint-Jacques, présentent au moment de la ville de Lutèce (nom de la ville de Paris durant la période Gallo-Romaine), ont été très peu modifiés dans le temps. - Haut : Réseau viaire de Lutèce, *Atlas général d'Histoire et de géographie*, Paul Vidal Lablache, 1912 Bas : Réseau viaire de Paris 2016. Données Open Street Map, traitées par C. Lagesse

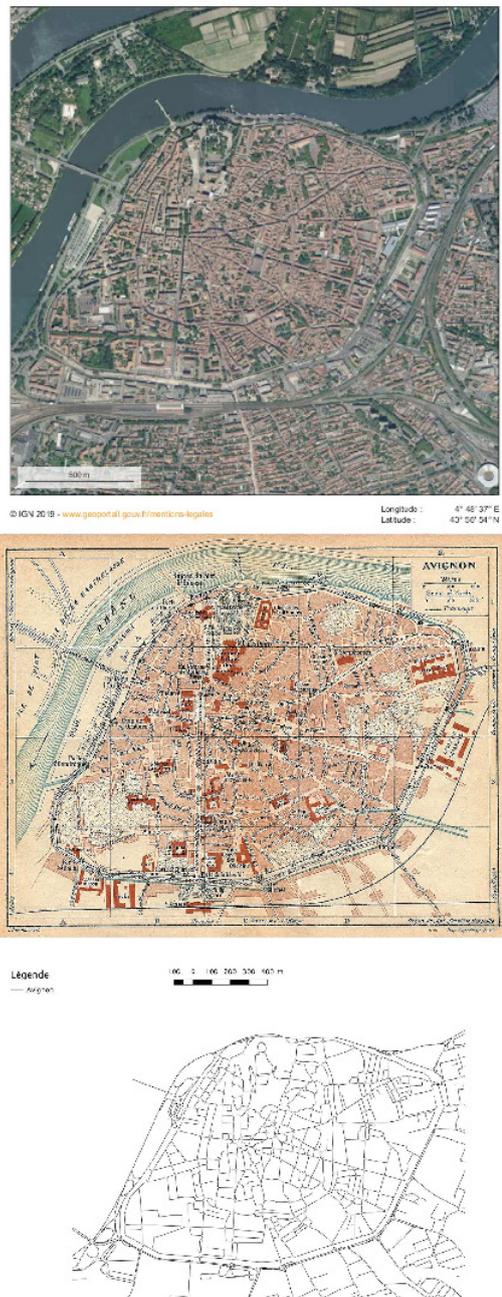


FIGURE 1.13. Caractérisation de la forme urbaine pour le centre historique d'Avignon, à partir d'une image satellitaire, d'un plan de la ville et de son réseau viaire. Sur les plans de la ville, en plus de la topographie (le Rhône ici), les éléments régulièrement représentés sont le parcellaire, le réseau de voirie et les murailles. Nous considérons que le réseau viaire, étant donné de sa stabilité, est l'élément essentiel à la représentation de la forme urbaine. En effet, lorsque qu'on retire tous les éléments sauf celui-ci, nous conservons toujours la forme qui fait l'identité de la ville d'Avignon. - Haut : Vu satellite du centre historique d'Avignon, *Géoportail, IGN 2019* - Centre : Carte d'Avignon de 1921 - Bas : Réseau viaire du centre historique d'Avignon, *Données Open Street Map, 2016, traitées par C. Lagesse*

De la ville aux graphes spatiaux

1. La théorie des graphes

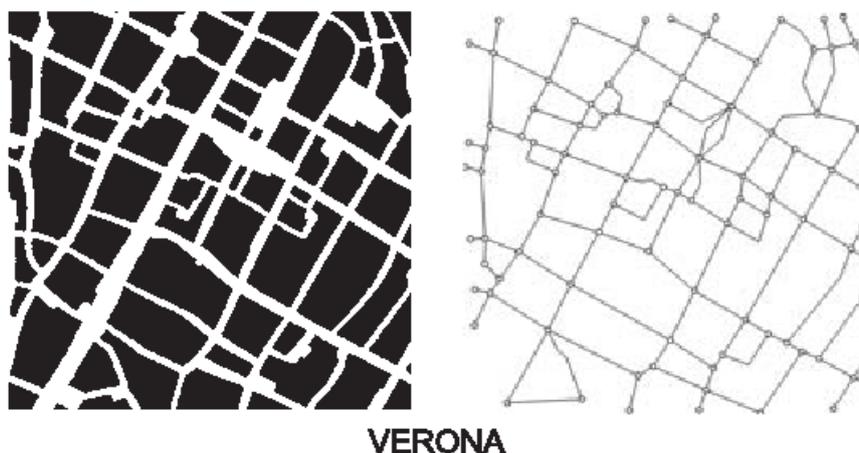


FIGURE 2.1. Échantillon du réseau viaire de la ville de Vérone (à gauche) que l'on décompose en noeuds (ou carrefours, à droite) et en segments (portions de routes) - Image issue de l'article [18]

En prenant la trace spatiale comme “squelette” de la forme urbaine, nous faisons un premier pas vers sa caractérisation. Nous obtenons un réseau spatialisé constitué de noeuds (carrefours) et d’arcs ou segments connectés entre eux [Fig 2.1]. Notre objectif est de comprendre les mécanismes de son développement à partir de sa structure actuelle et à l’aide des outils de la théorie des graphes.

La théorie des graphes est l’étude mathématique des liens reliant entre eux des objets abstraits ou concrets sous la forme d’un réseau. La naissance de cette discipline provient du problème des sept ponts de Königsberg dont l’objectif était de faire une promenade passant une seule fois par chacun des ponts de la ville et revenant au lieu où la promenade a débuté. Euler est le premier à expliquer l’impossibilité de faire ce parcours par l’intermédiaire d’une représentation abstraite où chaque berge correspond respectivement à un sommet (noeuds) et les ponts par des arêtes (segments) [19]. Pour rendre cette promenade possible, il aurait fallu que chacun des sommets ait un nombre pair d’arêtes, ce qui n’était pas le cas. Les graphes ayant cette caractéristique sont appelés *euleriens*. La démonstration rigoureuse de ce théorème fût

obtenue un siècle plus tard en 1873 par Hierholzer. Cette nouvelle approche a engendré une autre branche des mathématiques : la topologie, c'est-à-dire l'étude des propriétés invariantes d'objets géométriques soumis à des déformations continues comme l'étirement, la torsion, le froissement ou le plissement (mais pas la déchirure ou le recollement). De même, elle participa à tout un champs d'études théoriques sur les graphes qui découvrirent de nouveaux objets (graphes *hamiltoniens*, graphes en arbres, hypergraphes...), de nouvelles méthodes d'analyses des réseaux (indicateurs comme la *betweenness* ou la *closeness* que nous aborderons dans la suite de ce chapitre).

La théorie des graphes a pris énormément d'importance aujourd'hui, avec l'étude des réseaux liés au développement de l'informatique, comme les réseaux sociaux ou de télécommunications, mais également dans des domaines aussi variés que la génétique (par exemple le réseau de co-expression de gènes) et les transports. Actuellement, les applications de la théorie concernent principalement des graphes sans contraintes spatiales comme les réseaux sociaux ou internet [20], alors que le cas des réseaux viaires est plan (à l'exception des ponts et des tunnels nécessitant une interprétation singulière). Cette différence contraint sa variabilité. En effet, en définissant dans un plan les routes comme un ensemble de segments et les carrefours comme des noeuds, la caractérisation d'Euler restreint la distribution des graphes possibles pour les réseaux viaires [18]. De part cette restriction, le réseau viaire est proche d'autres problématiques de réseaux observés dans la nature comme les craquelures d'argiles ou bien les veinures de feuilles. Ces recherches ont un même objectif : retrouver leur historique en fonction de la forme finale. Autrement dit, à partir de la géométrie du graphe du réseau viaire, nous voulons retrouver une hiérarchisation caractérisant sa dynamique (voir les figures 2.2 et 2.3 et [21] pour les craquelures et voir [22] et [23] pour les veinures).

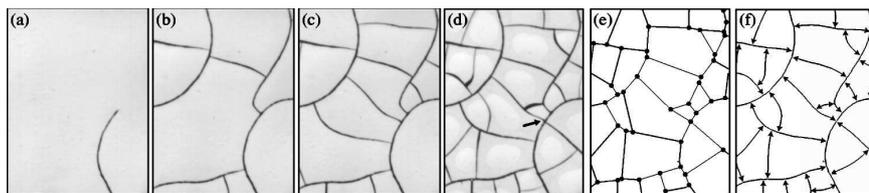


FIGURE 2.2. a, b, c, d : Photographies de l'évolution des craquelures d'argiles dans le temps. e : Construction du réseau en noeuds et segments à partir de la forme finale de la craquelure. f : Reconstruction visuelle des craquelures. Images provenant de l'article [24]

Partant d'un ensemble de noeuds et de segments constituant le graphe d'un réseau de veinures et de voies, nous ne pouvons pas reconstituer la dynamique directement. En effet, il est nécessaire de définir une notion de continuité entre les segments afin de pouvoir hiérarchiser les craquelures, veinures ou voies. Partons de l'exemple donné par la figure 2.2, les craquelures primordiales (photographie b) sont

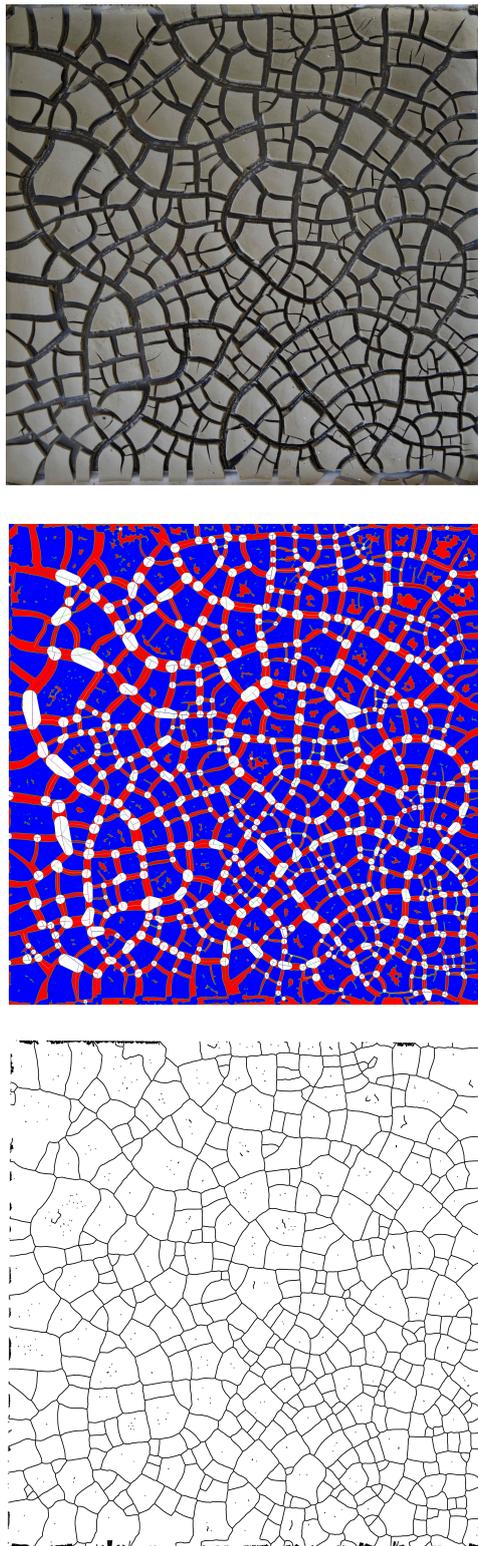


FIGURE 2.3. L'image du haut est un réseau de craquelures d'argile (*Expérience-85, P. Bonnin*) dont nous cherchons à comprendre la dynamique d'évolution à partir de la forme finale. Pour cela, nous vectorisons (au centre) et nous récupérons simplement le tracé de ce réseau (en bas, *Logiciel CRACKS, A. Bonnin*)

raccordées par de nouvelles craquelures au cours du processus de formation (photographie *d*). La forme finale fournit un graphe où ces craquelures sont décomposées en segments et ne peuvent plus être individualisées (image *e*). Sur le réseau viaire, si nous prenons le cas de la rue Saint-Jacques à Paris, de nombreuses rues ont été créées au cours du temps et ont rejoint cet axe. Nous obtenons le même problème, le graphe représentant le réseau de la ville ne nous permet plus d'identifier cette voie principale. Dans l'état actuel, il est difficile d'en comprendre la dynamique. Dans la section suivante, nous allons construire la notion de voie associée à cette continuité.

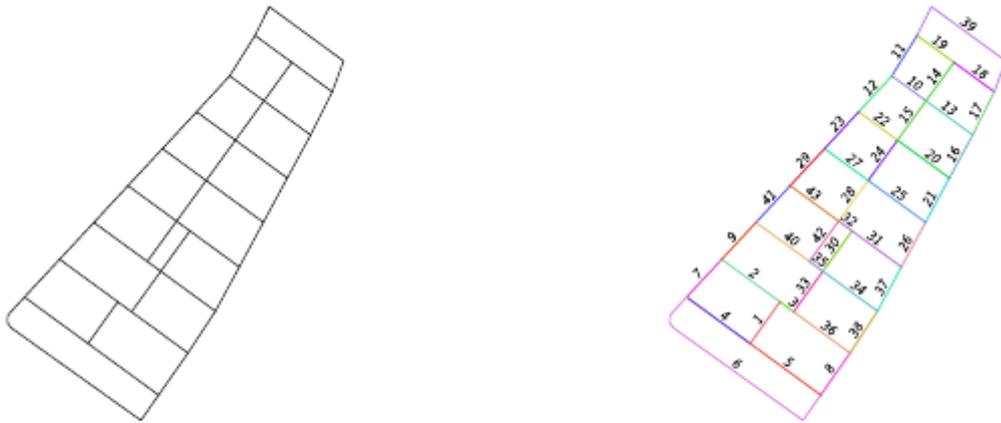


FIGURE 2.4. Échantillon de réseau viaire de la ville de Téhéran (à gauche) et de son graphe spatial (à droite). Ce graphe est structuré en noeuds et segments bien que nous puissions faire l'analyse des différentes portions de routes, nous perdons une notion de continuité qui met en évidence les voies ou route caractérisant le réseau viaire.
- Image issue de la thèse [25]

2. Construction de la notion de voie

La continuité entre les segments peut sembler évidente à l'oeil, elle n'est toutefois pas simple à définir géométriquement. Dans la littérature scientifique, plusieurs études développent des logiques différentes afin de reconstruire les routes existantes. Une étude des plus connues a été réalisée par Bill Hillier et ses co-auteurs [26, 27, 28] qui ont généralisé un ensemble de théories et d'outils d'analyse des configurations spatiales, c'est ce qu'ils nomment la *Space syntax*.

En partant du principe que la géométrie du réseau viaire est l'élément central de la forme urbaine, ils ont développé l'idée que la perspective des rues est déterminante

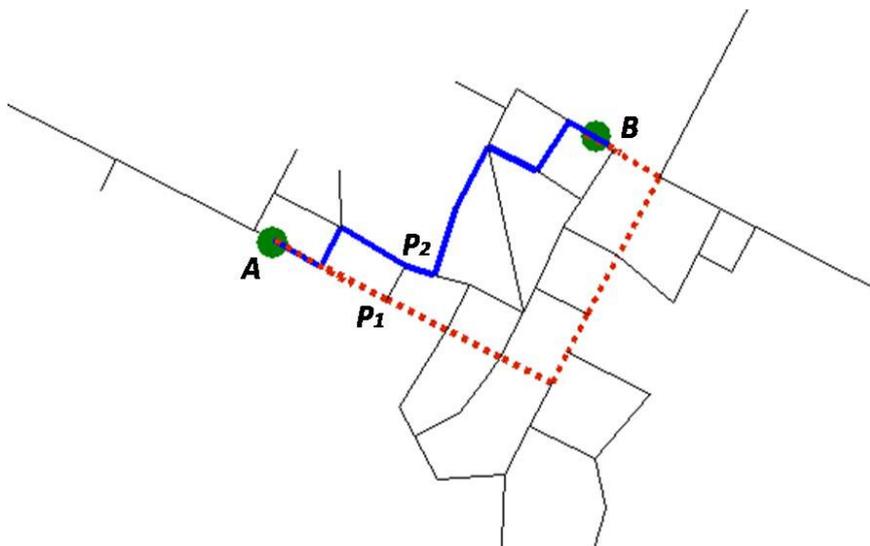


FIGURE 2.5. Représentation de la distance topologique et de la distance métrique pour un trajet donné. Le chemin le plus court en terme de distance métrique pour aller du point A au point B est représenté en bleu. En rouge, le chemin le plus “simple” au sens de Hillier, c’est-à-dire celui où les usagers auront à effectuer le moins de choix durant leur trajet en privilégiant les voies principales. Pour définir cette distance topologique, nous avons besoin d’une notion de continuité entre les segments afin de mettre en évidence et hiérarchiser les voies. - Image issue de la thèse [7]

sur le comportement psychologique des usagers. En effet, ils introduisent une notion de continuité influencée par le champs de vision d’un piéton lorsqu’il choisit son chemin pour arriver à destination [31, 32]. En opposition à la notion de distance métrique, correspondant au chemin le plus court pour aller d’un point A à un point B, cette influence de la perspective se traduit par la notion de distance topologique associée à un nombre minimal de tournant privilégiant les voies principales. Ce comportement est illustré sur la figure 2.5. Les voies ayant de nombreuses possibilités de connexions avec le reste du réseau sont privilégiées par l’usager qui aura moins besoin de changer de direction pour se rendre à destination. Ces études sur la *Space Syntax* ont initié un mouvement concernant l’analyse topologique des réseaux spatiaux [29, 30, 33, 34] en définissant d’autres logiques comme par exemple par le nom des rues ou bien par des limites d’angles à des intersections [Fig 2.6].

T. Courtat [35, 36, 7] et C. Lagesse [37, 25] ont construit une notion de continuité entre les segments en définissant la *voie* comme un objet multi-échelle allant de la simple impasse jusqu’à la grande avenue [Fig 2.9]. La construction de cet *hypergraphe* s’effectue à chaque noeud (intersection) en fonction d’un seuil ($\theta_{max} = 60^\circ$) pour l’angle de déviation entre deux segments [Fig 2.7]. Les segments peuvent être réunis de différentes manières comme nous l’illustrons sur la figure 2.8. Pour un carrefour à multiples segments, la méthode M0 privilégie les segments les plus proches d’un

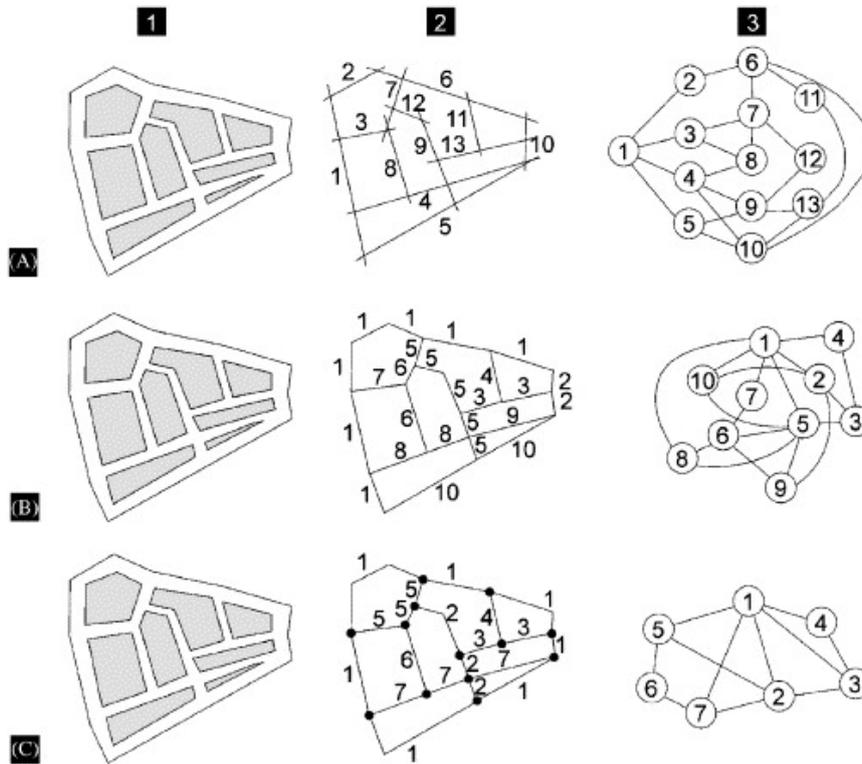


FIGURE 2.6. Différentes caractérisations d'un réseau routier fictif (colonne 1). Colonne 2, Ligne A : la *Space Syntax* d'Hillier retrouve les routes en fonction de la perspective que peut avoir l'utilisateur quand il se déplace au sein du réseau. Ligne B : Notion de continuité des segments de routes définies à partir du nom des rues (Jiang et Claramunt) [29]. Ligne C : Notion de continuité entre les segments définis par le choix d'un angle seuil de déviation pour chaque carrefour [30]. À la suite de cette caractérisation que l'on nomme graphe primal (colonne 2), on étudie le graphe dual (colonne 3) à l'aide des différents indicateurs de la théorie des graphes. Le graphe dual peut être considéré comme l'inverse du graphe primal, les voies et les carrefours étant respectivement représentés par des sommets et des arcs.
- Images provenant de l'article [30]

alignement tandis que la méthode M1 utilise la somme minimale entre les angles de déviation des différents couples de segments afin de privilégier le nombre de segments reconstitués.

Le choix entre ces deux méthodes a été justifié à l'aide d'analyses des réseaux viaires d'Avignon et de Paris. En regardant la distribution des angles de déviation entre les voies reconstituées par M0 et M1, nous retrouvons que la méthode M0 privilégie un meilleur alignement. Il a également été observé la distribution du logarithme des longueurs des voies (nous détaillerons cette statistique dans la section 4). Pour M0, la forme de cette distribution est confondue avec une gaussienne [25], ce

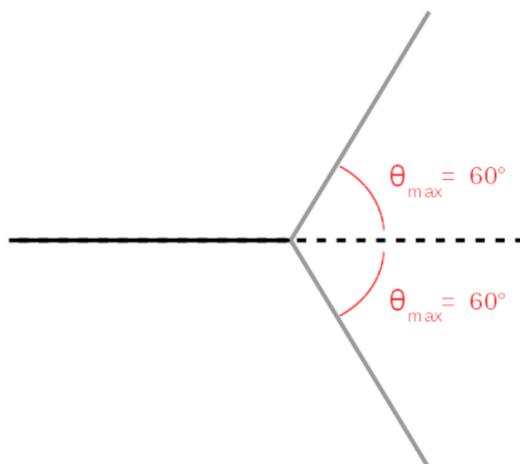


FIGURE 2.7. Caractérisation de l'angle seuil θ_{max} de déviation afin de définir la continuité entre deux segments. L'angle seuil est l'angle maximal pour relier deux segments afin de constituer une voie. Il a été fixé à 60 degré par C. Lagesse. Autrement dit, l'angle formé entre ces deux segments devra être supérieur de $180^\circ - \theta_{max} = 120^\circ$. Les travaux de C. Lagesse ont conduit à fixer $\theta_{max} = 60^\circ$ - Image issue de la thèse [25]

qui n'est pas le cas pour la méthode M1 (où la distribution en est proche mais avec une dérive du côté des grandes longueurs). Les deux méthodes étant très proches l'une de l'autre sur l'ensemble des statistiques obtenues, il a été privilégié M0.

Plus généralement, pour Paris et Avignon : il a été remarqué une amplitude élevée d'angles proches de 90° [25] pour la distribution des angles de déviation entre les arcs. Il est à noter que l'orthogonalité entre les segments semblent privilégier. Nous définissons le nombre de segments connectés à chaque noeuds que l'on nomme le degré et dont nous regardons la distribution. Une majorité de noeuds de degré 3 a été observée ainsi qu'une diminution en loi de puissance pour les degrés supérieurs [Fig 2.10]. Ces statistiques s'ajoutent à d'autres caractérisations comme les coefficients de maillage ou de robustesse appliqués notamment sur les expériences de Buhl et al. [38] sur les galeries de fourmis en 2 dimensions et qui ont été transposés aux villes [18, 39].

La construction de l'hypergraphe "voie" s'effectue à partir de données brutes provenant de l'IGN (*Institut Géographique National*, pour les villes françaises) ou d'OpenStreetMap (pour les villes à l'internationale) et qui sont analysées à l'aide de logiciels SIG (*Système d'Information Géographique*). Les SIG sont des bases de données vectorielles, stockant des informations spatiales et géographiques que nous pouvons traiter à partir de ces logiciels spécialisés (par exemple QGIS). Pour notre problématique, nous récupérons la voirie des villes avec l'ensemble de ces attributs (identifiant, géométrie, nom, fonction, etc) et nous en conservons seulement deux : l'identifiant de chaque segment et leur géométrie (longueurs et positions).

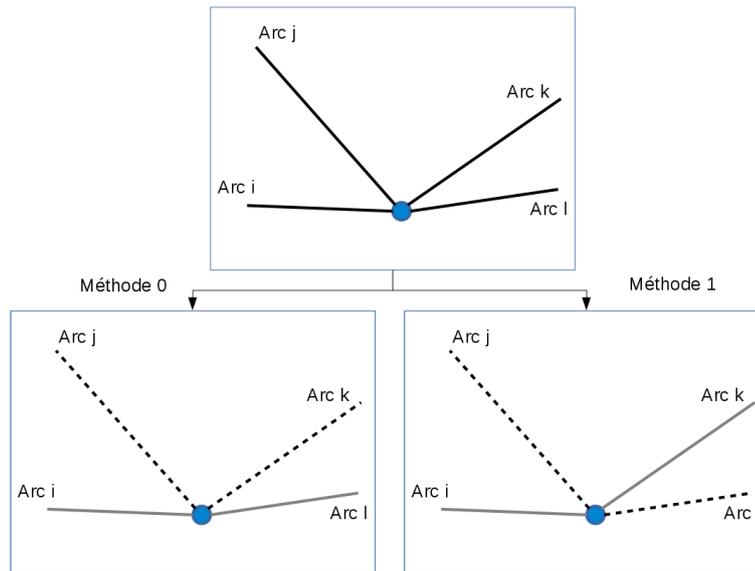


FIGURE 2.8. Exemples d'intersection entre quatre arcs (segments). C. Lagesse a défini deux méthodes de continuité à partir d'un angle seuil. La méthode 0 (à gauche) relie en priorité les arcs qui tendent à être alignés et dont l'angle formé par deux segments - sera supérieur à $180^\circ - \theta_{max}$ où θ_{max} est l'angle seuil de déviation (voir figure 2.7). Ici l'arc i et l'arc l sont réunis car l'angle formé est proche de 180 degré. Les arcs j et k ayant un angle formé plus faible, le lien entre ces deux arcs peut se faire seulement si il est supérieur à l'angle $180^\circ - \theta_{max}$. Si l'angle formé est inférieur, les deux arcs restent "célibataires". La méthode 1 (droite) utilise la somme minimal des angles minimales de déviation formés par les différents couples possibles de segments. Pour ce cas, nous obtenons la somme la plus faible pour les couples d'arcs : couple (i, k) et couple (j, l) . Comme pour la méthode précédente, un angle seuil θ_{max} est imposé pouvant interdire le lien entre certains couples d'arcs. À partir d'une analyse statistique des deux hypergraphes sur la ville d'Avignon, il a été choisi la méthode 0 pour $\theta_{max} = 60^\circ$. - Image issue de la thèse [25]

À partir de ces deux attributs, nous pouvons reconstruire le graphe viaire et former les *voies* en fonction d'une méthode de continuité. Nous avons utilisé le plugin *Morpheo* développé par C. Lagesse [25] pour QGIS et qui reconstruit les voies par l'intermédiaire de la méthode M0 tout en faisant un filtrage au préalable (enlevant certains éléments comme les voies d'accès au bâti). Par ailleurs, il permet de faire varier l'angle seuil d'ajouter une zone tampon autour des intersections où il y a des ambiguïtés (comme par exemple les ronds-points) et de faire différentes analyses de hiérarchisation des voies à l'aide des indicateurs de la théorie des graphes.

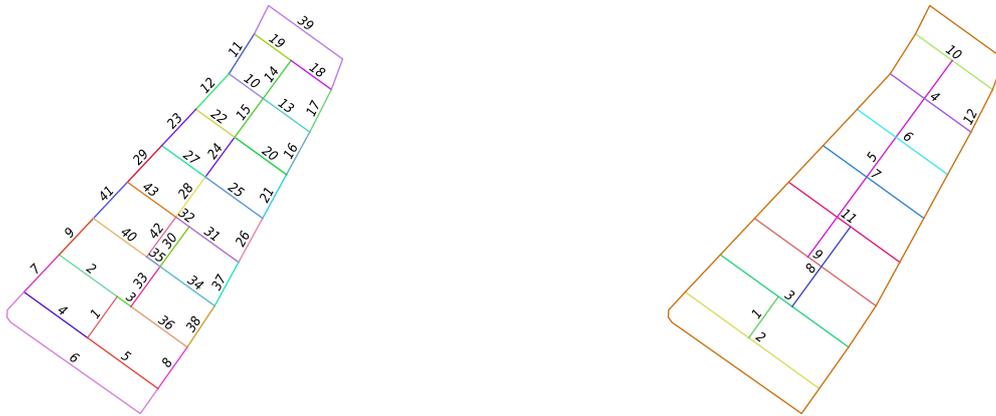


FIGURE 2.9. Reconstruction des *voies* (droite) associées au graphe (gauche) à partir de la méthode M0. Nous obtenons un réseau constitué de voies qui peuvent être aussi bien un unique segment (voie 1) que tout le contour du réseau (voie 12).- Image issue de la thèse [25]

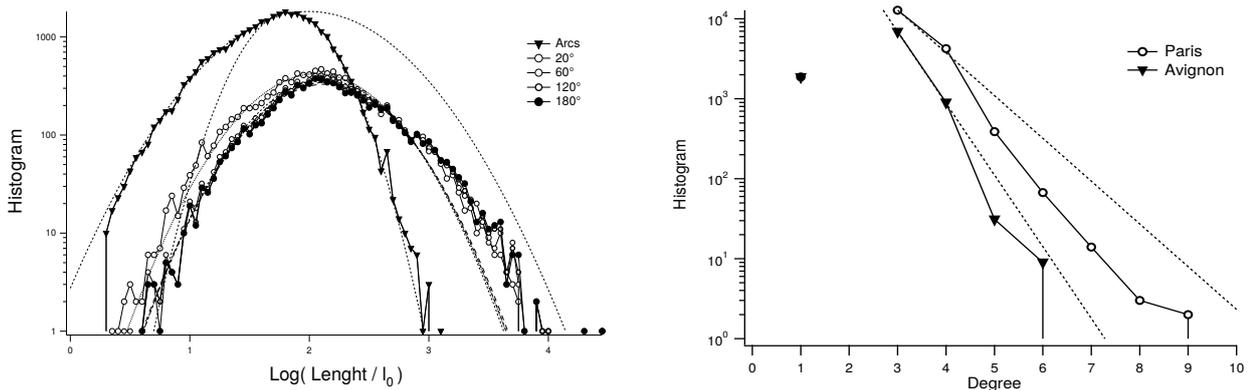
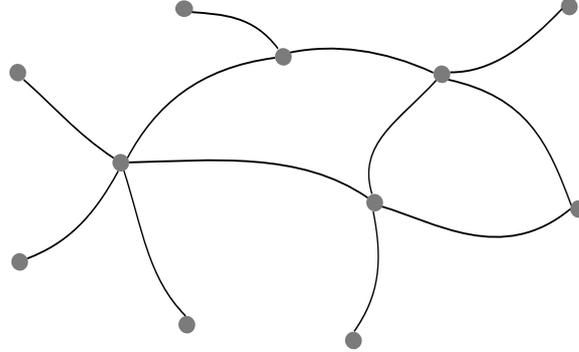


FIGURE 2.10. Distribution du logarithme des longueurs des voies d'Avignon (en échelle logarithmique en ordonnée, à gauche) et l'histogramme du degré des noeuds (échelle logarithmique en ordonnée, à droite) pour Avignon et Paris. Les distributions des longueurs sont représentées pour différents angles seuils. Nous remarquons sa forme proche d'une gaussienne en échelle standard et parabolique en échelle logarithmique en ordonnée. En ce qui concerne le degré, pour Paris comme pour Avignon, nous avons une majorité de noeuds de degré 3 ainsi qu'une décroissance de la distribution pour des degrés plus faibles. - Images issue de la thèse [25]

3. Lecture de la spatialité

En théorie des graphes, différentes mesures ont été développées afin de quantifier l'importance des sommets constituant un réseau. Cette quantification se traduit par des indicateurs et notamment des indicateurs de centralité. Différentes centralités

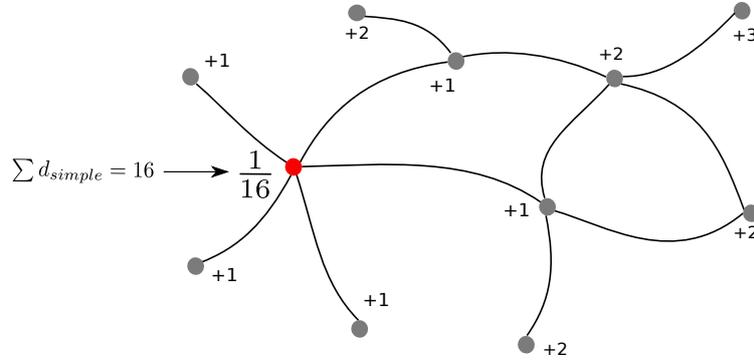
existent tel que la *closeness*, la *betweenness* ou le *degré*. Nous les illustrons sur les sommets du réseau ci-dessous.



Pour un sommet de référence s_{ref} , la *closeness* est définie par l'équation suivante :

$$closeness (s_{ref}) = \frac{1}{\sum_{s \in G} d_{simple}(s, s_{ref})}$$

où $d_{simple}(s, s_{ref})$ est le nombre de plus courts chemins s_{ref} et un autre sommet s appartenant à G (ensemble des sommets du réseau).

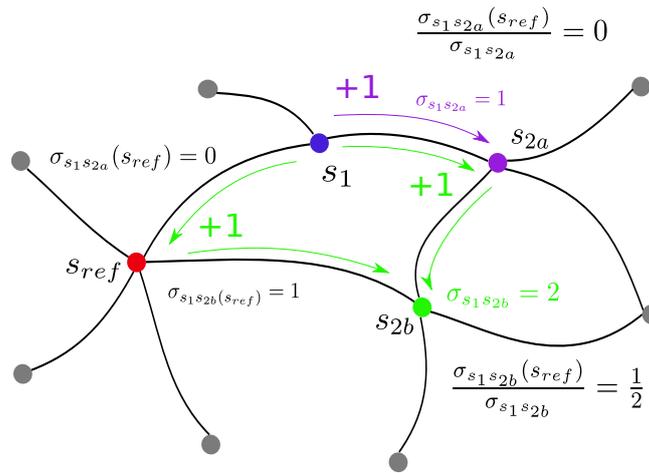


C'est un indicateur de proximité topologique : plus son score est élevé, plus le noeud (sommets) sera accessible à l'ensemble du réseau pour un minimum de tournant.

La *betweenness* s'écrit :

$$betweenness (s_{ref}) = \sum_{s_1 \neq s_2 \neq s_{ref} \in G} \frac{\sigma_{s_1 s_2}(s_{ref})}{\sigma_{s_1 s_2}}$$

où $\sigma_{s_1 s_2}(s_{ref})$ est le nombre de plus courts chemins (au sens de la distance topologique) entre deux sommets s_1 et s_2 et passant par s_{ref} , tandis que $\sigma_{s_1 s_2}$ est le nombre de plus courts chemin entre les deux sommets.

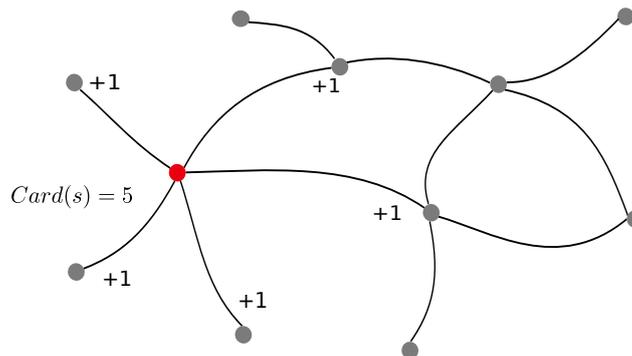


Plus son score est élevé, plus le sommet se situe sur le chemin le plus court de l'ensemble des trajets existant dans le réseau.

Le degré qui s'écrit,

$$\text{degré}(s_{ref}) = \text{Card}(s \in G / \exists \text{ un segment entre } s \text{ et } s_{ref}),$$

il hiérarchise les sommets en fonction du nombre de connexions avec les autres sommets : plus le nombre de segments connectés au sommet est important, plus son score va être élevé.



La *Space Syntax* contient des indicateurs similaires non pas sur les sommets mais sur les voies du réseau viaire. Elle quantifie l'accessibilité des voies par un indicateur équivalent à la *closeness* [40]. Cet indicateur tient compte du nombre minimal de tournant pour aller d'une voie à une autre (ce que nous avons précédemment défini comme la distance topologique). Appliqué à l'hypergraphe des voies, il révèle une hiérarchie les voies les plus accessibles sont les grands axes traversant le centre de la ville [Fig 2.11].



Figure 13: Live Centres of Four English Traditional Towns (integration analysis and the main retail streets are shown on the central grid)

FIGURE 2.11. Application de l'indicateur de centralité sur plusieurs villes anglaises par Hillier. Comme indiqué à la section précédente, il identifie les voies à partir des déplacements d'un usager et de la perspective qu'il peut avoir. Il les hiérarchise en fonction d'un indicateur de *centralité*. La méthodologie de cette hiérarchisation se résume en 4 étapes. Le graphe des rues est transformé en une carte de lignes correspondant aux différentes perspectives illustrée sur la figure 2.6.6 (Ligne A). À partir du graphe dual, il calcule un indice fondé sur la distance topologique minimale pour aller d'un sommet à un autre, équivalent à l'indicateur de *closeness*. Cet indice est projeté sur le graphe des rues de villes anglaises, hiérarchisées selon une échelle de couleurs. Les chemins les mieux intégrés à l'ensemble du réseau sont en rouge, les moins bien intégrés sont en bleu. Nous constatons que les voies du centre des villes sont les plus accessibles. - Images provenant de l'article [40]

L'application de la *closeness* aux voies issues du principe de continuité défini par C.Lagesse et T. Courtat (méthode M0 avec les angles seuils) permet de retrouver également une hiérarchisation du réseau viaire. En effet, en calculant l'indicateur sur les segments, nous constatons des effets de bords, c'est-à-dire que les scores des indicateurs dépendent de la distance aux extrémités du réseau viaire [Fig 2.12]. Dans le cas des voies, nous n'observons plus cette dépendance aux extrémités. En outre, nous obtenons une hiérarchisation du réseau : les voies les plus anciennes ont un score de *closeness* plus élevé. Nous le remarquons pour la ville de Paris où les rues Vaugirard et Saint-Jacques ont des scores de *closeness* élevés (en rouge sur la figure 2.13) indiquant une forte accessibilité à l'ensemble du réseau viaire. La sensibilité de la voie aux changements d'échelle a été également évalué par la *closeness*. Nous

calculons, pour une ville donnée, pour plusieurs échantillons d'échelles différentes [25]. Les écarts de score obtenus pour l'ensemble des voies identifiées sur les deux réseaux étant proches de zéro, la hiérarchisation du graphe varie très peu [Fig 2.14].

Des indicateurs liés à la centralité (*betweenness*, degré, *closeness*) et à la structure même du réseau (longueur des voies, nombre de segments constituant une voie, orthogonalité, connectivité : nombre de segments connectés à une voie) ont été testée. Ces différents tests ont mis en évidence différentes familles d'indicateurs donnant des informations semblables [25]. Trois types d'informations ont été obtenues : une famille liée à la *closeness* (associée à l'accessibilité), une uniquement liée à l'*orthogonalité* et la dernière liée au *degré* (associée à la *betweenness*, longueur des voies et la connectivité). Le *degré* des voies est corrélé à de nombreux indicateurs tels que la *betweenness*, la longueur ou la connectivité [Fig 2.15]. La hiérarchisation fournie par l'indicateur de *closeness* est assez proche de l'ordre d'apparition des voies. Dans les prochaines parties de la thèse, nous ces indicateurs pour le développement de nos modèles de réseaux urbains.

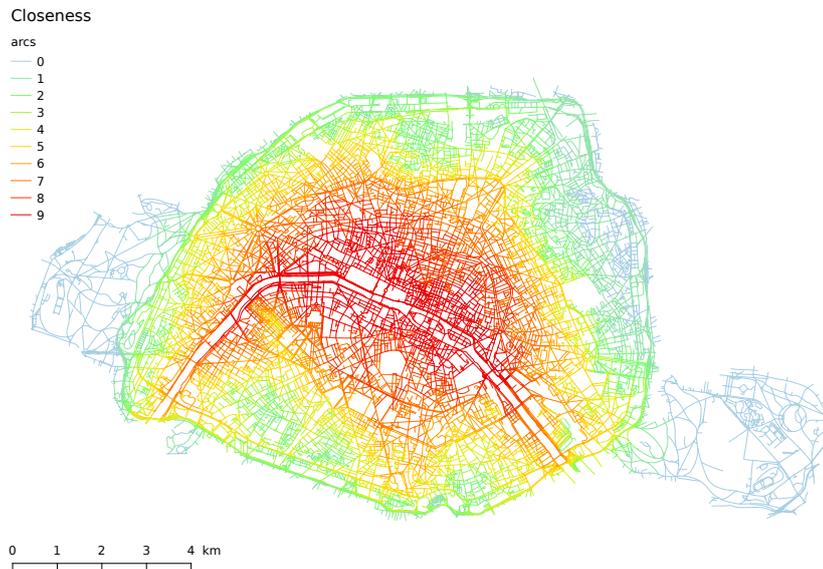


FIGURE 2.12. La *closeness* appliquée au réseau de segments de la ville de Paris. En rouge les arcs les plus accessibles à l'ensemble du réseau, en bleu les moins accessibles. On note clairement l'influence des bords du réseau sur les valeurs de l'indicateur : plus nous sommes au centre de la structure, plus les arcs ont un score élevé. La *closeness* appliquée à un réseau d'arc fournie une information peu pertinente.
- Image issue de la thèse [25]

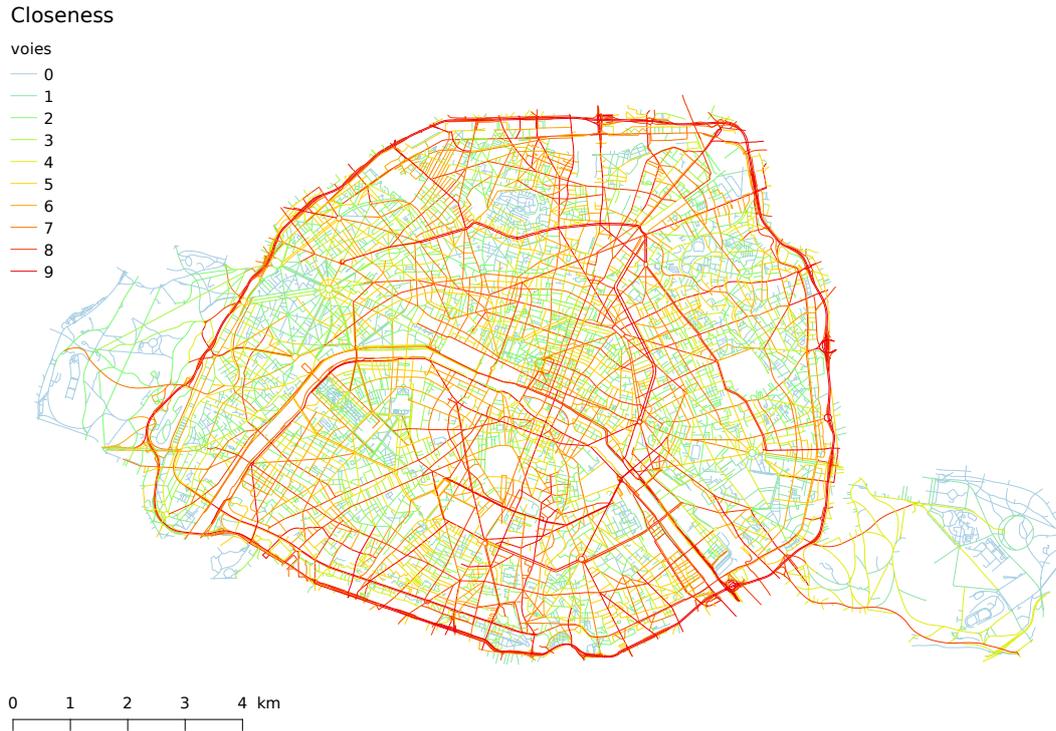


FIGURE 2.13. La *closeness* appliquée aux réseaux de voies de la ville de Paris (obtenue par la méthode de continuité M0). Les effets de bords observés sur la figure 2.12 ne sont plus visibles. Cet indicateur révèle notamment que les voies les plus anciennes sont parmi les plus accessibles. En effet, nous retrouvons (en rouge) des rues de grandes longueurs traversant l'ensemble du réseau comme la rue St-Jacques et la rue Vaugirard. De plus, des voies comme le périphérique parisien ou bien des percements haussmanniens font partis des voies les plus accessibles. Plus généralement, ce lien entre voies anciennes et accessibilité montre une tendance du réseau à se développer en suivant un processus corrélé à la distance topologique, les nouvelles rues ayant tendanciellement une proximité avec ces grandes voies déjà présentes et permettant d'accéder plus facilement à l'ensemble du réseau. - Image issue de la thèse [25]

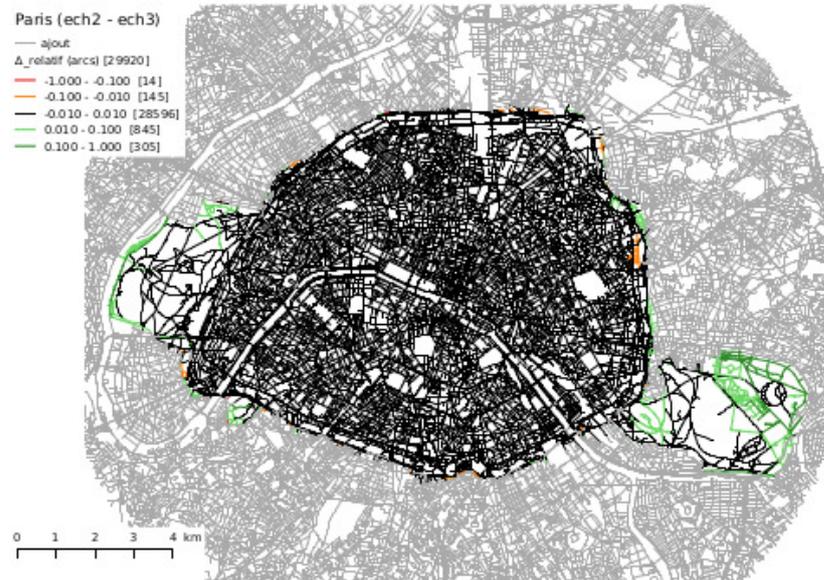


FIGURE 7.20 – Carte de $\Delta_{relatif}$ calculé entre les échantillons 2 et 3 de Paris.

FIGURE 2.14. Carte des écarts relatifs (par l'intermédiaire d'une normalisation) de la *closeness* des voies entre deux échantillonnages de Paris permettant d'y observer les effets d'échelles du centre à la limite communale, et du centre à la limite du grand Paris. Les écarts sont donnés en pourcentage. Si l'écart est positif, nous représentons les segments en vert correspondant à une accessibilité qui augmente avec l'élargissement de l'échantillon du réseau considéré (inversement pour les arcs de couleur rouge). Les variations observées sont faibles (inférieur à 1 %) ce qui démontre l'indépendance de l'hypergraphe aux effets d'échelles. Les variations les plus importantes se situent au niveau des bois de Boulogne et de Vincennes qui sont difficilement connectés au centre de Paris mais gagnent en accessibilité lorsqu'on élargit le réseau. Des études identiques ont été effectuée sur d'autres villes (Avignon, Barcelone, New York) et ont confirmé ces faibles variations (majoritairement inférieur à 1%). - Image issue de la thèse [25]

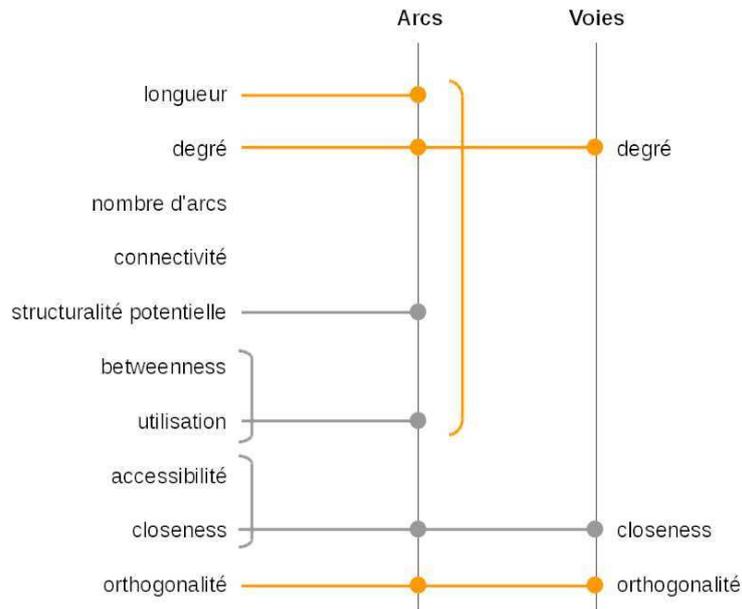


FIGURE 2.15. Résumé des liens entre les multiples indicateurs testés sur les arcs et sur les voies. Des liens ont été mis en évidence en testant les indicateurs sur les arcs et sur les voies, il en ressort 3 familles : *le degré*, *la closeness* et *l'orthogonalité*. En orange, les indicateurs *locaux* qui n'ont pas besoin de l'ensemble du réseau pour être calculé (comme par exemple, la longueur des voies ou le degré). En gris, les indicateurs *globaux* qui s'appliquent sur l'ensemble du réseau comme par exemple *la closeness*. - Image issue de la thèse [25]

4. La distribution des longueurs de voies

Le développement de l'objet *voie* offre une nouvelle lecture du réseau viaire, des analyses statistiques de l'hypergraphe ou bien des indicateurs de la théorie des graphes. Dans cette section, nous allons revenir sur une statistique en particulier : la distribution de longueurs des voies. La distribution du logarithme des longueurs des voies possèdent une forme proche d'une gaussienne (parabole en échelle logarithmique) observé sur de nombreuses villes [25, 7]. Nous illustrons la statistique sur les réseaux viaires de trois villes dans la figure 2.16 : Avignon, Paris, Manhattan.

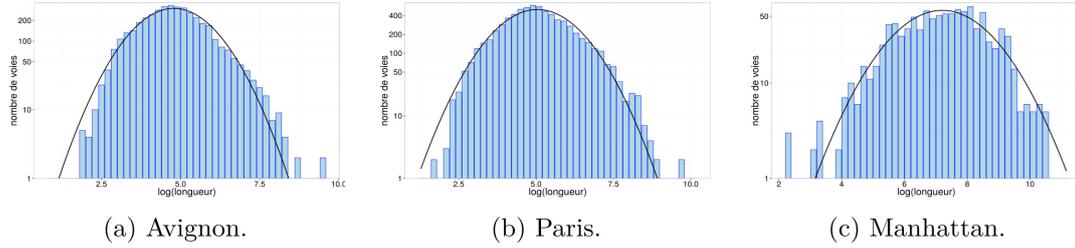


FIGURE 2.16. Trois exemples de distributions du log des longueurs des voies pour des villes pour Avignon, Paris et Manhattan. En échelle logarithmique en ordonnée, nous observons des formes paraboliques qui sont caractéristiques d'une gaussienne en échelle standard.
- Image issue de la thèse [25]

La parabole obtenue en échelle logarithmique en ordonnée caractérise une gaussienne en échelle standard. De ce fait, les distributions des longueurs des voies se rapprochent de celles d'une loi en log-normale. La distribution associée à la loi log-normale $f(x, \mu, \sigma)$ s'écrit

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log(\frac{x}{x_0}) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où μ est l'espérance, σ est l'écart-type et x_0 une valeur de longueur de référence ($x_0 = 1m$) :

Ainsi le passage en échelle logarithmique correspond à $F(x, \mu, \sigma) = \log f(x, \mu, \sigma)$:

$$F(X, \mu, \sigma) = -\frac{X^2}{2\sigma^2} + X \left(-1 + \frac{2\mu}{2\sigma^2}\right) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \log(\sigma\sqrt{2\pi})$$

où $X = \log(\frac{x}{x_0})$ met en évidence une fonction parabolique.

Nous nous posons la question de la reproductibilité de ce type de distribution : quel processus engendre des statistiques suivant une loi en log-normale ? La distribution log-normale correspond à une loi vers laquelle converge le produit d'une suite de variable aléatoire. C'est donc une version multiplicative du théorème central limite (qui retrouve une distribution en loi normale par la somme des effets d'une variable aléatoire) [41]. Le développement de modèles est essentiel pour comprendre le spectre de possibilités des processus fournissant une distribution en log-normales.

Par ailleurs, ces modèles doivent reproduire des réseaux viaires génériques, c'est-à-dire semblables par la forme et par la hiérarchisation des voies que ce qui a été observé pour des villes réelles.



FIGURE 2.17. Cadastre de 1990 de la ville du Creusot (Musée Historique de la ville). Le parcellaire bâti décompose les grandes parcelles agricoles présentes et s'étend autour des rues pré-existantes. - Photographie de *S. Douady*

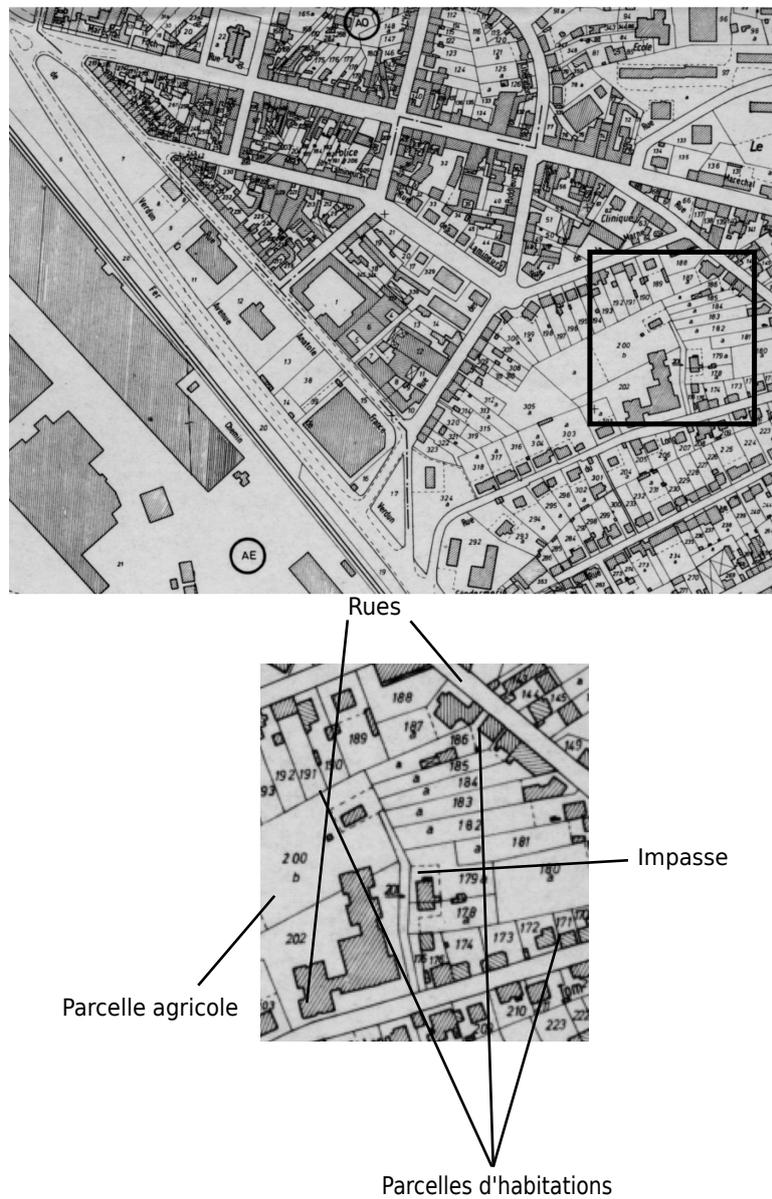


FIGURE 2.18. Autre image du cadastre du Creusot, dans le carré noir, le parcellaire agricole se concentre derrière le bâti étendu le long des routes. L'accès devant être préservé, la création d'une impasse est nécessaire ce qui engendre un début de redécoupage. C'est ce dynamisme de création de voies que nous voulons modéliser. - Photographie de *S. Douady*

Dans le cadre de notre modélisation, nous supposons que le réseau viaire se construit par l'intermédiaire d'un processus de découpages successifs du parcellaire. L'idée provient des observations qui ont été effectuées, notamment sur la ville du Creusot [42] où les parcelles agricoles se divisent en parcelles bâti [Fig 2.17]. Ce processus d'urbanisation fait apparaître de nouvelles rues, comme on peut le remarquer à proximité des grandes voies situées à la périphérie de la ville du Creusot (voir

la figure 2.18). Des parcelles agricoles ont été décomposées en de nombreuses sous parcelles de bâti découpages qui ont été influencés par des voies récemment créées (impasses). Les nouvelles voies sont majoritairement connectées au réseau de manière perpendiculaire comme on peut le constater à l'aide de l'indicateur *d'orthogonalité* pour la ville de Paris [Fig 2.19].



FIGURE 2.19. L'indicateur *d'orthogonalité* appliqué au réseau parisien. Pour une voie donnée, plus le score est proche de 1 (en rouge sur la carte), plus la moyenne des connexions est orthogonale. Sur le cas de Paris, nous remarquons que ce sont des petites voies, proches de grandes rues historiques, qui ont le score le plus élevé. On peut l'observer sur les voies autour de Châtelet ou pour les rues Vaugirard et Belleville. La carte présente de nombreuses zones où une forte orthogonalité est observée. Ce constat évoque l'idée d'un processus de densification par des découpages successifs de manière perpendiculaire autour de grandes avenues. - Image issue de la thèse [25]

Ce type de processus est analogue à ce qu'on observe sur les réseaux de craquelures : des générations de craquelures plus récentes se développent en reliant les anciennes perpendiculairement. Cette hiérarchisation a été précisée sur différentes expériences, principalement sur de l'argile. Les statistiques de longueurs des craquelures sont proches d'une loi log-normale [Fig 2.20]. Un autre exemple est donné par un pot de moutarde japonais en céramique, a été colorié suivant différentes logiques afin de mieux déterminer le processus de création des craquelures [Fig 2.21].

La statistique en log-normale présente sur les craquelures conforte l'idée d'une analogie possible avec le réseau viaire. Comprendre la morphogenèse de ce réseau

devient pertinent pour nos problématiques. Des modélisations de réseaux de craquelures via des processus de division/découpages ont déjà été réalisés par le passé et peuvent nous intéresser sur leur principe de découpage. Partant de différentes règles liées à l'aire ou au périmètre, des nouvelles craquelures sont créées entre les précédentes [43, 44, 45]. Toutefois, les statistiques des longueurs des craquelures modélisées s'approchent plus de loi de puissance que de loi log-normal.

Dans le cas du réseau viaire, il existe très peu de modélisation par morphogénèse utilisant des processus de redécoupages. Nous pouvons citer T. Courtat [7] qui a développé plusieurs processus de découpage afin d'obtenir une proximité statistique [Fig 2.23] avec les distributions des aires des îlots (cellule entourées par les voies) observées pour de nombreuses villes proches d'une forme en lois de puissances [46]). A. Perna et ses co-auteurs [47] développent également un modèle basé sur un processus similaire (modèle Mondrian, voir la figure 2.22). L'objectif était de tester une méthodologie de hiérarchisation des voies.

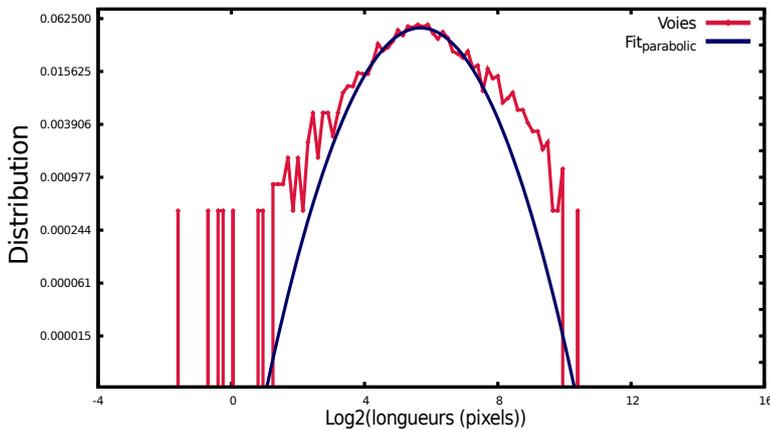


FIGURE 2.20. Distribution du logarithme des longueurs des voies - craquelures (à gauche) calculée sur les réseaux de craquelures d'argile (observés à droite). Cette distribution, en échelle logarithmique en ordonnée, est approximée par une parabole. Comme dans le cas des villes, la statistique des longueurs des voies s'approchent d'une loi en log-normale. - Image craquelures d'argile de *P. Bonnin*, vectorisation et données des voies de *P. Valcke*, traitement données de *R. Pousse*.

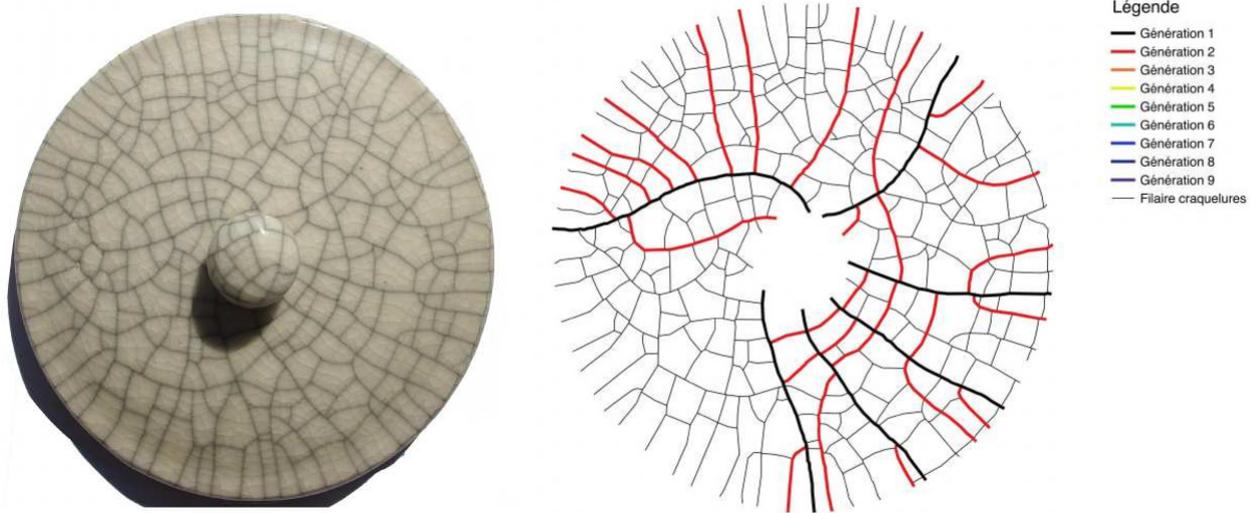


FIGURE 2.21. Réseaux de craquelures sur un pot de moutarde japonais en céramique (photo à gauche, vectorisé à droite). Tentative visuelle de hiérarchisation des craquelures en fonction de leur ancienneté. Nous partons de la perception que l'on peut avoir du réseau où les craquelures les plus récentes croisent les plus anciennes de manière perpendiculaire. Cela donne plusieurs générations de craquelures. La génération 0 de craquelures est identifiée en fonction de sa connexion sur les deux extrémités aux bords du pot. Pour la génération 1, au moins une extrémité de la craquelure est connectée à une craquelure de génération 0 (l'autre extrémité pouvant être soit connectée à un bord, soit connectée à une autre craquelure de génération 0), et ainsi de suite. C'est cette idée de création de voies par des découpages successifs que nous voulons modéliser pour le réseau viaire. Images de *P. Bonnin et E. Degouys (Morphocity)*.

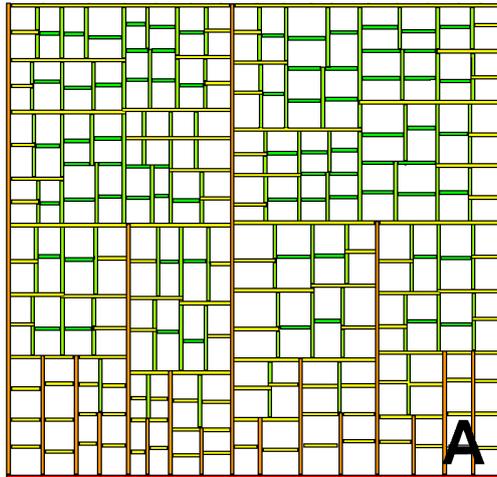


FIGURE 2.22. Modèle Mondrian générant de nouvelles voies par découpages successifs. Nous voulons explorer des modèles de densification de réseau afin de retrouver la même statistique de longueur que celle obtenue dans les villes. Ici, le processus se base sur des générations de voies développées de manière orthogonales à la génération d'avant en partant d'une fenêtre carrée initiale. La coloration des voies est liée à un calcul de distance topologique sur la totalité du réseau. - Images provenant de l'article [47]

5. La morphogenèse viaire

La reproduction de la distribution des aires des îlots (ensemble de cellules entourés par les voies) a été l'objectif principal de l'article de Barthélémy et Flamini [48, 49]. Leur modèle se base sur un processus de création de portions de route reliant des points apparaissant durant la simulation. Le réseau se développe de telle sorte que chaque nouvelle voie issue d'un point nouvellement créé rejoint les voies présentes de manière orthogonale. Ces points suivent spatialement une distribution de densité choisie (uniforme, exponentiel...) dont on peut ajouter des obstacles afin de reproduire certaines contraintes topographiques (rivière). Ils obtiennent des formes différentes de réseaux viaires (homogène, polarisé) et en analysent des variables statistiques liées aux îlots comme la distribution des aires mais aussi la distribution des rapports d'aspect (rapport des deux dimensions d'un objet). La distribution des aires suit des lois de puissance en partant d'une distribution spatiale exponentielle. Cependant cette modélisation du réseau viaire se limite à un ensemble de segments sans principe de continuité.

En partant d'une démarche différente, T. Courtat a établi un autre modèle[35]. Ce modèle est basé sur un potentiel P de création de routes qui dépend du réseau déjà présent. La forme du réseau n'étant pas pré-établie, il se construit au fur et à mesure de l'évolution à partir du potentiel. Ce potentiel quantifie la probabilité d'un nouveau segment à s'installer autour d'un certain secteur du réseau. Il s'écrit :

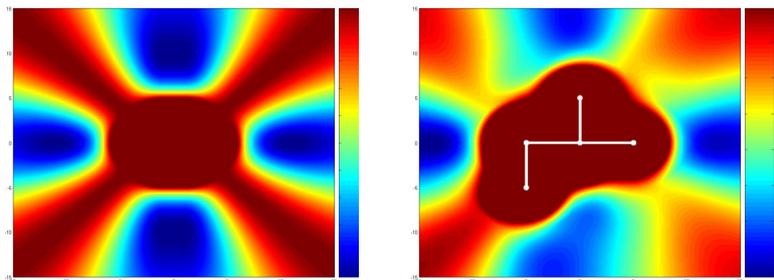


FIGURE 2.23. Gauche : Champs de potentiel crée par T. Courtat, pour un segment de route horizontal. En bleu les zones qui sont favorables à la construction d'un nouveau segment notamment à sa perpendiculaire ainsi que sur ses extrémités limitant les autres possibilités d'angles. En rouge, les zones défavorables qui sont à proximité du segment de base ainsi que sur les diagonales. Droite : Champs de potentiel pour l'addition de 3 segments - Image issue de la thèse [7]

$$P_h(x) = V(d(h, x)) \times \cos(|2\angle(h, x)|)$$

Le potentiel dépend d'un terme d'angle, $\angle(h, x)$ est l'angle entre h , le centre du segment établi, et x la position possible de l'extrémité du nouveau segment. Le cosinus contraint les segments à être orthogonaux aux segments déjà présents (indiqué par les diagonales rouges sur la figure 2.23). Le potentiel se compose également de la fonction radiale $V(d(h, x))$ défini par

$$V(r) = \alpha \times \left(\left(\frac{\beta}{r} \right)^{2n} - \left(\frac{\beta}{r} \right)^n \right)$$

r est remplacé par $d(h, x)$ ou d est la distance métrique dans $P_h(x)$. Cette fonction est inspirée du potentiel issue d'un modèle de physique atomique, le potentiel Lennard-Jonnes¹. Il crée un rayon de rejet autour du segment établi. Ce rejet est vu comme l'ensemble des installations (maisons, commerces, etc) qui se construisent autour des routes et qui ne permettent pas le développement de nouveaux segments. α est un paramètre d'amplitude, β , le rayon de rejet équivalent à la zone d'inhibition autour du segment (en rouge sur la figure 2.23) et n établie les valeurs de probabilité d'attraction et de répulsion que le nouveau segment s'installe à proximité du réseau.

Plusieurs paramètres vont également influencer la géométrie du réseau en plus de β , T. Courtat en établie six au total qu'il fait varier dans l'espace des paramètres afin d'observer les différents comportements obtenus. Deux paramètres essentiels sont illustrés sur la figure 2.24. La proximité d'implantation force les nouvelles rues à se développer le plus proche possible du réseau déjà en place (parties bleues foncées de la figure 2.23) : plus le score est élevé, plus la ville est compacte. Le second

1. Le potentiel de Lennard-Jonnes décrit l'interaction entre 2 atomes au sein d'un gaz monoatomique.

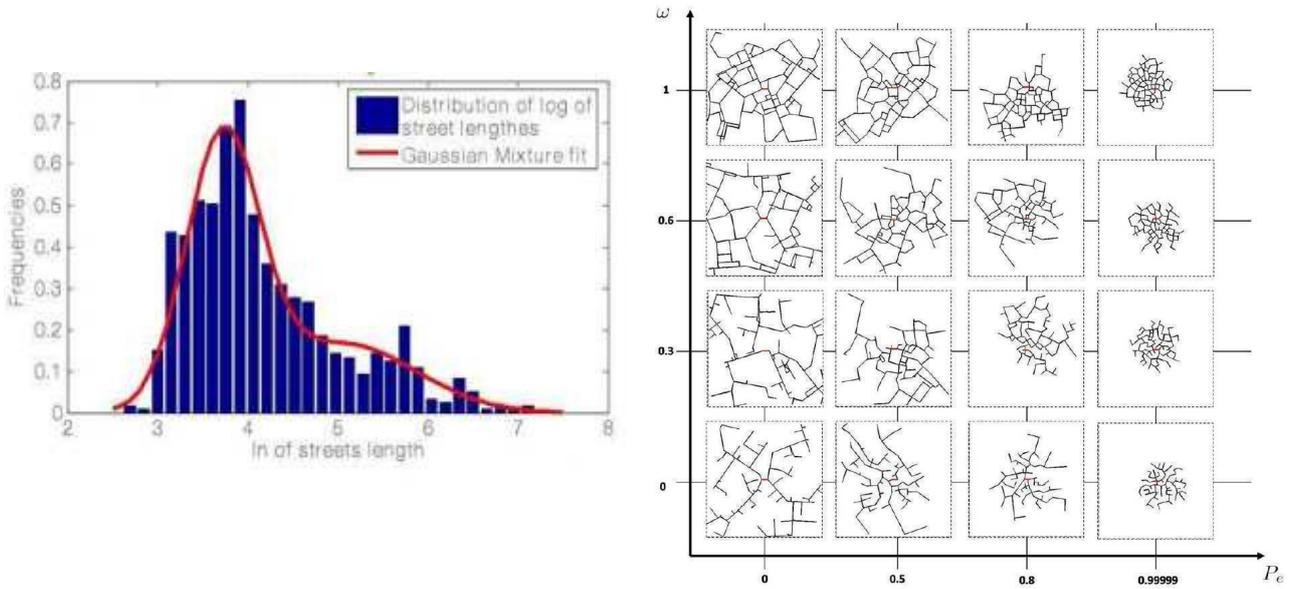


FIGURE 2.24. À gauche : La distribution des longueurs des voies pour le modèle de T. Courtat, sa distribution ne tend pas vers une log-normale. À droite, observation de la forme du réseau pour l'évolution de deux paramètres : la proximité d'implantation en ordonnée et le paramètre d'organisation en abscisse qui illustre le rôle de chacun. La proximité d'implantation contraint le réseau viaire à se développer sur un périmètre restreint. Le paramètre d'organisation est un paramètre d'optimisation qui facilite la création d'îlots et évite les impasses. - Image issue de la thèse [7]

caractérise l'organisation du réseau : ce paramètre fait en sorte que la voirie se reconnecte au réseau en privilégiant les boucles et en limitant les impasses. Ces paramètres engendrent des effets qui fournissent des interprétations pertinentes aux chercheurs en sciences humaines dans la compréhension du réseau viaire. En effet, une interprétation possible du paramètre d'organisation du réseau serait liée à un rapport de pouvoir public/privé dans les villes. Une forte domination du pouvoir privé donnerait des réseaux avec de nombreuses impasses afin que les riverains puissent rester connecter au réseau d'ensemble sans être située dans une rue de forte influence (protégeant ainsi leur tranquillité). Inversement, un fort pouvoir public améliorerait la connexion globale du réseau en créant de multiples connexions entre les voies afin de faciliter la circulation dans la ville (ces interprétations proviennent du séminaire "*Les réseaux dans le temps et dans l'espace*" [50]).

Dans le cadre de la statistique des longueurs des voies, les distributions issues de cette modélisation sont éloignées d'une loi log-normale. L'explication provient du manque de continuité entre les segments. En effet, cette étude ne présente pas d'aspects multi-échelles comme pour la notion de voie telle que définie dans la section précédente : la voie peut identifier de grandes avenues faisant plusieurs kilomètres et

traversant l'ensemble du réseau ainsi que des voies plus courtes tel que des impasses qui couvrent une zone précise du territoire.

Nous concluons cette partie d'introduction avec l'objectif principal de la thèse : Établir des modèles de morphogenèse viaire ayant la même statistique des longueurs des voies observées que celles observées pour une majorité de villes, s'approchant d'une loi en log-normale. Pour cela, nous nous basons sur un processus de création de voies par des découpages successifs (découpes orthogonales). Ce processus est justifié par l'analogie faites avec les réseaux de craquelures, que ce soit par la nécessité d'une notion de continuité de segments afin de définir et hiérarchiser les craquelures, que par l'analyse des distributions de longueurs de ces craquelures, s'approchant d'une loi en log-normale. Afin de pouvoir faire une comparaison détaillée avec ces futurs modèles, une analyse plus fine des distributions des voies des réseaux réels est nécessaire à partir de tests statistiques.

Deuxième partie

Modélisation du réseau viaire

Analyse statistique et premières modélisations

1. Outil de caractérisation des distributions

Avant de décrire les premières tentatives de modélisation, nous allons expliquer le développement de l'outil statistique que nous avons utilisé afin de caractériser la distribution des longueurs des voies.

Le test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) est un test d'hypothèse affirmant la correspondance entre deux distributions données [51, 52]. Il est fréquemment utilisé pour identifier la forme d'une distribution provenant de données expérimentales par rapport à une loi théorique. Son principe est basé sur le calcul de l'écart maximal entre la fonction de répartition des données empiriques et la fonction de répartition de la loi estimée, c'est-à-dire ici une loi normale, puisque nous considérons le logarithme des longueurs des voies. Rappelons que la loi normale dépend seulement de deux paramètres : la moyenne μ et l'écart-type σ . C'est le produit de cet écart par la racine de n (le nombre de données totales) qui nous permet de valider la conformité de la distribution avec la loi normale. Si ce produit est supérieur à une valeur c , le seuil déterminé dans la table de Kolmogorov, l'hypothèse est rejetée avec une probabilité $\alpha(c)$ de se tromper. Autrement dit, nous avons l'équation suivante :

$$(3.1) \quad \mathbb{P}(\sqrt{n} \times D_{max} > c) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha(c)$$

où D_{max} est l'écart maximal entre les deux fonctions de répartition, n le nombre de données et $\alpha(c)$ correspond à la *pvalue* du test de Kolmogorov-Smirnov.

En appliquant ce test à la ville de Londres, le rejet du test fournit une probabilité $\alpha(c)$ de se tromper inférieur à 0.1%. Cette première tentative nous donne une distribution du log des longueurs des voies de Londres qui s'éloigne fortement d'une loi normale. De ce que nous observons sur la figure 1, l'écart entre fit et distribution est le plus grand à proximité de μ , paramètre commun entre les deux courbes. Cet écart met en évidence une limite du test K-S. En effet, le test instaure μ comme sommet de l'ajustement de courbe, ce qui suppose une symétrie de la distribution empirique par rapport à sa moyenne [52]. Pour ce cas, la distribution est asymétrique, créant des décalages de positionnement avec le fit, notamment à proximité de μ .

Ci-dessous, les valeurs des différentes données de la distribution et du test de K-S pour la ville de Londres :

$$n = 22489 \text{ voies, } \mu = 6.77, \quad \sigma = 1.87, \quad D_{max} = 0.019, \quad D_{max} \times \sqrt{n} = 2.992.$$

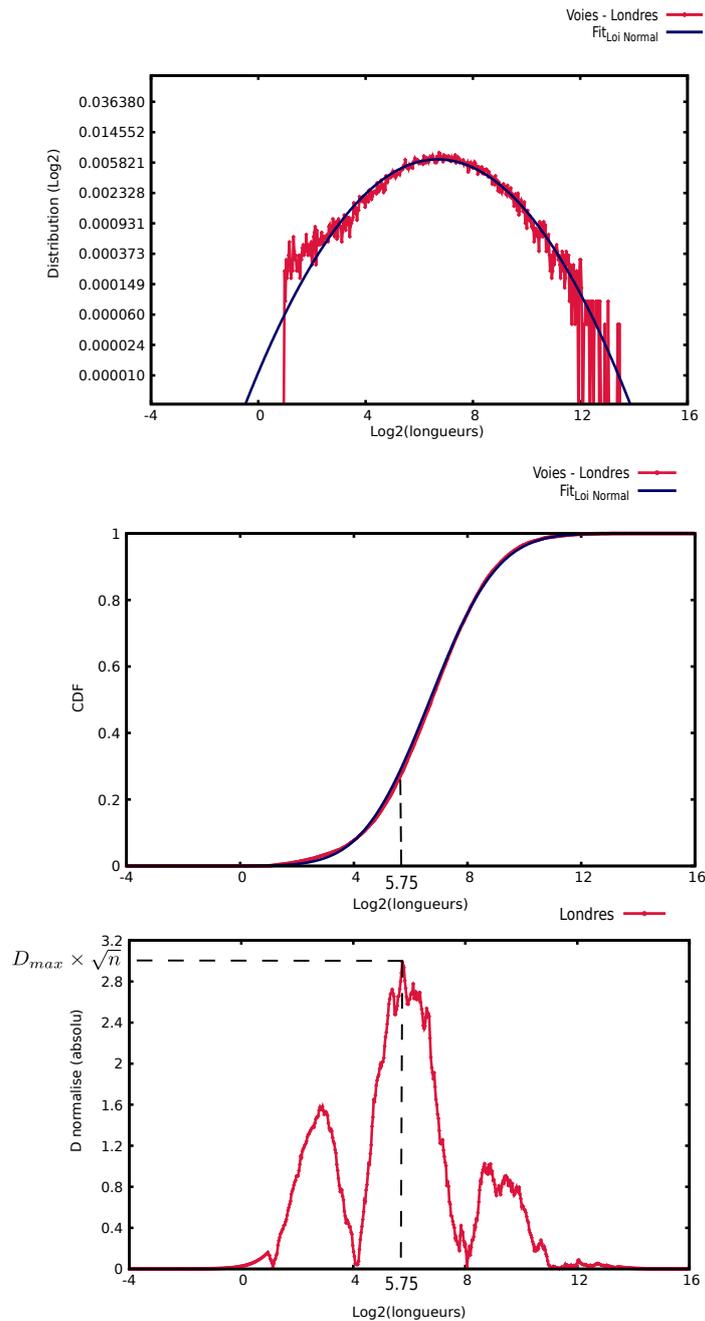


FIGURE 3.1. Application du test K-S sur la distribution du logarithme des longueurs des voies du centre ville de Londres. La figure du haut montre la distribution ainsi que le fit de la loi normale dépendant de μ et de σ (en échelle logarithmique en ordonnée). En calculant les fonctions de répartition (centre), nous pouvons mesurer l'écart D normalisé et son écart D_{max} (bas). D_{max} est proche de la moyenne $\mu = 6.77$ qui met en évidence le décalage entre les deux sommets : pour que ce test fonctionne, le sommet doit être la base commune des distributions observée et estimée.

Pour que l'on puisse disposer d'un test adapté aux distributions observées, nous avons construit une autre méthode d'ajustement. En reprenant la normalisation du test K-S, nous nous sommes basés sur un ajustement de courbe d'une fonction parabolique (rappelons que le logarithme d'une distribution en log-normale est une parabole) calculé sur un échantillon de données de la distribution à proximité du sommet et dont nous pouvons faire varier son échantillonnage. L'ajustement est calculé par une interpolation polynomiale. À la différence du fit gaussien construit sur les deux paramètres μ et σ de la distribution, le fit parabolique ne dépend que de μ et de l'ensemble des données à son voisinage [Fig 3.2].

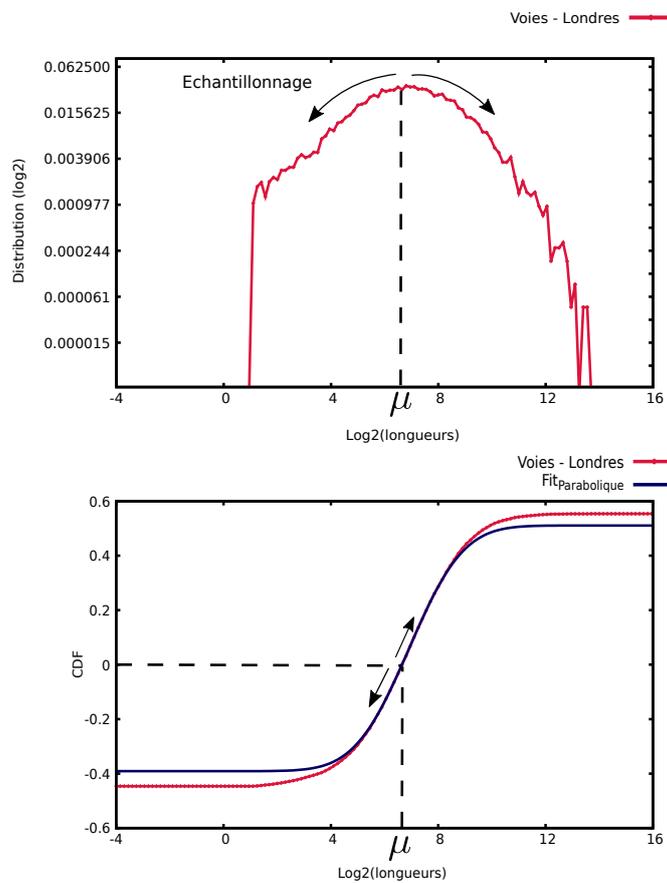


FIGURE 3.2. En haut, représentation de la distribution des longueurs des voies de la ville de Londres. En bas, représentation de la fonction de répartition de la distribution et du fit. Nous partons de l'hypothèse que le logarithme de la distribution peut être approximé par une parabole à proximité du sommet situé en μ . Nous construisons notre ajustement en fonction des données situées autour de cette valeur et nous calculons les fonctions de répartition en intégrant à partir de la moyenne de la distribution jusqu'aux queues des courbes. Contrairement au test K-S classique, nous sommes sûrs que le fit et la distribution sont confondus sur une zone commune.

Nous modifions l'échantillonnage de manière à ce que le fit soit confondu sur une majeure partie de la distribution. Le but est de mesurer l'écart à la moyenne lorsque l'éloignement est conséquent entre les deux courbes. Cet écart sera un élément de comparaison entre les distributions issues de nos modèles et celles observées dans les réseaux viaires réels [Fig 3.3]. Pour quantifier cet écartement, nous reprenons le calcul du test K-S entre \sqrt{n} et l'écart D . Nous nous référençons à la table de Kolmogorov pour valider le test d'hypothèse de similitude à partir de la valeur obtenue. Si D_n est proche de 0, les deux courbes sont confondues. En revanche, si D_n augmente la probabilité du rejet de l'hypothèse croît. Du seuil $c = 1.07275$ à $c = 1.949$, nous diminuons la probabilité de rejet de 20 % à 0.1%. Pour des seuils supérieurs, les deux courbes sont clairement distinctes.

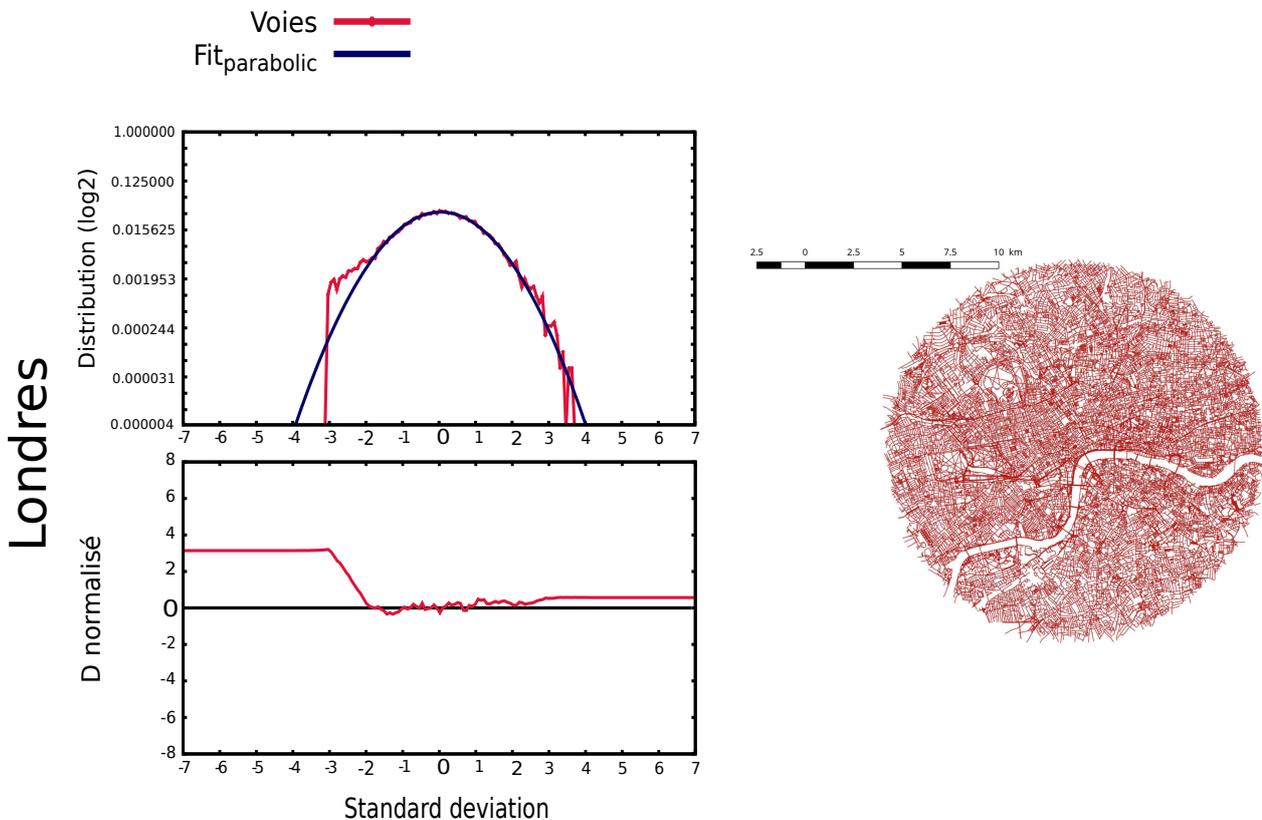


FIGURE 3.3. Distribution du logarithme des longueurs des voies en échelle logarithmique et son fit parabolique, en haut. En bas, l'écart normalisé entre les deux courbes en fonction de l'écart-type du logarithme des longueurs des voies. Pour le cas de Londres, la distribution suit une parabole sur l'ensemble des grandes longueurs. L'éloignement s'effectue du côté des petites longueurs (observation d'un détachement supérieur à 2 proche de 2σ qui est lié à un excès de longueurs inférieur à 20 mètres).

Nous avons appliqué ce fit sur plusieurs distributions de villes analysées par C. Lagesse :

- Avignon
- Bruxelles
- Londres
- New-York
- Paris
- San Francisco
- Téhéran

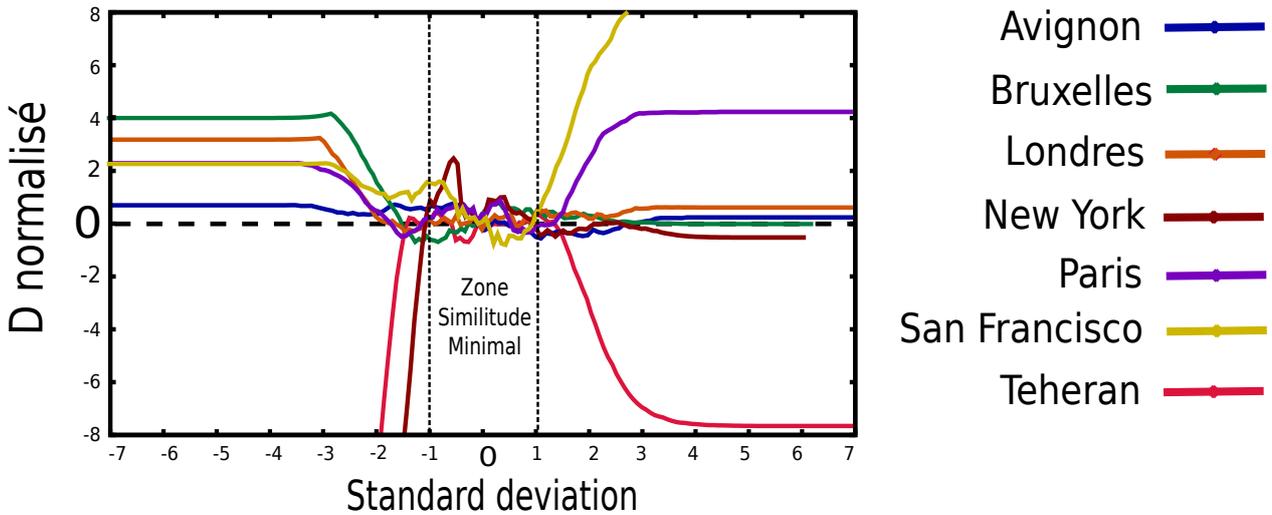


FIGURE 3.4. Écarts normalisés pour les différentes villes étudiées. Nous avons estimé une zone de similitude entre le fit et la distribution sur au moins un écart-type. L'écart minimal du côté des petites longueurs est reliée à la ville de New York et du côté des grandes longueurs à San Francisco. Les autres distributions s'éloignent du fit sur des écarts légèrement supérieurs, entre 1 et 2 écarts-types. Il existe des distributions confondues sur la totalité du côté des grandes longueurs comme Londres, Bruxelles ou New York. Avignon est la seule ville où le fit parabolique se confond intégralement avec la distribution, ce qui est certainement lié à sa faible densité de voies relativement aux autres villes sélectionnées.

Le critère essentiel de notre sélection a été le nombre important de voies, ce qui nous a permis d'avoir une statistique riche pour les distributions (Avignon possède le nombre de voies le plus faible, le reste étant supérieur à 9000 voies avec Téhéran comme maximum). Il n'y a pas de critère lié directement à la forme du réseau. En revanche, nous avons sélectionné 3 capitales européennes dont 2 de formes plus organiques (Bruxelles et Londres) n'ayant pas subi d'importante réorganisation comme pour Paris durant le XIXème siècle. Nous avons également sélectionné aussi la ville d'Avignon, ayant un réseau moins dense et une structure plus organique. Enfin,

nous avons choisi deux villes Nord-Américaines (New-York et San Francisco) avec des réseaux plus quadrillés ainsi qu'une ville asiatique (Téhéran) qui s'est développée récemment.

Ville	μ	μ_{fit}	σ	σ_{fit}	$n(voies)$
Avignon	6.91	6.71	1.53	1.40	1402
Bruxelles	6.94	6.88	2.09	1.97	21462
Londres	6.77	6.64	1.87	1.73	22489
New York	7.52	8.08	2.04	2.77	40163
Paris	7.19	6.36	1.78	1.54	9006
San Francisco	6.96	5.56	2.04	1.70	9175
Teheran	6.82	7.31	1.89	2.58	53770

TABLE 3.1. Valeurs des moyennes et des écarts-type des distributions et des fits pour les différentes villes étudiées. Les moyennes des logarithmes des longueurs des villes sont toutes similaires avoisinant $\mu = 7.0$ ($\mu_{global} = 7.01$, 128 mètres en échelle standard). New York a la moyenne la plus élevée (longueur moyenne des voies proche de 200 mètres environ) et Londres la plus faible (100 mètres). Exceptée Avignon, les écarts-type sont proches de $\sigma = 2.0$. Dans l'ensemble, les fits ont des moyennes et des écarts-type équivalent aux valeurs des distributions. Seules New York et Téhéran possèdent des fits paraboliques plus larges.

Le constat d'ensemble est que les distributions se confondent avec le fit parabolique sur une grande partie du sommet des courbes, entre 1 et 2σ [Fig 3.4]. Les différences entre les villes se révèlent principalement en s'éloignant du sommet. Pour des écarts-types supérieurs (en absolu), notre test révèle un excès de petites longueurs en queue de distribution de nombreuses villes (Avignon, Bruxelles, Londres, Paris, San Francisco), les valeurs de longueurs variant de 2 à 16 mètres. Cette hausse de voies de faibles longueurs peut s'expliquer par des ambiguïtés dans le filtrage des données. En effet, *Morpheo* peut prendre en compte des voies non pertinentes dans le réseau d'ensemble comme les chemins d'accès au bâti, ou bien des zones piétonnes situées dans les parcs mais aussi des mauvaises interprétations de certains objets de circulation comme les rond-points décomposés en plusieurs voies [Fig 3.6].

Du côté des grandes longueurs, peu de distributions s'éloignent du fit parabolique. En effet, seules Paris et San Francisco possèdent un écart plus important par rapport au fit. Dans le cas de Paris, nous supposons que cette augmentation est reliée aux importantes restructurations du XIXème siècle (les percements Haussmanniens ont augmenté le nombre de grandes avenues.

New York et Téhéran ont le même profil avec des fits de plus grands écart-types que la distribution ce qui crée des écarts importants notamment du côté des petites

longueurs. Il est important de noter que ce sont les deux villes ayant les plus grands nombres de voies. En outre, ce sont deux villes modernes de grandes échelles, très quadrillées, plus adaptées à des déplacements en voitures que piétonniers ce qui pourrait expliquer ce manque de petites voies [Table 3.1].

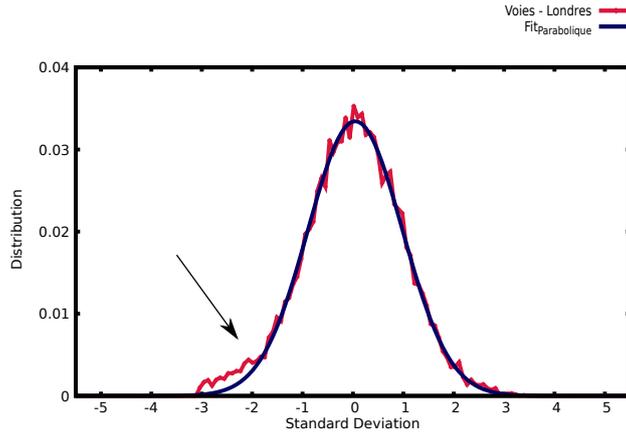


FIGURE 3.5. La distribution du logarithme des longueurs de voies pour la ville de Londres, en échelle standard en ordonnée. L'écart D_n s'agrandit en queue de courbe pour des valeurs extrêmement petites par rapport à l'ensemble des voies constituant le réseau. Le reste de la courbe se confond avec le fit.

À partir d'un fit parabolique et d'une analyse en chaque point, le test fournit un écart D_n indiquant la similitude entre loi log-normale et distribution continûment le long de celle-ci. Ainsi en dehors des queues de courbe, nous avons remarqué qu'une majeure partie des distributions convergent vers cette loi [Fig 3.5]. Nous aimerions pouvoir appliquer un test d'hypothèse entre fit et distribution et quantifier leur concordance "globale" comme pour le test de Kolmogorov-Smirnov. La fonction de répartition ne tend pas vers 1 mais converge dans son voisinage en fonction de son ajustement avec les distributions (l'écart de convergence est égal aux écarts D obtenus des deux côtés de la courbe). Par conséquent, il n'est pas possible avec ce fit parabolique de retrouver D_{max} et d'évaluer la correspondance quantitative entre les deux courbes (**voir annexe**).

En plus des réseaux viaires, nous avons effectué le fit parabolique sur les réseaux de craquelures abordés au chapitre précédent. Nous obtenons une continuité qui est similaire aux réseaux viaires observés : fit et distribution sont confondus sur au moins 1σ (voir figure 3.7).

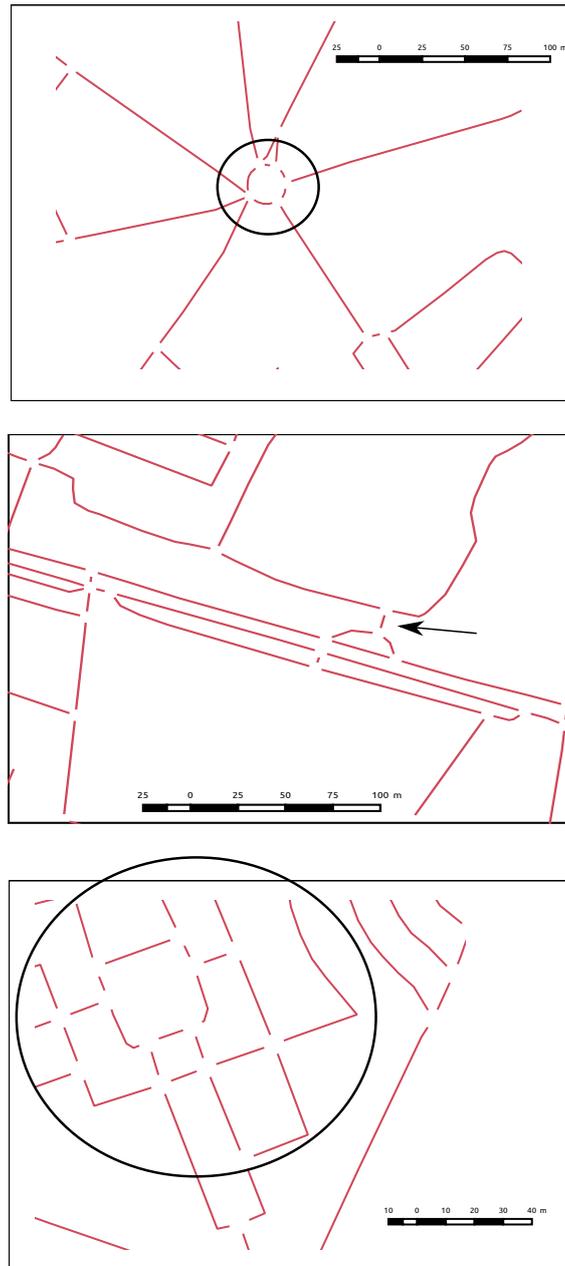


FIGURE 3.6. Observation de voies inférieures à 16 mètres sur le réseau parisien, on y retrouve la décomposition d'un rond-point en plusieurs voies de quelques mètres (en haut dans le cercle noir), une voie entrant dans la cour d'un bâtiment (ici l'hôpital d'instruction des armées du Val-de-Grâce, au centre) et aussi des chemins situées dans un square au niveau de la porte d'Orléans (en bas dans le cercle noir). Les deux dernières images illustrent des voies qui n'ont pas un rôle majeur dans le réseau de la ville permettant juste l'accès direct à un bâtiment ou bien à circuler dans une zone isolée de l'ensemble du réseau viaire. Le rond-point a par contre plus d'importance sur le réseau d'ensemble, sa décomposition en plusieurs voies par *Morpheo* et non en une voie unique pose la question des limites de la démarche de reconstruction des voies et la manière d'aborder ce type d'objet. Réseau viaire de Paris : *Données traitées par C. Lagesse*

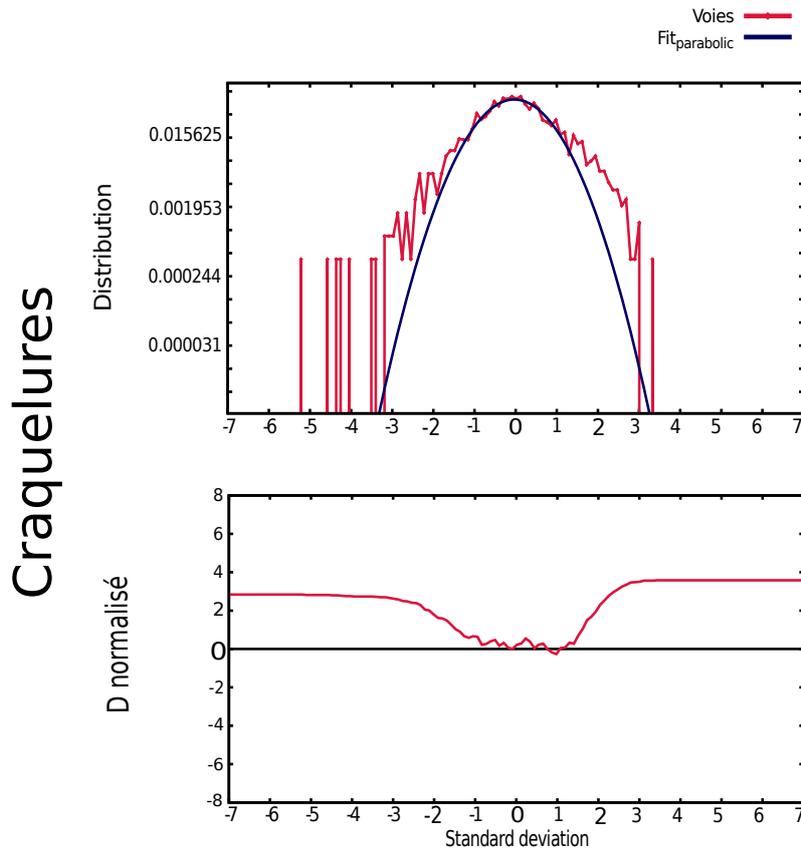


FIGURE 3.7. Distribution du logarithme des longueurs de voies (en haut, en échelle logarithmique en ordonnée) pour le réseau de craquelures d'argile de la figure 2.20 et son écart normalisé avec le fit parabolique (en bas). Fit et distribution sont confondus sur plus d'un écart-type comme pour les réseaux viaries. L'évolution de la courbe est analogue à celle obtenue sur les réseaux de Paris et de San Francisco.

2. Premières tentatives de modélisation

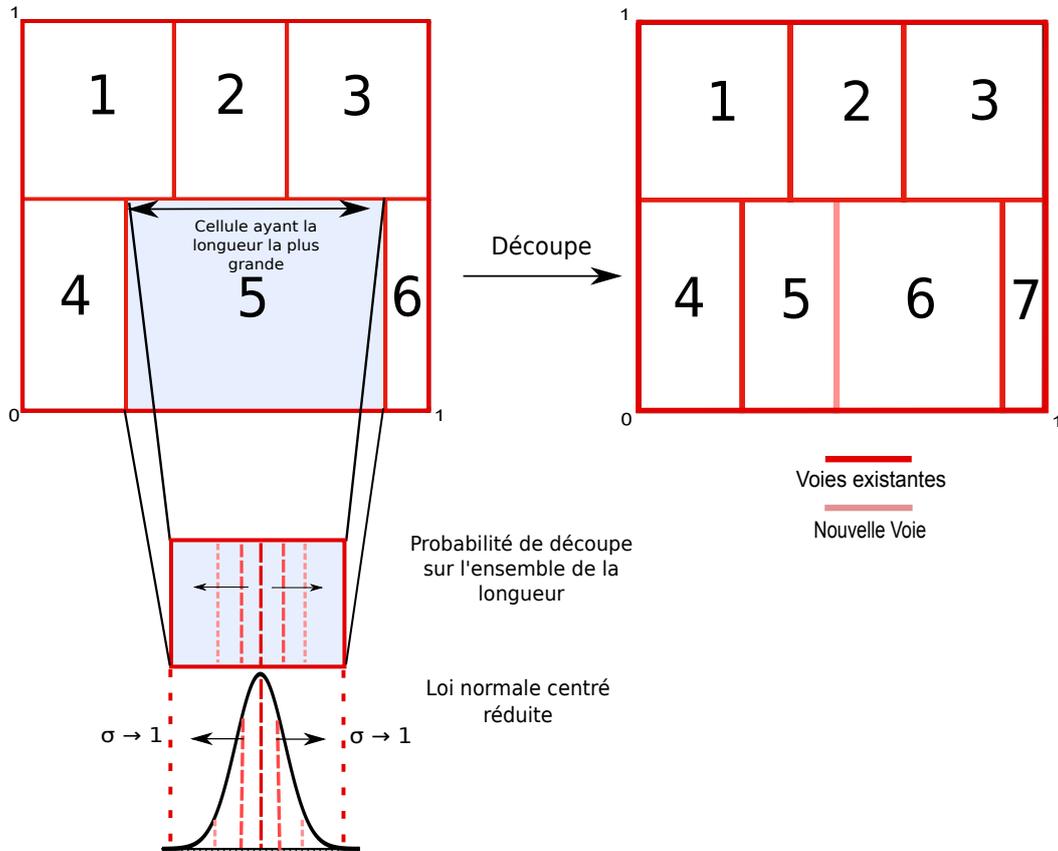


FIGURE 3.8. Explication du processus Grande Longueur dépendant de 2 paramètres : 2^p et σ_b correspondant respectivement aux nombres de cellules de la simulation et au bruit de découpe.

La méthode de caractérisation des distributions en log-normale développée dans la section précédente, va nous permettre de caractériser nos modèles, en regardant si distribution des longueurs des voies et fit parabolique se confondent sur au moins sur au moins 1σ . Comme nous l'avons évoqué en première partie, nous partons de l'idée que c'est un processus de découpage successif du parcellaire est à l'origine de la distribution en log-normale. Ce processus est vu comme un phénomène de densification d'un réseau de rues au cours du temps qui conserve la continuité des voies.

Dans un premier temps, notre modèle se base sur un processus dit "Grande Longueur" qui découpe les cellules de plus grand côté en créant une voie. Cette division se fait perpendiculairement aux voies déjà présentes [Fig 3.8]. Ce mécanisme s'inspire des observations faites sur les découpes de grandes parcelles agricoles présentes à la périphérie des villes (voir la partie 1).

Notre modèle se base sur un carré 1×1 , chaque arête du carré est une voie initiale. Nous découpons le carré en 2, créant une nouvelle voie ainsi qu'une nouvelle cellule. Nous continuons le processus jusqu'à un nombre de cellule 2^p défini en début de

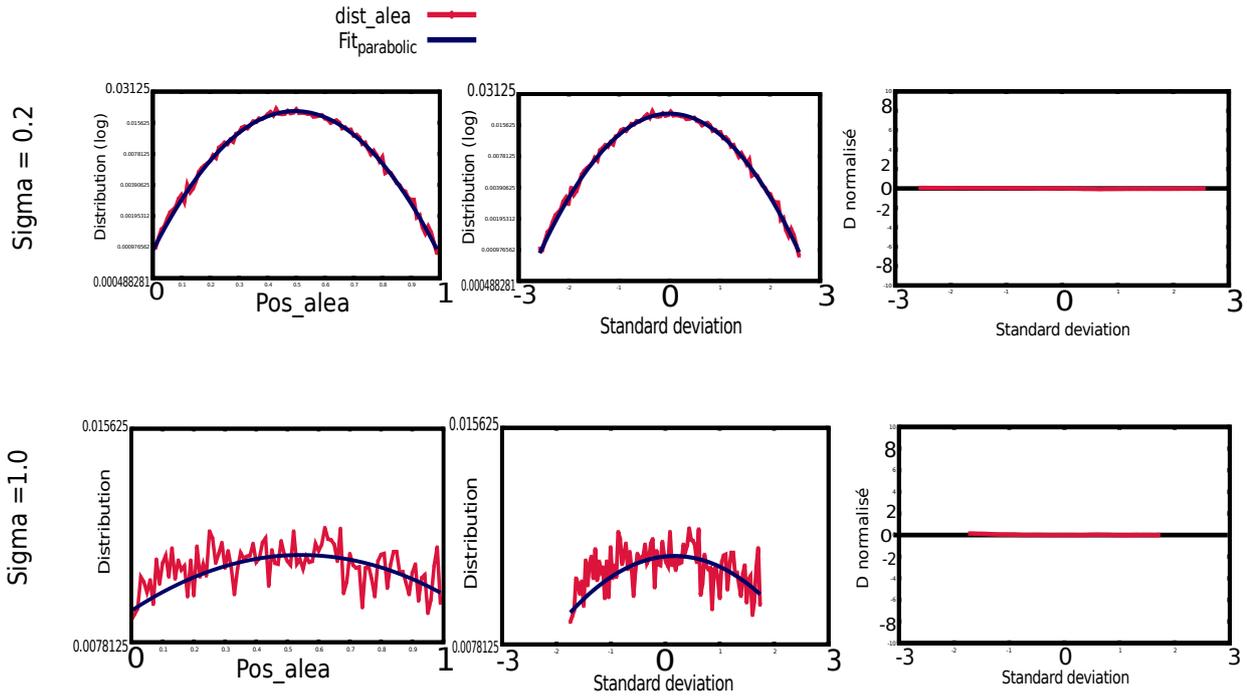


FIGURE 3.9. Distribution (échelle logarithmique en ordonnée) des positionnements aléatoires de la nouvelle voie, pour $\sigma_b = 0.2$ et $\sigma_b = 1.0$ et 2^{11} cellules. Vérification du comportement de loi normal centré réduite par notre test statistique avec fit parabolique. Dans les deux cas, les distributions sont confondues avec le fit parabolique, ils convergent bien vers une loi normale.

simulation. La voie créée ne va pas systématiquement se placer au milieu de la cellule mais peut être proche d'un bord. Nous avons instauré un “bruit” de découpe qui fait varier son positionnement sur l'ensemble de la longueur. Il dépend de l'écart-type d'une loi normale centrée réduite. Plus sa valeur est importante, plus le découpage peut se faire sur le bord de la cellule, la valeur étant comprise entre 0 et 1. Pour obtenir ce bruit de découpe, nous utilisons la méthode Box-Muller [53] dans la programmation du modèle. En particulier, nous avons vérifié que sa distribution suivait bien une loi normale avec notre méthode de caractérisation par fit parabolique [Fig 3.9].

Dans un premier temps, si nous regardons les simulations pour des bruits très faibles, nous obtenons un réseau quadrillé et une hiérarchie dans la distribution des longueurs des voies : les plus grandes représentent les premières découpes tandis que les plus petites sont les dernières apparues [Fig 3.10]. Avec un processus multiplicatif déterminé, sans aléatoire ou presque, nous obtenons donc une distribution discrétisée dont les générations de voies successives suivent une loi de puissance. Plus nous ajoutons de cellules, plus nos générations de cellules se prolongent dans les petites longueurs.

En augmentant le bruit, nous perdons cette discrétisation de la distribution pour obtenir une courbe continue dont nous allons regarder l'évolution en fonction de nos deux paramètres. Pour un bruit plus fort ($\sigma_b = 0.2$), le réseau devient plus inhomogène avec une grande amplitude entre les différentes tailles de parcelles. La courbe est approximée par deux droites, deux lois de puissance en échelle standard ainsi qu'une parabole, obtenue par un fit parabolique au sommet [Fig 3.11]. Toutefois, l'écart entre le fit et la distribution grandie à proximité de μ , moins d'un écart-type des deux côtés, ce qui est éloigné de nos observations sur les villes [Fig 3.14]. En augmentant encore σ_b , nous observons que le sommet est pointu signifiant ainsi que le fit ne fonctionne qu'à son voisinage. En outre, la droite du côté des petites longueurs s'étend vers des valeurs plus faibles encore (le coefficient de pente diminue) [Fig 3.12]. En modifiant le nombre de cellules pour un σ_b fixe, la forme générale de la distribution est conservée et nous nous retrouvons avec un fit gaussien similaire s'éloignant de la distribution au niveau des mêmes valeurs d'écart-type [Fig 3.13].

L'influence de l'angle de découpe sur la distribution a également été testé (voir annexe). Cependant, l'effet de cette modification est négligeable, changeant légèrement le sommet de la distribution qui "s'arrondit". L'écart normalisé s'éloigne de la valeur nulle pour un écart-type similaire. Nous en avons conclu que pour un modèle partant d'un principe de découpes hiérarchisées du parcellaire avec ou sans découpes orthogonales, nous n'obtenons pas de distributions en bonnes concordances pour des réseaux viaires réels, à savoir des lois en log-normale mais simplement une somme de loi de puissance. C'est également ce qui avait été constaté dans le cas des craquelures mentionnés précédemment et pose la question des mécanismes établis.

Modele Long Lengh = 0.0001 cells number = 2^{12}

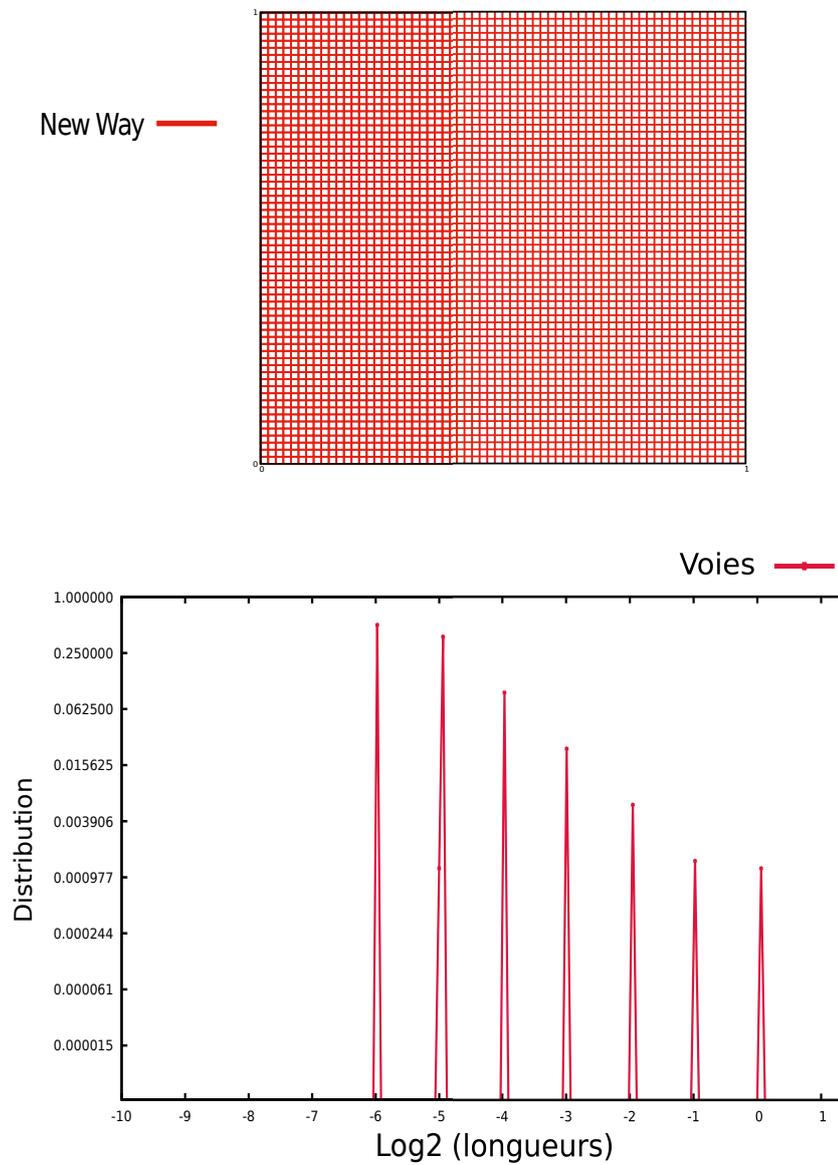


FIGURE 3.10. Modèle Grande Longueur avec un bruit de découpe faible. Le réseau obtenu est un quadrillage régulier. La distribution des longueurs est discrétisée en plusieurs générations de découpe qui suivent l'évolution du nombre de cellules (évolution en 2^x , x étant le nombre d'itération).

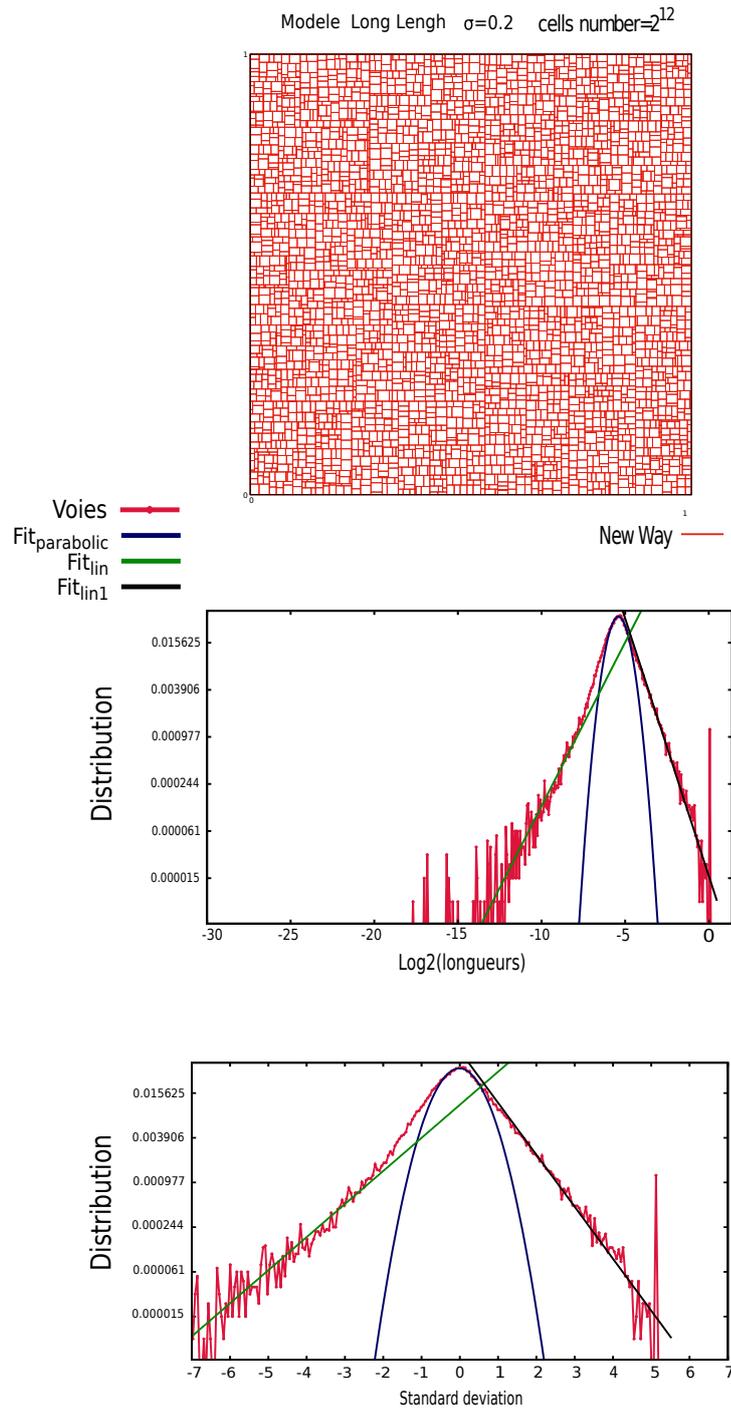


FIGURE 3.11. Modèle Grande Longueur avec un bruit de découpe $\sigma_b = 0.2$ et un nombre de cellules finales toujours à 2^{12} . Nous observons un parcellaire de surface plus inhomogène (Haut). La distribution du logarithme de longueurs des voies (normalisée en échelle logarithmique en ordonnée) n'est pas discrétisé cette fois-ci. Nous observons une addition de deux lois de puissance en queues de courbes, le sommet permet difficilement la réalisation d'un fit parabolique (centre et bas).

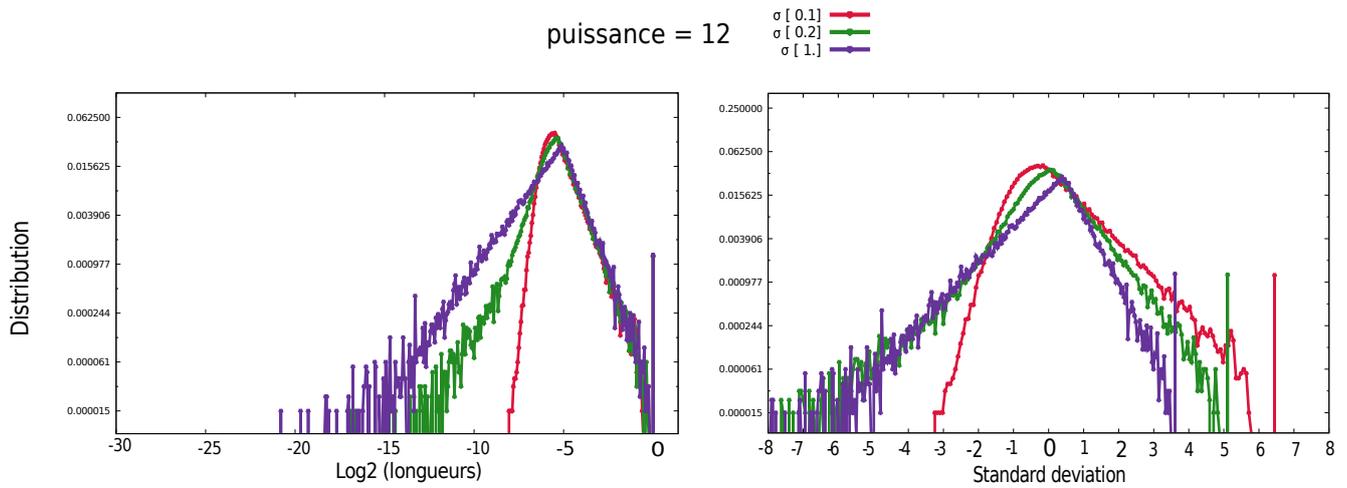


FIGURE 3.12. Variations du bruit de découpe σ_b . Nous observons une modification du côté des petites longueurs de voies, la droite diminuant de coefficient de pente en fonction de l'augmentation du bruit de découpe. Il y a alors une augmentation des petites longueurs et un sommet "pointu" où il est difficile d'obtenir un fit parabolique pertinent.

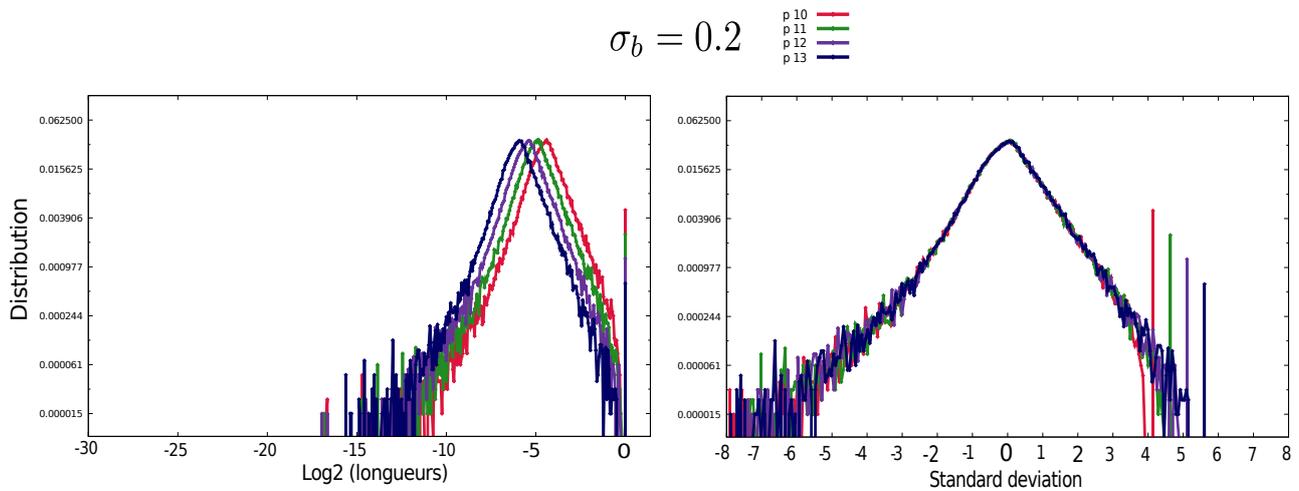


FIGURE 3.13. Variations du nombre de cellules pour le modèle Grande Longueur, les courbes normalisées sont stationnaires.

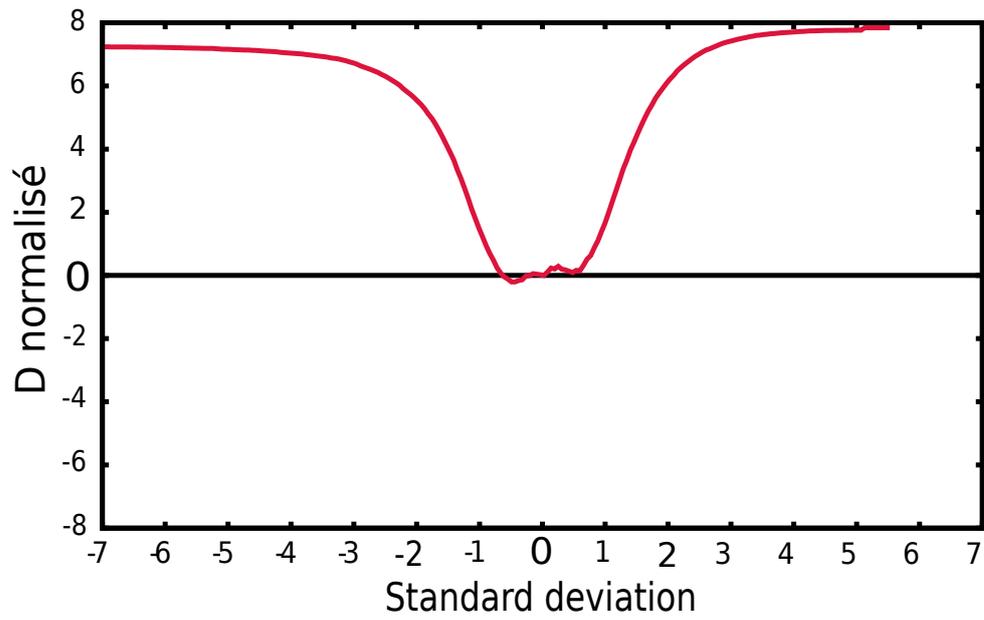


FIGURE 3.14. Valeur de D_n sur le fit parabolique appliqué à la distribution du modèle Grande Longueur pour $\sigma_b = 0.2$. Les deux courbes sont confondues sur moins d'un écart-type ce qui est trop faible étant donnée les statistiques des réseaux viaires réels.

3. Subdivision du parcellaire sans hiérarchie

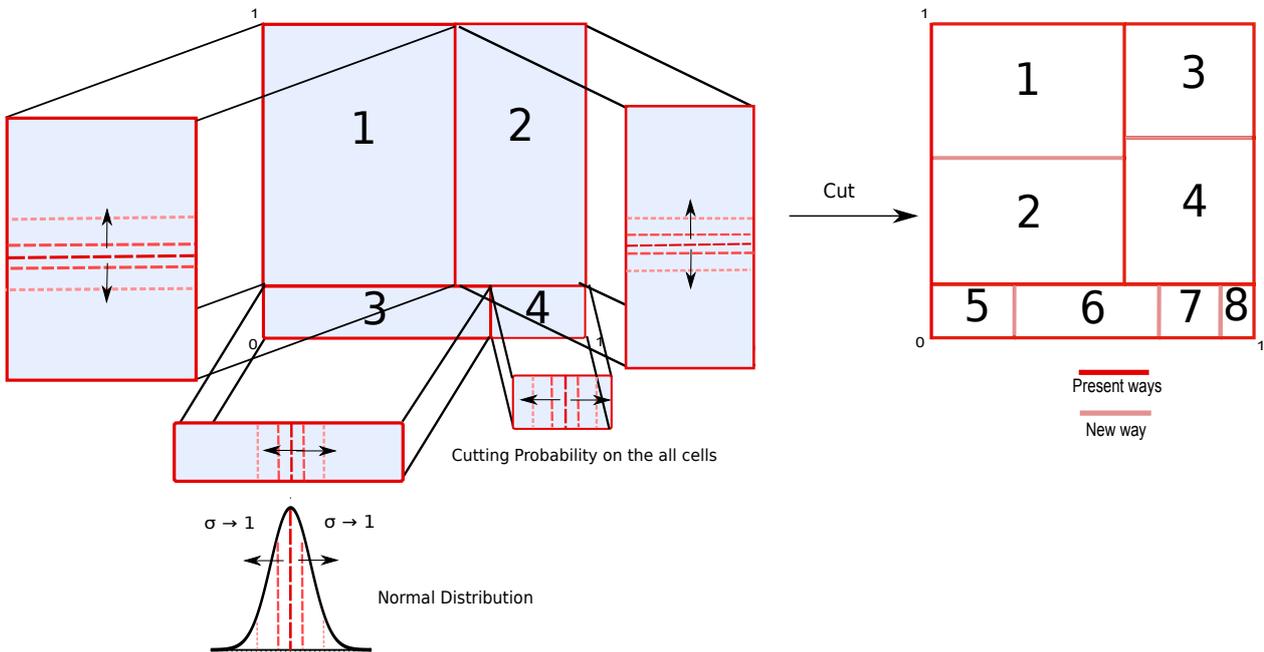


FIGURE 3.15. Le principe du modèle Génération dépend des deux paramètres p et σ_b . À chaque itération, la découpe s'effectue simultanément sur l'ensemble des cellules du réseau.

La direction prise par nos futurs modèles est influencé par la création d'un modèle simplifié ayant pour but de mieux comprendre les générations de voies que nous observons à faible bruit. Il est fondé sur le découpage de parcellaire sans principe de sélection [Fig 3.15]. À chaque itération, nous découpons simultanément l'ensemble des cellules et regardons les générations de longueurs de voies créées. Le choix de la découpe (horizontale, verticale) s'effectue en fonction du plus grand côté de chaque cellule. Ce modèle a les mêmes paramètres que précédemment : 2^p nombres de cellules, pour un nombre d'itération égal à p et un bruit de découpe σ_b qui correspond toujours à l'écart-type d'une loi normale centrée réduite. Nous avons constaté que la distribution du logarithme des longueurs des voies possède un sommet nettement plus arrondi que pour les distributions issues du modèle Grande Longueur et toujours deux lois de puissance associée aux queues de courbes [Fig 3.17].

À un bruit de découpe équivalent, nous remarquons aussi que les différences de tailles de parcelles sont nettement plus prononcées pour ce modèle que pour le précédent. Comme pour le modèle Grande Longueur, nous avons exploré l'évolution de la forme du réseau en fonction des deux paramètres. Également, nous avons constaté que sa forme, celle-ci ne dépend pas du nombre d'itérations p [Fig 3.19]. Ce n'est pas le cas pour σ_b [Fig 3.18]. En analysant l'évolution en fonction du bruit de découpe, nous remarquons un élargissement du sommet ainsi qu'un étalement des longueurs dans des valeurs de plus en plus faibles. L'étude des différents paramètres (score des fits en loi de puissance, évolution de la moyenne et de l'écart-type,

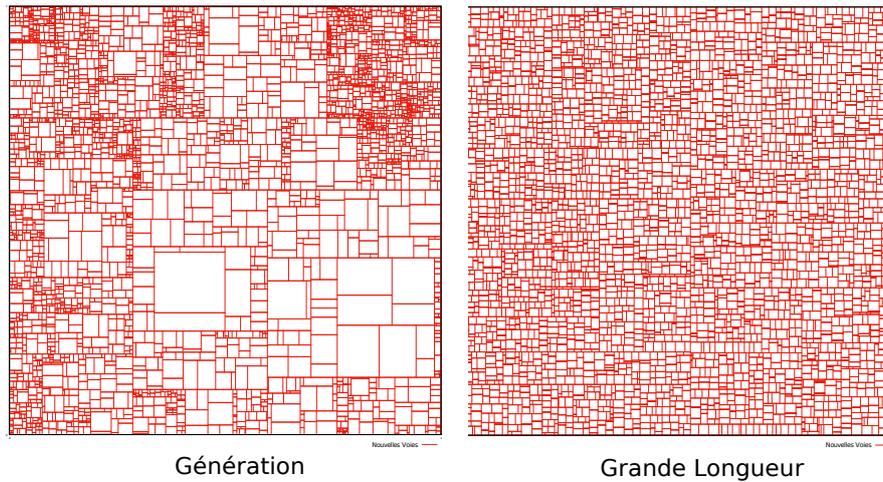


FIGURE 3.16. À Gauche, le réseau du modèle Génération pour 2^{12} cellules et un bruit $\sigma_b = 0.2$. À droite, le réseau du modèle Grande Longueur pour 2^{12} cellules et un bruit $\sigma_b = 0.2$. Ce qui ressort de ces deux images, c'est que l'inhomogénéité des surfaces des cellules est beaucoup plus importante pour le modèle Génération que pour le modèle Grande Longueur.

etc) confirme cette tendance d'élargissement de la distribution vers les petites longueurs [Fig 3.22]. L'analyse de l'écart normalisé D_n du fit parabolique nous indique que cet élargissement n'atteint pas la forme de la distribution. Fit et distribution sont confondus sur plus d'un écart-type, sans de fortes variations à part en queue de courbe. La distribution se rapproche donc nettement de celles observées pour différentes villes [Fig 3.20].

Le modèle Génération permet donc d'obtenir un réseau dont la distribution des longueurs des voies s'approche d'une loi log-normale sur plus de 1σ . Rappelons que ce modèle est issu d'un processus hiérarchique simplifié, sans le principe de sélection et de découpage de cellules. La sélection de cellule est une hypothèse liée aux observations faites sur la découpe des grandes parcelles. Si nous voulons conserver ce choix de découpe sélective, le processus de Grande Longueur n'est pas suffisant à lui seul pour se rapprocher de la distribution voulue. Quand nous comparons les réseaux des deux modèles, la différence majeure est l'inhomogénéité de taille du parcellaire, beaucoup plus importante dans le cas du modèle Génération. Dans la suite, partant du processus Grande Longueur, nous allons construire un nouveau modèle afin de reproduire ces inhomogénéités au sein des réseaux.

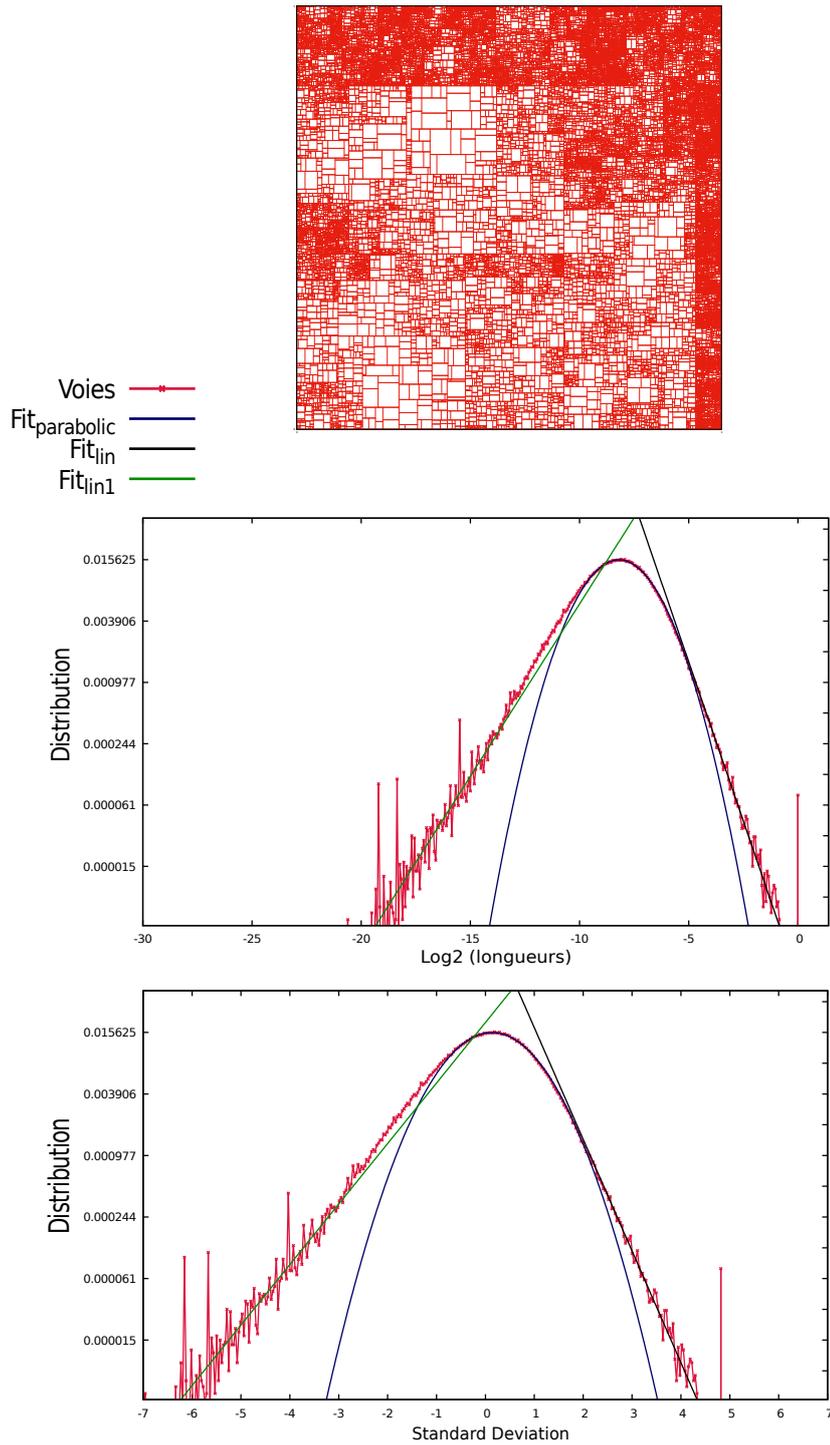


FIGURE 3.17. Modèle Génération pour 2^{16} cellules et un bruit $\sigma_b = 0.2$. En haut, illustration du réseau. Au centre, la distribution de longueurs des voies. Nous retrouvons des lois de puissance en queues de courbe et le sommet de la parabole est nettement plus arrondi que pour les distributions issues du modèle Grande Longueur. En bas, nous représentons la distribution en fonction de son écart-type (en abscisse), le fit parabolique est confondu entre 1 et 2σ .

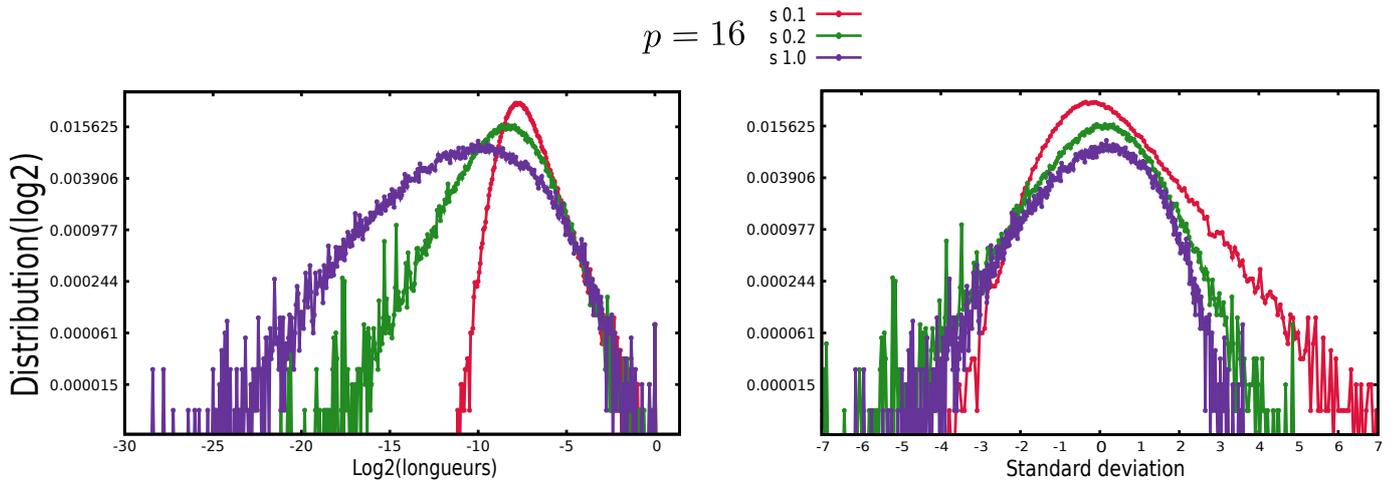


FIGURE 3.18. Évolution du modèle Génération en fonction du bruit pour 2^{16} cellules. À gauche en fonction du logarithme des longueurs en abscisse, à droite en fonction de l'écart-type. Comme pour le modèle Grande Longueur, la distribution des longueurs des voies dépend du bruit de découpe. Il y a un étalement de la distribution du côté des petites longueurs pour un bruit de découpe de plus élevé.

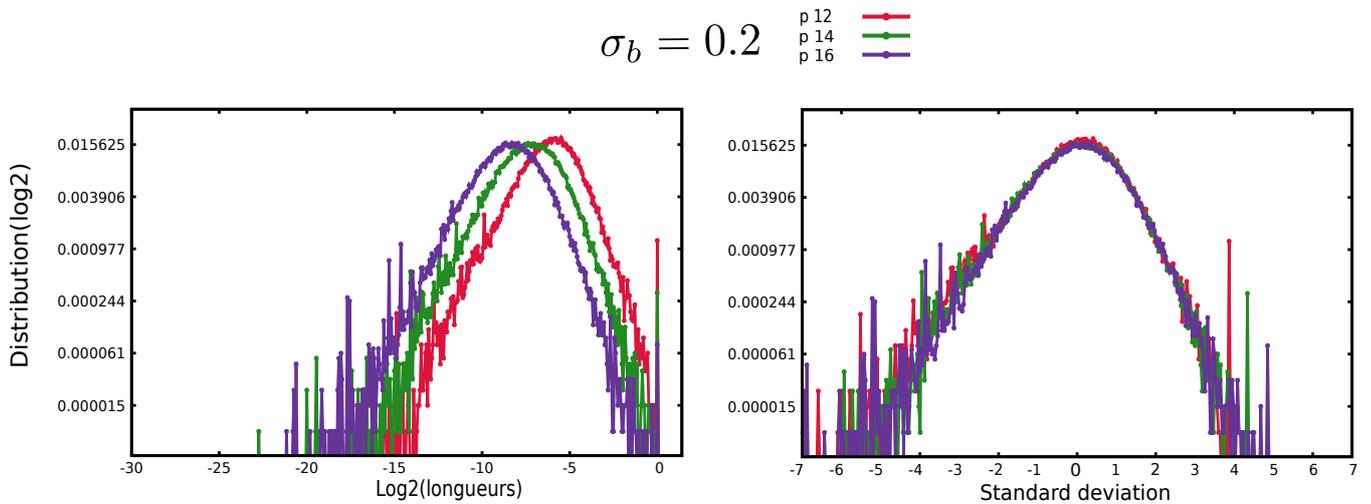


FIGURE 3.19. Évolution du modèle Génération en fonction du paramètre p pour un bruit de découpe $\sigma_b = 0.2$: À gauche en fonction du logarithme des longueurs et à droite en fonction de l'écart-type. Comme pour le modèle Grande Longueur, les courbes sont stationnaires : les distributions des longueurs ne dépendent pas du nombre d'itération p .

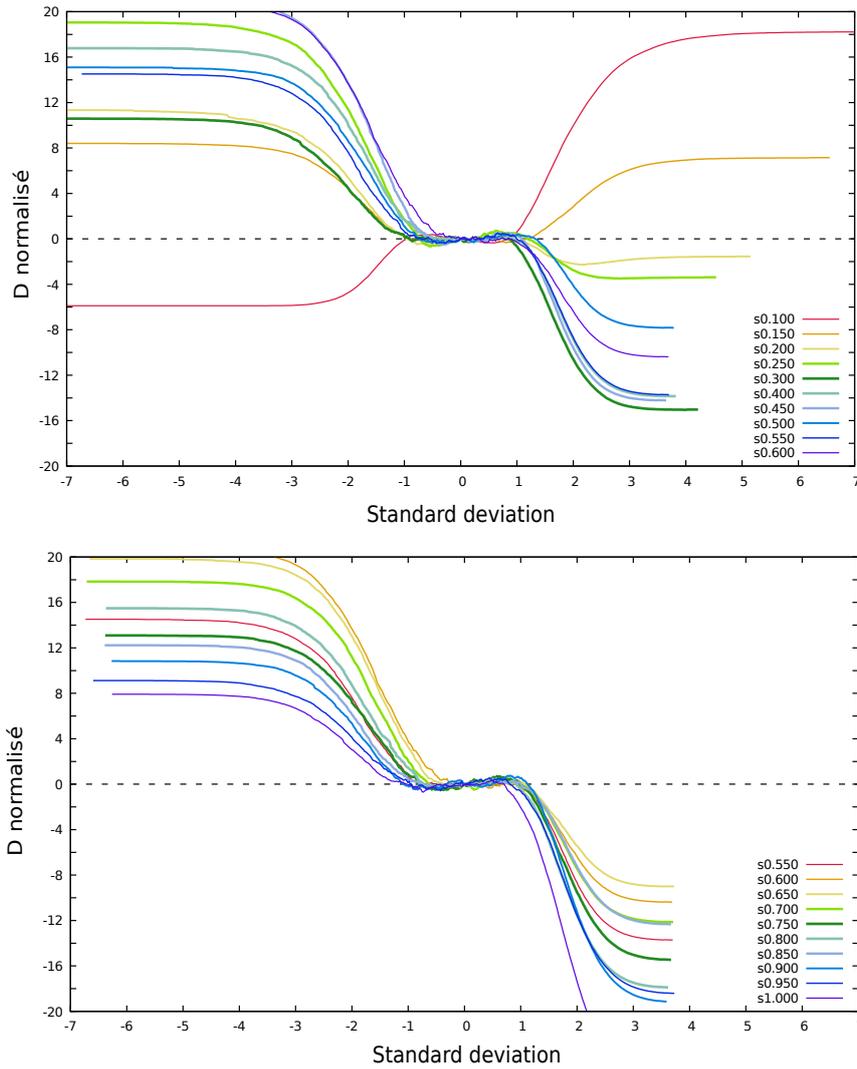


FIGURE 3.20. Évolution des écarts normalisés D_n en fonction de l'écart-type pour différents σ_b et une puissance constante $p = 16$. Chaque couleur représente une simulation pour un σ_b différent. Une courbe représente l'écart entre la distribution moyenne de 20 simulations et son fit. Nous avons décomposé l'ensemble de ces évolutions en 2 parties de 0.1 à 0.5 et de 0.55 à 1.0 avec un pas de 0.05. Pour toutes ces valeurs, les courbes sont confondues jusqu'à une largeur équivalente à un écart-type de la distribution. Les différences d'évolution se révèlent en queues de courbe, notamment pour des σ_b faibles, le fit parabolique obtient des valeurs supérieures comparées à la distribution du côté des petites longueurs.

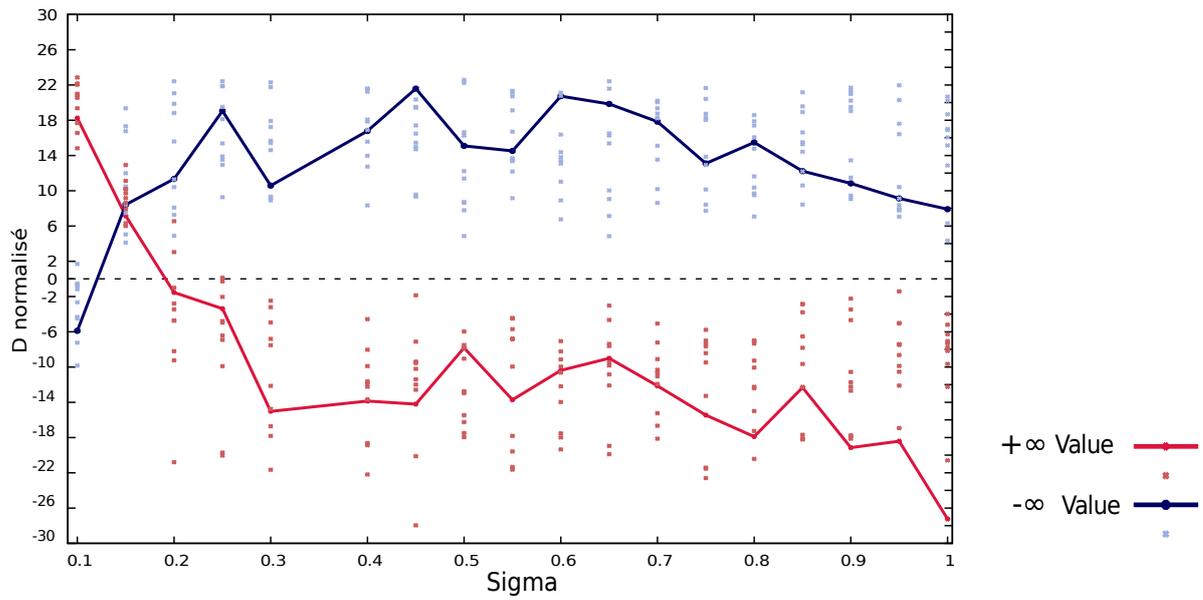


FIGURE 3.21. Évolution de D_n en queues de courbes en fonction de σ . La courbe rouge correspond au côté des grandes longueurs et la bleue au côté petites longueurs. Les points bleus sont les valeurs pour les distributions de chaque simulation (la distribution de longueurs de voies pour chaque σ étant une moyenne des distributions de 10 simulations). Les deux courbes changent de signe pour des faibles valeurs de σ (jusqu'à 0.3) : positive pour la rouge avant de devenir négative et inversement pour la bleue. Les écarts se stabilisent pour des bruits plus forts. Les points fluctuent grandement entre chaque simulation montrant la forte sensibilité du fit en queue de courbe.

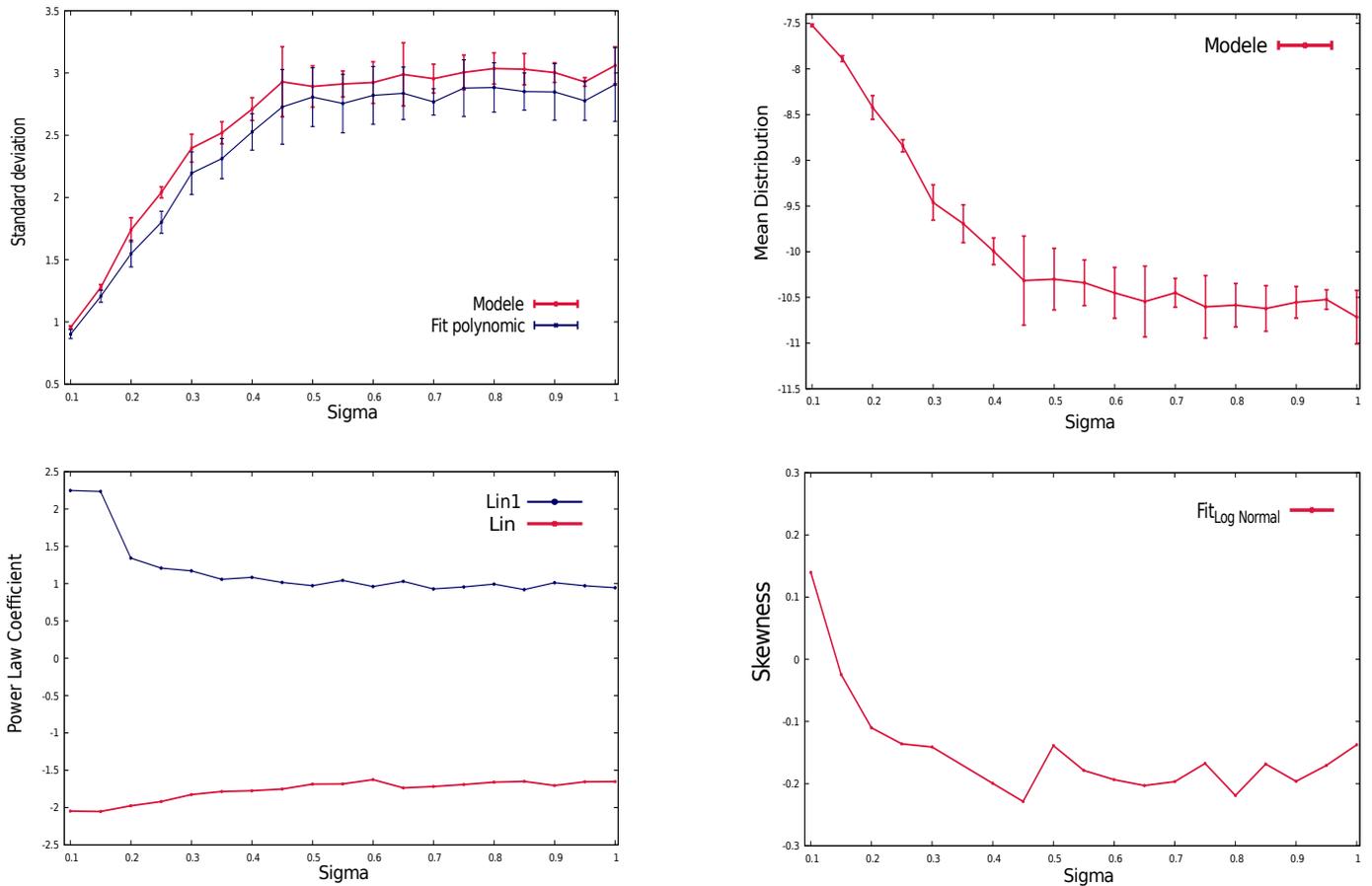


FIGURE 3.22. Caractérisations de la distribution des longueurs des voies pour le modèle Génération. Nous regardons l'évolution de plusieurs caractéristiques en fonction de σ_b . La moyenne (Haut droite) et l'écart-type (Haut gauche, également pour le fit parabolique) ainsi que les évolutions des coefficients des fits linéaires (situées en bas à gauche, correspondant à un coefficient de loi de puissance en échelle standard). Sur l'ensemble des graphiques, nous observons une forte variation des courbes pour des petits σ_b , la moyenne tend vers des valeurs de plus en plus petites avant de se stabiliser vers 0.5, tout comme l'écart-type qui s'agrandit et qui se stabilise autour de la même valeur. Le fit Lin1 (fit de loi de puissance côté petites longueurs) ne varie qu'au début entre 0.1 et 0.2, sa valeur diminue avant de rester constante pour une valeur égale à 1. Le fit du côté des grandes longueurs reste proche des valeurs situées entre -2 et -1.5. Nous avons également établi un fit de loi normale asymétrique (testé sur le log des longueurs) pour déterminer le coefficient d'asymétrie de la distribution (Bas droite). Pour tout σ_b , sa valeur est négative indiquant que le sommet penche à droite de la médiane prouvant un élargissement de la queue, côté petite longueur. Cet élargissement jusqu'à $\sigma_b = 0.5$ prouvant un étalement du sommet du côté des petites longueurs.

Construction du modèle dynamique

1. Processus de densité de carrefours

Le modèle Génération dont le processus ne répond pas aux contraintes fixées, nous a toutefois permis de retrouver des distributions de longueurs des voies qui s’approchent de log-normales. Nous relierons cette caractéristique à la présence d’une forte inhomogénéité entre les tailles de parcellaire constituant le réseau. Partant du processus Grande Longueur qui correspond à notre objectif de découpage hiérarchique mais ne permet pas de retrouver des distributions en log-normale, nous cherchons de construire un nouveau modèle engendrant des réseaux avec de l’inhomogénéité.

Nous avons développé un modèle dynamique dépendant de deux processus dont les principes s’opposent : le processus du modèle Grande Longueur “opposé” à un processus de densité de carrefours. Nous considérons comme “opposés” car contrairement au simple processus découpant toujours les plus grandes cellules, ce découpage va privilégier des cellules plus petites situées dans les zones les plus denses du réseau. L’idée est d’obtenir un découpage de parcelles, ne se faisant pas uniquement en périphérie, au niveau de la surface agricole, mais également au centre de la ville, que l’on définit comme un pôle où les zones urbanisées continuent à se densifier. Ainsi, nous pouvons obtenir différentes formes de réseaux en fonction de l’importance que l’on donne à chacun des processus et voir leur impact notamment sur la statistique des longueurs des voies.

Pour chaque cellule (ou rectangle), nous calculons donc un potentiel U_{rec} dépendant des deux processus de découpe qui sont pondérés par deux réels positifs α et β . La densité de carrefours est modélisée par la fonction inverse suivante :

$$(4.1) \quad U_{rec} = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{d(C_{rec}, i)^\alpha} \right]}_{\text{densité de carrefours}} \times \underbrace{\left[L_{rec} \right]^\beta}_{\text{Grande Longueur}}$$

où $d(C_{rec}, i)$ est la distance euclidienne du centre de la cellule sélectionnée au carrefour i du réseau. Pour $\alpha > \beta$, la proximité des carrefours avoisinant la cellule est privilégiée par rapport au plus grand côté (et inversement pour $\beta > \alpha$). Nous conservons aussi nos deux paramètres initiaux : p qui détermine la puissance du nombre de cellules voulus à la fin de la simulation et σ_b , le bruit dans la découpe [Fig 4.2].

Ce que nous avons observé principalement est un cas divergent pour $\alpha > \beta$. Plus précisément, nous obtenons un réseau qui a tendance à se polariser, les découpages s’effectuant en priorité dans le centre urbain et non sur l’ensemble de l’espace de la

simulation [Fig 4.1]. Nous obtenons des pôles dont le rayon dépend de la différence $\alpha - \beta$. Pour une différence très élevée, les découpes s'effectuent systématiquement sur la même cellule ce qui donne des statistiques qui divergent très rapidement en début de simulation.

Nous avons exploré les différentes formes de réseaux engendrés par notre modèle dans l'espace des paramètres (plus particulièrement pour les réseaux au voisinage de $\alpha = \beta$).

En tenant compte de notre étude du modèle Grande Longueur où la distribution des longueurs des voies obtenue est estimée comme étant la plus proche d'une log-normale (proche de 1σ), nous avons fixé $\sigma_b = 0.2$. La puissance du nombre de cellules p est également fixée à 12.

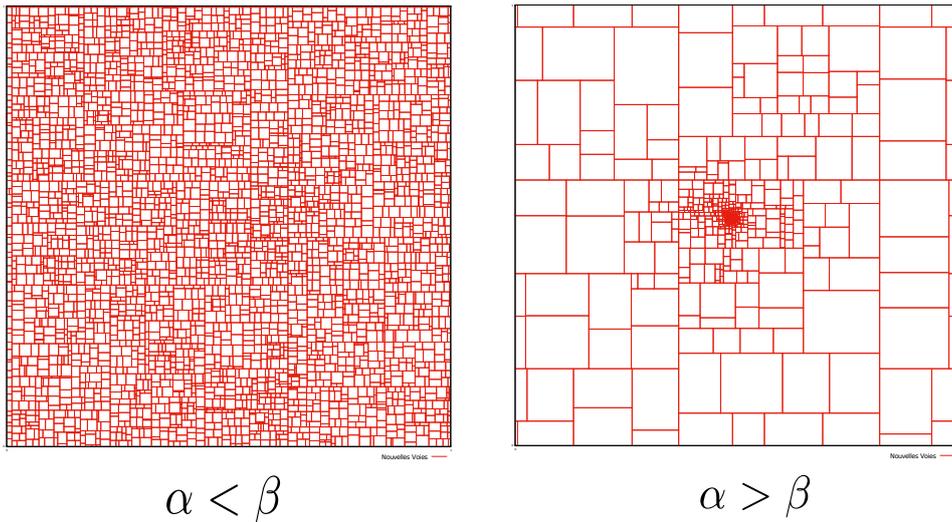


FIGURE 4.1. Réseaux pour les deux cas estimés $\alpha > \beta$ et $\beta > \alpha$. Quand $\beta > \alpha$, nous retrouvons un réseau proche de ceux engendrés par le modèle “Grande Longueur” et quand $\alpha > \beta$ nous obtenons un réseau qui se polarise. Réseaux pour $p = 12$ et $\sigma_b = 0.2$.

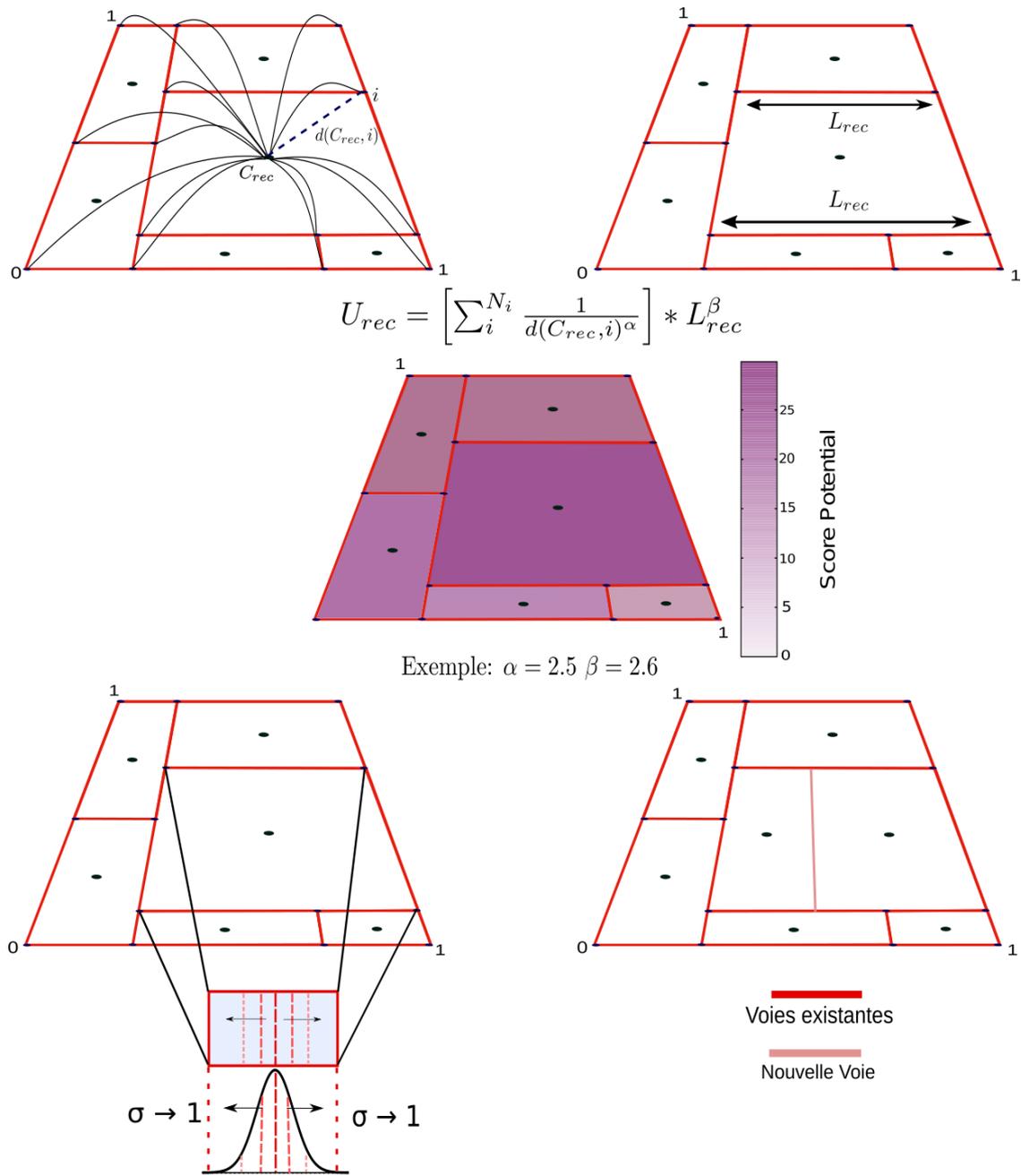


FIGURE 4.2. Principe du modèle dynamique sur six cellules. Nous faisons le calcul du potentiel pour une cellule donnée avec α et β fixés et choisis arbitrairement. Nous utilisons la distance euclidienne entre le centre de cette cellule donnée et un carrefour i . La densité de carrefours est égale à la somme pour tous les carrefours, de l'inverse de cette distance élevée à une puissance α . Nous choisissons la cellule ayant le score U_{rec} le plus important et la découpons perpendiculairement à son plus grand côté, découpe dont le positionnement dépend toujours de σ_b .

2. Exploration de l'espace des paramètres

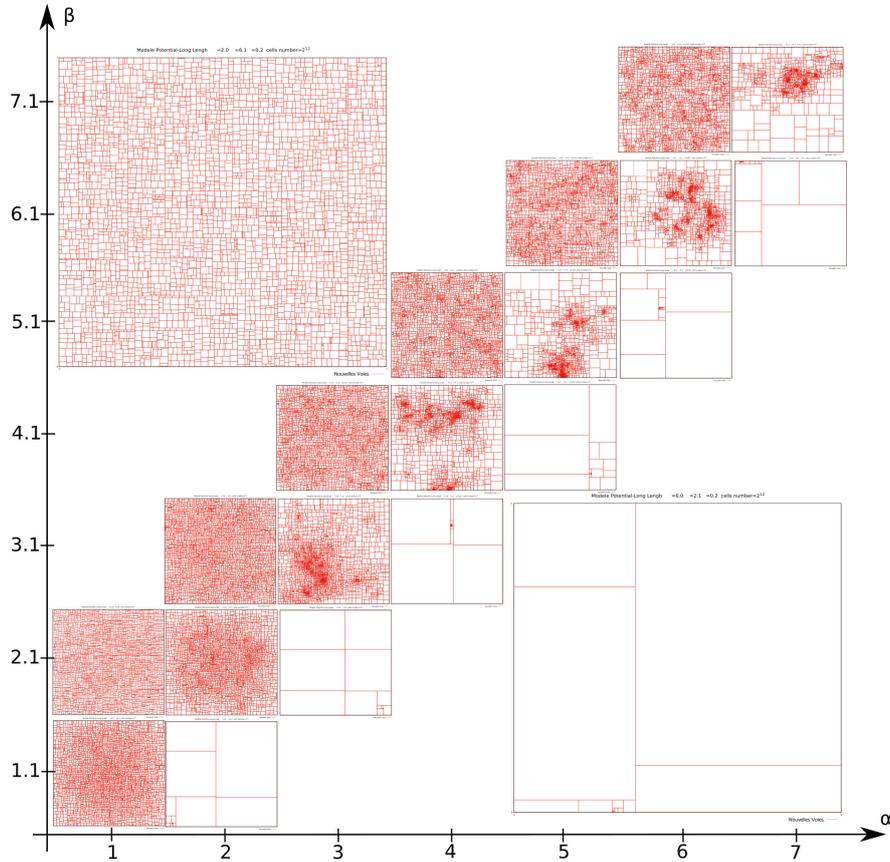


FIGURE 4.3. Exploration de l'espace des paramètres. Pour $\beta \gg \alpha$, les réseaux sont caractéristiques du modèle Grande Longueur. En revanche, pour $\alpha \gg \beta$, le réseau se structure autour d'un pôle de très faible rayon où s'accumulent toutes les coupes. Entre les deux, une zone de transition avec un ou plusieurs pôles de plus grand rayon.

Nous avons exploré l'espace des paramètres pour de nombreux α et β (compris entre 1 et 7) et distinguons deux zones importantes : Des réseaux homogènes pour $\beta \gg \alpha$ et des réseaux où les coupes s'accumulent autour d'un unique pôle pour $\alpha \gg \beta$. Au voisinage de $\alpha = \beta$, une interface où le rayon d'accumulation des coupes s'étend et une multiplicité de pôles peuvent apparaître [Fig 4.3]. Nous nous sommes focalisés sur cette zone de transition et réalisé une nouvelle exploration de l'espace des paramètres. Nous avons remarqué que pour des valeurs α et β proche de 2, un seul pôle existe tandis que pour $\alpha + \beta > 6$, il en existe une multiplicité [Fig 4.4, Fig 4.5]. Cette multiplicité s'explique par les instabilités liées au bruit de découpe. L'étendue et la position de cette interface dans le domaine des paramètres dépend de $\alpha + \beta$ comme observé dans la figure 4.4.

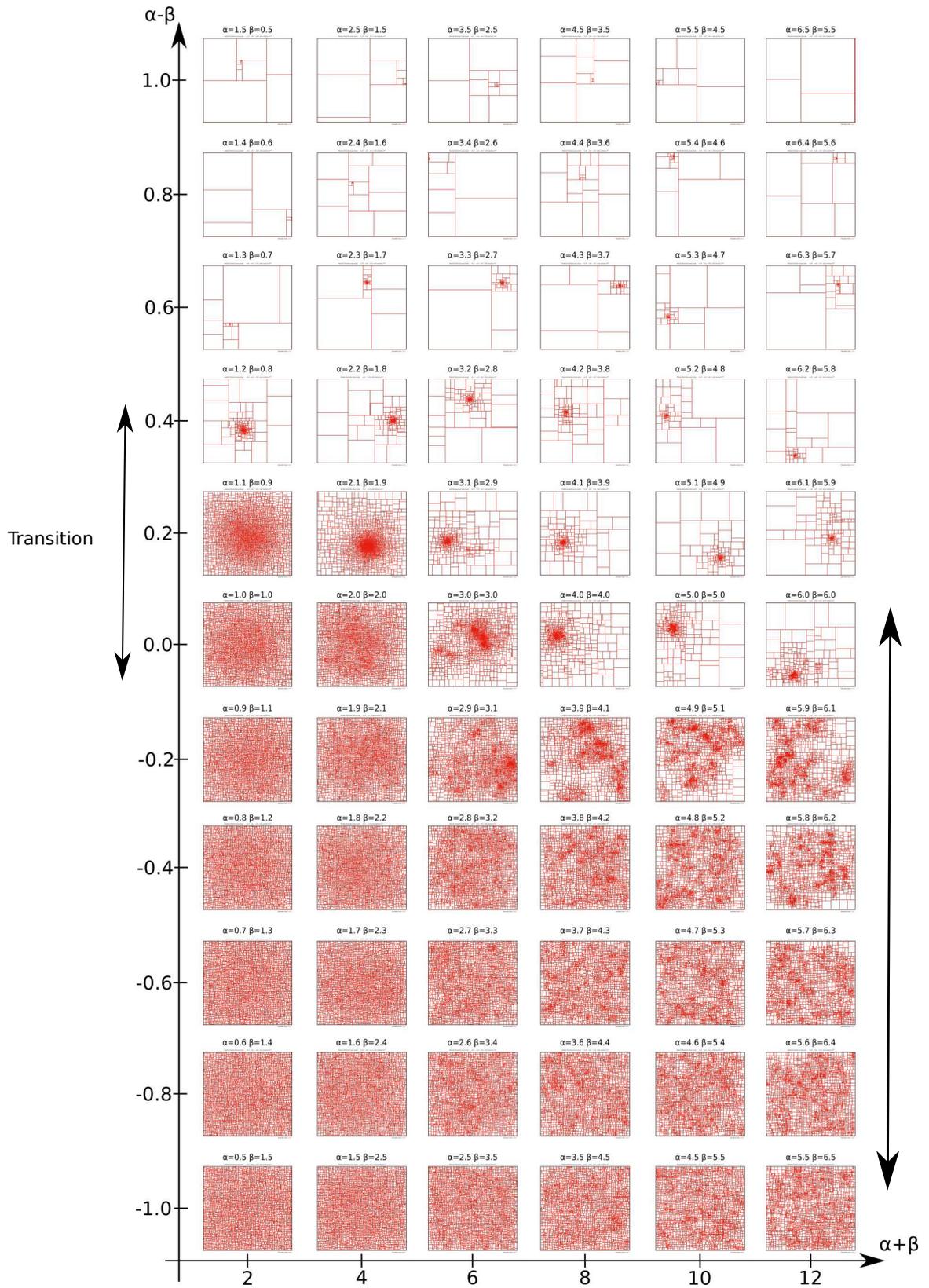


FIGURE 4.4. Exploration de l'espace des paramètres au voisinage des valeurs de $\alpha = \beta$. Pour $\alpha + \beta$ faibles, la zone de transition est située à proximité de $\alpha = \beta$. Quand les valeurs des paramètres augmentent, cette zone s'élargit et se décale vers des valeurs où $\beta > \alpha$.

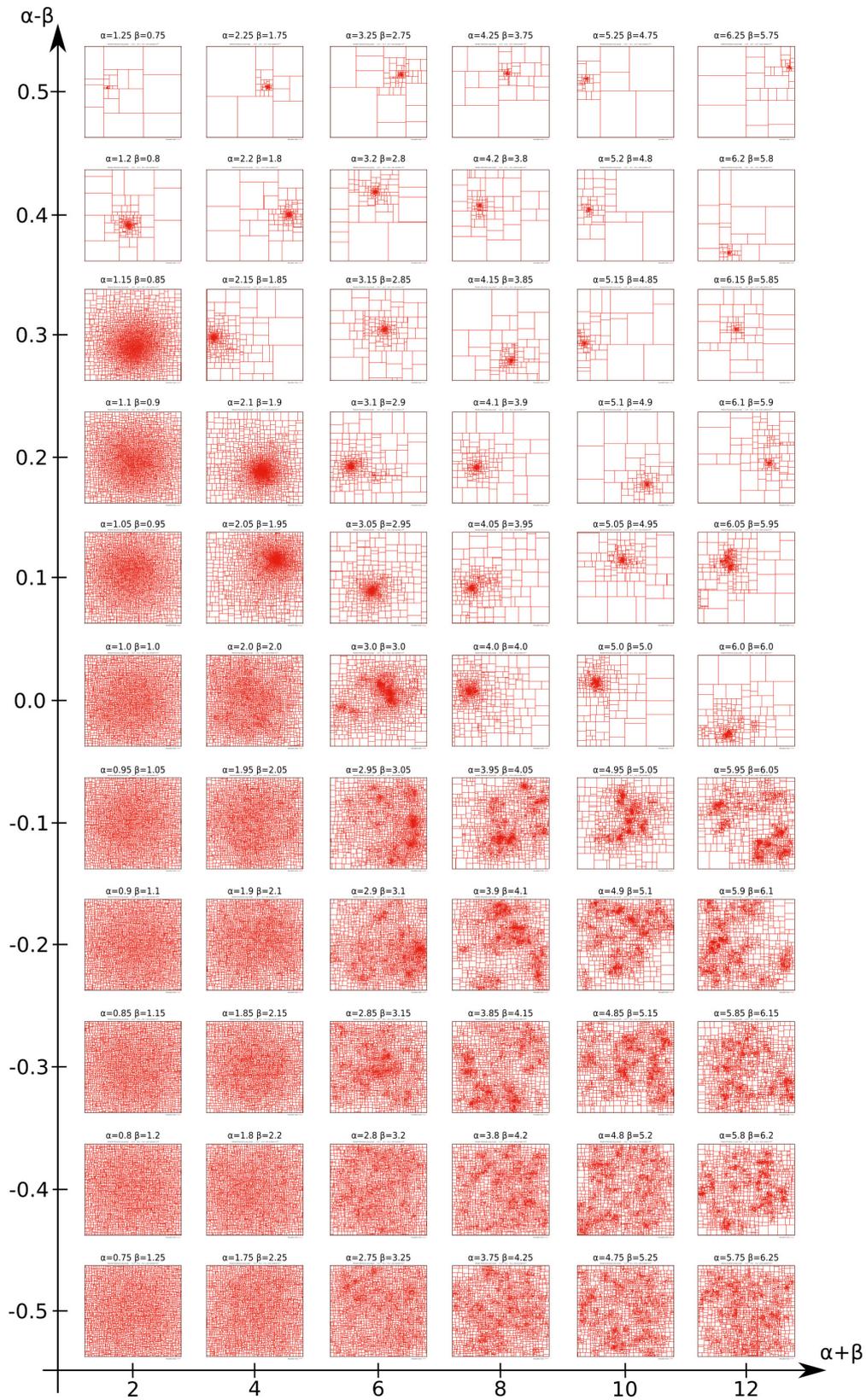


FIGURE 4.5. Exploration de l'espace des paramètres au voisinage de $\alpha = \beta$: zoom sur $\alpha - \beta$ compris entre -0.5 et 0.5. Nous observons une distinction plus nette entre le cas polaire et le cas homogène.

3. Les conditions limites

La considération de la distance aux carrefours pose un problème d'effet de bords. En effet, les cellules situées à proximité des limites du réseau ont un score de potentiel moins important car plus éloignées de l'ensemble des carrefours. Les cellules du centre vont alors être privilégiées dans la sélection de découpe, impactant la forme finale du réseau de voies (voir figure 4.6). Nous avons ajouté différentes conditions limites à notre modèle afin d'atténuer cet effet.

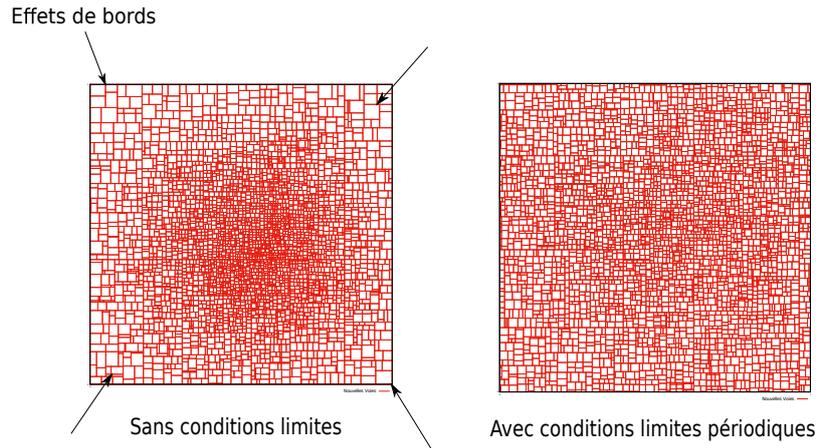


FIGURE 4.6. Illustration de l'effet de bord pour le cas $\alpha = 1.15$ et $\beta = 0.85$. À gauche, des cellules de grandes tailles qui sont situées en bordure. Elles sont découpées plus tardivement par rapport au centre. A droite, le même réseau quand nous ajoutons les conditions limites. La forme du réseau est caractéristique de l'état homogène.

Nous avons mis en place des conditions limites périodiques (voir figure 4.7). Le principal problème de ces conditions se situe sur les carrefours situés aux sommets du carré initial. Contrairement aux carrefours apparaissant au cours de la simulation, ces sommets sont de degré 4 (et non de 3) partagé avec les carrés voisins. Ils n'ont alors pas le même "poids" dans le calcul du potentiel. Dans un premier temps, nous avons mis en place ces conditions limites sans modifier ce "poids" et observé des biais de positionnement des pôles dans le carré de base. Ce carré est décomposé en 16 cases, nous quantifions le nombre de fois que les pôles se retrouvent à l'intérieur d'une d'entre elles sur 3200 simulations. Le positionnement des pôles est calculé selon la moyenne des positions de l'ensemble des carrefours de la simulation. Nous avons observé une répartition statistique proche de $\frac{1}{16}$, pour les 16 cases. Les plus forts écarts à la moyenne sont situés à proximité des sommets (une variation de 8% par rapport à la moyenne) ainsi que des valeurs légèrement plus élevées au centre [Fig 4.8]. En modifiant le "poids" de ces carrefours de degré 4 par l'ajout d'un facteur $\frac{1}{2}$, nous arrivons à une disposition des pôles qui n'est plus biaisé par ces sommets, l'écart à la moyenne tend vers une distribution des positions plus aléatoire. Cette valeur est justifié par les conditions suivantes : en formant un maillage carré, les

sommets sont partagés avec les trois autres carrés voisins, leur “poids” est égal à $\frac{1}{4}$. En outre, ces sommets sont de degré 4 (contrairement aux autres de degré 3). Nous avons fait le choix de considérer que le carrefour de degré 4 est deux fois plus important par rapport à un carrefour de degré 3. Le poids total a donc été fixé à $\frac{1}{2}$.

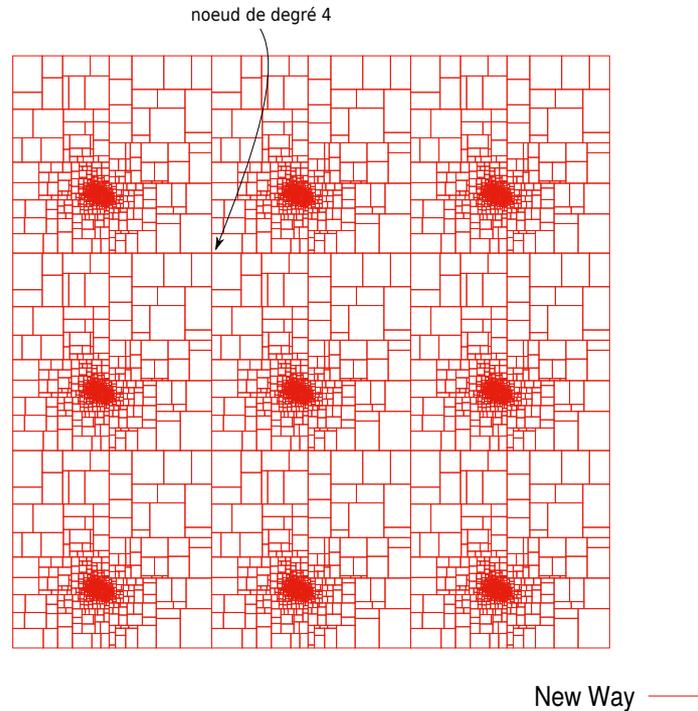
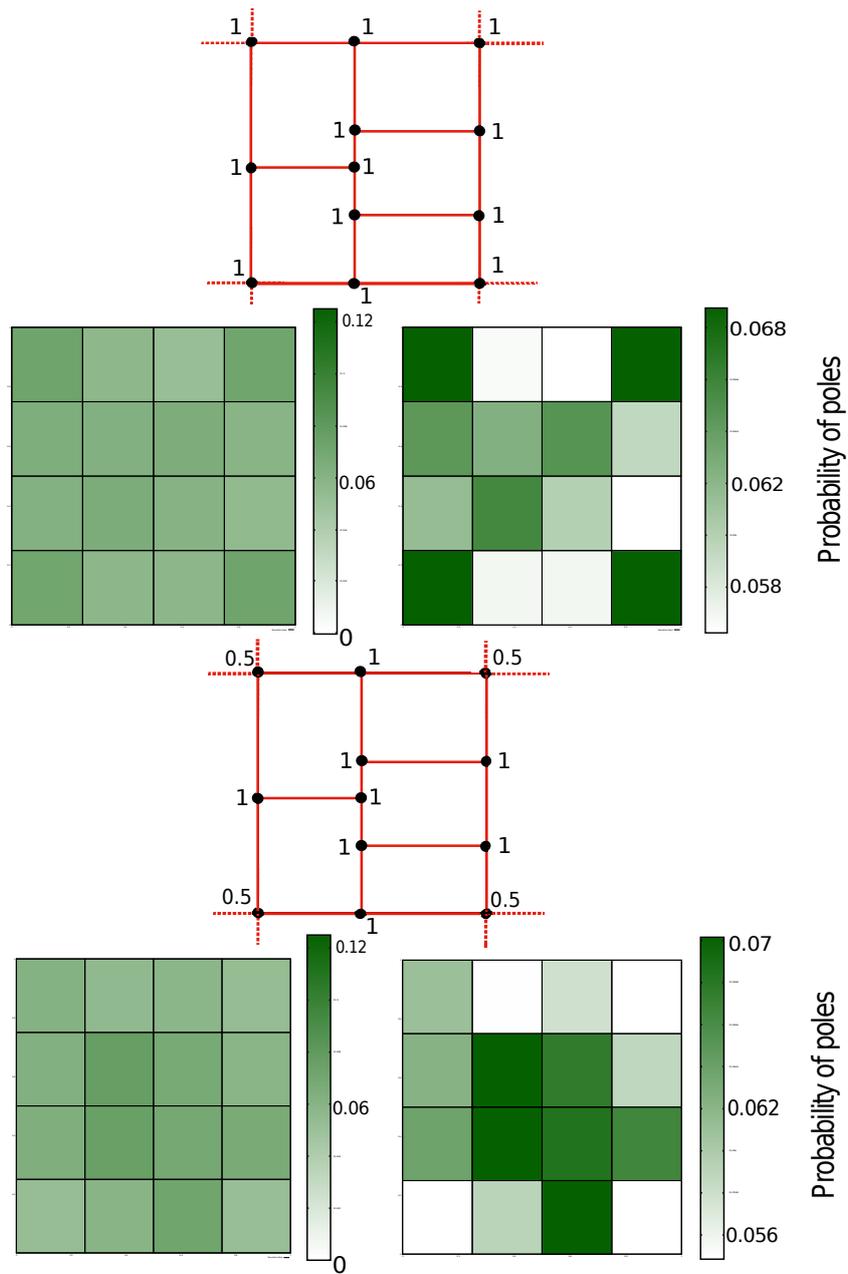


FIGURE 4.7. Représentation des conditions limites périodiques pour un réseau du modèle dynamique. Ces conditions forment un pavage carré autour du carré initial. Les sommets de ce carré deviennent des carrefours de degré 4.

Une autre tentative de conditions limites a également été testée, appelée conditions tiltées. Pour ces conditions, le maillage élémentaire (décrit par les sommets du carré initial) correspond à un parallélépipède¹ [Fig 4.9]. Cette tentative permet d’avoir les sommets initiaux de degré 3 sans ajout d’un “poids” comme précédemment. La répartition des pôles n’est pas biaisée à proximité de ces sommets, par contre il existe un biais proche des carrefours situés au centre des voies horizontales du carré initial [Fig 4.10].

Notre choix s’est donc porté sur les conditions limites précédentes en ajoutant un “poids” de $\frac{1}{2}$ pour les sommets initiaux. Avec ces conditions périodiques, nous obtenons des formes de réseaux sensiblement différentes, notamment autour de $\alpha + \beta = 2$. En particulier, la zone de transition autour de $\alpha = \beta$ disparaît, au profit d’une franche discontinuité entre réseaux homogènes et réseaux fortement polarisés.

1. La proximité des carrefours pour une cellule du carré devient plus difficile à déterminer (voir annexe).



Numbers of simulation: 3200

FIGURE 4.8. En haut, représentation de la disposition des pôles pour des conditions limites périodiques sans modification du “poids” au niveau des sommets initiaux. En bas, même représentation pour les conditions limites périodiques avec modifications du “poids”. Cette modification donne une importance similaire aux carrefours de degré 3 (en bas). En bas à gauche, probabilité que le pôle soit contenu dans chaque région de la simulation (16 cases). En bas à droite, la même probabilité est montrée mais avec une représentation de l’écart à la moyenne. Nous pouvons voir que les pôles ont une légère tendance à être proche des sommets de notre carré de base en ne modifiant pas leur “poids”. Avec l’ajout d’un “poids” égale à $\frac{1}{2}$, nous perdons ce biais en obtenant une disposition des pôles plus aléatoire.

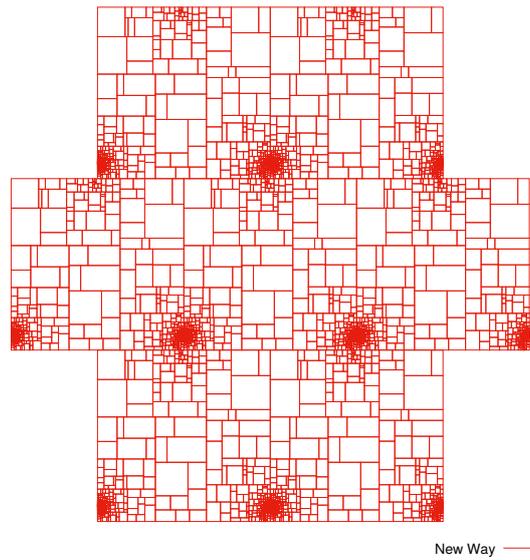


FIGURE 4.9. Représentation d'un réseau ayant des conditions limites tiltées. Nous créons un décalage horizontal pour les conditions limites à la verticale du carré initial. Cette condition a été mise en place afin de généraliser les sommets de degré 3.

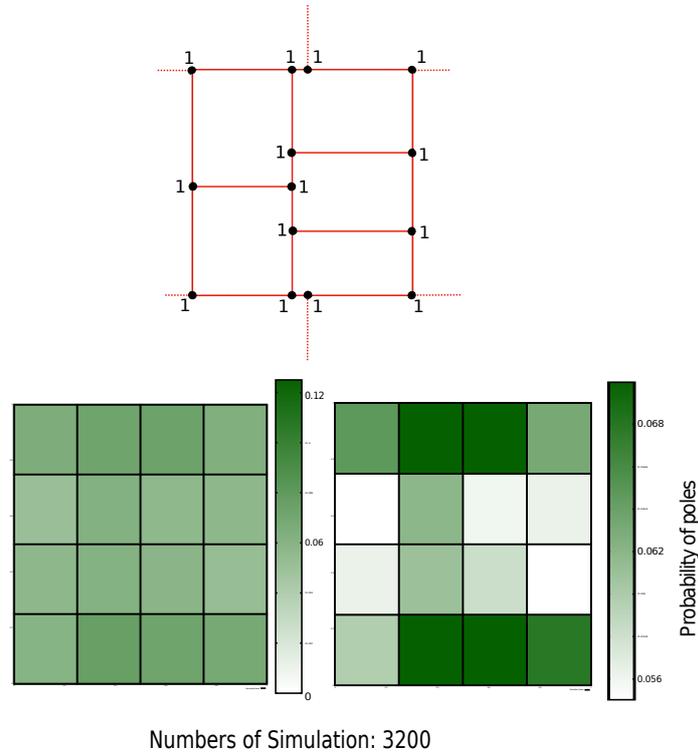


FIGURE 4.10. Représentation de la disposition des pôles pour des conditions limites tiltées. Nous avons un biais de positions à proximité du centre des bords horizontaux (haut et bas du carré).

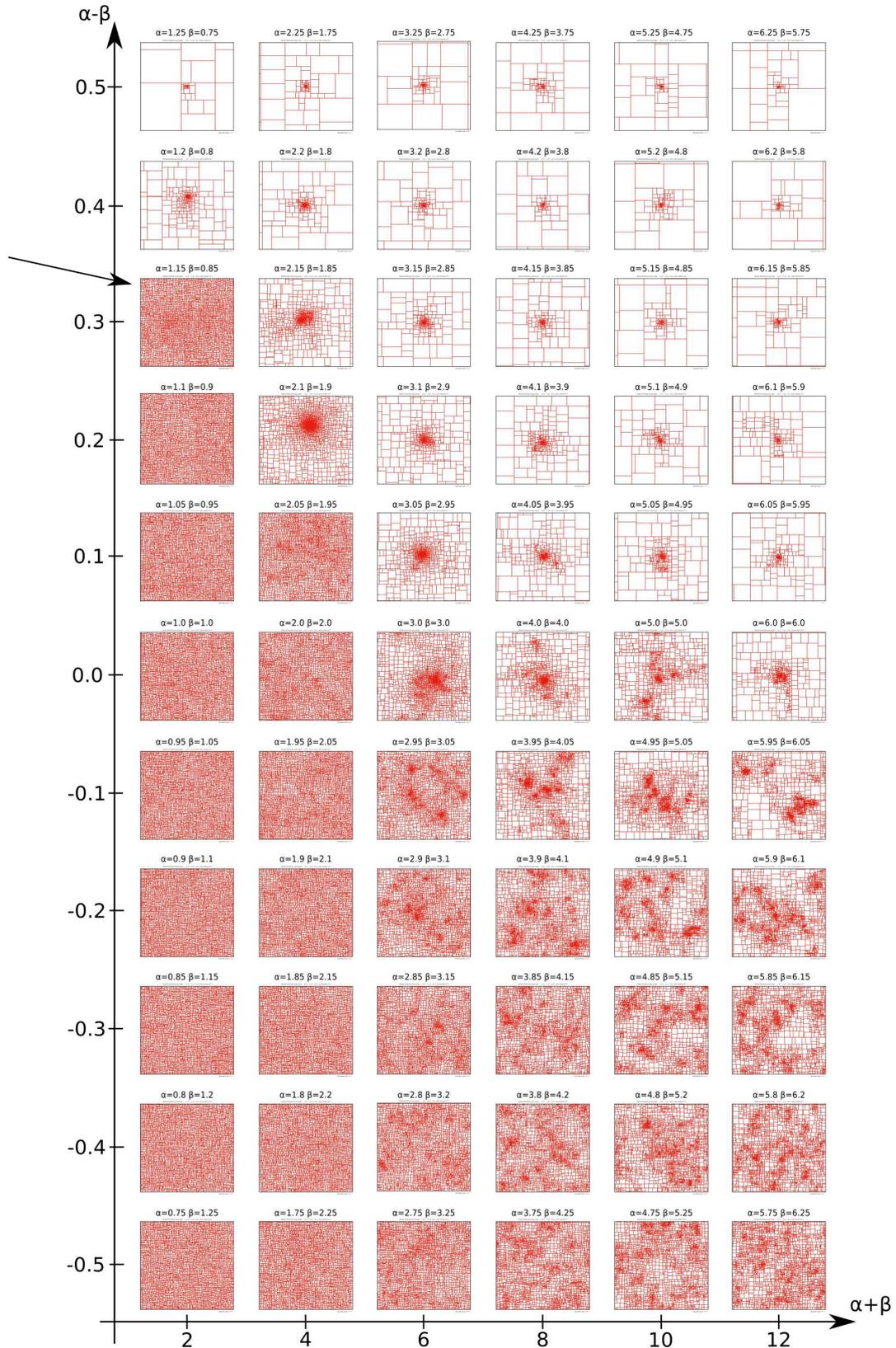


FIGURE 4.11. Exploration de l'espace des paramètres au voisinage de $\alpha = \beta$ avec les conditions limites. La zone de transition disparaît au profit d'une plus franche discontinuité entre la zone des réseaux homogènes et la zone des réseaux fortement polarisés.

4. Analyse des distributions des longueurs de voies

Nous avons analysé la distribution du logarithme des longueurs des voies pour les différentes zones de l'espace des paramètres du modèle. Pour la zone $\beta \gg \alpha$, nous retrouvons la distribution obtenue pour le modèle Grande Longueur, une distribution confondue avec le fit parabolique (en échelle logarithmique) sur moins de 1σ . Pour la zone polaire ($\alpha \gg \beta$), la distribution est instable, les découpes s'accumulant sur une unique cellule, les voies tendent alors vers des valeurs infiniment petites [Fig 4.12].

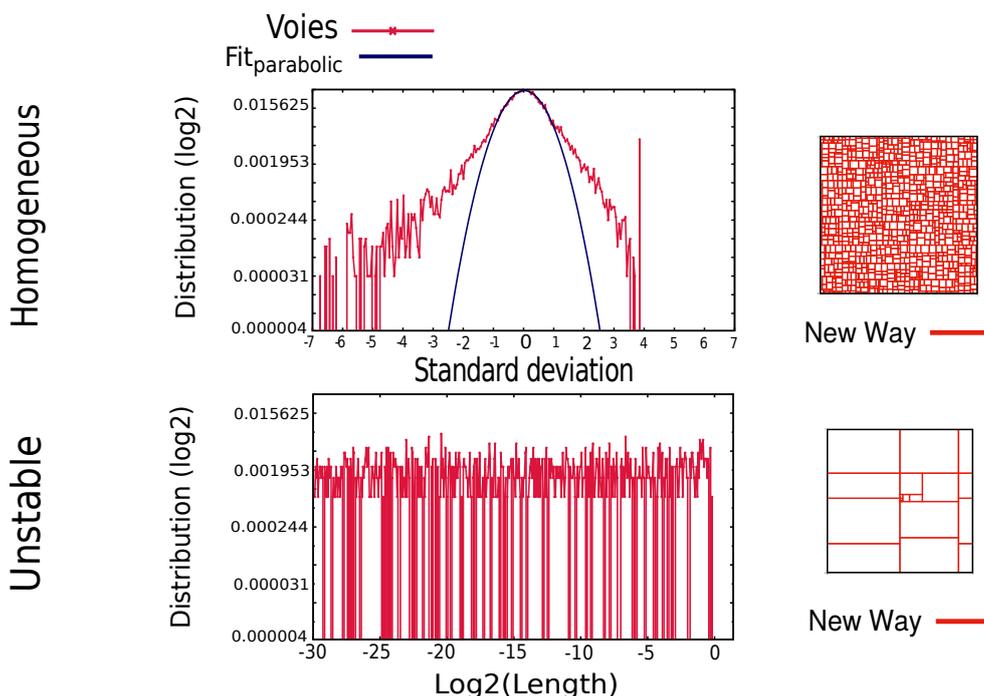


FIGURE 4.12. Analyse de la distribution des longueurs des voies pour les états homogènes et polaires (dit instables). Pour le cas instable, nous avons un modèle dont les distributions divergent du côté des petites longueurs. Pour le réseau homogène, nous retrouvons la même distribution que précédemment avec le modèle Grande Longueur (voir figure 3.11)

Dans la zone de transition, nous avons distingué les distributions du logarithme des longueurs pour les réseaux unipolaires à grand rayon d'accumulation de découpes et celles des réseaux multipolaires. Pour le premier, le fit parabolique est confondu sur moins d'un écart-type à proximité de μ (voir figure 4.13). La différence est principalement du côté des petites longueurs : la distribution évolue linéairement (sous la forme d'une loi de puissance en échelle standard) donnant une forte asymétrie.

Pour le cas multipolaire, la forme de la distribution se distingue du cas précédent. Côté petites longueurs, nous observons un élargissement du sommet plus conséquent.

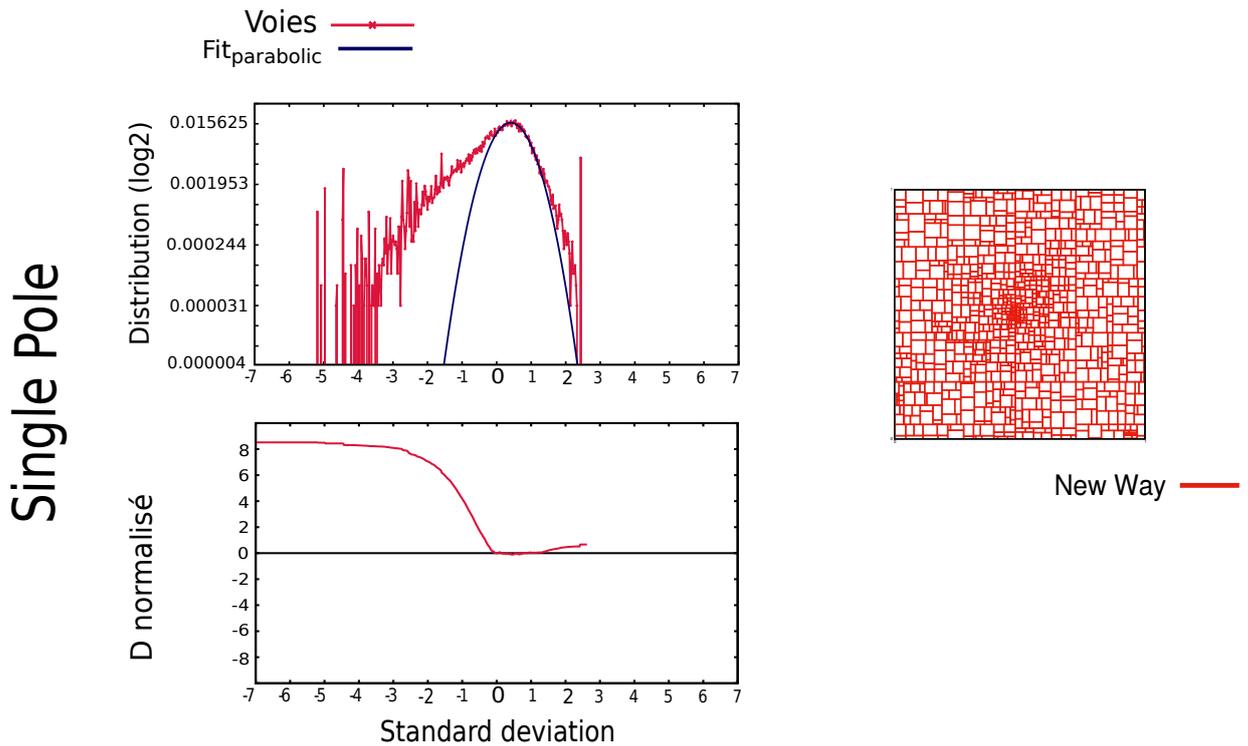


FIGURE 4.13. Distribution des longueurs des voies et écart normalisé pour le modèle à pôle unique. Le fit au sommet de la distribution revient à ce que nous avons observé précédemment pour le cas Grande Longueur. Les deux courbes sont similaires sur moins de 1σ à proximité de la moyenne. La différence principale entre les deux modèles est une asymétrie plus prononcée du côté des petites longueurs de voies.

Cet élargissement est sans doute provoqué par la multiplication des pôles qui accumulent de nombreuses coupes de petites longueurs [Fig 4.14].

Plus généralement, pour cette zone de transition, nous obtenons des distributions éloignées de celles obtenues sur les réseaux viaires. Ces distributions sont très asymétriques, elles s'étendent fortement du côté des petites longueurs. Cela remet en question la pertinence de ce modèle. En effet, notre hypothèse était que l'inhomogénéité de surfaces du parcellaire devait impacter le sommet de la distribution de longueurs des voies. Elles devaient se rapprocher d'une forme parabolique. Les distributions ne sont donc pas satisfaisantes malgré des écarts de tailles du parcellaire plus grand par rapport au modèle Grande Longueur.

La statistique est donc éloignée de ce que nous recherchons. Cependant, les formes polaires obtenues dans le modèle nous font réfléchir sur les méthodes de caractérisation de ces réseaux. Caractériser les formes obtenues permettraient de faire des comparaisons avec la réalité. Ainsi nous pourrions voir si les comportements des pôles obtenus par ce modèle sont comparables avec ceux des réseaux viaires.

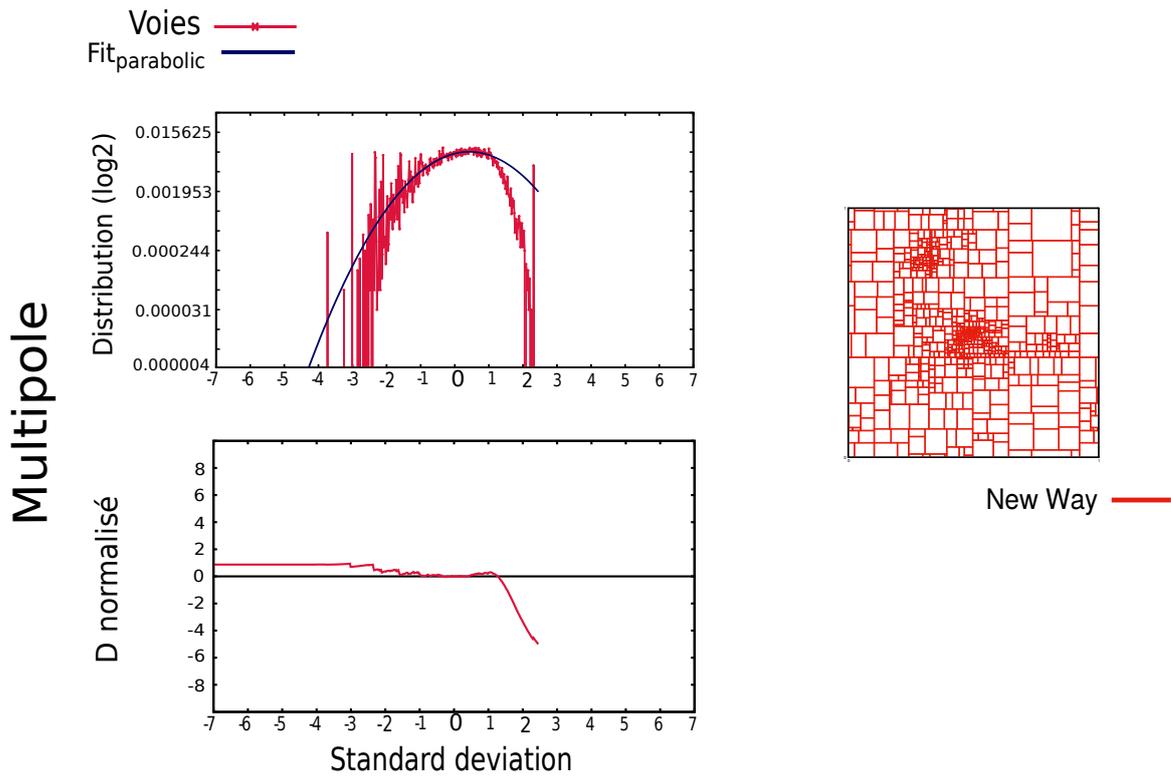


FIGURE 4.14. Distribution des longueurs des voies et écart normalisé pour le modèle multipolaire. Nous avons un fort élargissement du côté des petites longueurs de voies également. Le fit parabolique ne fonctionne que sur ce côté de la distribution.

Outils de caractérisation des réseaux issus du modèle dynamique

Au cours de l'étude du modèle dynamique, nous avons testé différents outils afin de quantifier les formes de réseaux et de mieux cerner sa dynamique. Nous en présentons trois : une représentation du réseau sous la forme d'arbre généalogique, une méthode de caractérisation des pôles et l'étude d'un modèle simplifié.

1. Arbre généalogique

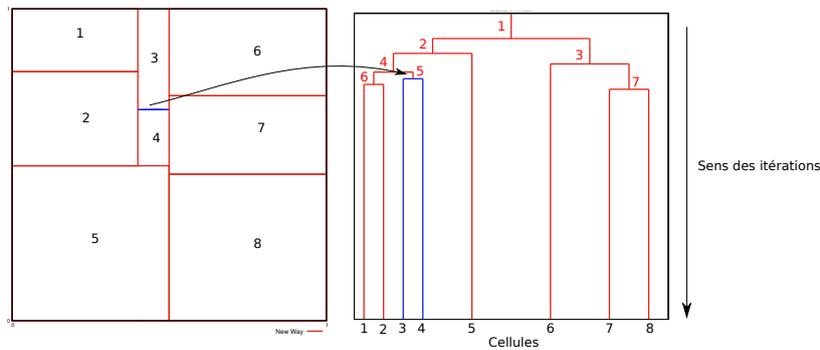


FIGURE 5.1. Principe de la représentation en arbre généalogique (à droite) pour un réseau composé de sept voies en plus des quatre voies initiales (à gauche). Chaque branche de l'arbre correspond à une cellule et chaque nœud à une découpe/nouvelle voie (numérotée en rouge). Pour un nœud donné, nous avons deux branches qui vont se créer. En bleu, un exemple de représentation d'une découpe dans l'arbre. Nous la retrouvons à l'aide d'une numérotation. Cette numérotation est définie de la manière suivante : les cellules filles prennent le numéro de la cellule mère et du numéro suivant, décalant alors la numérotation des autres cellules à chaque itération. Pour les découpes verticales, la cellule de gauche prend le numéro de la cellule mère et celui de la cellule du haut pour les découpes horizontales. La numérotation des cellules va du haut gauche jusqu'au bas droit. Cette démarche a facilité les vérifications de cohérence entre le réseau et les arbres.

Cet outil de caractérisation des réseaux s'inspire d'une représentation en arbre généalogique. À chaque cellule sélectionnée, puis découpée, nous créons un nœud et deux nouvelles branches. Ces branches correspondent aux deux cellules filles après

découpe de la cellule mère (voir figure 5.1). Avec cette projection, nous perdons l'emplacement géographique de chaque cellule mais nous récupérons l'historique de découpe de la première voie créée jusqu'à la totalité du réseau final. En appliquant cet outil au modèle dynamique, nous obtenons plusieurs représentations d'arbres généalogiques en fonction des paramètres établies [Fig. 5.2] : pour un réseau homogène, les branches sont étalées de manière uniforme sur l'ensemble de l'arbre. Pour des réseaux qui se polarisent de manière unipolaire, les branches se concentrent dans une zone précise.

Afin de caractériser ces comportements, nous cherchons à quantifier l'asymétrie de l'arbre. Nous nous sommes appuyées sur un calcul provenant de Katifori et al. [23]. Dans cet article, ils décrivent une méthodologie pour reconstruire la hiérarchie d'apparition des veinures de feuilles sous forme d'un arbre généalogique [Fig 5.3]. À partir de ces arbres, ils définissent un coefficient d'asymétrie $Q_T(t_n)$ qui s'écrit de la manière suivante :

$$Q_T(t_n) = \frac{1}{w(t_n)} \sum_{j=1}^{d(n)-1} w_j q(r_j, s_j)$$

- j correspond au noeud de l'arbre t_n de sommet $d(n)$ ($j = 1$ est le noeud le plus bas et $j = d(n) - 1$ le second noeud le plus haut).
- $q(r_j, s_j)$ est définis comme une asymétrie locale,

$$q(r_j, s_j) = \frac{s_j - r_j}{s_j}$$

s_j correspond au côté du plus grand nombre de noeud et r_j , le côté le plus faible : si $s_j = r_j$, nous retrouvons un coefficient nul, l'arbre en ce noeud est symétrique. Si $s_j > r_j$, nous obtenons une valeur qui va tendre vers 1 correspondant à une forte asymétrie.

- w_j correspond au poids de chaque noeud. Plus le noeud est situé haut dans l'arbre, plus son poids est important
- $w(t_n)$ constitue la somme de l'ensemble de ces poids, plus le noeud est situé haut dans l'arbre, plus cette somme est grande [Fig 5.4] :

$$(5.1) \quad w(t_n) = \sum_{j=1}^{d(n)-1} w_j$$

À partir de ce coefficient d'asymétrie, nous pouvons distinguer les différents réseaux et retrouver l'ensemble des zones du modèle dynamique [Fig 5.5]. Cette quantification pourrait être un outil pertinent afin de comparer les réseaux viaires réels et ceux produit par notre modèle.

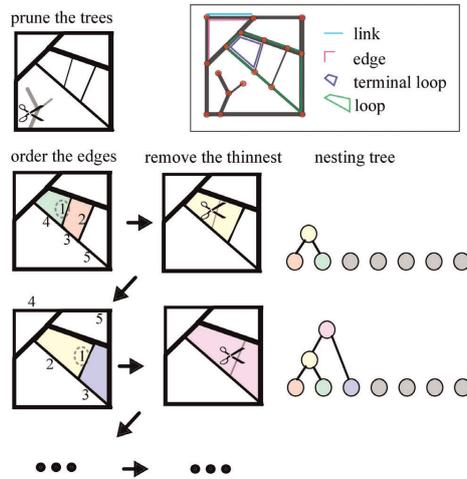


FIGURE 5.3. Principe de la reconstruction du réseau dans l'article Katifori et al. Ils hiérarchisent le réseau en fonction de la largeur de chaque “ parcelles” (de la plus petite largeur à la plus grande obtenue sur la forme finale). Ils retirent les arcs un par un afin de reconstruire l'historique du réseau. Ils représentent cette hiérarchie sous la forme d'un arbre généalogique, chaque noeud correspondant à une cellule et les branches à une séparation liée à un segment. - Image issue de l'article [23]

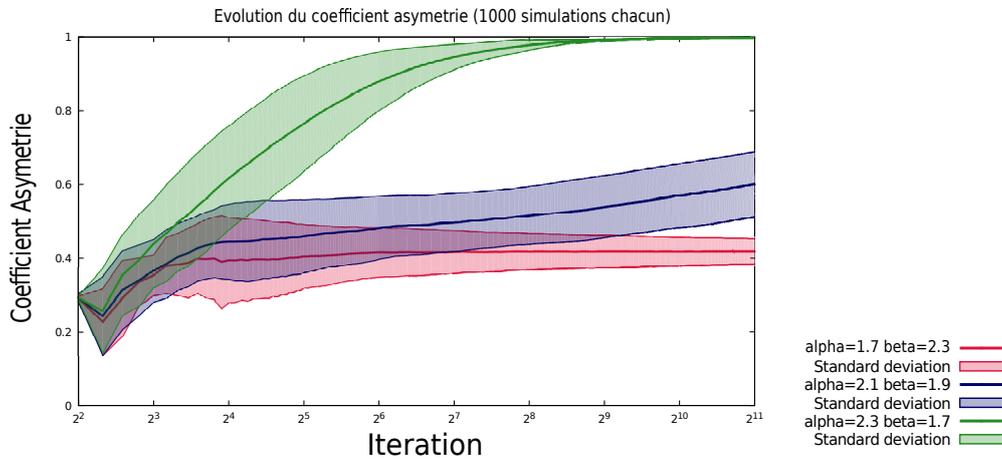


FIGURE 5.5. Évolution du coefficient d'asymétrie en fonction du nombre d'itération pour trois réseaux issus du modèle dynamique. La courbe en vert foncé correspond à la moyenne pour 1000 simulations d'un cas polaire instable et entouré par son écart-type en vert clair. Pour ce cas, nous obtenons un coefficient qui tend puis qui se stabilise vers 1 (valeur maximum d'asymétrie). En rouge, nous avons l'évolution du cas homogène, qui se stabilise très vite à de plus faibles valeurs d'asymétrie (0.4). Enfin en bleu, nous avons le cas polaire transition entre les 2 états. On remarque que le coefficient se confond avec un réseau homogène avant de s'en éloigner et de tendre lentement vers le cas instable. Pour des itérations plus grandes, il est probable que ce coefficient se rapproche de 1.

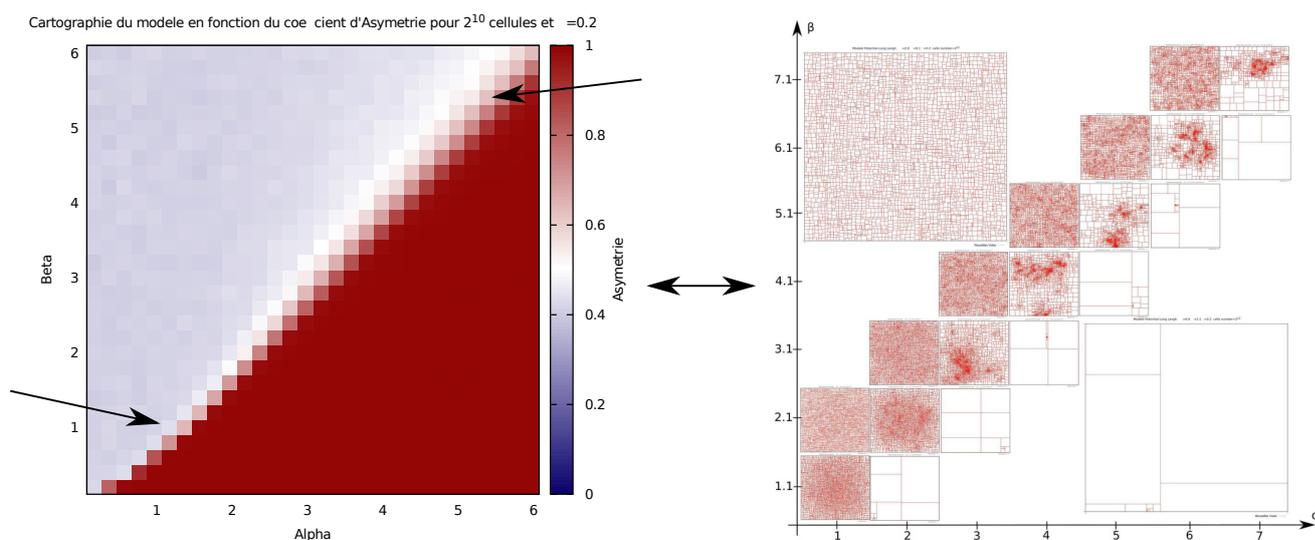


FIGURE 5.6. Espace des paramètres du modèle en fonction du coefficient d'asymétrie (pour $p = 10$. et $\sigma_b = 0.2$, à gauche). Nous observons les 2 zones (polaire-instable et homogène) avec une zone de transition en blanc qui s'agrandit en fonction de la valeur des deux paramètres. Cette analyse revient aux descriptions faites sur l'espace des paramètres du réseau (à droite).

Cependant, comme nous avons pu le constater en modifiant le bruit de découpe σ_b , cet indicateur est à relativiser. En effet, pour un arbre de même asymétrie, nous avons des formes de réseaux différentes. Les arbres ne fournissant pas d'information sur la géométrie du réseau, il ne semble pas possible d'isoler de manière évidente une structure polaire (voir figure 5.7).

La représentation en arbre généalogique permet d'avoir une représentation du réseau se basant uniquement sur une logique de redécoupage. Le calcul de son asymétrie est défini comme un bon indicateur de l'inhomogénéité du réseau au cours du processus de découpe. Sans fournir d'informations sur la géométrie, il indique que des secteurs du réseau sont privilégiés au cours du processus de découpe.

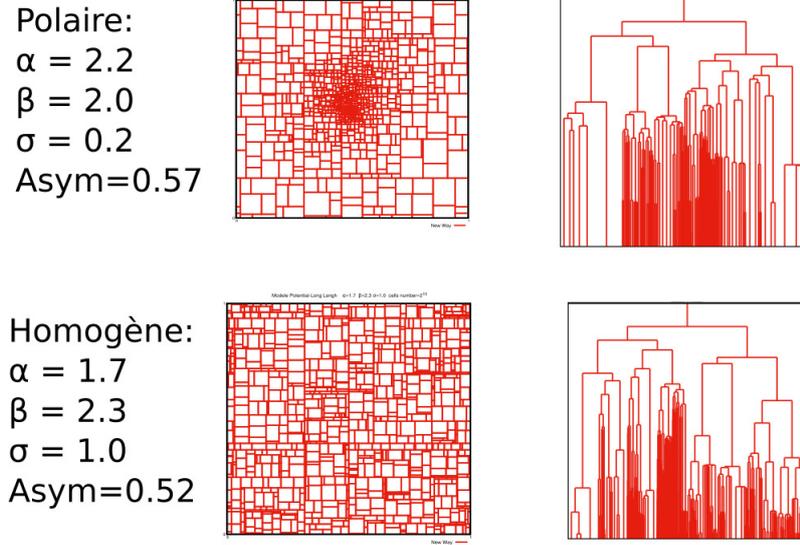


FIGURE 5.7. Comparaison entre un réseau polaire avec un bruit standard et un cas homogène pour un bruit de découpe maximal. Nous obtenons un coefficient d'asymétrie « Asym » pour chaque arbre généalogique qui est équivalent (autour de 0.5) en ayant pourtant une structure du réseau complètement différente.

2. Outils de caractérisation des pôles

Nous avons également développé une méthode de caractérisation des pôles. Nous calculons la divergence de taille des cellules et traçons un vecteur indiquant la direction des cellules voisines les plus grandes. La norme correspond à l'écart de taille. L'idée de ce calcul est d'obtenir l'évolution entre la norme du vecteur et l'aire des cellules. Ce profil doit nous permettre d'avoir une bonne indication de l'évolution de ces tailles autour du pôle. Dans le cas idéal, nous supposons que plus nous nous rapprochons du centre du pôle, plus les cellules sont de petites tailles, une évolution de la norme en fonction de la taille suivant une loi de puissance. Ainsi, cette caractérisation constitue un moyen de comparaison avec les graphes polarisés des réseaux viaires.

Nous calculons λ_i ,

$$(5.2) \quad \lambda_i = \sum_j^n p_{ij} \times \log \left(\frac{d_{ij}}{d_0} \right)$$

la somme des log des distances entre le centre de la cellule i et les cellules voisines j .

Chaque distance est pondérée par la fraction de périmètre en commun entre les cellules (p_{ij}). λ_i est la distance moyenne entre la cellule i et ses voisines j .

Nous définissons δ_{ij} telle que

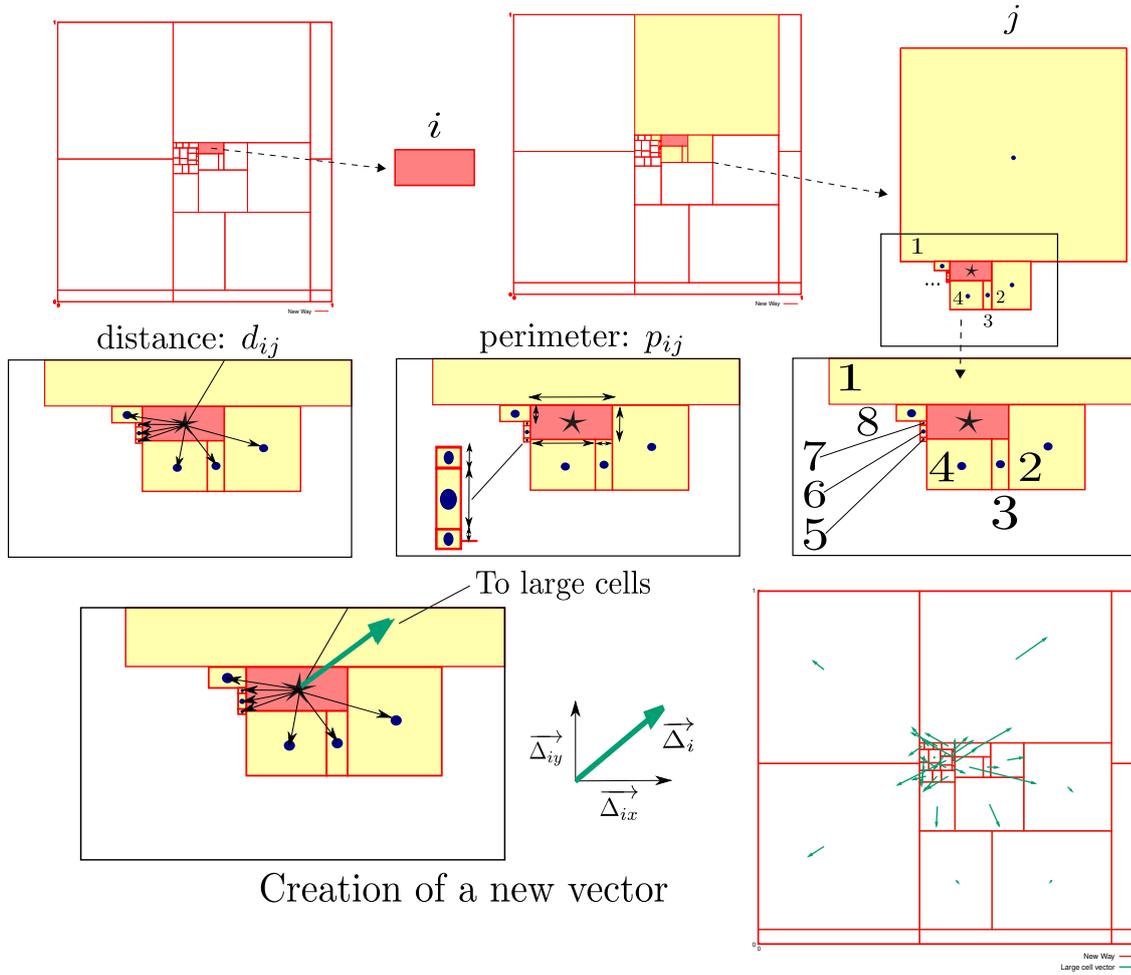


FIGURE 5.8. Principe du calcul pour une cellule donnée i . Nous prenons en compte les distances d_{ij} du centre de la cellule i et de toutes les voisines j ainsi qu'une pondération liée au périmètre connecté entre i et j . A partir de ces 2 variables, nous calculons un vecteur $\vec{\Delta}_i$ se dirigeant vers les zones où les cellules sont les plus grandes.

$$(5.3) \quad \delta_{ij} = \left(p_{ij} \times \log \left(\frac{d_{ij}}{d_0} \right) \right) - \lambda_i.$$

c'est-à-dire l'écart de distance de la cellule i et les voisines j (pondérée par le périmètre) avec la distance moyenne λ_i ,

Le vecteur $\vec{\Delta}_i$ tel que

$$(5.4) \quad \vec{\Delta}_i = \sum_j^n \delta_{ij} \times \vec{u}_{ij},$$

est la somme des vecteurs unitaires entre les cellules i et j (nommé \vec{u}_{ij}), multipliés par δ_{ij}

Ainsi, une valeur élevée de δ_{ij} va donc influencer la direction et la norme de $\vec{\Delta}_i$ vers la cellule j [Fig 5.8].

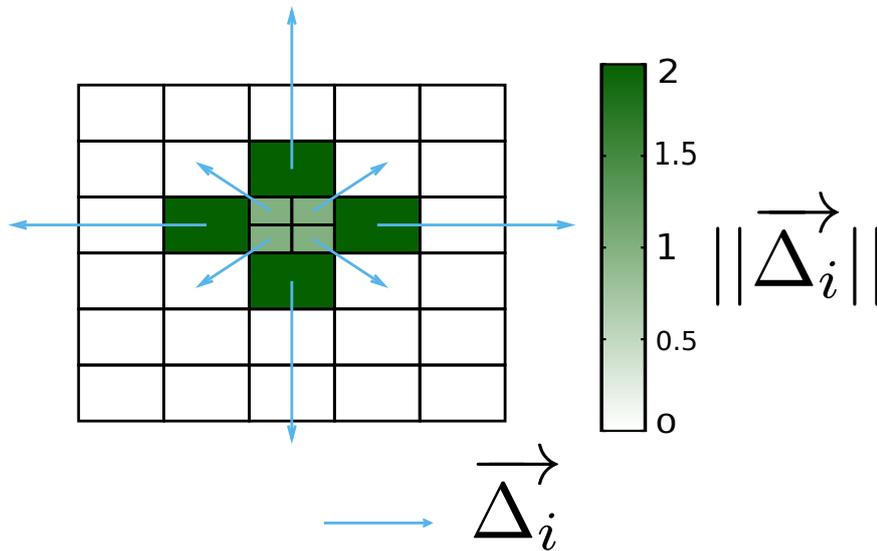


FIGURE 5.9. Cas simple de la divergence sur un réseau de cellules de tailles homogènes. Nous calculons la divergence sur l'ensemble du réseau après avoir découpé une cellule en 4. Les vecteurs sont dirigés en opposition des cellules les plus petites. La coloration des cellules correspond à la norme de chaque vecteur.

Nous appliquons le calcul de Δ_i notre modèle dynamique [Fig 5.10], nous faisons ressortir un nuage de points entre norme du vecteur et taille de cellules qui semble suivre une loi de puissance [Fig 5.11] malgré de fortes variations de la divergence pour une taille donnée.

Nous nous posons la question de modifier notre méthodologie agrandissant la zone d'influence aux seconds voisins de la cellule i pour composer le calcul du vecteur. Nous considérons que ce calcul du vecteur est trop sensible aux variations de tailles de cellules les plus proches, nous voudrions augmenter sa sensibilité à des cellules plus éloignées afin que sa direction ne soit pas bruité par une variation ponctuel des cellules.

Si nous arrivons à mettre cette méthodologie en place afin d'avoir un signal moins "bruité", nous pourrions tenter de faire la même caractérisation sur le parcellaire de vrai villes et voir quelles en sont les points communs et les différences.

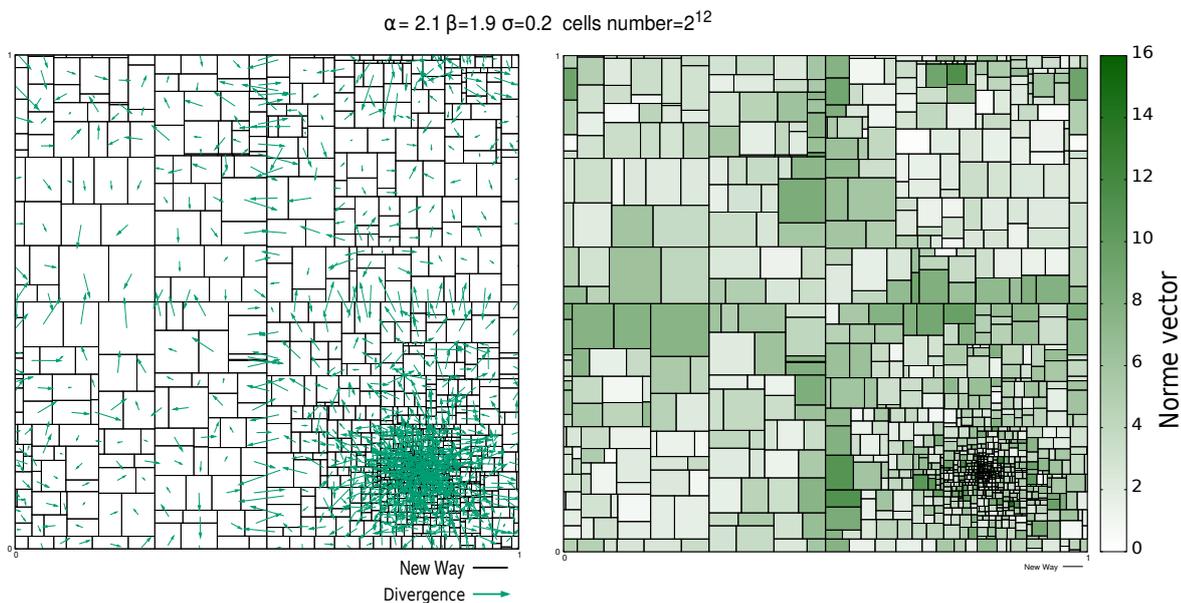


FIGURE 5.10. Pour un réseau engendré par le modèle dynamique, nous obtenons une accumulation de cellules et donc de vecteurs proches d'un pôle. Au vu de leur très grand nombre, il est difficile de voir le sens que peuvent prendre l'ensemble de ces vecteurs, si les flèches sont dans le sens contraire du pôle. Nous représentons la norme du vecteur de chaque cellule (à droite) indiquant la variation des tailles de cellules, la norme doit augmenter en fonction de la proximité avec le centre du pôle.

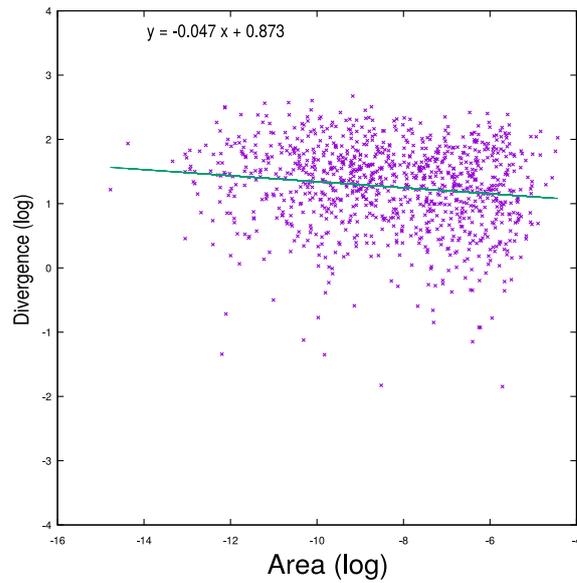


FIGURE 5.11. Norme des cellules en fonction de leur aire pour le réseau de la figure 5.10. Nous obtenons un nuage de points dont la norme augmente en fonction de la diminution de la taille des cellules et de grands écarts de norme pour une même taille de cellules. Une régression linéaire fournit une estimation de la valeur de la pente sur ces données (0.047).

3. Simplification du modèle dynamique

Le modèle dynamique a été construit en partant du modèle Grande Longueur que l'on associe au paramètre α et couplé à β , processus d'homogénéisation, les paramètres σ_b de bruit de découpe et de nombre d'itération étant fixés. Même si nous avons remarqué les changements de paramètres sur les formes du réseau, nous avons voulu préciser uniquement les rôles de α et β sans les deux autres paramètres afin de voir si nous obtenons un comportement similaire. Nous avons développé un modèle simplifié qui conserve les processus de Grande Longueur et de densité de carrefours. Ce modèle calcule le potentiel U_{rec} pour une cellule donnée, avant et après sa découpe. C'est le rapport entre les deux qui va nous intéresser. La découpe n'étant pas aléatoire, elle s'effectue en plein centre. Cette cellule fait partie d'un réseau homogène de cellules de même tailles et entourées de carrefours de degré 4 [Fig 5.12].

La taille des cellules est définie par une longueur L et une largeur $\frac{L}{\sqrt{2}}$. Cette largeur a été choisie afin de conserver, pour chaque découpe, des cellules ayant le même rapport d'aspect ($\frac{\text{petit côté}}{\text{grand côté}}$), forme qui est invariant au changement d'échelle.

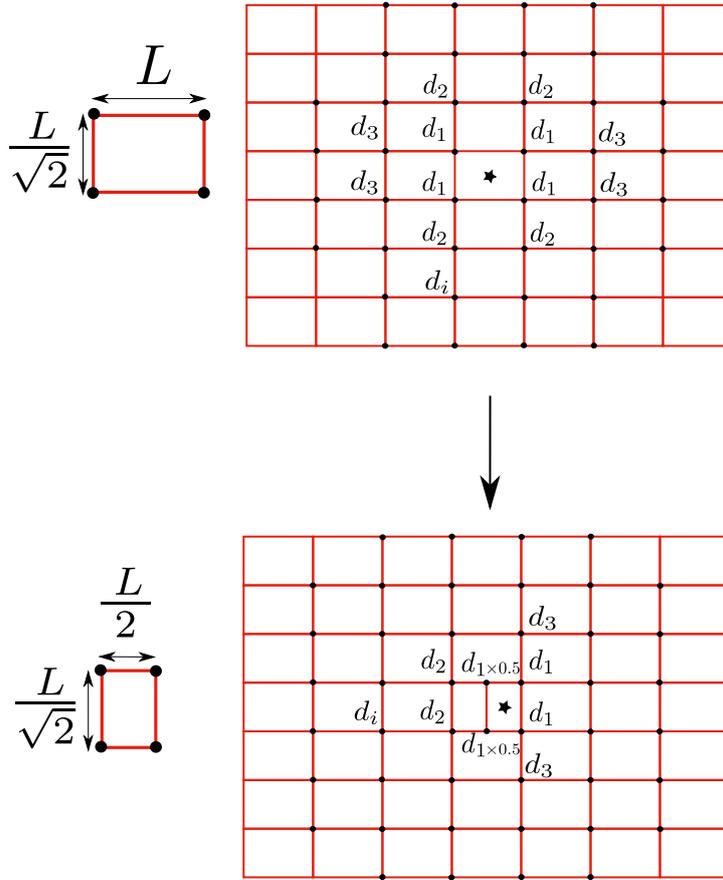


FIGURE 5.12. Principe du modèle simplifié, nous représentons un modèle homogène et nous ajoutons une découpe au centre du plus grand côté d'une des cellules. Nous calculons le potentiel avant et après découpe en fonction de L et des distances avec les carrefours voisins.

Nous calculons le rapport des potentiels entre les découpes. Nous rappelons sa formule,

$$U_{rec} = \left[\sum_i^{N_i} \frac{1}{d(C_{rec}, i)^\alpha} \right] \times L_{rec}^\beta.$$

Nous définissons U_a , le potentiel avant découpe dépendant de l'ensemble des longueurs entre le centre de la cellule et les carrefours voisins,

$$U_a = \left[\sum_i^{N_i} \frac{1}{d(C_a, i)^\alpha} \right] \times L^\beta,$$

et U_b , le potentiel après découpe,

$$U_b = \left[\sum_i^{N_i} \frac{1}{d(C_b, i)^\alpha} \right] \times \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^\beta.$$

Nous calculons R le ratio entre les deux découpes :

$$R = \left(\frac{U_a}{U_b} \right)$$

Nous avons calculé les distances pour les 40 carrefours voisins de la cellule U^a et 41 carrefours pour U^b afin d'obtenir un nombre équivalent. Le décalage d'un carrefour est lié à la découpe qui va engendrer une nouvelle voie ainsi que 2 carrefours de degré 3 (équivalent à un carrefour de degré 4).

Pour la lecture du résultat, nous avons préféré représenté le logarithme du rapport R afin d'avoir une séparation entre valeurs positives et négatives. Si $\log_2 R > 0$, la découpe diminue la valeur du potentiel de la cellule. Les découpes suivantes vont s'étaler sur l'ensemble des cellules et par conséquent homogénéiser le réseau. Inversement, si $\log_2 R < 0$, alors le potentiel de la cellule augmente avec la découpe, privilégiant les découpes suivantes, autour de celle-ci, et donc tendre vers un réseau polarisé instable. Ce qui nous intéresse est de parcourir l'espace des paramètres en fonction de ce rapport et de voir si cette cartographie est cohérente avec ce que nous avons observé sur nos réseaux [Fig 5.13].

En reprenant notre formule théorique et en calculant le rapport pour des α et β compris entre 0 et 10, nous obtenons une représentation proche de notre modèle : en rouge, nous avons un \log_2 négatif (instable), en bleu, positif (homogène) et une transition, en blanc, pour $\beta - \alpha$ légèrement inférieur à 0. La différence que l'on constate est sur cette zone de transition. La caractérisation avec les arbres généalogiques montrait une zone qui s'élargit en fonction des valeurs de plus en plus importantes de ces deux paramètres, ce qui semblait cohérent avec les cartographies de nos réseaux. Comme cette zone reste de même largeur, on peut envisager que ce changement est relié à l'absence de bruit de découpe σ_b . Comme nous avons pu le dire précédemment, ce bruit va créer des variations de potentiel (plus ou moins grandes en fonction de la valeur de α) faisant émerger plusieurs zones d'instabilités si les découpes s'effectuent à proximité d'un des bords sur des réseaux qui tendent vers un comportement homogène.

Nous arrivons à caractériser le modèle dynamique à partir d'un modèle simplifié ne tenant compte que des deux processus α et β et par une mesure de l'asymétrie liée à une représentation des réseaux en arbre généalogique. Nous avons une plus grande vue du comportement général de notre modèle sans pour autant retrouver une distribution des longueurs des voies qui se rapproche d'une loi en log-normale.

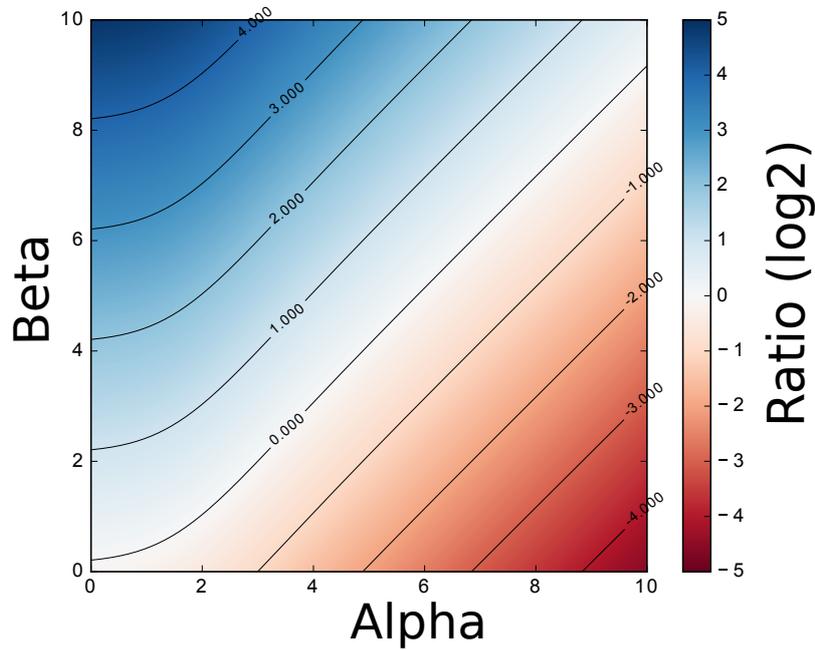


FIGURE 5.13. Représentation du $\log_2(R)$ sur l'espace des paramètres. Nous retrouvons en bleu, les valeurs positives indiquant l'homogénéisation du réseau, et en rouge, les valeurs négatives correspondant au modèle instable. Entre les deux, nous avons en blanc la zone de transition qui est cohérente avec la zone polaire que nous avons pu observer sur la cartographie des réseaux du modèle dynamique ainsi que sur la caractérisation par l'asymétrie des arbres généalogiques.

Considération de la distance topologique

1. Modification du modèle dynamique

Dans le chapitre 4, nous avons constaté que les distributions des longueurs des voies des réseaux issus du modèle dynamique n'est pas en bon accord avec une loi log-normale. L'ajout du processus de densité de carrefours permet de produire des réseaux polarisés (uni ou multipolaires) et dont la distribution des tailles de cellules est beaucoup plus inhomogène que pour le simple modèle Grande Longueur. Plusieurs questions se posent sur les futures directions de recherche à prendre pour améliorer ce modèle afin qu'il engendre des réseaux avec les statistiques voulues. La première piste suivie a été de considérer le pôle comme un sous-réseau où devrait se concentrer les plus anciennes voies en analogie avec l'idée du centre ville.

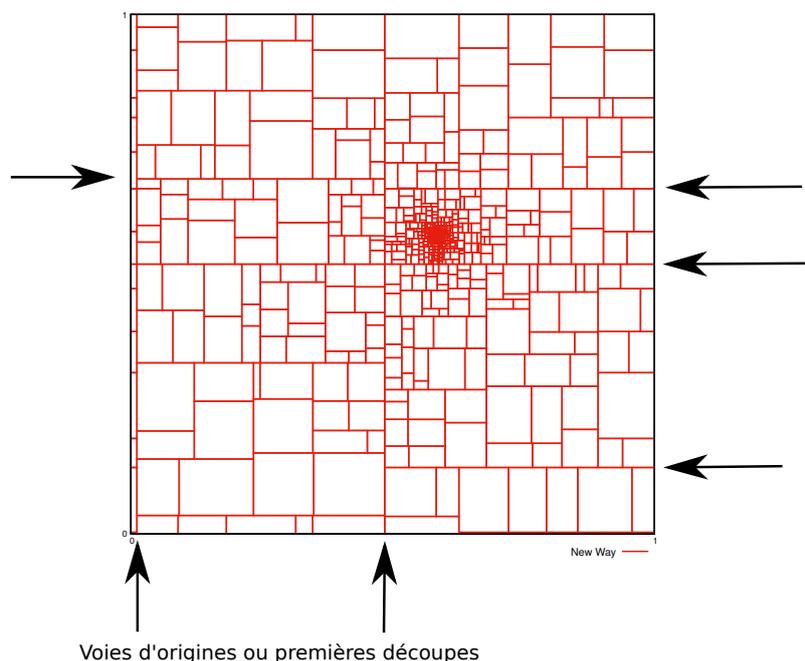


FIGURE 6.1. Représentation d'un réseau polaire engendré par le modèle dynamique : Nous obtenons un pôle circulaire éloigné des premières découpes : l'emplacement et la forme du pôle n'est pas reliée aux voies historiques (qui sont les plus grandes voies).

Une différence visuelle identifiée entre le modèle et le réseau viaire est le manque de connexion des pôles aux grandes voies historiques (voir figure 6.1). Précédemment,

nous avons expliqué le lien entre l'indicateur de *closeness* associé à la distance topologique et les voies anciennes d'un réseau viaire comme dans le cas du réseau parisien. Plusieurs de ces voies ont un score de *closeness* élevé ce qui indique un caractère de la voie structurant pour l'ensemble du réseau. Nous l'illustrons de nouveau pour Avignon sur la figure 6.2 où nous observons le centre ancien très accessible et de grandes artères allant du centre jusqu'à la périphérie. En comparaison avec notre modèle, le pôle est éloigné des grandes voies qui sont les premières grandes coupures. Pour que le pôle soit traversé par ces voies structurantes, nous avons choisis de modifier le potentiel U_{rec} en remplaçant la distance euclidienne, où les coupures dépendent de la proximité géographique [Fig 6.5], par la distance topologique, où les coupures dépendent d'un nombre minimal de tournant reliant deux noeuds [Fig 6.3, Fig 6.4].

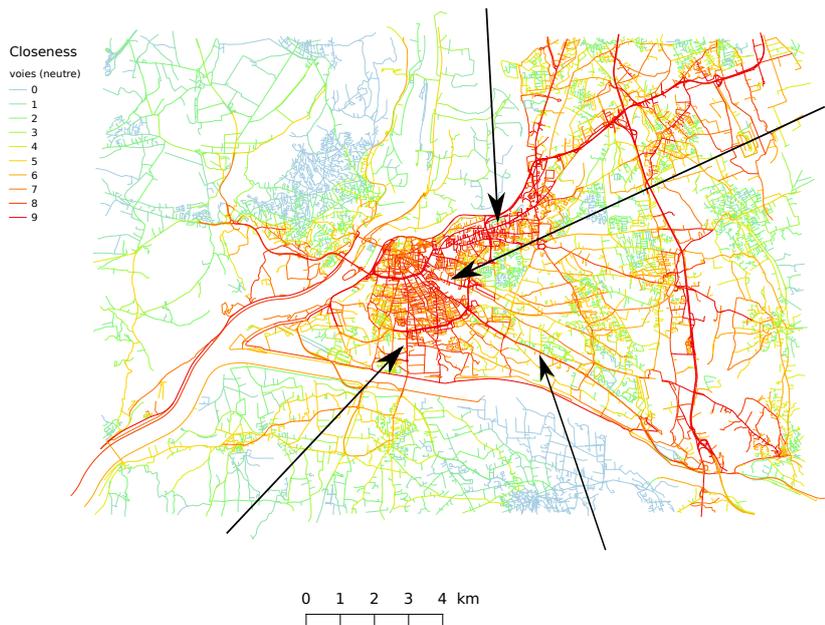


FIGURE 6.2. Représentation de la *closeness* sur les voies de la ville d'Avignon. En rouge, les voies qui ont le score le plus élevé et qui sont accessibles avec peu de changement de direction. Le centre ancien est en rouge tout comme les grandes artères partant des anciens remparts et traversant l'ensemble de la ville jusqu'à sa périphérie (indiqués avec des flèches). Une partie du réseau s'est structurée autour d'elles avec de nombreuses voies qui les recoupent perpendiculairement (également en rouge).

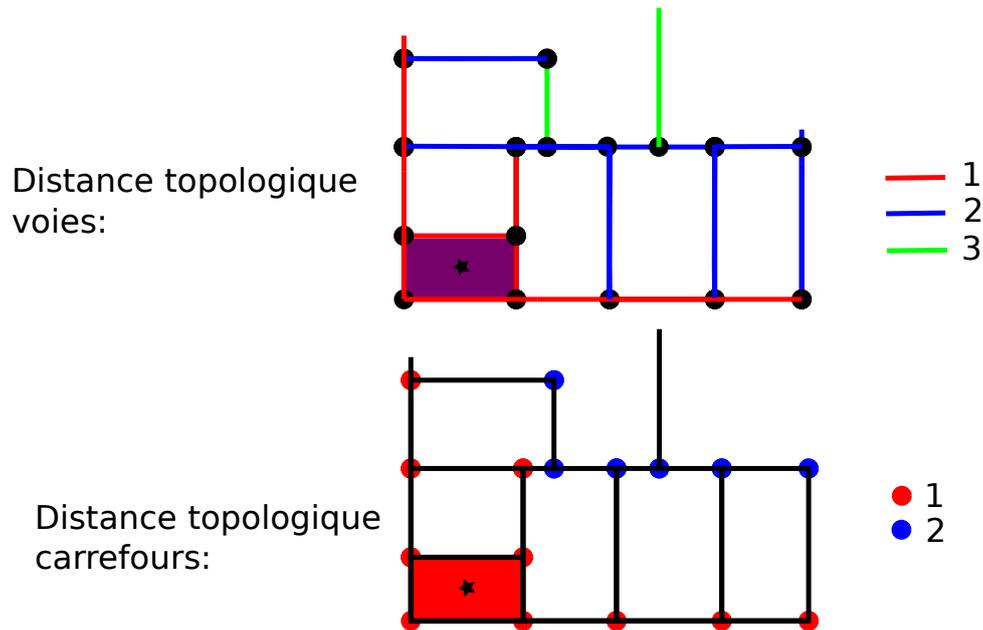


FIGURE 6.3. Échantillon de réseau du modèle dynamique lié à la distance euclidienne : nous calculons pour chaque cellule la distance topologique des voies puis des carrefours.

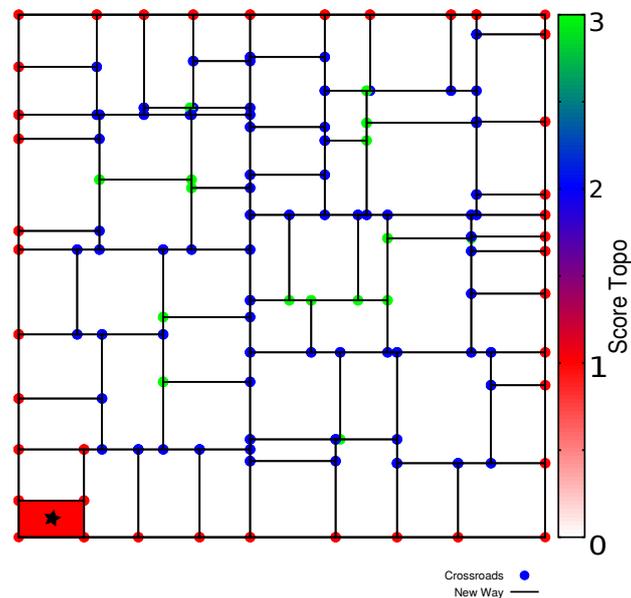


FIGURE 6.4. Représentation du modèle dynamique liée à la distance euclidienne. Nous calculons pour chaque carrefour, la distance topologique pour une cellule donnée (avec les conditions périodiques). La coloration des carrefours illustrent le nombre de tournant minimum à effectuer à partir de la cellule rouge. Par la suite, nous changeons la formule du potentiel en remplaçant la distance euclidienne par la distance topologique.

Cette considération de la distance topologique va modifier la statistique des longueurs des voies. Nous faisons l'hypothèse que les formes de pôles seront modifiées, s'étalant plus facilement le long des grandes voies et ne se concentrant pas en un point donné de l'espace c'est-à-dire une représentation qui se rapproche d'une urbanisation en doigts de gant (voir figure 1.5). Dans un premier temps, nous avons remplacé simplement la distance euclidienne par la distance topologique dans la formule du potentiel dynamique :

$$U_{rec}^{topo} = \sum_{j=1}^{2^p} \left[\frac{1}{d_j^{topo}} \right]^\alpha \times L_{rec}^\beta$$

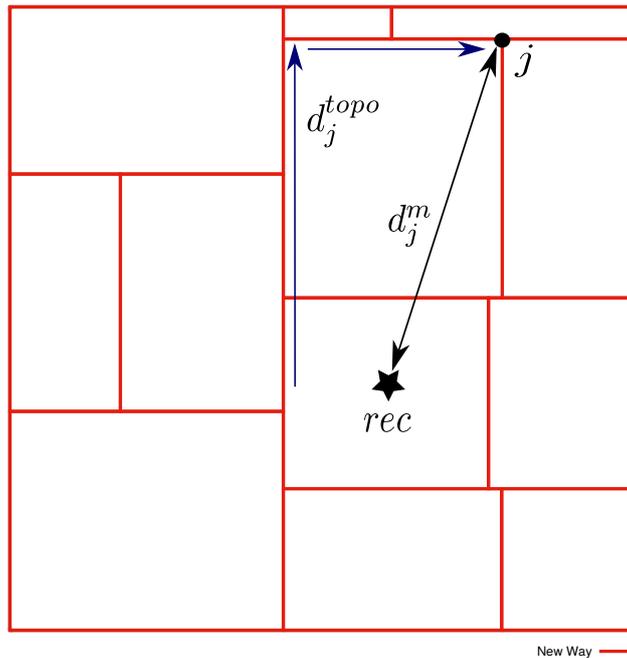


FIGURE 6.5. Représentation de la distance euclidienne et de la distance topologique. Nous calculons la distance euclidienne du centre de la cellule jusqu'au carrefour j , avec un principe de découpage, les distances sont de plus en plus petite, elles convergent vers 0. Pour la distance topologique, nous comptons le nombre de tournant minimum de chaque côté de la cellule en question et nous prenons comme distance, le côté ayant la valeur la plus faible. Cette valeur est supérieure ou égale à 1. Cette différence va modifier l'impact du processus liée à α sur le potentiel.

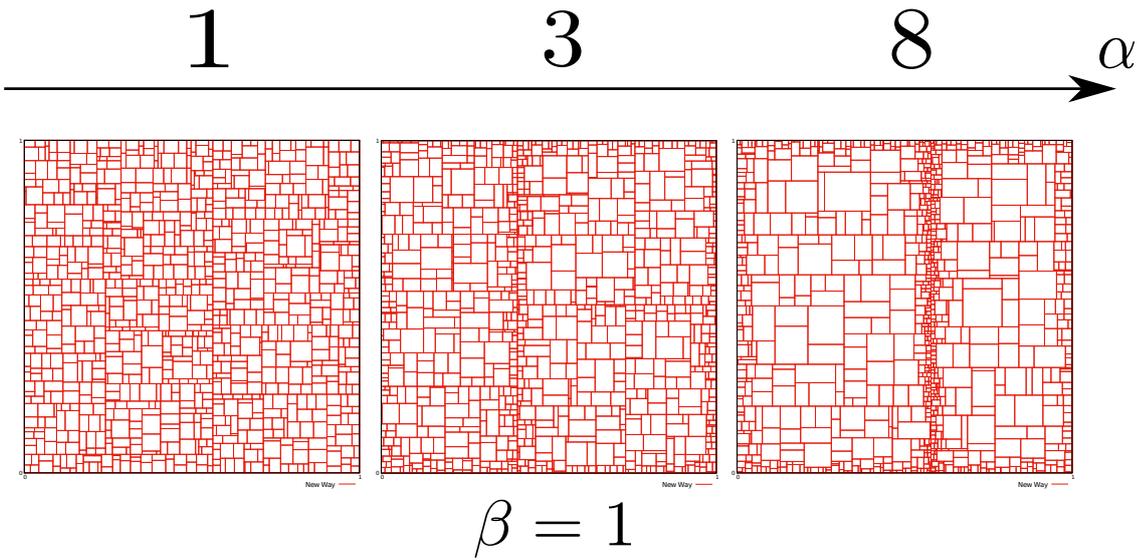


FIGURE 6.6. Évolution du modèle topologique pour différents α . Pour des valeurs au voisinage $\beta \geq \alpha$ nous retrouvons le modèle homogène. En augmentant fortement α , nous n'obtenons pas de pôle, les cellules se multiplient à proximité des premières découpes, notamment sur la première voie créée ainsi que sur les voies du carré initial (bords).

Avec cette modélisation, la forme polaire n'a pas été obtenue, les réseaux observés montrent une attraction vers voies initiales et la première découpe pour $\alpha > \beta$ (voir les voies secondaires en fonction de l'importance de α). Nous retrouvons un réseau homogène quand $\alpha = \beta$. Cette attraction est reliée à l'évolution de la fonction inverse appliquée dans le processus de densité de carrefours. Les carrefours à proximité de la cellule donnée (de distance égale à 1) sont plus lointains [Fig 6.6]. Les réseaux sont peu réalistes et s'éloignent bien plus des structures multipolaires vues précédemment. Néanmoins la distribution des longueurs des voies est plus pertinente. En effet, nous obtenons des distributions sous forme de log-normales dont l'écart avec le fit est très faible sur l'ensemble de la courbe [Fig 6.7]. Si α a un trop grand impact dans le potentiel de découpage (comme cela semble le cas pour $\alpha \gg \beta$ sur la figure 6.8), la distribution s'écarte du fit du côté des grandes longueurs. Nous remarquons une augmentation des valeurs proches du sommet (autour de 1σ) rappelant la distribution des longueurs pour le réseau de San Francisco (voir annexe). Même si la forme des réseaux engendrés s'éloigne sensiblement de celle des réseaux viaires réels, cette modélisation constitue donc une piste intéressante qu'il faudra approfondir.

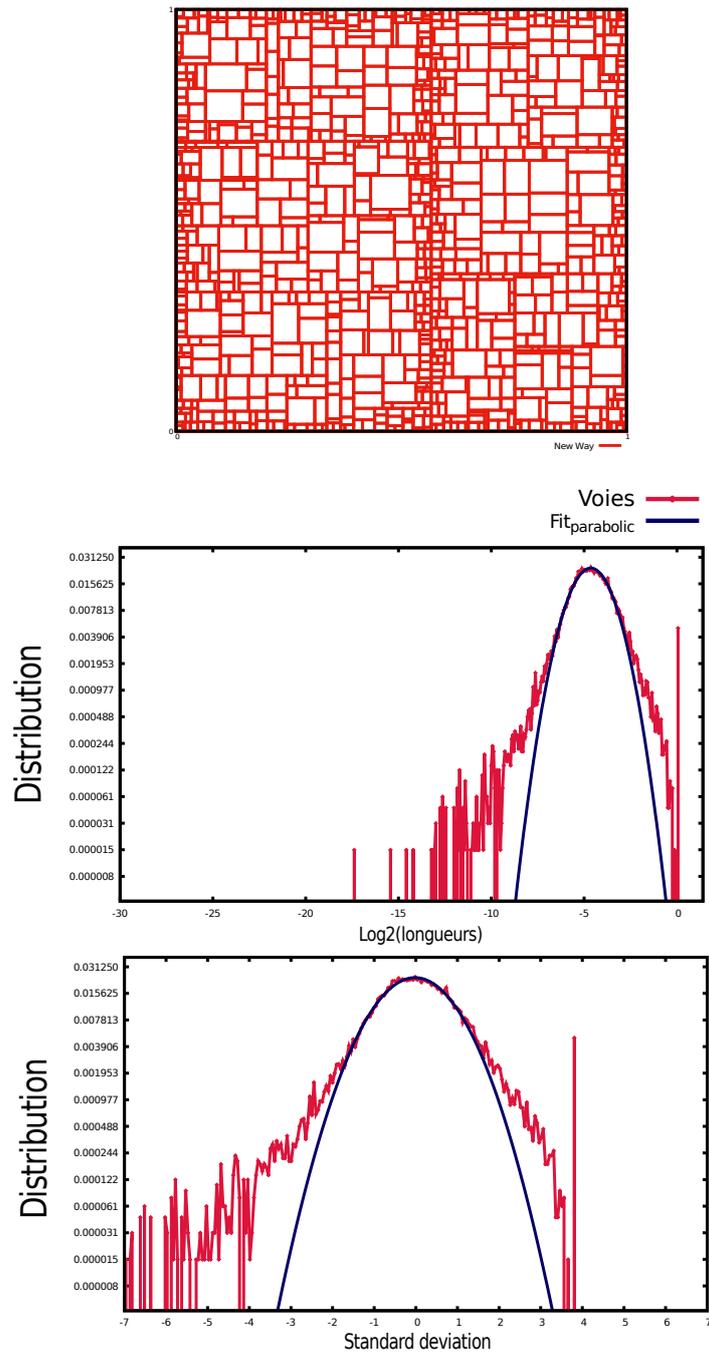


FIGURE 6.7. Illustration du réseau pour le modèle dynamique avec la distance topologique pour $\alpha = 3.0$ et $\beta = 1.0$ (Haut). De nombreuses parcelles s'étalent sur les voies initiales ainsi que sur la voie centrale. Nous constatons également une accumulation de parcelles sur les secondes coupes. En revanche, nous perdons la forme arrondie des pôles observée pour le modèle dynamique avec une distance euclidienne. Si nous regardons la distribution des longueurs des voies (centre et bas), nous obtenons une forme parabolique jusqu'à une valeur proche de 2σ , se rapprochant des distributions observées pour le réseau viaire de nombreuses villes.

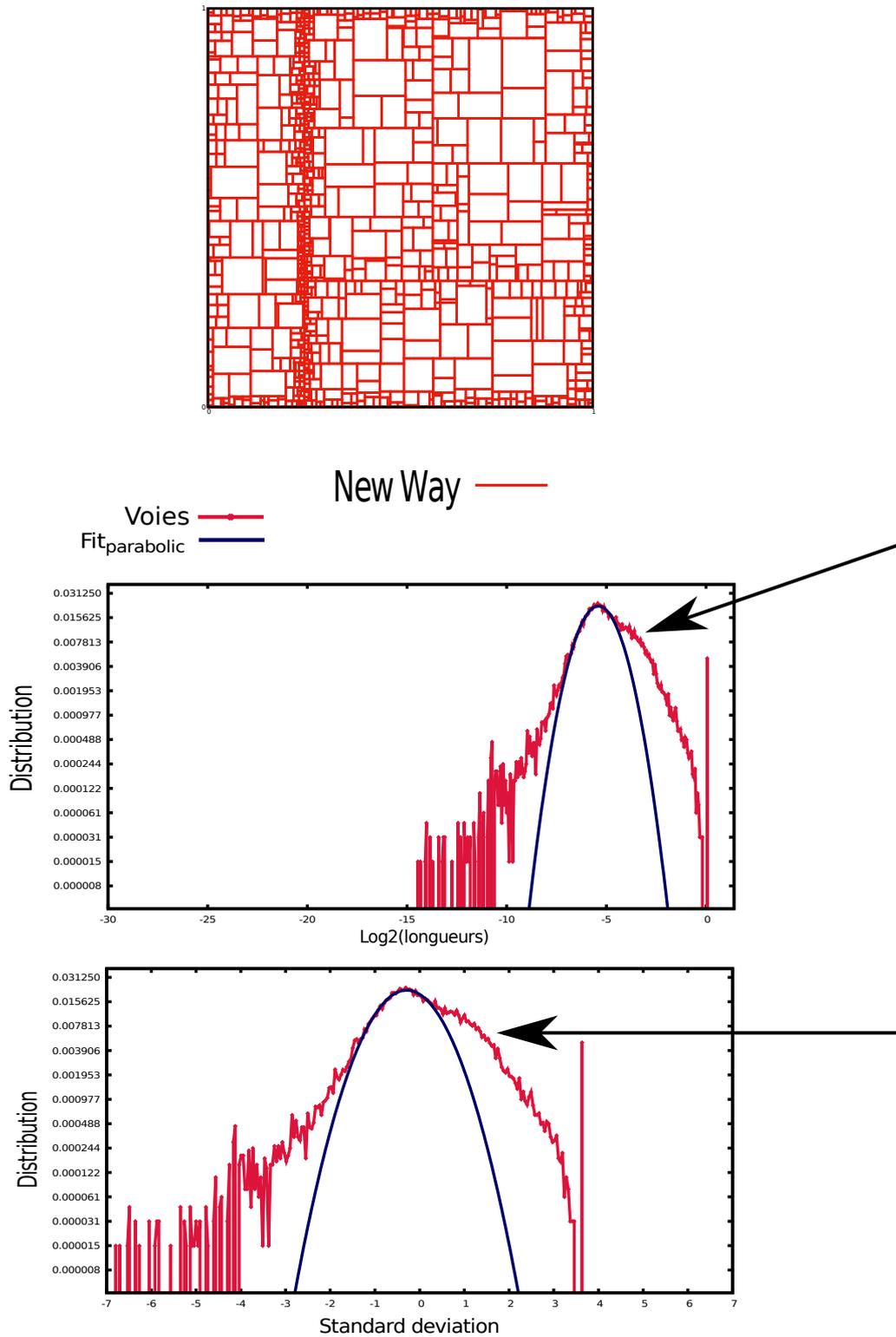


FIGURE 6.8. Illustration du réseau pour le modèle dynamique avec la distance topologique pour $\alpha = 8.0$ et $\beta = 1.0$ (Haut). L'ensemble des voies convergent vers les voies initiales et la première découpe. L'écart de taille de parcelle est alors plus important que pour le cas précédent. Nous remarquons que le sommet de la distribution des longueurs des voies se décale vers des valeurs de longueurs plus petites. Nous observons une hausse des valeurs à proximité du sommet du côté des grandes longueurs.

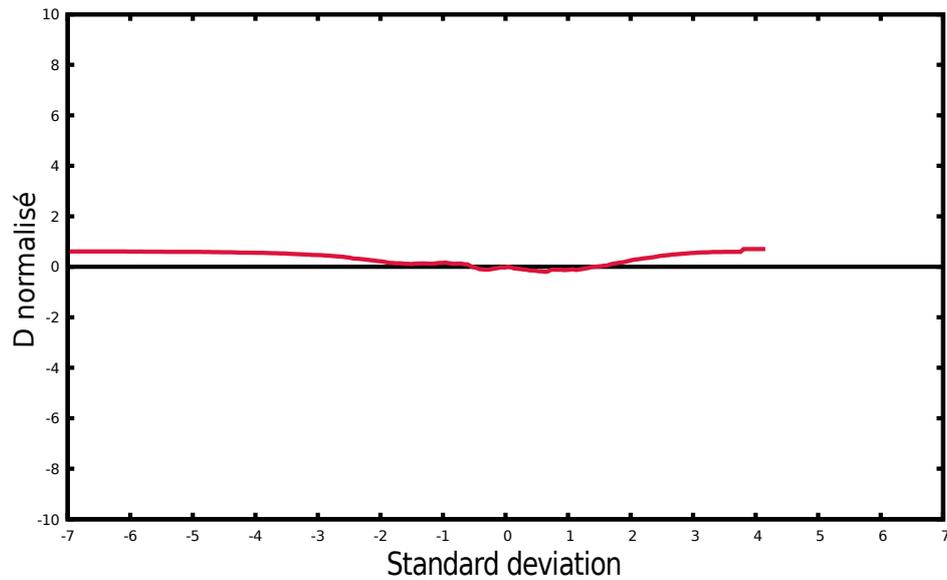


FIGURE 6.9. Écart normalisé entre le modèle lié à la distance topologique et le fit parabolique. Cet écart confirme la similitude de la distribution des longueurs de voies et du fit sur 2 écarts-types. Nous constatons que les queues de courbes restent proches du fit (inférieur à 2 sur notre quantification de l'écart normalisé) ce qui valide l'aspect globale de la distribution proche d'une log-normale. Cela prouve l'importance de la distance topologique dans la statistique des longueurs de voies.

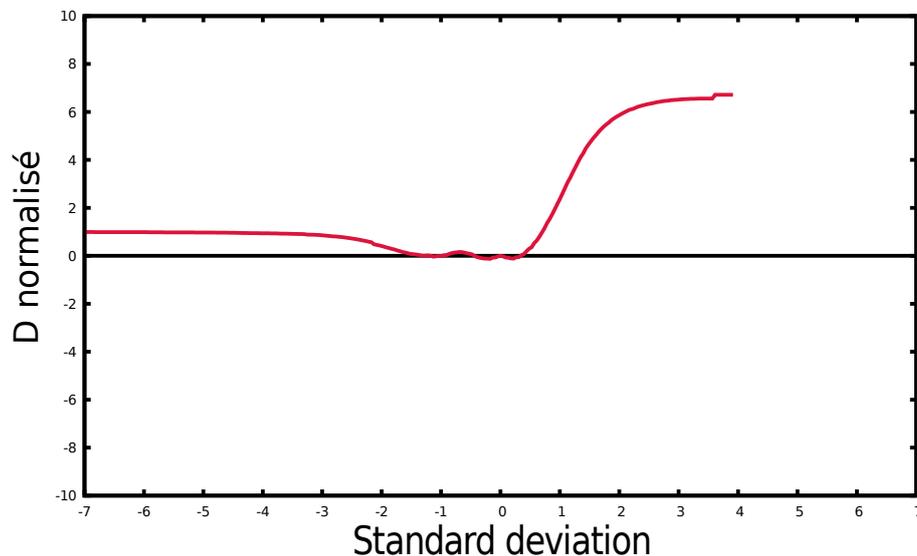


FIGURE 6.10. Variation de l'écart normalisé pour le cas $\alpha = 8.0$ et $\beta = 1.0$. Nous observons le décalage du côté des grandes longueurs avec le fit, l'écart grandit à partir d'une valeur inférieure à un écart-type.

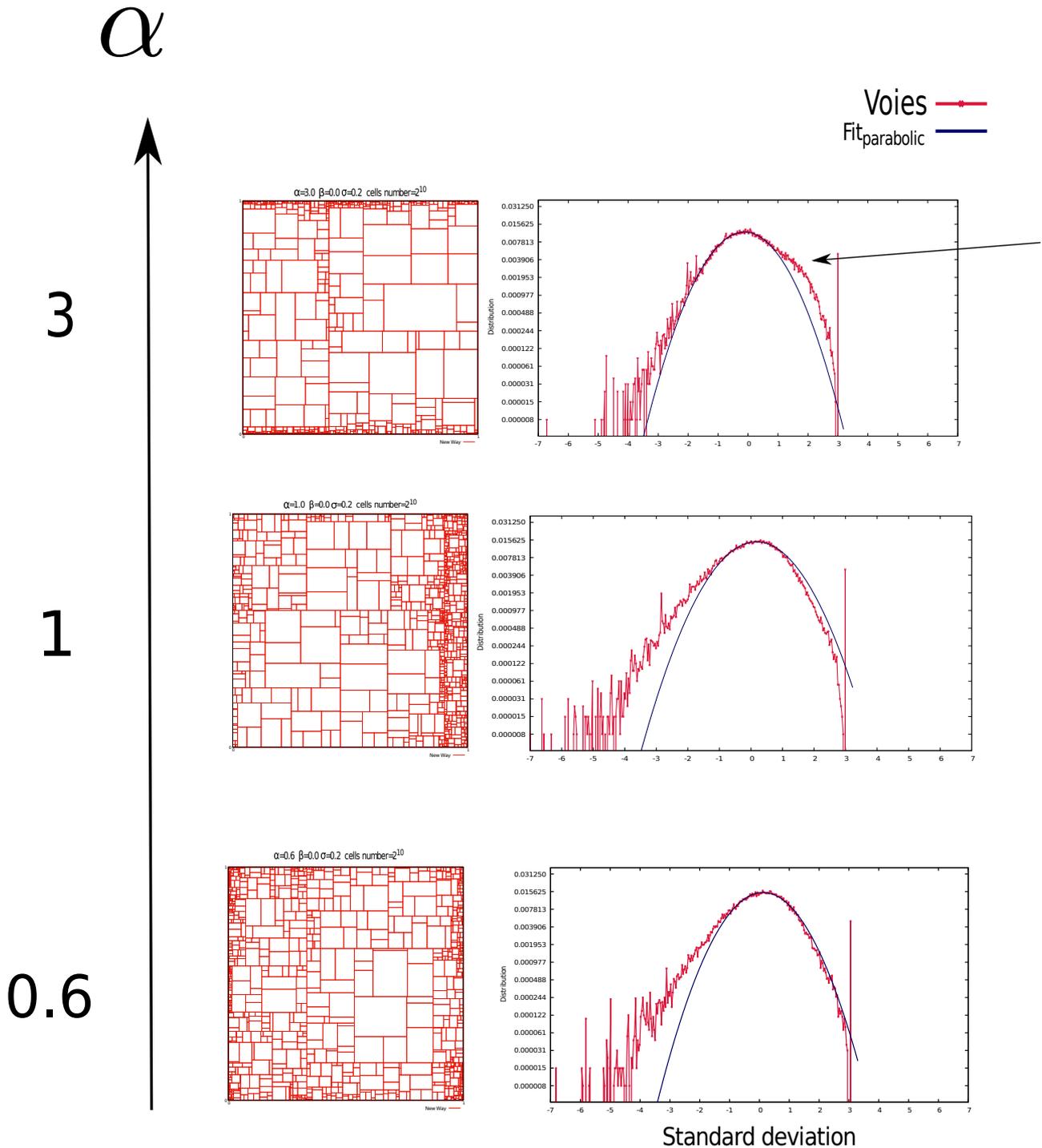


FIGURE 6.12. Trois cas pour le potentiel dépendant uniquement de la distance topologique sous forme d'une exponentielle inverse. Illustration des réseaux et des distributions de longueurs des voies en fonction de l'écart-type. Plus le coefficient α est fort plus le réseau se structure autour d'une unique voie. Comme pour le processus lié à la fonction inverse, la distribution s'élève à proximité du sommet du côté des grandes longueurs. Pour les autres cas, nous obtenons un réseau qui se concentre sur les voies initiales mais étant plus irrégulièrement réparties. Les distributions s'éloignent d'une log-normale du côté des petites longueurs.

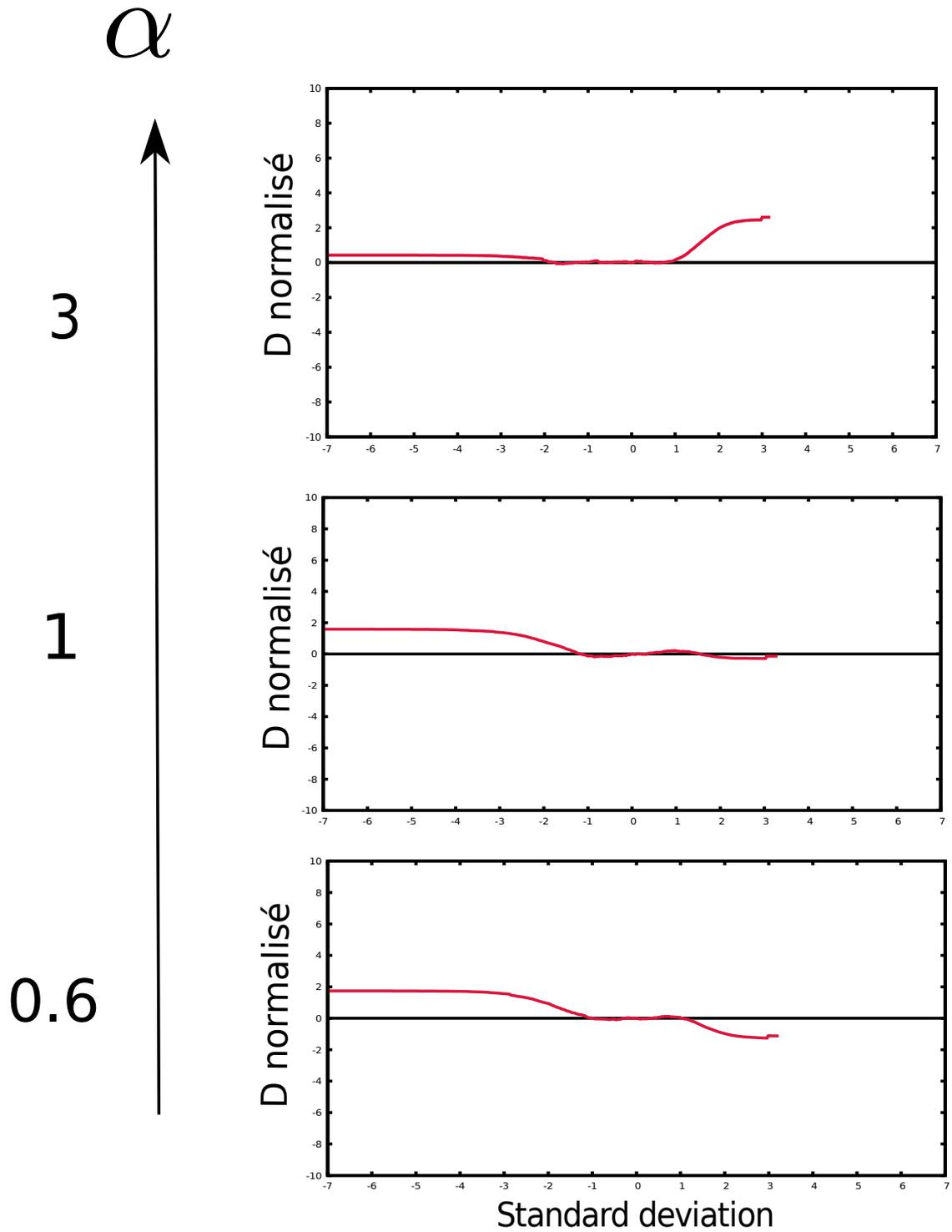


FIGURE 6.13. Écarts normalisés de la figure 6.12 entre les fits paraboliques et les distributions des longueurs des voies : la forme de la distribution représentée en échelle logarithmique s'approche d'une parabole sur plus d'un écart-type. Les différences apparaissent en queues de courbes. Sur les trois cas, la distribution s'éloigne du fit et s'étend, au delà, du côté des petites longueurs.

Les distributions des longueurs des voies associées à ce nouveau modèle est identique au modèle dynamique avec distance topologique. Le processus suffit afin de retrouver la même statistique. Pour résumer, nous avons un résultat intéressant où nous obtenons un principe de découpage lié uniquement à la distance topologique et dont nous retrouvons une distribution des longueurs des voies qui tend vers une log-normale. Cependant les formes de réseaux obtenus sont éloignés de la forme polaire observé dans une majorité de villes.

2. Couplage des distances euclidiennes et topologiques

Les dernières pistes explorées consistent au couplage entre la distance euclidienne et la distance topologique. L'objectif est d'obtenir des réseaux qui convergent vers un centre et de voir l'impact de ce type de modèle sur la distribution de longueurs par rapport aux précédents. La première tentative que nous avons effectuée est simplement le produit de l'inverse de la distance euclidienne par l'inverse de la distance topologique. Ainsi le potentiel s'écrit :

$$U_{rec}^{topo,E} = \sum_{j=1}^{2^p} \left[\frac{1}{d_j^{topo} \times d_j^E} \right]^\alpha \times L_{rec}^\beta$$

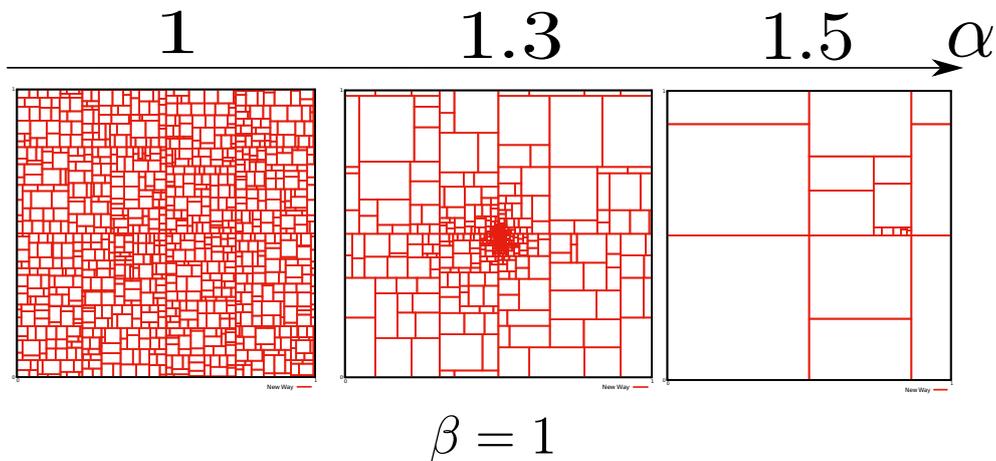


FIGURE 6.14. En faisant le produit de l'inverse des distances euclidiennes et topologiques, nous revenons au même comportement que notre premier modèle dynamique. La seule différence étant que les pôles se situent à proximité des voies historiques sans pour autant que leur forme soit modifiée. C'est la distance euclidienne qui domine la dynamique, le rôle de la distance topologique étant négligeable.

Nous reprenons la forme du premier modèle dynamique en constatant que son comportement était identique, la distance euclidienne (avec des valeurs inférieure à 1) domine sur la distance topologique dans cette fonction inverse. Nous nous retrouvons donc avec les mêmes formes de réseaux et les mêmes distributions [Fig 6.14].

Pour accorder une plus grande importance à la distance topologique, nous avons modifié la forme de notre processus afin de diminuer les valeurs élevées de cette distance en ne calculant pas son inverse mais l'opposé du logarithme [Fig 6.15]. La formule s'écrivant :

$$(6.1) \quad U_{rec}^{topo,lnE} = \sum_{j=1}^{2^p} \left[-\log \left(\frac{d_j^E}{d_0^E} \right) \times \frac{1}{d_j^{topo}} \right]^\alpha \times L_{rec}^\beta$$

On définit $d_0^E = 1$, la normalisation de la distance euclidienne. Avec cette formule, nous faisons en sorte que cette distance impacte moins le potentiel de découpe des cellules, limitant la valorisation de la proximité géographique par rapport à la distance topologique. Nous obtenons un modèle ayant toujours un comportement homogène pour un α et β de valeurs similaires, un réseau instable pour α très grand par rapport à β et une zone de transition qui est différente, donnant des réseaux qui ne se développent pas de manière concentriques. Les limites sont reliées aux premières grandes découpes [Fig 6.16] même si nous observons une attraction sur les voies historiques. Cela change de comportement par rapport au modèle précédent et cela crée une forte inhomogénéité de tailles de parcellaire sans pour autant avoir une forte instabilité comme notre premier modèle dynamique.

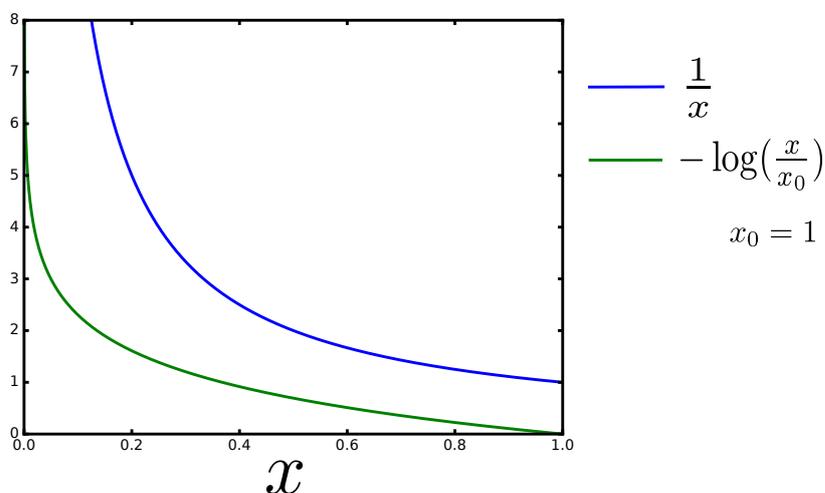


FIGURE 6.15. Représentation de la fonction inverse et de l'opposé de la fonction logarithmique que l'on applique sur la distance euclidienne. Notre objectif est de modifier notre modèle afin que les deux distances, euclidienne et topologique, aient une importance semblable dans le processus de densité de carrefours. Nous modifions alors la fonction inverse qui diverge très rapidement pour des valeurs proche de 1 afin d'avoir une augmentation plus lente pour des carrefours

Pour ce modèle, la distribution des longueurs des voies tend vers une log-normale sur l'ensemble de la courbe tout en considérant la distance euclidienne. Nous n'avons

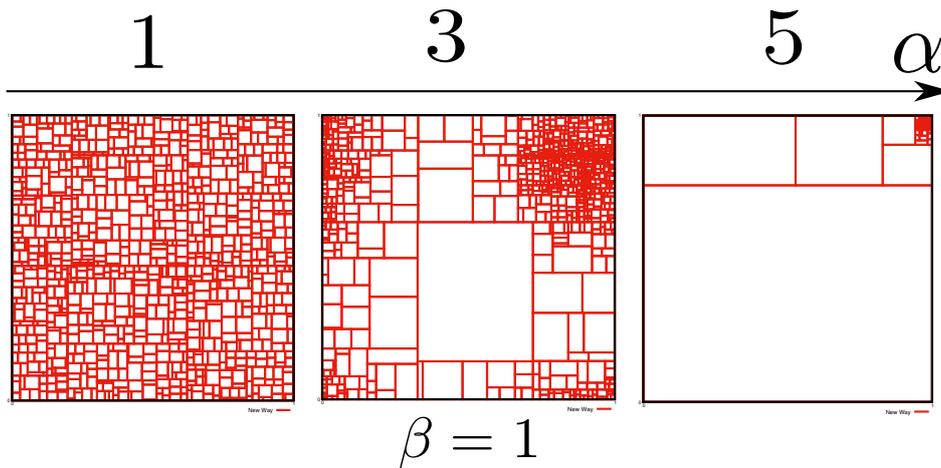


FIGURE 6.16. Exploration du modèle dépendant de la distance topologique et de l'opposé du logarithme de la distance euclidienne. Nous retrouvons le cas homogène et le cas instable mais la zone de transition (pour $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ et $p = 10$) diffère du modèle topologique. On obtient un réseau qui est redécoupé dans une zone précise de la simulation limité par de grandes voies et laissant des grandes parcelles sans découpage.

pas quantifié précisément l'impact de chacune des distances sur le potentiel mais le fait d'obtenir des formes de réseaux différentes prouvent l'influence des deux distances sur les simulations [Fig 6.18].

Le comportement du modèle dans la zone de transition est éloigné de ce que nous avons pu observer jusqu'à présent. Ici nous avons un grand décalage dans le choix des cellules qui sont découpées, l'urbanisation se fait par "bloc", des grandes parcelles ne sont pas redécoupées jusqu'à ce que le potentiel dépasse un certain seuil et que de nombreuses voies soient créés en peu de temps [Fig 6.17, Fig 6.19]. Ce seuil est relié à l'évolution de la distance topologique due aux carrefours nouvellement créés dans la zone urbanisée plus que par la distance euclidienne. Nous pouvons le comprendre comme une amélioration de l'accessibilité dans des zones peu ou pas urbanisées et qui vont alors se développer très rapidement par la suite.

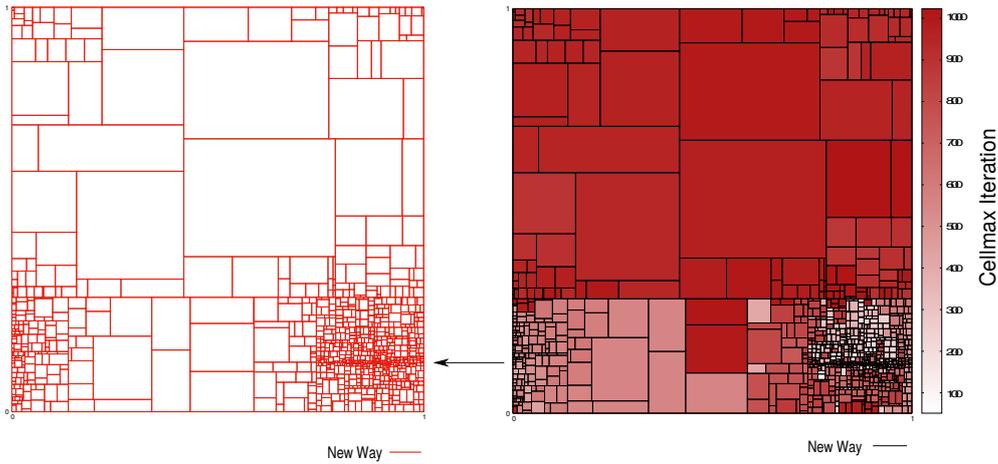


FIGURE 6.17. Nouvel exemple qui illustre le comportement du modèle pour le même cas $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ (Gauche). Nous obtenons un parcellaire qui est uniquement redécoupé dans une certaine zone enfermée par de grandes voies ce qui limite son extension (ici on peut observer une voie horizontale traversant toute la simulation au dessus de la zone de redécoupage, au delà nous retrouvons des grandes parcelles). Dans la zone de redécoupage, on remarque une accumulation de parcelles proches d'une longue voie (indiquée par une flèche) montrant l'influence de la distance topologique. L'image de droite montre l'historique des créations de parcelles. Une parcelle en rouge indique que sa création est récente (en blanc plus ancienne). Nous remarquons plus facilement la délimitation qui est faite par la voie horizontale entre la zone "urbanisée" dont les découpes ont été faites dès le début de la simulation et la zone "périphérique" qui a subi quelques redécoupages durant les dernières itérations.

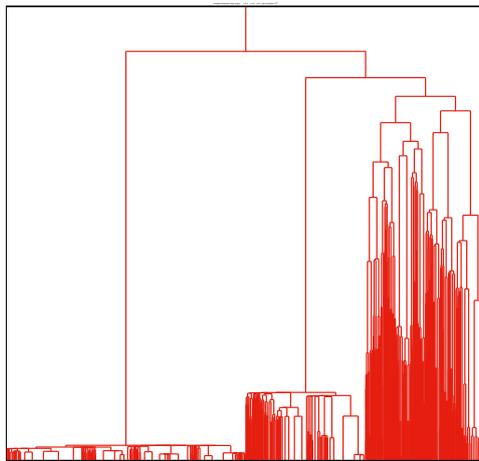


FIGURE 6.19. Arbre généalogique de l'exemple précédent qui illustre les découpes au cours de la simulation. Les découpes sont effectuées dans une zone du réseau, ce qui préserve de grandes parcelles jusqu'à un certain temps. En effet, à partir d'un certain nombre de découpes, les grandes parcelles qui sont restés fixes jusqu'ici vont commencer à être redécoupés. Nous remarquons sur l'arbre, deux nouveaux blocs de découpes (branches) qui apparaissent à des intervalles de temps différents.

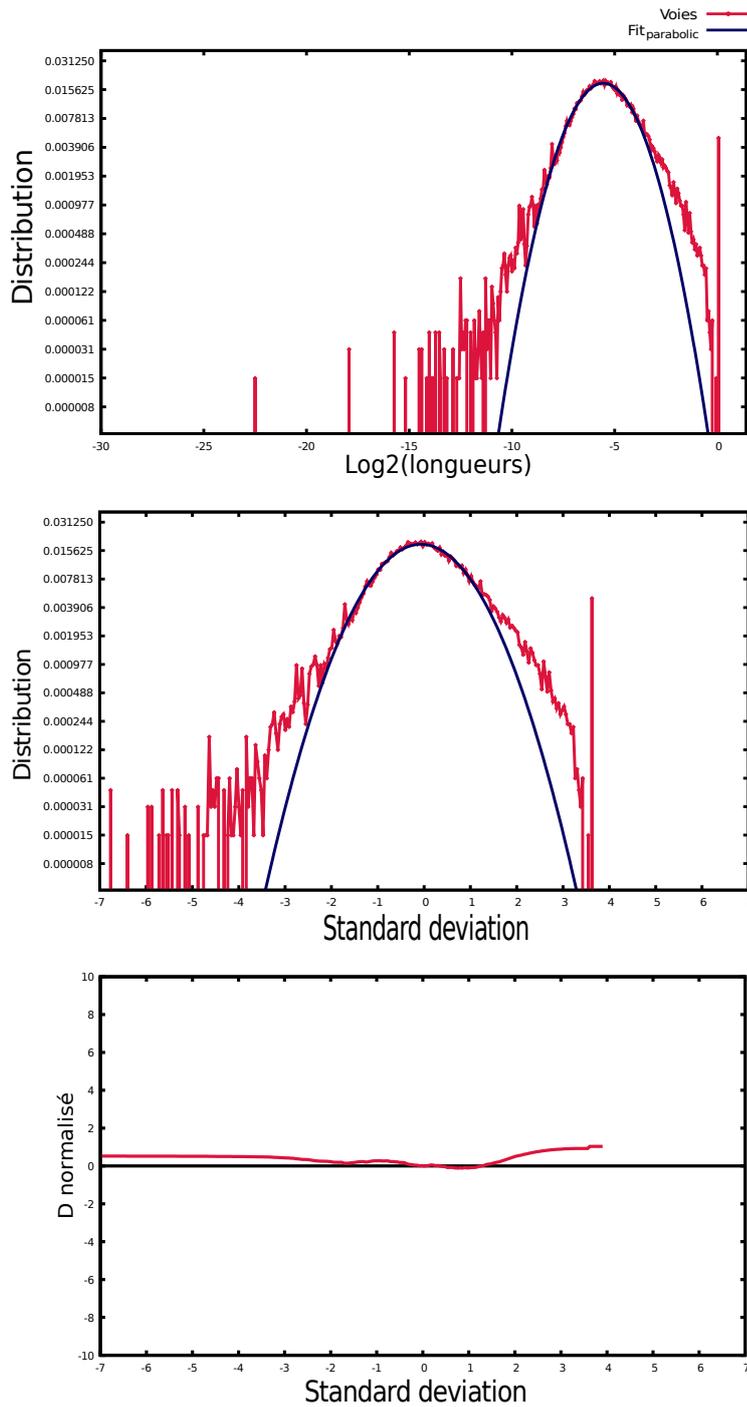


FIGURE 6.18. Fit parabolique sur les distributions de longueurs de voies pour le modèle lié à $U_{rec}^{topo, \ln E}$ pour la zone de transition avec les mêmes valeurs de paramètres que précédemment (toujours en échelle logarithmique). Nous obtenons une distribution de longueurs qui est équivalente au modèle dépendant seulement de la distance topologique. L'écart fit-distribution est faible sur l'ensemble de la courbe et notamment les écarts en queues de courbe.

Conclusion et perspectives

Conclusion issues de notre étude du réseau viaire

Au cours de cette thèse, nous avons abordé la forme urbaine sous le prisme d'un unique élément structurant la ville et permettant ainsi d'en comprendre son évolution : le réseau viaire. Nécessaire pour les déplacements urbains, il semble le plus stable dans le temps parmi l'ensemble des éléments que forme la ville. En partant de sa forme actuelle, notre objectif a été de comprendre comment ce réseau s'est construit. À partir de sa trace spatiale, nous avons décomposé ce réseau "vierge" en un graphe planaire composé de noeuds et de segments. Dans un premier temps, nous avons cherché à retrouver les voies comme nous les observons à l'oeil sur une carte. En effet, la représentation en segments fait perdre la continuité des routes existantes, ne nous permettant pas de les hiérarchiser par la suite : les grandes voies sont décomposées en multiples segments et noeuds (car connectés à d'autres voies) sans pouvoir retrouver leur continuité. Le problème de la hiérarchisation et de la dynamique d'évolution d'un réseau ne concerne pas uniquement le réseau viaire : ce sont des questions centrales pour les graphes planaires comme les réseaux de craquelures d'argile ou de veinures de feuilles.

Plusieurs logiques ont été développées afin de reconstruire ces voies existantes. Les travaux effectués par C.Lagesse et T.Courtat ont défini un hypergraphe basé sur un principe géométrique d'alignement entre les segments qui permet de retrouver cette continuité, des voies étant des grandes artères traversant l'ensemble du réseau tout comme des voies de plus petites échelles comme les impasses. Différents indicateurs ont été testés dessus afin de les caractériser. Un des indicateurs les plus pertinents est l'indicateur de *closeness*. Pour chaque voie, il calcule le nombre de tournant minimal pour accéder à l'ensemble des voies du réseau. Intégré sur tout le graphe, il révèle les voies qui sont les mieux connectées à la totalité du réseau. Il fait notamment ressortir que les voies anciennes sont parmi les voies les plus accessibles montrant leur rôle structurant dans le développement du réseau viaire.

L'autre indicateur qui a été fondamental pour notre étude est la distribution des longueurs des voies. En effet, il a été observé des statistiques similaires sur les réseaux de nombreuses villes, des distributions en log-normale. Cela nous a amené à nous poser la question de la reproductibilité d'une telle courbe et sur les processus qui permettrait d'engendrer des réseaux ayant cette propriété. Dans un premier temps, nous nous sommes basés sur un principe de simple découpage de plus grandes parcelles. Ce découpage se justifie en fonction des observations faites à la périphérie des villes où de grandes parcelles commençant à s'urbaniser sont divisées en deux, créant ainsi une nouvelle route. Ce phénomène semble analogue aux observations faites également sur les réseaux de craquelures. En effet, ce réseau se construit sur un processus de division des plus grandes cellules et dont les statistiques des longueurs s'approchent également d'une log-normale.

Les premières tentatives de processus modélisés en fonction d'un principe de découpage perpendiculaire du parcellaire, lié à la parcelle de côté le plus long - modèle dit Grande Longueur -, ont montré que retrouver cette distribution n'est pas

trivial. Les distributions obtenues en fonction de ce principe de découpage se limitent à l'apparition de lois de puissance. C'est un modèle basé sans processus hiérarchique - le modèle Génération - qui nous a fourni vers de nouvelles pistes de réflexion. Ce modèle découpant l'ensemble des cellules à chaque itération, sans sélection, nous a permis de retrouver une distribution proche d'une loi log-normale. La comparaison entre nos deux modèles a permis de mettre en évidence que l'inhomogénéité du parcellaire (parcelles de tailles beaucoup plus varié) est une condition nécessaire pour retrouver une distribution en log-normale.

Ce modèle nous a permis de nous questionner sur notre principe de découpage de grandes parcelles. Nous avons développé un modèle dynamique couplant le processus Grande Longueur avec un processus de densité de carrefours. L'objectif de ce dernier était de privilégier des découpes de parcelles situées dans des zones du réseau déjà redécoupées. Il se base sur un calcul lié à la distance euclidienne (ou vol d'oiseau) entre le centre de la parcelle sélectionnée et les positions de chaque carrefour. Le principe est de créer une forte densification du réseau et d'augmenter l'inhomogénéité de taille tout en conservant notre principe de découpe de grandes parcelles. En faisant varier la priorité d'un processus par rapport à l'autre, nous distinguons trois types de réseaux : un réseau homogène retrouvant les caractéristiques du modèle Grande Longueur (quand le processus Grande Longueur est privilégié dans le modèle). Un réseau polaire " instable", les découpes s'accumulant sur une unique cellule quand le processus de densité de carrefour est trop important. Enfin des réseaux polaires et multipolaires quand les deux processus sont d'importances équivalentes. C'est cette zone de transition qui nous intéresse en ce qui concerne la distribution des longueurs des voies. Avec la formation de pôle (ou de multipôle), nous obtenons une plus grande inhomogénéité de taille du parcellaire et des formes plus "réalistes". Malgré tout, les distributions se rapprochent plus de loi de puissance avec des distributions qui s'étendent fortement du côté des petites longueurs de voies.

En analysant les formes obtenues, nous avons remarqué le décalage entre les premières découpes et la formation du pôle. Les pôles ne sont pas accordés aux voies historiques contrairement aux observations faites sur le réseau viaire et de ce que nous avons pu constater avec l'indicateur de *closeness*. Pour cela, nous avons modifié le processus de densité de carrefour basé sur la distance euclidienne par ce même processus mais en fonction de la distance topologique. Notre objectif est autant de se rapprocher d'une forme de réseau analogue aux réseaux viaires avec des pôles se structurant autour de ces voies historiques, que de voir si cette distance topologique modifie la forme de distribution des longueurs des voies. Pour cette dernière, nous constatons que cette distribution se rapproche des distributions des réseaux viaires. Nos analyses statistiques prouvent qu'elle se confond avec une loi log-normal sur un même intervalle que pour les villes que nous avons analysé. Par contre, pour les formes obtenues, nous n'obtenons plus de formes concentriques comme précédemment, l'ensemble des découpes se structurent uniquement sur les voies initiales et la première découpe. Cela s'explique par une trop grande importance

des carrefours à proximité (distance topologique égale à 1) comparé aux distances suivantes.

Nous avons effectué d'autres modélisations afin de diminuer cette trop forte attraction aux grandes voies et de revenir à une forme concentrique [6.20]. Nous avons modifié la forme du processus et nous avons cumulé distance euclidienne et topologique, de manière à ce que les deux distances soit tout aussi importantes. De manière générale, les réseaux obtenues s'attachent à ces grandes découpes sans retrouver une forme concentrique comme pour le premier modèle dynamique. Par contre, les distributions restent toujours aussi proche d'une distribution de forme log-normale.

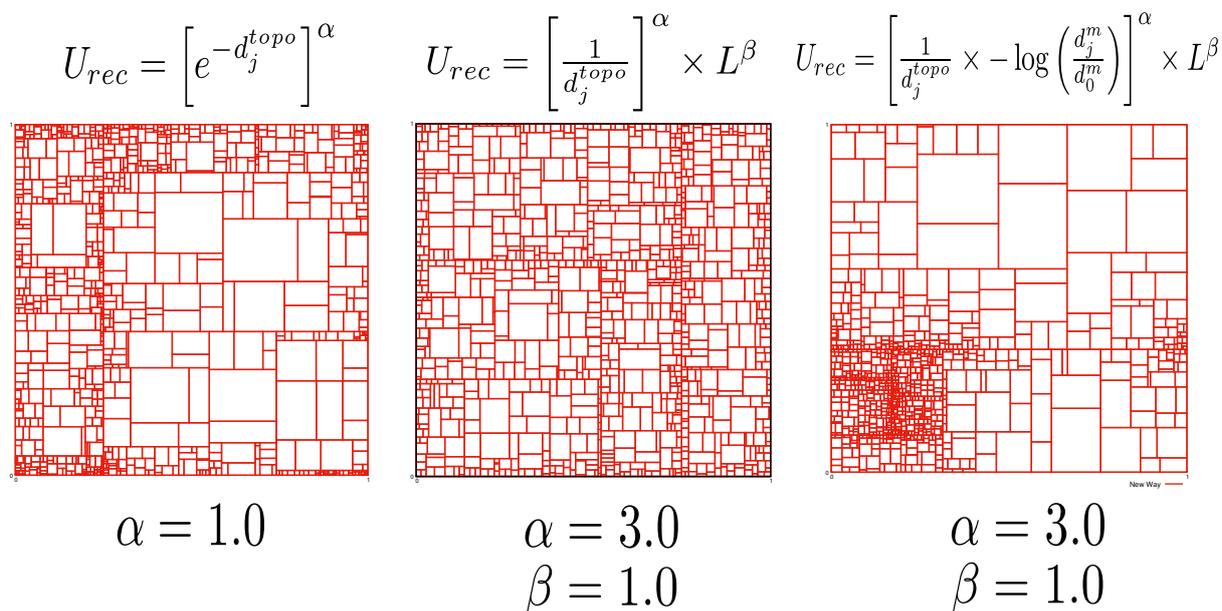


FIGURE 6.20. Trois modèles que nous avons testé avec la distance topologique et dont nous retrouvons une distribution qui tend vers une log-normale pour la longueur des voies. Cette distance semble avoir un impact important dans la structure des réseaux viaires au vu de nos observations. Mais ces réseaux s'étendent principalement sur la première découpe sans obtenir de pôles comme pour le premier modèle dynamique. Ce qui nous fait réfléchir sur les modifications et les futurs ajouts ainsi que sur les autres caractéristiques des réseaux viaires à considérer.

Finalement, notre recherche a abouti à plusieurs processus tentant d'expliquer la formation de l'indicateur statistique de longueur des voies observé sur de nombreuses villes. Les processus axés sur un découpage de parcellaire ont montré qu'il était possible de retrouver la même distribution en prenant en considération la distance topologique sur l'ensemble du réseau. Cela conforte les observations de l'indicateur de *closeness* et le lien entre voies historiques et accessibilités [Fig 6.21]. D'autres tentatives ont notamment recherché à reproduire des formes semblables au

réseau viaire tel que le premier modèle dynamique lié à la distance euclidienne. Nous reproduisons des réseaux de forme concentrique que nous voulons caractériser. Cette caractérisation pourrait nous aider à avoir une vision plus claire de l'évolution de ces structures et nous orienter sur les types de processus permettant sa modélisation. À partir de la distance topologique, nous avons cherché à reproduire ces formes, cependant nos premières tentatives n'ont pas abouti, d'autres types de caractérisation du réseau viaire pourraient nous intéresser afin d'orienter les choix de processus de nos futurs modèles.

$$\alpha = 3.0 \quad \beta = 1.0$$

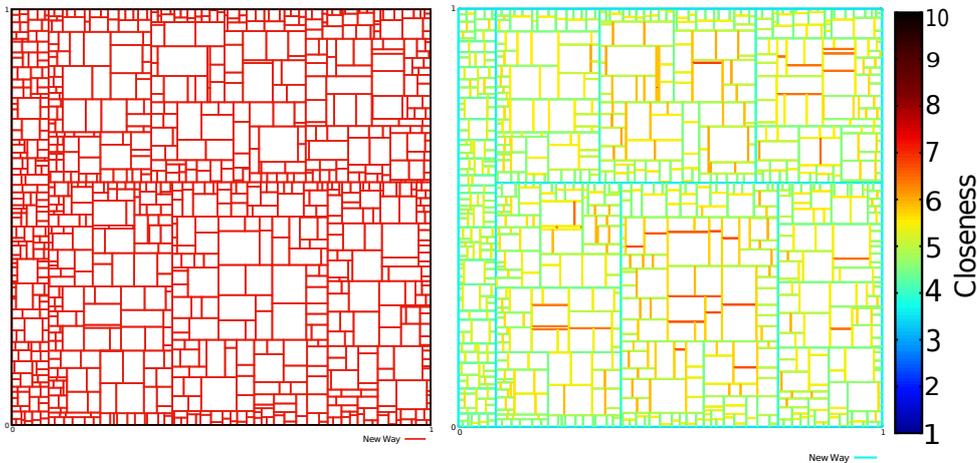


FIGURE 6.21. Modèle dynamique lié à la distance topologique (sous la forme U_{rec}^{topo}) et au processus Grande Longueur (à gauche), calcul de la *closeness* sur les voies du réseau (à droite). La *closeness* est représentée différemment de celle des réseaux viaires. Nous calculons le score inverse de la formule initiale, les voies les plus accessibles ont un score faible et sont représentés en bleu, les voies les moins accessibles en rouge. Nous observons une hiérarchisation des voies en fonction de leur ancienneté. Les premières coupes ont une accessibilité plus importante, cela rejoint les similitudes obtenues avec les voies anciennes du réseau viaire.

Perspective

Afin d'obtenir des nouvelles orientations à notre modélisation, nous nous sommes intéressés à d'autres caractéristiques observées sur les réseaux viaires et qui seraient intéressant d'approfondir. Nous cherchons à différencier les modèles liés à la distance topologique que nous avons effectué. Ainsi, nous réduirions le spectre de possibilité des processus pouvant être mis en jeu. Pour cela, nous sommes revenus sur l'indicateur de *closeness* et sa distribution des scores pour chaque voie. En effet, cette distribution est pertinente au vu de sa récurrence pour de nombreuses villes : nous

retrouvons une distribution qui est proche d'une loi normale et cela nous pose la question de sa reproductibilité. Les deux exemples illustrés sur la figure 6.22 montrent la distribution de *closeness* pour les villes de Londres et San Francisco, les formes des courbes sont proche d'une parabole (en échelle logarithmique) mais les moyennes et les écart-types diffèrent. Sur le cas de San Francisco, la moyenne est plus élevée, les voies sont plus accessibles à l'ensemble du réseau que pour le cas de Londres.

Nous voulons voir les distributions observées pour nos modèles et voir si nous obtenons une forme similaire. Dans nos tentatives de modélisation, seul le potentiel U_{rec}^{lnE} se rapproche des réseaux viaires, nous obtenons une distribution qui semble tendre vers une loi normale [Fig 6.23, Fig 6.24]. La question est de justifier ces différences entre modèles et de comprendre ce qui est essentiel à l'apparition d'une telle courbe.

La distribution de degré des voies est aussi une piste pertinente. En effet, le modèle U_{rec}^{topo} fait converger les voies sur les premières coupures, donnant des scores de degré certainement très élevé. Nous nous sommes interrogés sur le profil des distributions obtenus pour ce modèle ainsi que sur les réseaux viaires. Nous avons remarqué pour les villes que cette distribution suivait une forme proche d'une loi de puissance avec un coefficient situé sur un intervalle $[-2, -1.5]$. Nous illustrons les deux mêmes villes que précédemment sur la figure 6.25 avec San Francisco ayant une pente plus faible que Londres. Les voies s'étalent sur un nombre plus important de degré sur ce cas. En analysant cette distribution pour nos modèles liées à la distance topologique, nous obtenons la même forme de distribution avec des coefficients qui sont proches de ces valeurs également.

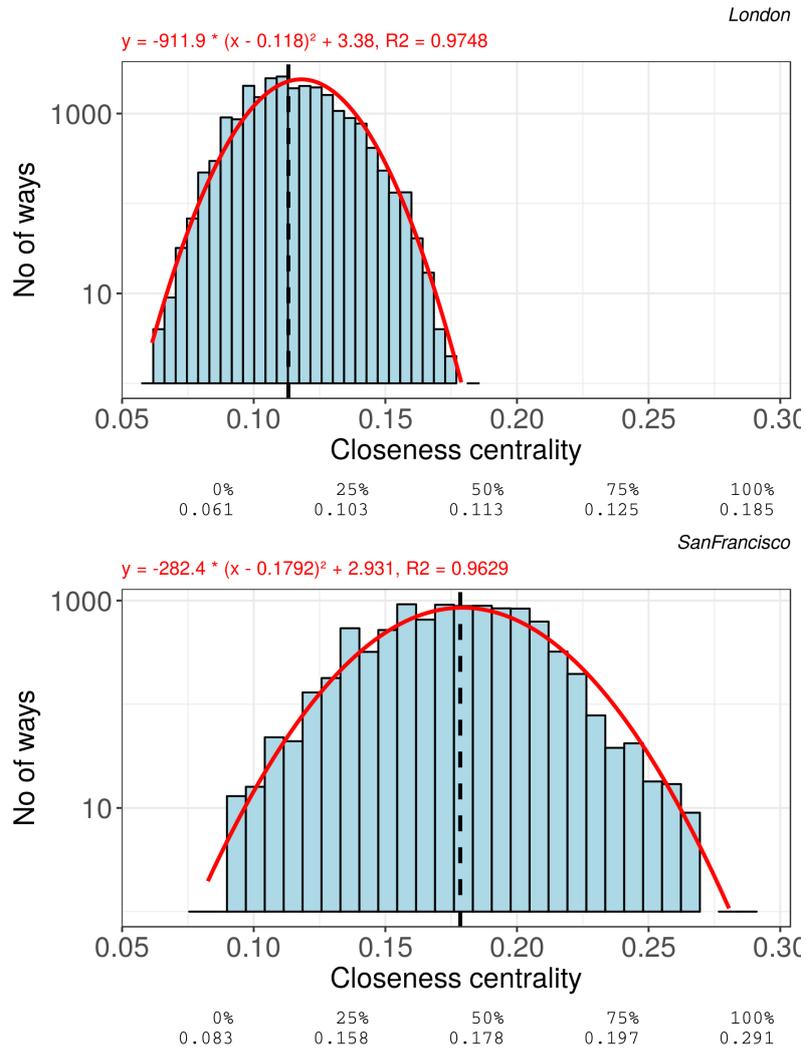


FIGURE 6.22. Distribution de l'indicateur de closeness sur les voies de Londres et San Francisco (en échelle logarithmique). Nous rappelons qu'une closeness proche de 1, indique une grande accessibilité et proche de 0 un score faible. Nous obtenons une parabole (une loi normale en échelle normale) mais de largeur différentes en fonction des villes. Nous voulons voir si nous obtenons une distribution similaire dans les modèles que nous avons développé. *Courbes et analyses de C. Lagesse et S. Douady*

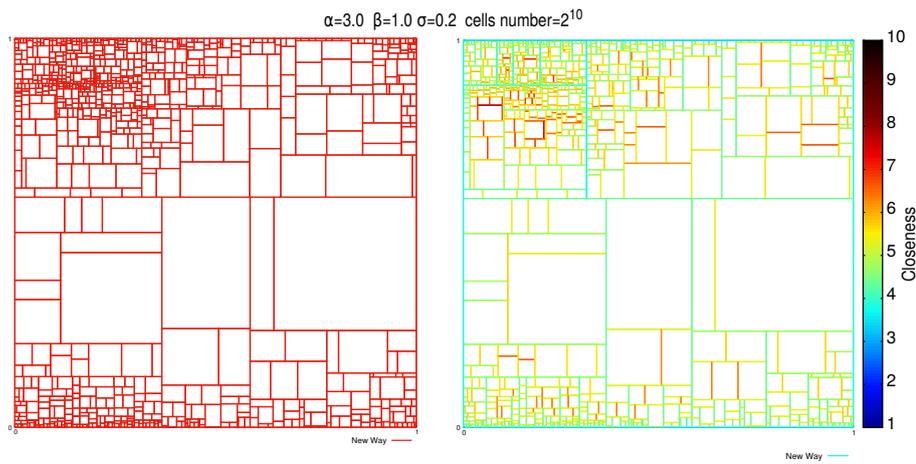


FIGURE 6.23. Indicateur de closeness appliqué sur le modèle lié à $U_{rec}^{topo, \ln E}$). Les voies ayant le plus grand score sont les voies

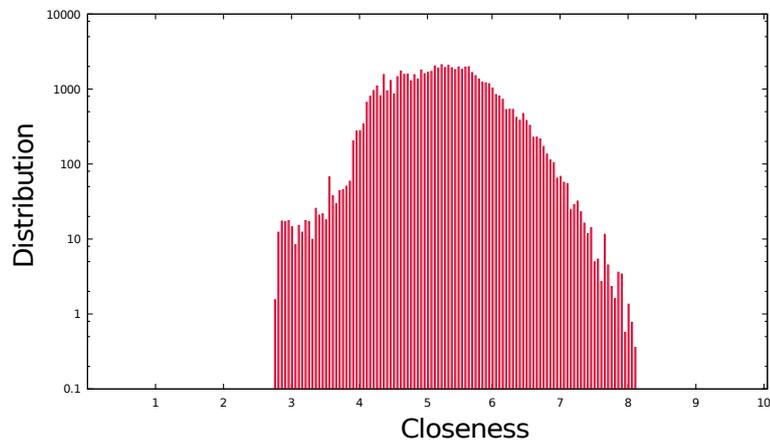


FIGURE 6.24. Distribution des valeurs de closeness des voies pour ce même modèle (en échelle log en ordonnée et non analysé). Exemple de distribution qui semble se rapprocher des cas obtenues sur les villes réelles et dont nous voudrions analyser plus en détails la similitude.

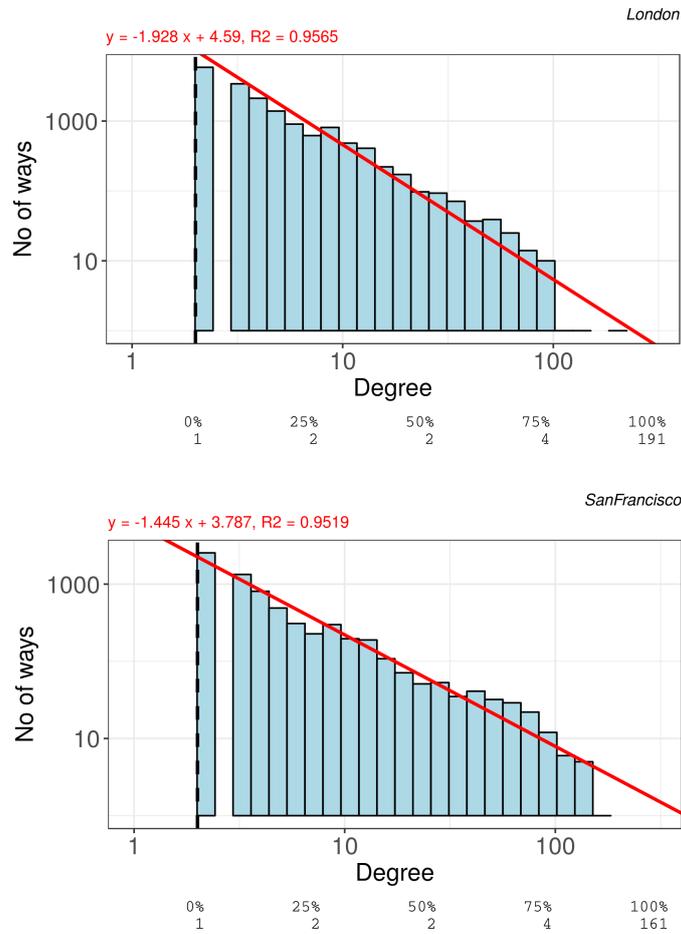


FIGURE 6.25. Distribution du logarithme des degrés des voies pour les mêmes villes : Londres et San Francisco (en échelle log-log). Nous obtenons des pentes entre -1.5 et -2 pour ces réseaux mais plus généralement sur l'ensemble des villes qui ont été étudiées. *Courbes et analyses de C. Lagesse et S. Douady*

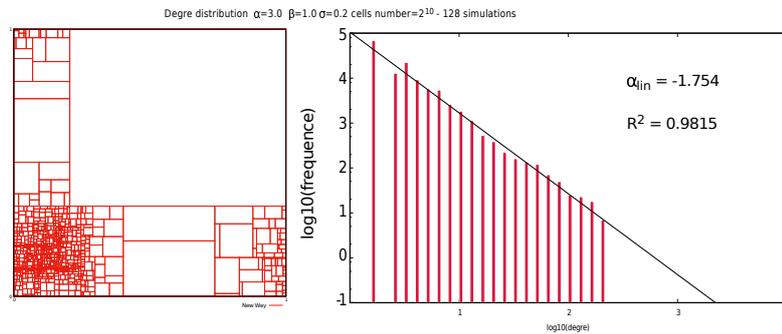


FIGURE 6.26. Distribution du logarithme des degrés pour la modélisation du potentiel $U_{rec}^{topo, \ln E}$ (en échelle logarithmique). Nous retrouvons une distribution sous la forme d'une loi de puissance dont le coefficient a une valeur proche de ce que l'on obtient pour les réseaux viaires.

Annexes

Analyses statistiques

1. Test K-S et Anderson sur les distributions des longueurs des voies

Ville	D_{max}	$D_{max} \times \sqrt{n}$	$p_{value-KS}$	A	A^*	$p_{value-A}$
Avignon	3.10×10^{-2}	1.25	8.50×10^{-2}	1.98	1.98	1.64×10^{-4}
Bruxelles	1.62×10^{-2}	2.39	2.49×10^{-5}	9.84	9.84	4.71×10^{-21}
Londres	1.99×10^{-2}	2.99	3.42×10^{-8}	15.27	15.27	6.56×10^{-32}
New York	2.47×10^{-2}	4.96	1.03×10^{-21}	45.31	45.32	2.35×10^{-83}
Paris	2.46×10^{-2}	2.34	3.42×10^{-5}	9.51	9.51	2.22×10^{-20}
San Francisco	4.14×10^{-2}	3.97	3.53×10^{-14}	24.94	24.94	4.70×10^{-50}
Teheran	2.90×10^{-2}	6.73	8.97×10^{-40}	87.11	87.11	1.12×10^{-130}

TABLE 7.1. Ensemble des valeurs des deux tests de normalité (Kolmogorov-Smirnov et Anderson-Darling) pour les villes étudiées. Aucune des villes ne passent les tests, les p_{values} sont très faibles, inférieurs à 0.01%, valeur limite de la table de Kolmogorov.

Le test d'Anderson-Darling est un test d'hypothèse similaire au test de Kolmogorov-Smirnov mais plus sensible aux écarts sur l'étendue de la distribution, accordant plus d'importance aux queues de courbes, zones des distributions qui s'éloignent le plus du fit parabolique comme nous avons pu le constater.

Equation du test d'Anderson :

$$(7.1) \quad A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(z_i) + \ln(1-z_{n-i+1})]$$

où $z_i = F\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)$. Le test dépend toujours de μ et de σ . La valeur A détermine la pertinence de la distribution avec la loi normale.

Plus A est proche de 0, plus nous avons de chance que la distribution soit confondu avec une loi normal.

2. Méthodologie du test statistique

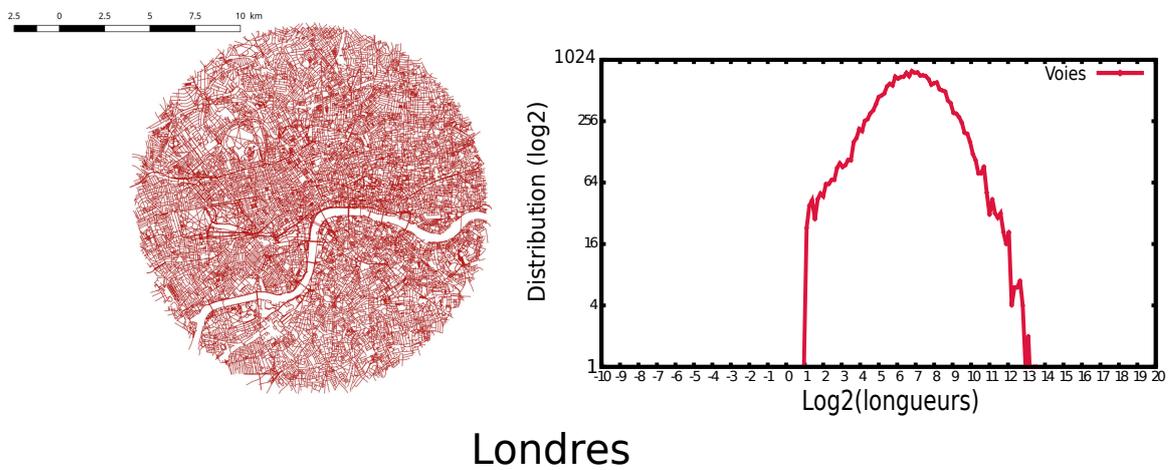


FIGURE 7.1. Distribution des longueurs “brutes” pour la ville de Londres.

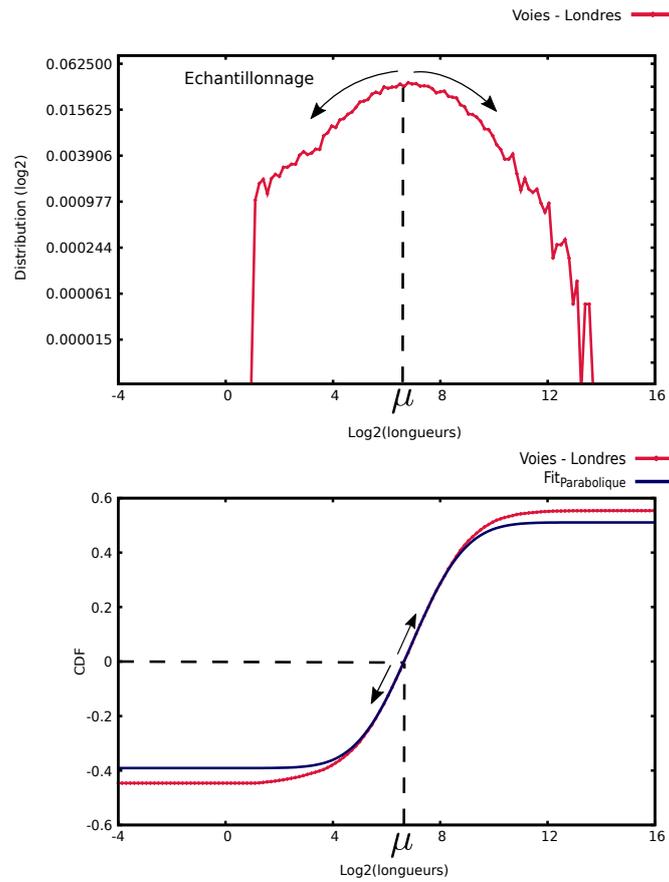


FIGURE 7.2. Nous partons de l'hypothèse que la distribution est proche d'une loi parabolique (en $\log_2\text{-}\log_2$) au niveau de sa moyenne (proche du sommet). Nous construisons notre ajustement en fonction des points autour de cette valeur et nous calculons les fonctions de répartitions en intégrant de la moyenne de la distribution jusqu'aux queues des courbes. Contrairement au test K-S classique, nous sommes sûr que le fit et la distribution sont confondus sur une zone commune.

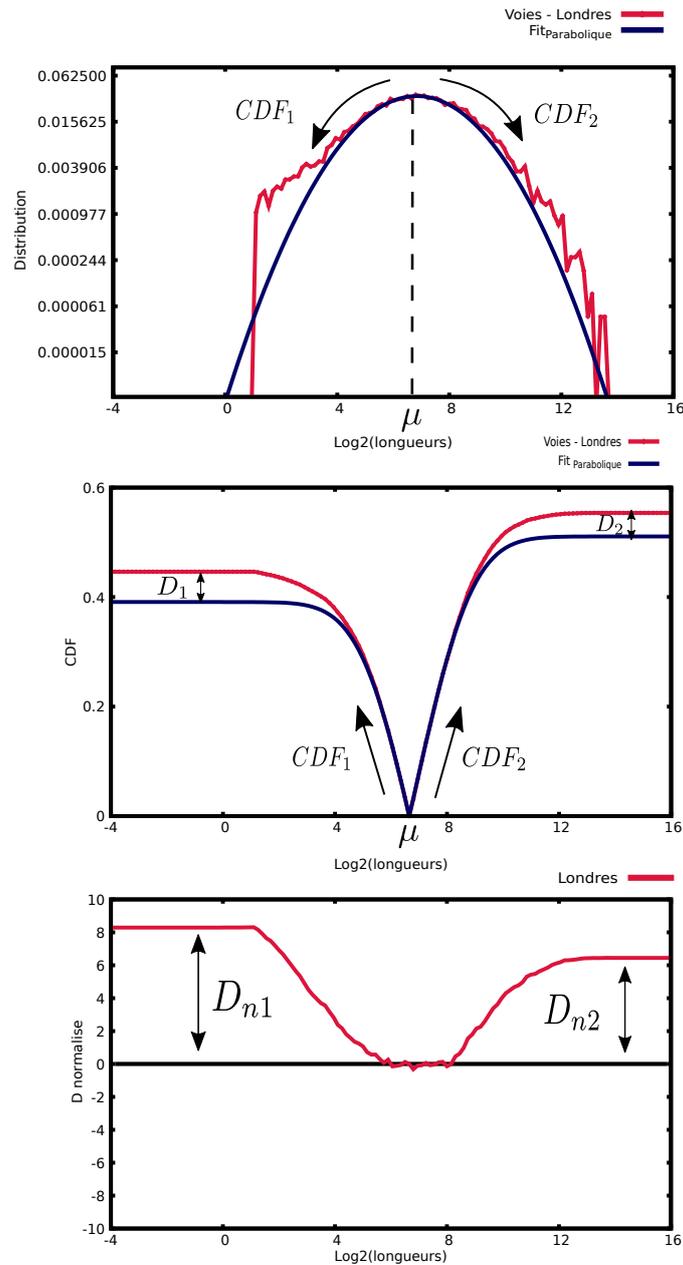


FIGURE 7.3. Haut : Distribution des longueurs des voies et du fit parabolique correspondant (en échelle log2-log2). Centre : Calcul des cumulés des deux côtés de la courbe à partir de la moyenne, CDF_1 pour les petites longueurs, CDF_2 pour les grandes longueurs. Plus on s'éloigne de la moyenne, plus l'écart devient important entre les CDF des voies et du fit, créant des écarts D_1 et D_2 . Bas : Variation du produit entre la différence de CDF (D) normalisé par \sqrt{n} . Ici, nous obtenons un décalage important (supérieur à la valeur seuil invalidant la correspondance entre les deux courbes), des deux côtés de la distribution (D_{n1} et D_{n2}). Nous modifions l'échantillonnage de manière à ce qu'une majeure partie de la courbe soit confondu avec la ligne noire équivalant à une différence nulle.

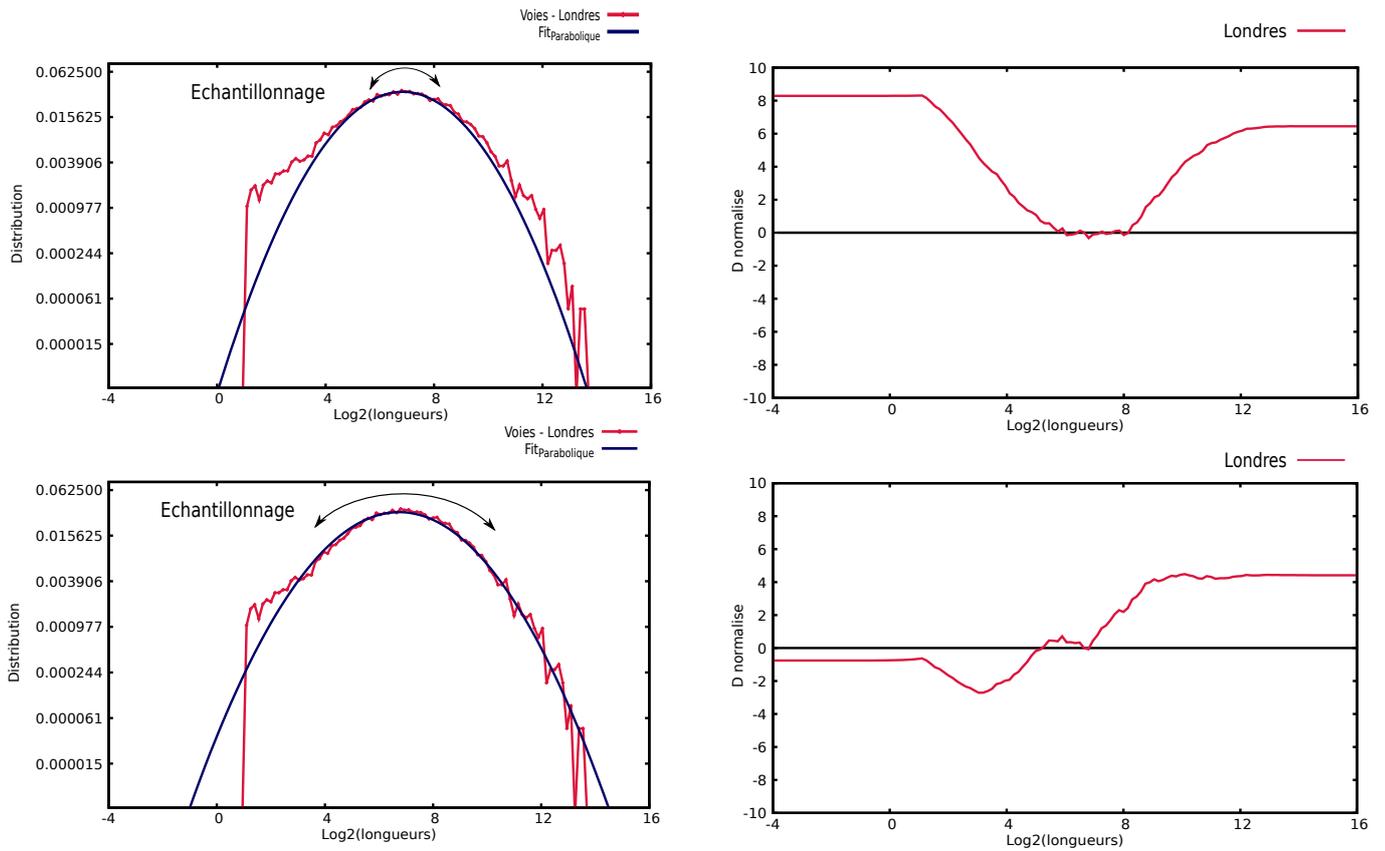


FIGURE 7.4. Deux exemples d'échantillonnage trop faibles (haut) ou trop important (bas) donnant de forts décalage entre distribution et fit. Dans les deux cas, une faible partie du centre de la courbe se confond avec la valeur nul et des extrémités qui tendent vers de forts D_n .

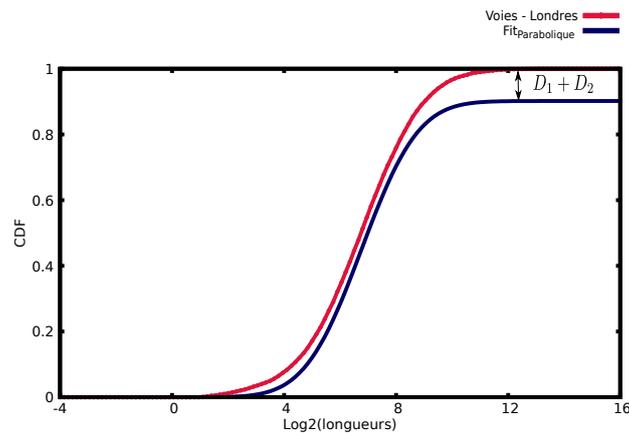


FIGURE 7.5. En calculant la CDF "global" de la distribution et du fit parabolique, un écart se crée en fin de courbe étant égale à l'addition des écarts maximums D_1 et D_2 obtenus précédemment. Le CDF du fit n'est pas normé à 1.

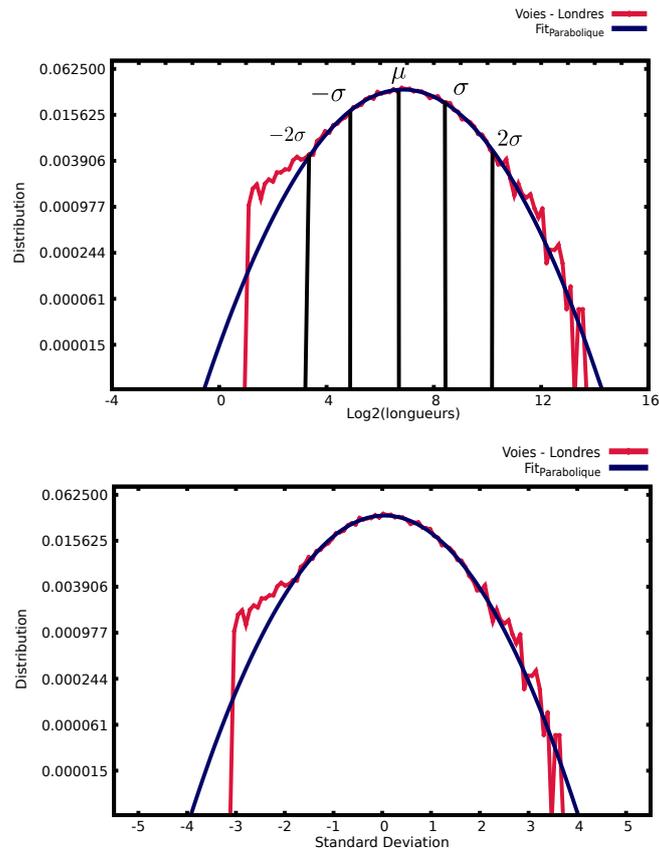


FIGURE 7.6. Pour comparer les distributions entre elles, nous mettons l'échelle des abscisses en fonction de la moyenne et de l'écart-type de la distribution des log2 des longueurs des voies.

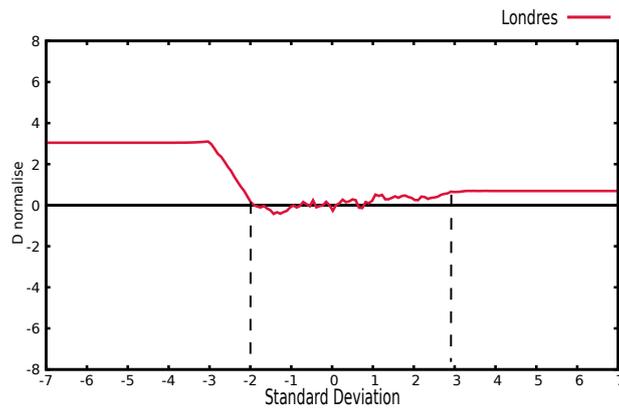
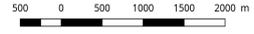
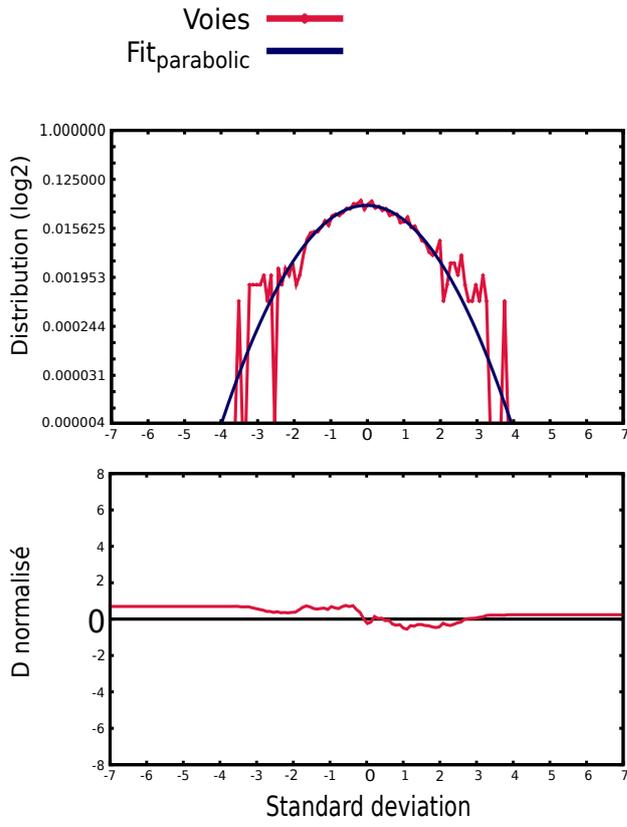


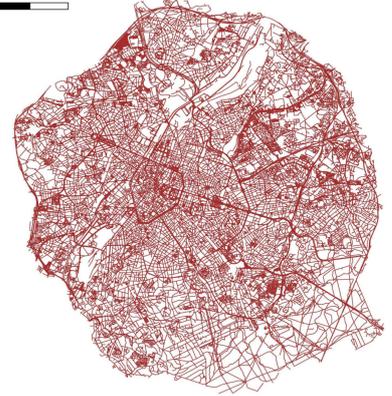
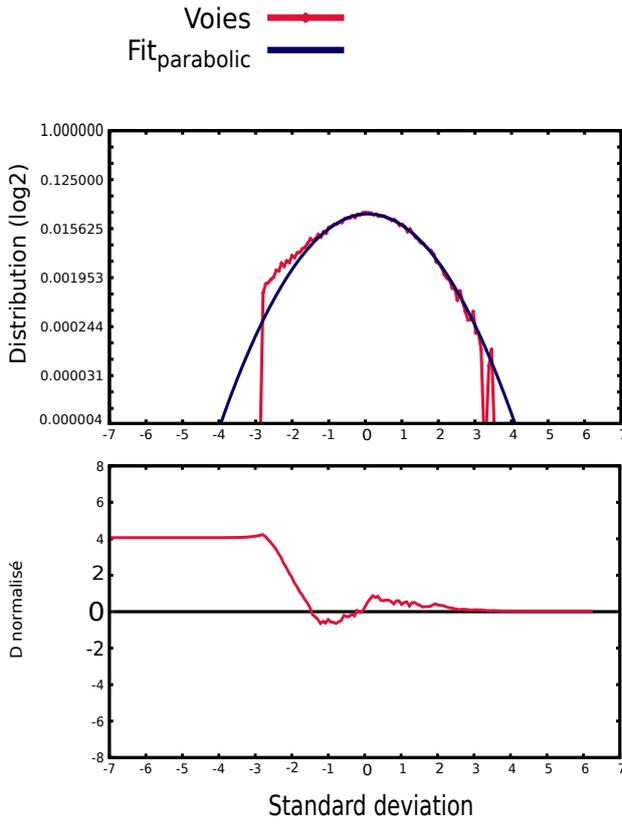
FIGURE 7.7. Nous remarquons pour le cas de Londres, que l'écart D_n devient important à partir de 2 écarts-types du côté des petites longueurs. De l'autre côté de la courbe, l'écart se stabilise à une valeur faible inférieure à $D_n = 1$, on peut estimer que la distribution et le fit sont confondus.

3. Application du test sur les réseaux viaires

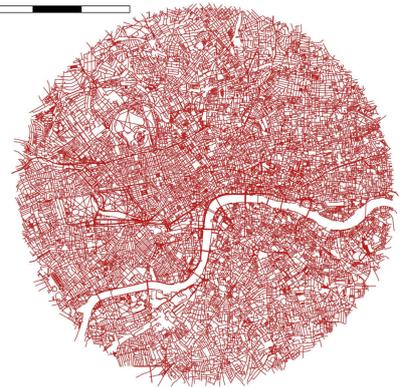
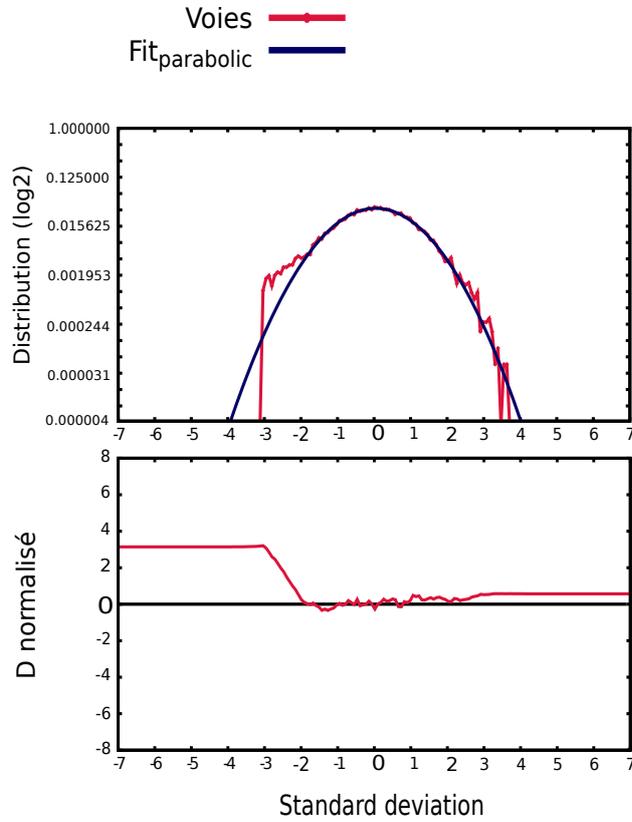
Avignon



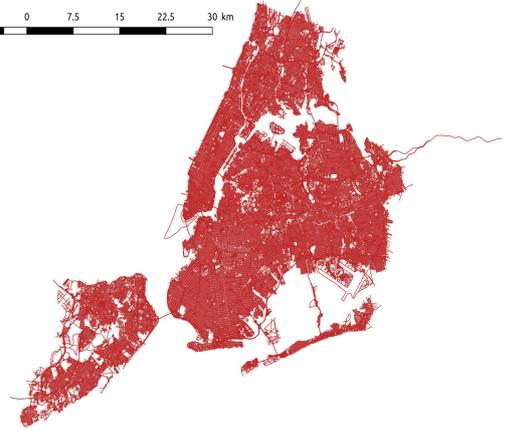
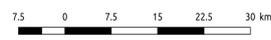
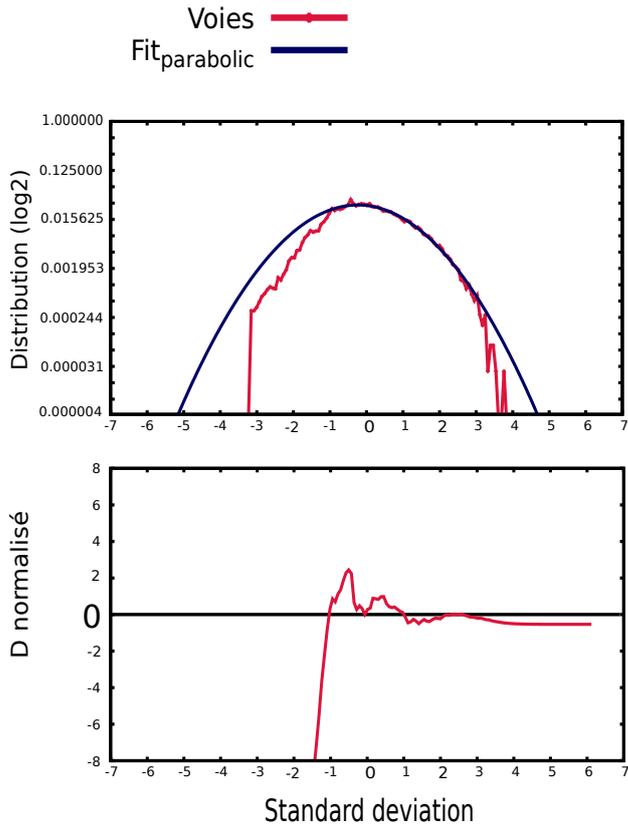
Bruxelles



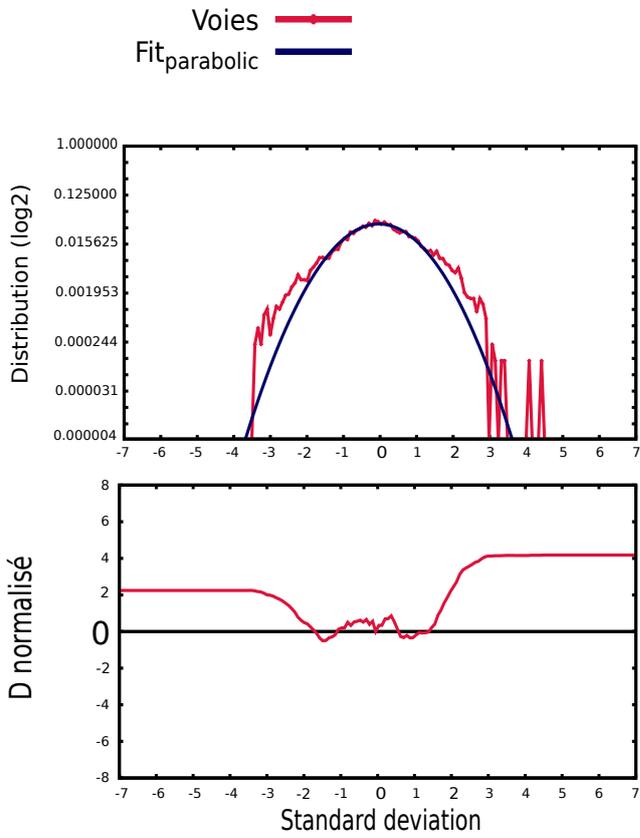
Londres



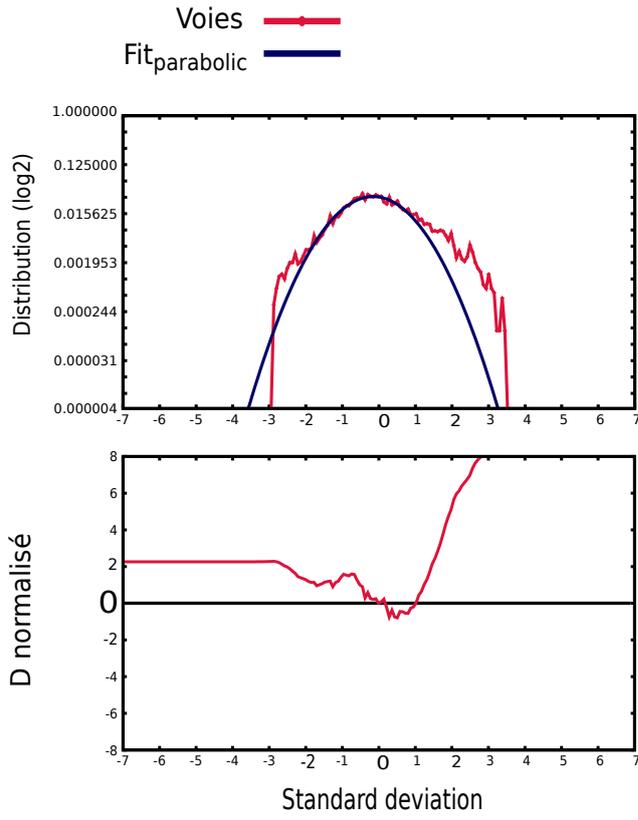
New York



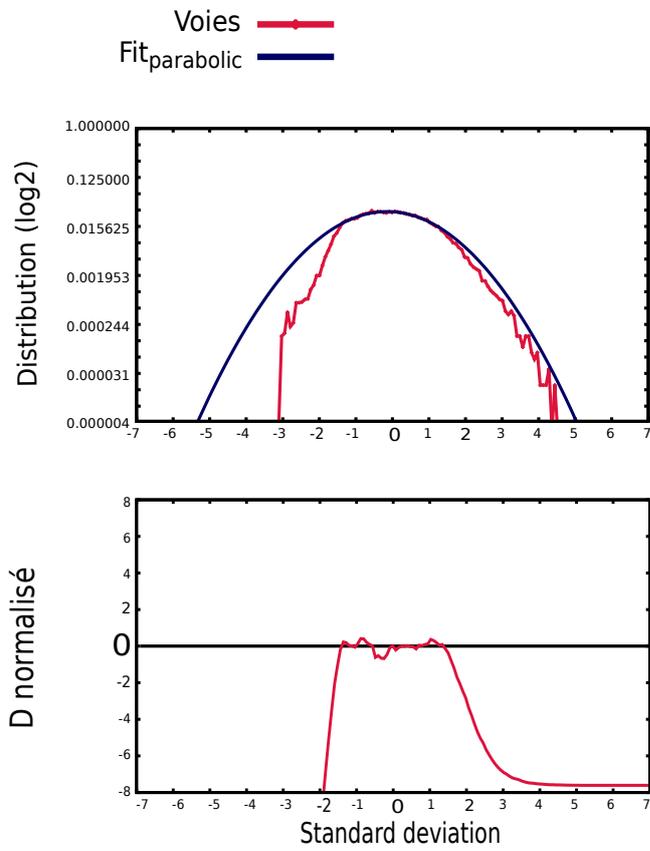
Paris



San Francisco



Teheran



Modélisation

1. Modèle avec angle

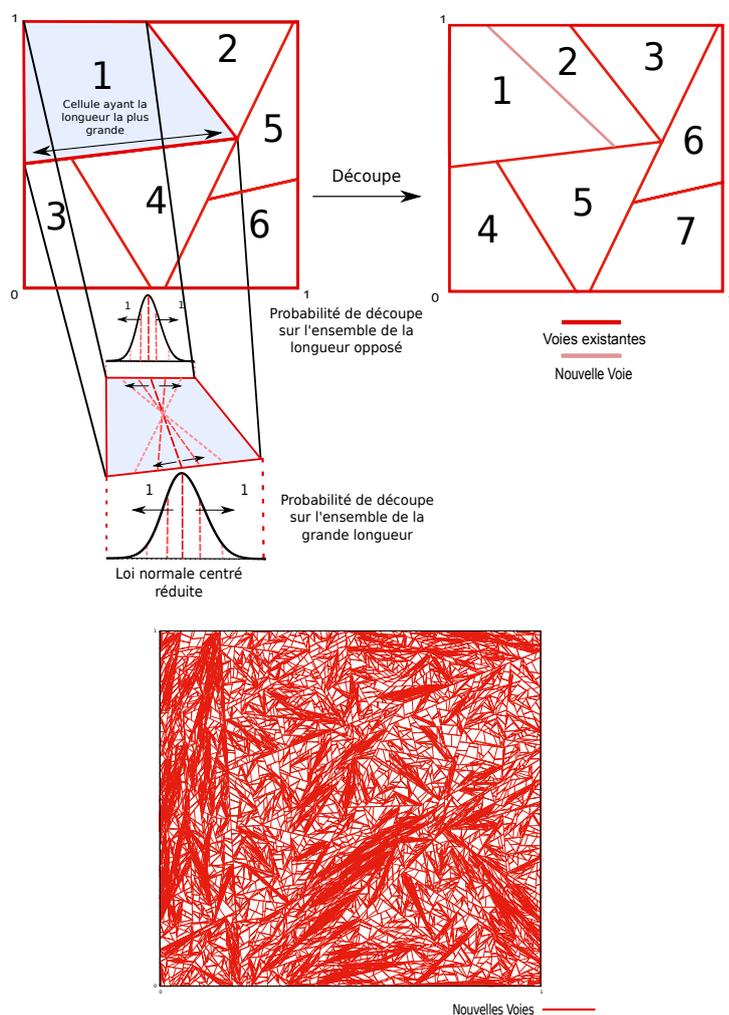


FIGURE 8.1. Modèle Grande Longueur avec angle, nous appliquons le même processus que le modèle précédent en ajoutant un bruit de découpe supplémentaire, du côté opposé à la grande longueur. Nous obtenons des réseaux abstraits avec des parcelles qui ne sont plus rectangulaires et des voies qui redécoupent les plus anciennes avec des angles différents. En bas : Représentation d'un réseau du modèle avec angle, pour 2^{14} cellules et un bruit $\sigma_b = 1.0$.

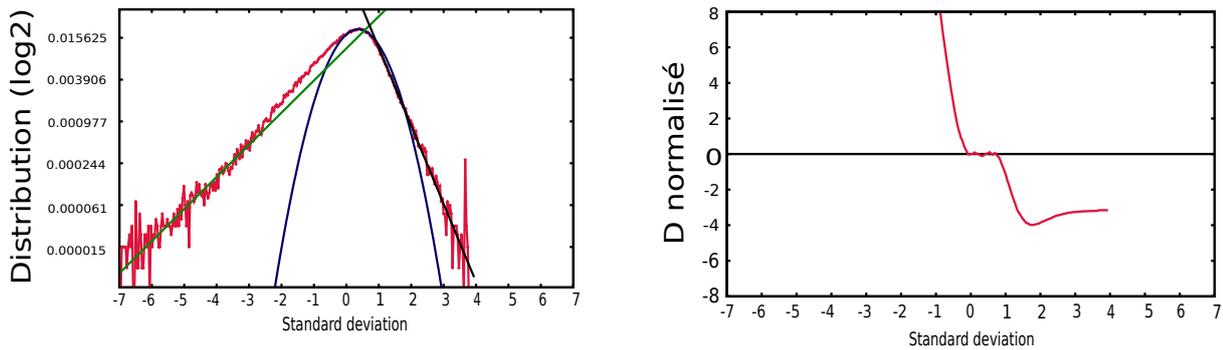


FIGURE 8.2. Gauche : Distribution du log des longueurs des voies (normalisé) en fonction de l'écart-type. Comme pour le modèle Grande Longueur, on remarque deux lois de puissance en queues de courbes et un sommet légèrement plus élargi que pour le cas perpendiculaire. Il est tout de même possible de faire un fit parabolique à partir du sommet. Droite : l'évolution de D_n qui montre que ce fit n'est pas très pertinent, ne fonctionnant que sur la pointe de la distribution avant que les écarts grandissent très rapidement des deux côtés et surtout dans la direction des petites longueurs .

2. Algorithme de Box-Muller

Algorithme de la méthode de Box-Muller appliqué dans le programme pour le bruit de découpe :

```

/*Emplacement de la coupure*/
while (eps <= 0. || eps >= 1){

    /*Methode de Box-Muller*/
    nbr_alea = (double)rand()/RAND_MAX;
    nbr_alea2 = (double)rand()/RAND_MAX;

    /* X nombre aléatoire de loi normale centrée réduite */
    X=sqrt(-2*log(nbr_alea))*cos(2*M_PI*nbr_alea2);

    /*Positionnement de la nouvelle voie sur la grande longueur (eps)*/
    eps= (1./2)+X*(sigma);    /*sigma: parametre bruit*/
}

```

Cette méthode donne des nombres aléatoires à distribution normale centrée réduite à partir de nombres aléatoires de loi uniforme (distribution utilisé en langage C avec la fonction `rand()` par exemple).

3. Condition tiltée

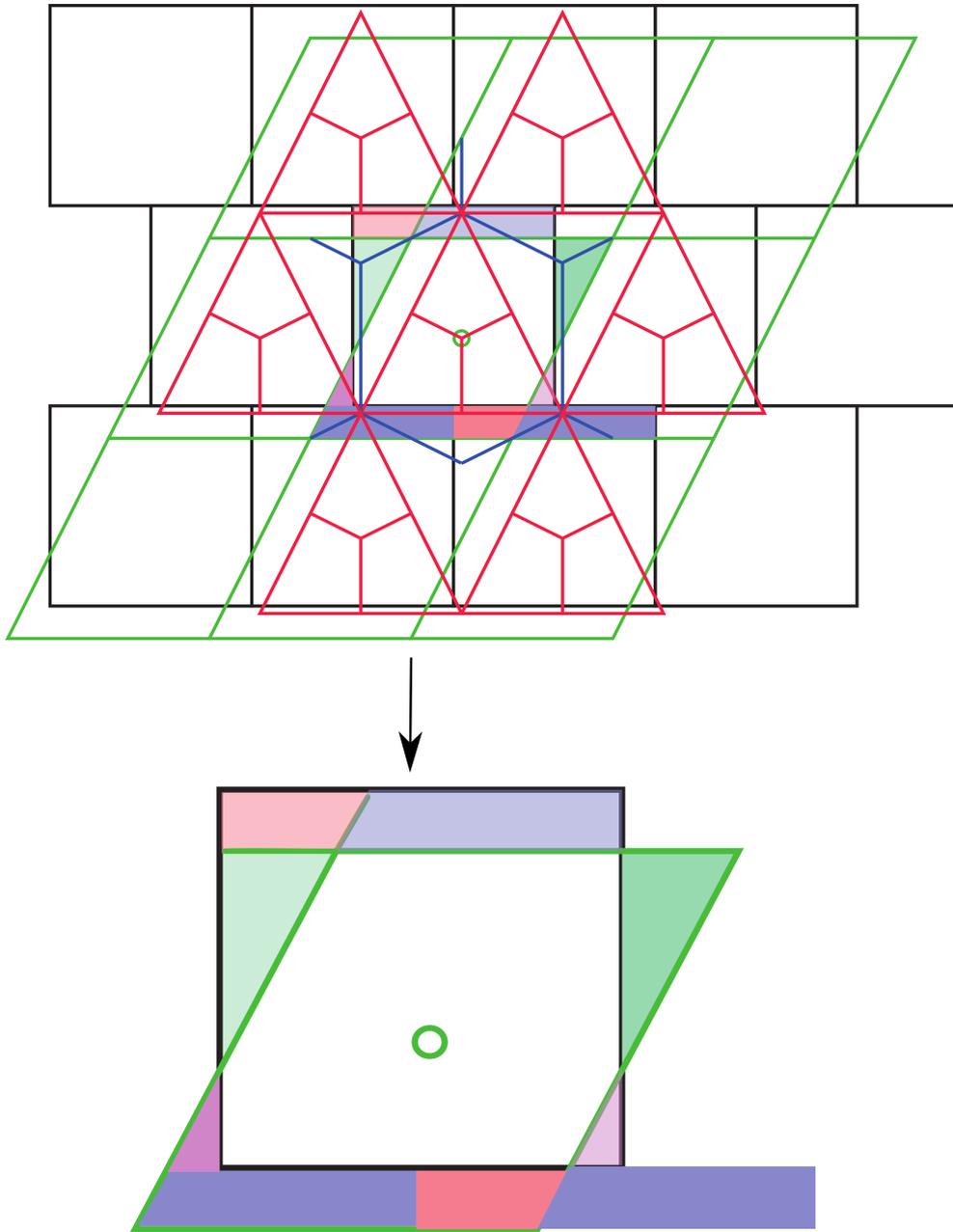


FIGURE 8.3. Représentation des conditions périodiques tiltées pour notre simulation (en haut, la démarche, en bas, le résultat final pour un carré donné). Pour un point donné du carré (cercle vert), nous cherchons les distances les plus proches pour ces conditions périodiques. Les couleurs vives correspondent aux zones des carrés extérieurs pouvant être remplacé dans le carré de base : la zone rouge vive, par exemple, est situé à une distance plus courte que sa zone retranscrite dans le carré de base (rouge clair).

Références bibliographiques

Bibliographie

- [1] Le Gléau J-P., Pumain D., and Saint-Julien T. Villes d'europe : à chaque pays sa définition. *Economie et Statistique*, (294-295) :9–23, 1996.
- [2] Allain R. *Morphologie urbaine. Géographie, aménagement et architecture de la ville*. 2004.
- [3] Braudel F. *L'identité de la France*. 1992.
- [4] Duby G. *Histoire de la France urbaine*. 1985.
- [5] Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 237(641) :37–72, 1952.
- [6] Hall P. and Ward C. *Sociable Cities : The Legacy of Ebenezer Howard*. 1998.
- [7] Courtat T. *Walk On City Maps Physical and Mathematical Phenomenology of the City - A Geometrical Approach*. PhD thesis, Université Paris VII Diderot, 2011.
- [8] Pumain D. and Moriconi-Ebrard. City size distributions and metropolisation. *GeoJournal*, (43) :307–314, 1997.
- [9] Zipf G K. *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. 1949.
- [10] Newman P W G. and Kenworthy J R. *Cities and Automobile Dependence : A Sourcebook*. 1989.
- [11] Mandelbrot B. *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension*. 1982.
- [12] Batty M. and Longley P. *Fractal cities*. 1994.
- [13] Frankhauser P. La ville fractale et la fractalité des villes. *L'approche fractale. Un nouvel outil de réflexion dans l'analyse spatiale des agglomérations urbaines*, (52-4) :1005–1040, 1997.
- [14] Frankhauser P. La ville fractale et la fractalité des villes. *PUCA La ville émergente Résultats de recherches*, pages 147–161, 2002.
- [15] Tannier C. and Pumain D. Fractals in urban geography : a theoretical outline and an empirical example. *CyberGeo : European Journal of Geography*, (307), 2005.
- [16] Tannier C. Formes de villes optimales, formes de villes durables. réflexions à partir de l'étude de la ville fractale. *Espaces et Sociétés*, (138) :153–171, 2009.

- [17] Douady C-N. *De la trace à la trame*. 2014.
- [18] Buhl J., Gautrais J., Reeves N., Solé R.V., Valverde S., Kuntz P., and Theraulaz G. Topological patterns in street networks of self-organized urban settlements. *The European Physical Journal B*, (49) :513–522, 2006.
- [19] Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, (8) :127–140, 1741.
- [20] Albert R. and Barabasi A. Statistical mechanics of complex networks. *Phys Rev Lett*, (100) :138702, 2008.
- [21] Bohn S., Douady S., and Couder Y. Four sided domains in hierarchical space dividing patterns. *Physical review letters*, (94) :054503, 2005.
- [22] Bohn S., Andreotti B., Douady S., Munzinger J., and Couder Y. Constitutive property of the local organization of leaf venation networks. *Physical Review E*, (65) :061914, 2002.
- [23] Katifori E. and Magnasco M. O. Quantifying loopy network architectures. *PLoS ONE*, (7(6)) :e37994, 2012.
- [24] Bohn S., Pauchard L., and Couder Y. Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions. *Physical Review E*, (71) :046214, 2005.
- [25] Lagesse C. *Lire les Lignes de la Ville*. PhD thesis, Université Paris VII Diderot, 2015.
- [26] Hillier B., Leaman A., Stansall P., and Bedford M. Space syntax. *Environment and Planning B : Planning and Design*, (3(2)) :147–185, 1976.
- [27] Hillier B. and Hanson J. The social logic of space. *Cambridge, Cambridge University Press.*, 1984.
- [28] Hillier B. *Space is the Machine : A Configurational Theory of Architecture*. 1996.
- [29] Jiang B. and Claramunt C. Topological analysis of urban street networks. *Environment and Planning B - Planning and Design*, (31) :151–162, 2004.
- [30] Porta S., Crucitti P., and Latora V. The network analysis of urban streets : a dual approach. *Physica A - Statistical Mechanics and its Applications*, (369) :853–866, 2006.
- [31] Hillier B., Penn A., Hanson J., Grajewski T., and Xu j. Natural movement : or, configuration and attraction in urban pedestrian movement. *Environment and Planning B : Planning and Design*, (20) :29–66, 1993.
- [32] Turner A., Penn A., and Hillier B. An algorithmic definition of the axial map. *Environment and Planning B : Planning and Design*, (32) :425–444, 2003.

- [33] Jiang B., Claramunt C., and Batty M. Geometric accessibility and geographic information : extending desktop gis to space syntax. *Computers, Environment and Urban Systems*, (23) :127–146, 1999.
- [34] Jiang B. and Claramunt C. Integration of space syntax into gis :new perspectives for urban morphology. *Transactions in GIS*, (6(3)) :295–309, 2002.
- [35] Courtat T., Gloaguen C., and Douady S. Mathematics and morphogenesis of cities : A geometrical approach. *Physical Review E*, (83) :036106, 2010.
- [36] Courtat T., Gloaguen C., and Douady S. Hypergraphs and city street networks. *Arxiv preprint*, (1106.0297), 2011.
- [37] Lagesse C., Bordin P., and Douady S. A spatial multi-scale object to analyze road networks. *Network Science*, (3(01)) :156–181, 2015.
- [38] Buhl J., Gautrais J., Solé R.V., Kuntz P., Valverde S., Deneubourg J.L., , and Theraulaz G. Efficiency and robustness in ant networks of galleries. *The European Physical Journal B*, (42) :123–129, 2004.
- [39] Cardillo. A., Scellato S., Latora V., and Porta S. Structural properties of planar graphs of urban street patterns. *Physical Review E*, (73) :066107, 2006.
- [40] Hillier B. Centrality as a process : accounting for attraction inequalities in deformed grids. *URBAN DESIGN International*, (4) :107–127, 1993.
- [41] Limpert E., Stahel W. A., and Abbt M. Log-normal distributions across the sciences : Keys and clues. *Physica A*, (363(01)) :89–95, 2001.
- [42] Douady S., Courtat T., Douady C-N., and Bonnin P. Tentative de modélisation de la morphogenèse du réseau des rues. *Morphogenèse et dynamiques urbaines*, (Séminaire PUCA) :176–195, 2012.
- [43] Cowan R. New classes of random tessellations arising from iterative division of cells. *Advances in Applied Probability*, (42(1)) :26–47, 2010.
- [44] Mecke J., Nagel W., and Weiss V. Length distributions of edges in planar stationary and isotropic stit tessellations. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, (42) :28–43, 2007.
- [45] Nagel W. and Weiss V. Crack stit tessellations : Characterization of stationary random tessellations stable wit respect to iteration. *Advances in Applied Probability*, (37) :859–883, 2005.
- [46] Lämmer S., Ghelsen B., and Helbing D. Scaling laws in the spatial structure of urban road networks. *Physica A*, (363(01)) :89–95, 2006.
- [47] Perna A., Kuntz P., and Douady S. Characterization of spatial network like patterns from junction geometry. *Physical Review E*, (83(6)) :066106, 2011.
- [48] Barthelemy M. and Flamini A. Modeling urban street patterns. *Phys Rev Lett*, (100) :138702, 2008.

- [49] Barthelemy M. and Flamini A. Co-evolution of density and topology in a simple model of city formation. *Networks and spatial economics*, (9(3)) :401–425, 2009.
- [50] Bonnin P. and Douady S. Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions. *HAL*, (halshs-00869371) :48–73, 2013.
- [51] Le-Her Michel. STATISTIQUES, 2018. <http://calamar.univ-ag.fr/uag/staps/cours/stat/stat.htm>.
- [52] Rakotomalala R. Comparaison de populations. tests non paramétriques. *Université Lumière Lyon 2*, 2008.
- [53] Muller M. E. A comparison of methods for generating normal deviates on digital computers. *Princeton University, Princeton, N. J., and International Business Machines Corp., New York, N. Y.*, (6) :376–383, 1959.