Université Sorbonne
Paris Cité

Thèse de doctorat
de l'Université Sorbonne Paris Cité

Préparée à l'Université Paris Diderot

École doctorale savoirs scientifiques (ED 400)

Épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

Laboratoire de didactique André Revuz

Discret et continu au lycée

Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités

Par Sophie Rousse

Thèse de doctorat de Didactique des disciplines - Mathématiques

Dirigée par Fabrice Vandebrouck

Présentée et soutenue publiquement à Paris le 30 novembre 2018

Présidente du jury : Durand-Guerrier, Vivianne. Professeure des universités, Université Montpellier 2
Rapporteurs : Dorier, Jean-Luc. Professeur ordinaire, Université de Genève
Pouyanne, Nicolas. Maitre de conférences, Université de Versailles – Saint-Quentin
Examinateur : Vivier, Laurent. Maitre de conférences, Université Paris Diderot
Directeur de thèse : Vandebrouck, Fabrice. Professeur des universités, Université Paris Diderot
Membres invités : Parzysz, Bernard. Professeur des universités émérite, Université Paris Diderot
Robert, Aline. Professeur des universités émérite, Université Cergy-Pontoise

Except where otherwise noted, this work is licensed under
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/

Remerciements

L'écriture d'une thèse est influencée par l'entourage du doctorant. Ce n'est pas un scoop. Mais c'est une chose de le penser, de le dire, c'en est une autre de le vivre. Écrire ces lignes de remerciements m'apparait ainsi, *a posteriori,* comme un exercice qui, loin d'être convenu, me permet de reconnaitre avec la justesse dont j'espère être capable, la part de chacun dans ce travail et de leur exprimer ma reconnaissance.

Sans le soutien constant et indéfectible de mes directeurs de thèse et de mon mari, cette entreprise n'aurait pas vu le jour, c'est certain. Je les en remercie du fond du cœur.

J'ai eu la grande chance d'être encadrée par Aline Robert et Fabrice Vandebrouck.

Aline m'avait fait découvrir la géométrie lorsque, pur produit de la réforme des math modernes, je préparais le CAPES à l'université Paris 6. Elle montrait avec pédagogie la beauté du sujet et les subtilités des raisonnements « à la Euclide ». Vingt ans plus tard, j'ai eu la surprise de la retrouver en Master Pro de formation de formateurs ; et le bonheur aussi ; je me suis rendu compte de la passion qui l'anime pour les belles mathématiques, leur enseignement et ceux qui les enseignent. Son regard pertinent et bienveillant donne l'occasion à chaque enseignant en formation de trouver davantage sa place, l'expérience de chacun venant alimenter la réflexion des autres, elle y compris.

Elle s'est ensuite montrée enthousiaste pour le sujet de thèse que j'avais choisi, m'a conseillé de le présenter à Fabrice. La complexité du sujet, loin de les faire reculer, semblait au contraire pouvoir ouvrir de nouveaux horizons.

Aline et Fabrice m'ont permis de dessiner les contours de cette recherche en me laissant une grande liberté. Cependant, ils ont été disponibles à chaque fois que l'avancée du travail le demandait, pour des séances de « brain storming », pour recadrer le travail, pour donner leur avis sur ce que je produisais, poussant le curseur progressivement plus loin.

Ils m'ont aussi orientée, au cours de ces années, vers les ouvrages et les personnes qui pouvaient contribuer à faire avancer ma réflexion.

Ainsi, Marc Rogalski aura jalonné plusieurs moments de cette recherche. Marc m'a, à plusieurs reprises, fait bénéficier de ses ressources inépuisables en analyse réelle.
Michel Henry et Bernard Parzysz m'ont éclairée sur les problématiques posées par les probabilités continues.

Je tiens aussi à remercier les chercheurs du Laboratoire de Didactique André Revuz qui, bien que n'ayant pas participé directement à cette thèse, ont, par quelques mots d'encouragement, au long de ces six années, contribué à son bon déroulement.
Je pense particulièrement à Cécile de Hosson, qui transmet aux « jeunes chercheurs » du LDAR sa belle énergie et qui, elle aussi, se rend disponible, efficacement et humainement.
Il y a aussi Maha Abboud-Blanchard, Brigitte Grugeon, pour ne citer qu'elles.

J'ai découvert que ces chercheurs confirmés, qui m'intimidaient par leurs connaissances et leurs compétences, étaient animés du désir de faire avancer l'état de la science et pour cela de partager leurs réflexions, de faire avancer celles des « jeunes chercheurs », dans l'échange et le dialogue.

Je n'oublie pas Jérôme Barberon, dont la connaissance des ouvrages de la bibliothèque de l'IREM est époustouflante. Sa grande efficacité m'a été très précieuse, ainsi que son humour lorsque je tentais d'emprunter un ouvrage qu'une certaine Sophie Rousse avait déjà emprunté…

Le soutien des personnes du LDAR et particulièrement celui de mes directeurs de thèse était doublé de celui, sans faille, de mon mari.
Il a patiemment relu ma prose, toute ma prose, pendant six ans. Ses remarques, sans concession, se sont progressivement raréfiées, alors qu'il constatait que mon écriture s'améliorait. Il m'a poussée à aller plus loin dans ma réflexion.
Il a aussi tenu bon lorsque le doute me prenait, a su me conseiller de lever le pied lorsque j'en avais besoin, de redoubler d'efforts lorsque c'était nécessaire.

Lorsqu'en Master Professionnel, notre professeur de sociologie Elisabeth Bautier nous exhortait à « devenir auteur », cela me semblait un but merveilleux tout en étant parfaitement hors de ma portée.

Grâce aux personnes bienveillantes et compétentes que j'ai eu la chance d'avoir autour de moi, j'ai pu en avoir un petit gout. Qui me donne envie de continuer…

Titre : Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités.

Résumé :

Le discret et le continu sont explicitement présents dans les programmes scolaires officiels, depuis 2001, sans qu'ils ne fassent l'objet de définitions ni de théorèmes. Où se logent-ils ? Sont-ils source de difficultés pour les élèves ? Comment décrire, d'un point de vue didactique, ce type de notion ?

Nos analyses s'inscrivent dans le cadrage de la théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques ; pour apprécier la réalité de l'enseignement et compte tenu du côté diffus du discret et du continu dans les mathématiques à enseigner, nous avons été amenée à analyser un spectre large de données, à l'aide d'outils provenant principalement de ce cadre théorique, et d'une méthodologie guidée par la multiplicité des aspects du discret et du continu mis en lumière par une analyse épistémo-mathématique préliminaire.

Nous prenons pour support de cette étude l'enseignement de l'analyse et des probabilités au lycée général. Les documents officiels, manuels, épreuves d'examens nationaux, copies et entretiens d'élèves nous permettent de dessiner le relief des notions abordées dans ces deux thèmes ; les questionnaires, capsules vidéo sur internet et une séance en classe nous donnent un aperçu des conceptions et des pratiques de futurs enseignants ainsi que d'enseignants en exercice.

Ces analyses permettent de révéler deux « mondes » qui se côtoient, voire s'interpénètrent par l'intermédiaire de notions, de vocabulaire, de techniques plus ou moins analogues, qui présentent aussi des ruptures importantes, sources de difficultés pour les élèves, qui mériteraient davantage d'explicitations dans les mathématiques enseignées.

Elles soulignent aussi un changement de paradigme en cours dans l'enseignement des mathématiques, qui fait aujourd'hui une plus grande place à la modélisation et par conséquent aux jeux entre discret et continu.

Mots clefs : discret, continu, notion Non Encore Formalisée, suite, fonction, représentation graphique, fonctions exponentielles, valeur moyenne, probabilités, loi à densité, modélisation, pratiques enseignantes.

Title: Discrete and continuous in upper secondary school. The stakes of th**ese** notion**s** through the study of the teaching of Calculus and Probability.

Abstract:

The notions of discrete and continuous have been explicitly present in French secondary school curricula since 2001, while being neither defined nor the subject matter of theorems. Therefore, where can they be found? Do students have difficulties regarding these notions? How could we describe them from a didactic perspective?

This work comes within the framework of the activity theory as it has been adapted to mathematics education; the notions of discrete and continuous are spread throughout the mathematics to be taught, leading us to analyze a large range of data, with tools that this theoretical framework provides. The methodology stems from the multiple aspects of discrete and continuous as highlighted in a preliminary epistemo-mathematic analysis.

This study is based on the teaching of Calculus and Probability in French secondary school. Official documents, textbooks, national exams, student papers and interviews, enable us to describe the "relief" of the notions pertaining to both themes; in addition, questionnaires, internet videos, a classroom session provide us with a general idea of teachers' conceptions and practice.

These analyses reveal two "worlds" which come close, sometimes interfering through more or less similar notions, vocabulary and techniques, other times with important ruptures; those interferences are source of some students' difficulties and could be more explicit in the teaching process.

Furthermore, they underline a current change in the French mathematics education paradigm, in which modeling takes a greater part and consequently gives more room for interplay between discrete and continuous.

Keywords: discrete, continuous, not yet formalized notion, sequence, function, graph, exponential functions, mean value, probability, density function, modelling, teachers' practice.

Table des matières

Introduction 13

I. Que sont le discret et le continu en mathématiques ? 18

A. Une petite histoire du discret et du continu en mathématiques à travers celle des nombres ... 18

1. Les mathématiques de l'antiquité, des indiens et des arabes 19

a) Les mathématiques de l'antiquité 19

b) Les mathématiques indiennes et arabes 26

2. La période moderne en Europe 27

a) Le réveil de l'Europe 27

b) Le calcul différentiel et intégral, ou l'algébrisation des grandeurs continues 29

c) Le retour de la rigueur 30

d) Les constructions des nombres réels 31

e) L'idée de continu dégagée de la notion d'ordre 33

3. Conclusion de la partie I A 34

B. Qu'est-ce que le discret, qu'est-ce que le continu en mathématiques aujourd'hui ? 35

1. Du point de vue de l'étymologie et de l'intuition 35

2. En philosophie 36

3. Dans les modes de pensée 37

4. Quantitativement 38

5. Topologiquement : points isolés, points limites 39

6. Divisibilité à l'infini 40

7. Topologiquement dans un espace métrique : complétude 41

8. Topologiquement : connexité 41

9. Propriété de la borne supérieure – notion d'ensemble ordonné 42

10. En géométrie affine classique et euclidienne 42

11. En probabilités 44

12. En physique, quelques pistes 44

13. Conclusion de la partie I B 45

C. Conclusion de la partie I 47

II. Outils théoriques ; méthodologie 49

A. Spécificité de ce travail 49

B. Outils 50

1. Le relief 50

2. Discret, continu : quel(s) type(s) de notion ? 50

3. Outils d'analyse des contenus 51

4. Niveau de conceptualisation 52

5. Le méta 52
C. Problématique et méthodologie 53
1. La problématique 53
2. La méthodologie 54
a) Le relief - les mathématiques 54
b) Le relief - les aspects cognitifs 55
III. Fonctions, suites 57
A. Notions de fonction, de représentation graphique d'une fonction, en collège et en classe de Seconde 57
1. Dans les mathématiques à enseigner au collège et en seconde générale 57
a) Les programmes de Troisième et de Seconde depuis 1999 58
b) Quelques manuels de Troisième depuis 1999, récents énoncés de Brevet 66
c) Quelques manuels de Seconde depuis 2001 77
2. Du côté des élèves – relier les points 81
a) L' « activité » « Relier les points ? » du manuel « Math'x » 81
b) Relier les points : de quelques points de la représentation graphique d'une suite géométrique à la courbe d'une fonction exponentielle 81
3. Du côté des enseignants 85
a) Les futurs enseignants (étudiants en Master MEEF 1) 85
b) Les enseignants de 3e et de 2nde en exercice 87
c) Quelques réponses de l'APMEP 91
d) Conclusion sur les enseignants 93
B. Fonction continue en Terminales ES, L et S 94
1. Dire qu' « une courbe est continue » a-t-il un sens en mathématiques ? 94
2. La continuité dans les mathématiques à enseigner en Terminale 94
a) Les programmes officiels 95
b) Les manuels de 2012 97
3. Conclusion 103
C. Suites et fonctions en Première et Terminale série S 105
1. Dans les mathématiques à enseigner au cycle Terminal du lycée, série S 105
a) Dans les programmes de Première et de Terminale de la série S 106
b) Dans les manuels 117
c) Tâches relevant du discret / du continu en analyse au lycée : sujets de Baccalauréat série S 128
2. Du côté des élèves 149
a) Aspects liés aux entiers naturels : la notation indicée ; les relations de récurrence ; le travail algébrique dans $\mathbb{N}$ 149
b) Suite et fonction 156
c) Notations discret / continu 165

d) Monotonie 168
e) Conclusion sur les élèves 172
3. Du côté des enseignants 175
a) Les futurs enseignants (étudiants en Master MEEF 1) 175
b) Enseignants en exercice 180
c) Conclusion sur les enseignants 183
4. Conclusion de la partie III C 185
D. Calculs de moyennes en Terminales ES, L et S 187
1. Dans les mathématiques à enseigner au collège et au lycée général 187
a) Quelques considérations mathématiques : 187
b) Le programme officiel 188
c) Les énoncés d'exercices de manuels et du Baccalauréat 188
2. Du côté des élèves 198
3. Conclusion de la partie III D 200
E. L'introduction aux fonctions exponentielles en Terminales ES et L 201
1. Dans les mathématiques à enseigner 201
a) Le programme officiel 201
b) Étude de l'introduction aux fonctions exponentielle dans quatre manuels de Terminales ES et L 208
2. Du côté des enseignants 215
a) Une séance d'introduction aux fonctions exponentielles en Terminale ES via l'étude du prix d'un bien immobilier. 215
b) Retours d'expérience d'enseignants 219
c) Conception d'une séance d'introduction des fonctions exponentielles en Terminale ES . 222
3. Du côté des élèves 234
a) L' « activité » d'introduction de novembre 2016 234
b) Questionnaire sur les fonctions exponentielles de décembre 2016 240
4. Conclusion de la partie III E 243
IV. Discret et continu au lycée : les probabilités 245
A. Le discret et le continu dans les mathématiques à enseigner au collège et au lycée général .. 246
1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle discrète, une variable aléatoire réelle continue ? 246
a) Généralités sur les variables aléatoires 246
b) Variables aléatoires discrètes, continues 247
c) Les histogrammes 248
d) Conclusion 248
2. Les variables aléatoires à enseigner au lycée 249
a) Les connaissances anciennes des élèves de Terminale générale 249
b) L'introduction des lois à densité : le programme officiel 251

c) L'introduction de la loi uniforme : le programme officiel, les manuels 254
d) Espérance : le programme officiel, les manuels 259
e) La loi normale : le programme officiel, les manuels 260
f) Des lois à densité en Terminale, pour quoi faire ? 262
3. Conclusion de la partie IV A 265
B. Le discret et le continu en probabilités en Terminale : du côté des élèves 268
1. La modélisation ne génère pas de différences dans les résultats 269
a) Exemple n°1 269
b) Exemple n°2 269
2. La modélisation génère des différences dans les réponses 270
a) Exemple n°1 270
b) Exemple n°2 271
3. Conclusion de la partie IV B 283
C. L'introduction des lois à densité en Terminale : du côté des enseignants 285
1. L'introduction des lois à densité en Terminale : capsules sur internet 285
a) Site « Les Bons Profs » 286
b) Site d'Yvan Monka 288
c) Site de la Khan Academy 291
d) Site « J'ai compris.com » 293
e) Site « leornian.net » 296
f) Site « Le prof du Web » 297
g) Vidéo par Sophie Guichard 300
h) Site « Eduxera » 302
i) Synthèse 303
j) Conclusion 305
2. Une séance d'introduction aux lois à densité en classe de Terminale S 307
a) Le déroulement : 307
b) Éléments d'analyse : 311
3. Conclusion de la partie IV C 319
D. Conclusion de la partie IV 320
V. Propositions 323
A. Modélisation 323
1. Un retour sur les programmes officiels d'aujourd'hui 323
2. La modélisation dans les manuels, le brevet et le bac 325
3. La formation des enseignants 327
4. De la modélisation dans les programmes ? 328
5. Quelles tâches de modélisation ? 329
a) Un exemple en analyse 329

b) En probabilités 330
B. Fonctions - suites 332
1. La définition d'une fonction 332
2. Les représentations graphiques 332
3. Le sens de variation d'une fonction sur un intervalle 333
4. La continuité d'une fonction 333
5. Les suites 334
6. L'introduction aux fonctions exponentielles en Terminale ES 335
C. Probabilités continues 336
1. La statistique descriptive 336
2. La modélisation 336
3. Le programme officiel 337
4. Tâches et déroulement : deux exemples 337
5. Les enseignants 338
D. Propositions pour les enseignants 339
E. Réflexion sur les programmes 341
F. Conclusion de la partie V 343
IV. Conclusion 344
A. Synthèse 344
1. Et si on faisait comme si le continu allait de soi ? 344
2. Un changement de paradigme 345
3. Inscription dans un niveau de conceptualisation 346
a) En tant qu'objet, aujourd'hui : le constat 346
b) En tant qu'outil, aujourd'hui : le constat 347
c) Vers un niveau de conceptualisation 348
4. Apport théorique 348
B. Discussion 349
C. Perspectives 351
Bibliographie 355
Annexes 360
Annexe 1 : Frise d'une histoire du continu à travers celle des nombres 360
Annexe 2 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Transmath » de 2003, classe de Troisième, édition Nathan (programme de 1999) 363
Annexe 3 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, édition Hachette 366
Annexe 4 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième 374
Annexe 5 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième 379

Annexe 6 : Analyse du chapitre sur les fonctions du manuel « Dimensions » de 2016, classe de Troisième 384
Annexe 7 : Analyse du premier chapitre sur les fonctions de quatre manuels de Seconde 387
a) Manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, éditeur Hachette (programme de 2001) 387
b) Manuel « Math'x » de 2005, classe de Seconde, éditeur Didier (programme de 2001) ... 390
c) Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, éditeur Didier (programme de 2009) ... 392
d) Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan (programme de 2009) ... 395
Annexe 8 : Questionnaire pour les étudiants en Master MEEF 402
Annexe 9 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Hyperbole » Terminales ES et L, édition Nathan, 2012 403
Annexe 10 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Odyssée » Terminales ES et L, édition Hatier, 2012 412
Annexe 11 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Déclic », Terminale ES, édition Hachette, 2012 421
Annexe 12 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Transmath », Terminales ES et L, édition Nathan, 2012 431
Annexe 13 : Analyse des réponses des élèves de Terminale ES au questionnaire sur les fonctions exponentielles 437
Annexe 14 : Analyse de l'introduction aux probabilités continues de quatre manuels de Terminale S 447
a) Manuel Hyperbole, Nathan, édition de 2012 447
b) Manuel Indice de Terminale S, Bordas, édition de 2012 449
c) Manuel Math'x de Terminale S, Didier, édition de 2012 452
d) Manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012 454
Annexe 15 : Vidéo d'une séance d'introduction aux probabilités continues en Terminale S - Déroulement de la séance incluant la transcription de la première heure 458
Annexe 16 : « Activité » d'introduction aux lois à densité en Terminale ES 470

Introduction

Mon intérêt pour les enjeux du discret et du continu dans l'enseignement en fin de collège et au lycée est né d'une interrogation. Enseignante en classe de Première S dans un lycée dans lequel, dans l'ensemble, les élèves sont d'un bon niveau général et font le travail qui leur est demandé par les enseignants, je constatai que lors de l'abord des suites, les élèves éprouvaient d'importantes difficultés et que leurs résultats chutaient. Pour quelle raison ? Qu'est-ce qui se joue lors de l'introduction des suites, dans le thème de l'analyse « occupé » par les fonctions depuis la fin du collège ? Est-ce lié aux aspects discrets des suites alors que les élèves côtoient les fonctions continues depuis deux ans ?

En partageant mes interrogations avec des collègues enseignants, je m'apercevais que ma curiosité était partagée par certains. Ceux que le sujet animaient aimaient envisager aussi les problématiques liées aux probabilités discrètes et continues, à la modélisation notamment de phénomènes économiques.

Mon intérêt pour ce sujet était d'emblée quadruple :

- D'une part un intérêt intellectuel : je côtoyais depuis plusieurs dizaines d'années, en tant qu'étudiante puis en tant qu'enseignante, les notions de discret et de continu, en n'ayant qu'une vague connaissance de ce qu'elles sont, de la façon dont elles sous-tendent l'activité mathématique. Quelles sont-elles exactement d'un point de vue mathématique, comment sont-elles nées ?
- Je me demandais où elles sont présentes dans les mathématiques à enseigner au lycée, quel rôle elles y jouent, ce en quoi elles sont différentes d'autres types de notions enseignées ;
- Aussi, quelles difficultés elles engendrent chez les élèves, ce qu'ils pourraient exprimer à ce sujet ;
- Enfin, comment remédier à ces difficultés.

Les mots « discret » et « continu » avaient fait leur entrée dans les programmes officiels au lycée en 2001 - dans celui de la classe de Terminale S (en dehors de la continuité d'une fonction bien entendu). Discrètement (si j'ose dire), en opposant l'étude de phénomènes en fonction du temps « en temps discret » à celle « en temps continu », et en juxtaposant exemples de lois de probabilité discrètes et exemples de lois de probabilité continues.
Le mouvement s'est amplifié dans les programmes officiels suivants, tout en faisant progressivement davantage appel au langage de la modélisation, et en gagnant les programmes des autres classes de lycée.
L'intérêt du sujet dépassait largement celui de l'enseignement des suites numériques, d'autant plus que les énoncés de Baccalauréat commençaient à faire appel au langage de la modélisation en nommant parfois des parties d'exercices « modélisation discrète » puis « modélisation continue ».

Il est indéniablement d'actualité en 2018. Un exemple en est la toute première question du premier exercice du Baccalauréat, séries ES et L de juin 2018, donné en métropole. Cet exercice porte entièrement sur le thème des probabilités. En voici un extrait :

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.

Pour tout événement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
   a) $p(X = 10)$
   b) $p(X \geq 45)$
   c) $p(21 \leq X \leq 69)$
   d) $p(21 \leq X \leq 45)$

Extrait du Baccalauréat séries ES et L, métropole juin 2018

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale (qui est une loi continue, à densité). C'est pourquoi la réponse à la question 1. a) est $P(X = 10) = 0$. Nous verrons dans notre étude sur le thème des probabilités que sa justification pose des difficultés aux élèves comme aux enseignants. Sur 107 copies consultées, seul un quart des réponses étaient correctes.
De plus, environ le tiers des élèves a préféré commencer par un autre exercice que l'exercice 1. Pourtant, les élèves des séries ES et L savent que dans les exercices sur les probabilités, ils peuvent généralement s'assurer des points « faciles ». La plupart de ces élèves a tout de même abordé l'exercice n°1, par la suite.
Environ un tiers de ceux qui n'ont pas répondu à cette première question n'a pas du tout traité la partie A de l'exercice 1. Pourtant, à part la question 1.a), cette partie mobilise essentiellement une utilisation simple de la calculatrice.
Ces données indiquent que cette toute première question de l'épreuve du Baccalauréat a dû dérouter un grand nombre de candidats. Or, la propriété « Si X suit une loi à densité, pour tout réel a, $P(X = a) = 0$ » marque une rupture essentielle entre les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues au lycée. Nous sommes au cœur du sujet de cette thèse.

Dans l'écriture de ce qui suit, j'ai utilisé le « nous » plutôt que le « je », afin de mettre une distance entre le « je » qui enseigne et le « nous » qui effectue un travail de recherche[1]*.*

Dans un premier temps, il nous a paru incontournable de spécifier ce que sont les notions de discret et de continu en mathématiques. C'est l'objet de la partie I.
Nous avons débuté cette partie par une analyse historique des notions de discret et de continu en mathématiques, afin d'en cerner les différents aspects et ce qui peut relever de l'intuition de l'un ou de l'autre, de mieux comprendre ce qui a présidé à leur développement ainsi que les freins épistémologiques qui y sont liés. Cette histoire étant concomitante à celle des nombres, c'est par « *une petite histoire du discret et du continu en mathématiques à travers celle des nombres* » que nous démarrons cette thèse. N'étant ni historienne ni épistémologue, nous nous appuyons sur des écrits d'auteurs dont ce sont les spécialités.

[1] J'ai découvert en cours de route qu'il s'agit du « nous » de modestie !

La partie I se poursuit par une étude du savoir savant[2] mathématique actuel sur les notions de discret et de continu. Ces notions ayant de multiples facettes, identifiées en partie dans l'analyse historique, nous répertorions ces facettes, en mettant face à face les notions mathématiques qui relèvent du « monde du discret » et celles qui relèvent du « monde du continu »[3].
C'est sur cette base que nous pouvons traquer et analyser, dans les parties III et IV, le discret et le continu dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées, en fin de collège et au lycée.

La partie II de cette thèse expose le cadre théorique dans lequel elle se situe, les outils théoriques mobilisés et les choix méthodologiques qui y sont faits.
Les notions de discret et de continu sont particulières en ce qu'elles ne sont pas formalisables au lycée et elles sont peu explicitement présentes : les mots « discret » et « continu » restent rarement utilisés dans les curricula ; ils servent essentiellement à qualifier une grandeur, une modélisation, un type de variable aléatoire ; ces notions ne font pas l'objet d'un enseignement, ne sont pas définies et ne font pas l'objet de tâches spécifiques.
Ces particularités nous ont menées à mettre en place une méthodologie qui permet d'explorer ces notions sur un large spectre de données.

Le sujet est vaste. D'un point de vue didactique, Artigue (2008) relève qu'il est développé depuis les années 1970, essentiellement autour des notions de limites, de continuité, de dérivée et d'intégrale, ainsi que des rapports des élèves et des étudiants avec les nombres réels.
Nous avons concentré notre travail sur les deux thèmes qui nous sont apparus comme les plus porteurs d'interactions entre discret et continu au lycée : celui de l'analyse (les fonctions, les suites) et celui des probabilités.
Cependant, les fonctions et les probabilités étant introduites en classe de Troisième[4], nous avons étendu notre étude à ce niveau d'enseignement.

La partie III traite du thème de l'analyse au lycée ; la partie IV de celui des probabilités.
Les questionnements sont en grande partie communs aux deux thèmes. Voici les principaux :

- Où le discret et le continu se « logent-ils » dans les notions mathématiques qui figurent au programme officiel, du point de vue des mathématiques savantes ?
  Pour répondre à cette question, nous menons une analyse du savoir savant concernant chaque notion, au niveau enseigné – parfois à un niveau qui l'inclut strictement. Le filtre de cette analyse est constitué des facettes du discret et du continu mises en lumière dans la partie I.

- Quand discret et continu interagissent autour de deux notions présentant des ancrages théoriques communs (suites et fonctions, probabilités discrètes et continues), quelles en sont les analogies, les ruptures - toujours du point de vue du savoir savant ?

- Quand un objet de l'un des deux mondes est introduit à partir d'un objet de l'autre monde, quels prolongements sont possibles, où se situent les ruptures ?
  Nous tentons de répondre à cette question des points de vue du savoir savant et des mathématiques à enseigner.

- À la lumière des analyses précédentes, quelles sont les difficultés inhérentes à l'enseignement des notions que nous avons sélectionnées en ce qu'elles mobilisent fortement le discret, le continu ou leurs interactions ?

[2] Le savoir savant est le savoir qui « *fonde culturellement et scientifiquement* » le savoir scolaire (Chevallard, 1985).
[3] Nous verrons que discret et continu sont davantage que des notions. Ils sont véhiculés par différentes expériences qui en donnent une intuition, les objets (mathématiques ou non) peuvent avoir un caractère discret ou continu. Nous avons choisi le mot « monde » pour englober ces différents aspects du discret et du continu.
[4] Depuis 2015, les probabilités sont introduites dès le début du cycle 4 du collège. Cependant, notre étude concerne essentiellement l'introduction de probabilités continues auprès d'élèves de Terminale qui ont suivi le programme officiel de collège précédent, dans lequel les probabilités sont introduites en Troisième.

- Comment les textes officiels abordent-ils les points qui se dégagent de ces premières analyses ? Nous tenons compte des programmes officiels ainsi que des documents édités par Éduscol.

- Comment font les manuels (à la lumière des analyses précédentes) ?
  Cette question a d'autant plus d'importance que les manuels sont une des principales ressources des enseignants pour construire leurs séquences d'enseignement.

  Nous comparons pour chaque notion étudiée les contenus de plusieurs manuels, selon un filtre particulier à chacune.

- Comment les énoncés d'examens nationaux prennent-ils en charge les différents aspects du discret et du continu ?
  Nous analysons les énoncés du Diplôme National du Brevet et du Baccalauréat. Cette question a d'autant plus d'importance que ces énoncés guident les pratiques des enseignants de collège et de lycée.

- Comment font les enseignants ? Comment conjuguent-ils les injonctions des programmes officiels, les difficultés d'enseignement que soulèvent le discret et le continu, avec les contraintes de leur métier ?
  Que pensent-ils des problématiques soulevées par ces deux notions, où situent-ils les priorités dans leur enseignement ?

- Selon les outils du numérique, quelles facettes du discret, du continu véhiculent-ils ? Quel rôle peuvent-ils jouer dans l'enseignement de notions connexes aux deux thèmes que nous avons retenus ?
  Quel rôle jouent-ils effectivement, dans les manuels, dans les classes ?

- Compte tenu de l'absence de définitions, de propriétés, de tâches, portant sur les notions de discret et de continu, quel rôle le discours de l'enseignant peut-il jouer ? Quel rôle joue-t-il effectivement ?

- Quelles difficultés les élèves de lycée rencontrent-ils au sujet de ces deux notions ? Nous obtiendrons quelques éléments de réponse à partir de l'analyse de leurs copies et d'entretiens avec eux.

- Quid des étudiants futurs enseignants ? Nous aurons quelques éléments de réponse sur le thème des suites et des fonctions.

À travers l'étude des thèmes de l'analyse et des probabilités, nous tâchons de répondre à deux autres questions, plus générales :

- Quel niveau de conceptualisation[5] du discret et du continu peut-on envisager au terme des trois années de lycée ?
- De quoi un élève « moyen » peut-il avoir besoin ? Sans oublier les élèves qui se destinent à des études scientifiques.

Nos questions concernent les mathématiques à enseigner comme les mathématiques enseignées, les enseignants tout autant que les élèves. Ainsi, nos analyses portent sur des documents officiels, des manuels, des énoncés d'épreuves d'examens nationaux, des copies et entretiens d'élèves, des

[5] En un sens que nous préciserons dans la partie II

questionnaires remplis par des étudiants en master MEEF première année, d'autres questionnaires remplis par des enseignants, ainsi que des capsules vidéo sur internet.

La partie III est la plus fournie. En effet, le thème de l'analyse est largement développé dans les curricula du lycée général ; de plus, le discret et le continu y interagissent dans plusieurs sous thèmes.
La sous partie A examine l'évolution de l'abord de la notion de fonction par les programmes officiels à la fin du collège et au début du lycée depuis 1999, ainsi que la façon dont les manuels s'en sont emparé. Nous analysons particulièrement ce qui concerne les représentations graphiques. En effet, une des problématiques qui nous préoccupe est la façon dont les ensembles discrets (finis, ou potentiellement infinis d'abscisses entières) de points de la représentation graphique d'une fonction sont gérés : sont-ils reliés ou non ? Dans l'affirmative, comment le sont-ils, à quel titre le sont-ils ?
La sous partie B concerne la notion de continuité d'une fonction, qui figure au programme de Terminale générale. Nous nous intéressons à sa définition, aux tâches associées, aux facettes du continu sur lesquelles elle s'appuie.
La sous partie C est consacrée à la définition des suites et à l'étude de leur sens de variation en classe de Première et plus généralement à l'analyse des interactions entre suites et fonctions en Première et en Terminale.
Dans la sous partie D, nous analysons les rapports entre moyenne arithmétique et valeur moyenne d'une fonction (notion au programme de Terminale générale) et la façon dont ces deux types de moyenne sont mobilisés dans les exercices.
Enfin, la sous partie E concerne l'introduction aux fonctions exponentielles qui figurent, au programme officiel de Terminales ES et L en vigueur, en tant que *« prolongement continu des suites géométriques* ».

La partie IV analyse principalement l'introduction en classe de Terminale générale des variables aléatoires continues, alors que les élèves pratiquent les probabilités discrètes depuis le collège et ont étudié les variables aléatoires discrètes en classe de Première.

À partir des analyses faites sur les thèmes de l'analyse et des probabilités des parties III et IV, nous formulons en partie V des propositions d'enseignement. Les problématiques liées à la modélisation, qui, nous l'aurons constaté *a posteriori*, traversent une partie importante de nos analyses sur les deux thèmes, sont abordées dans une première sous partie.
Les deux sous parties suivantes (B et C) concernent respectivement le thème de l'analyse et celui des probabilités.
Nous abordons ensuite la question de la formation des enseignants, soulevée maintes fois au cours de nos analyses des parties III et IV.
Nous terminons la partie V par des propositions concernant les programmes officiels.

Nous faisons dans la conclusion un bilan de ce travail, suivi d'une discussion sur les outils théoriques et la méthodologie que nous avons utilisés. Ce qui nous mènera aux nombreuses perspectives de recherche que ce travail permet d'entrevoir.

I. Que sont le discret et le continu en mathématiques ?

A. Une petite histoire du discret et du continu en mathématiques à travers celle des nombres

Cette petite histoire n'a pas l'ambition d'une dissertation sur l'histoire des mathématiques.
C'est à travers le filtre de notre questionnement didactique que nous avons consulté des ouvrages d'historiens des mathématiques.

Nous avons revu cette histoire en y cherchant où se sont nichés le discret et le continu, la façon dont ils ont interagi, la façon dont les concepts qui leur sont liés ont évolué.

Ce faisant notre but est de :

- Mieux comprendre les enjeux conceptuels de ces deux notions ;
- Progresser dans l'analyse des raisonnements selon qu'ils font référence au discret ou au continu ;
- Observer les motivations qui ont présidé au développement des concepts liés au discret et au continu ;
- Relever les conditions qui ont été propices à ce développement ;
- Établir les freins, les difficultés épistémologiques qui y sont liés, qu'ils soient d'ordre idéologique, culturel ou conceptuel.

Nos sources principales sont les livres « *Nombre, mesure et continu* » de Jean Dhombres et « *Histoire du concept de nombre* » d'Eliane Cousquer. C'est donc à travers des textes de seconde main, et la vision de l'histoire des mathématiques qu'ont ces deux auteurs, que nous avons élaboré cette histoire du discret et du continu. Nous y avons traqué les passages dans lesquels le discret ou le continu sont en jeu, les questions des mathématiciens qui y font référence, la façon dont les idées qui y sont liées ont progressé, la nature des freins à leur développement.

Les objets dont il est question :
Pour nombre d'auteurs, Aristote est le premier à tenter de définir ce que recouvre le continu, plus exactement le continu des grandeurs, le nombre - pour les grecs de l'antiquité - étant limité aux entiers. Il s'y prend en plusieurs fois, dans les Livres IV, V, et VI de *La Physique* : D'après J. Dhombres*, « sa définition de la continuité est mathématiquement inopérante… L'impression générale est que des notions de bon sens commun sont systématiquement malaxées avec pédantisme en vue de réfutations des paradoxes de Zénon*[6] ». En résumé, pour les grecs, les grandeurs sont continues puisque divisibles à l'infini.

Les problèmes soulevés par l'infini, mis au jour par ces paradoxes, sont ensuite évités par les mathématiciens européens pendant 2000 ans.

Mais au XVIIe siècle, les besoins en mathématiques liés au développement de l'étude du mouvement continu sont pressants. Sans s'appesantir sur les problèmes théoriques soulevés par leurs nouvelles théories, Newton et Leibniz inventent le calcul différentiel et intégral et dotent les scientifiques de nouveaux outils pour traiter le mouvement continu. La définition formelle de la continuité d'une fonction sera énoncée par Cauchy.

[6] Voir infra pour une analyse des paradoxes de Zénon.

Parallèlement, les nombres qui, dans la Grèce antique, sont les nombres entiers et relèvent de collections discrètes, s'étendent aux rationnels et aux irrationnels. Cependant il n'est nullement question d'ensemble continu de nombres jusqu'à la fin du XIXe siècle et la construction de R.

Jusque-là, les mathématiciens ne tentent pas de définir le continu ; il est associé aux grandeurs et à l'espace euclidien, de façon « intuitive ». Descartes établit le lien entre le continu des nombres et la droite graduée. Cette référence au continu de l'espace euclidien est cependant mise à mal lors du développement des géométries non euclidiennes, d'autant plus que des contre exemples à des théorèmes faux relevant de la continuité sont exhibés au XIXe siècle.

Cantor et d'autres mathématiciens s'attellent à la tâche de définir le continu de la droite réelle. Cantor tente ensuite de définir le continu non ordonné.

Le mot « *discre*t » dans le sens mathématique apparait quant à lui au XIVe siècle, associé à une quantité. Il n'a pas soulevé autant de questions philosophiques ou mathématiques que le « continu ».
On le trouve, dans la démarche de Leibniz, à l'origine du calcul différentiel : avant de penser ses infinitésimaux, il raisonna en termes de différences entre deux valeurs entières de la variable.
Cette discrétisation de grandeurs continues variables est à la base de la modélisation de nombreux phénomènes.
Le discret est dans les mathématiques d'aujourd'hui associé à des espaces topologiques.

Du dénombrement de quantités discrètes finies à la conception du continu de Cantor, nous suivrons le développement des conceptions et formalisations du discret et du continu, en deux temps : celui qui précède l'époque moderne avec une attention particulière concernant la Grèce antique, et celui de l'époque moderne en Europe.

1. Les mathématiques de l'antiquité, des indiens et des arabes

a) Les mathématiques de l'antiquité

En Mésopotamie et en Égypte, les mathématiques se développent essentiellement dans le but de résoudre des problèmes concrets. Les traces écrites qui nous sont parvenues montrent des tables de calcul ou des listes de problèmes traités dans des cas particuliers, sans tentative de généralisation ni de démonstration.

Ces civilisations sont déjà confrontées au problème d'exprimer des quantités dont on ne peut donner de valeur exacte en utilisant des nombres entiers : les irrationnels. π intervient dans des calculs de longueur de cercle et d'aire de disque. Il est approximé par 3 en Mésopotamie. Les égyptiens calculent l'aire d'un disque par la formule $(d \times 8/9)^2$, ce qui revient à approximer π par $4\times (8/9)^2$, soit environ 3,16.

La méthode de Héron pour le calcul de valeurs approchées de racines carrées est déjà utilisée en Mésopotamie : une tablette énonce : *pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a et prendre la moyenne entre a et* $\frac{A}{a}$ *et recommencer le processus aussi loin que l'on veut*. Ce qui revient à chercher les termes d'une suite définie par la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right).$$

Cette méthode se retrouvera sous différentes formes dans la Grèce antique et dans les mathématiques arabes.
Les babyloniens et les égyptiens calculent des mesures de grandeurs. S'ils n'en ont pas de valeur exacte, ils utilisent une valeur approchée : ils approximent certains nombres de l'ensemble continu $\mathbb{R}$ par des entiers ou des rapports d'entiers.

En Grèce, dans la période classique (environ – 600 à – 300), les calculs concrets relèvent de la logistique et sont confiés aux esclaves.
Les hommes libres ont ainsi tout loisir de réfléchir à la nature du monde…

Pythagore (-580, -495) tente de l'expliquer par des principes simples : la monade est indivisible, elle constitue toute chose, en nombre fini. Ainsi, les sous-ensembles finis de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels suffiraient à décrire le monde. Tout rapport de grandeurs serait un rapport de nombres entiers et donc une relation entre collections discrètes. L'étude des nombres entiers revêt une importance philosophique et forme ce que les grecs nomment l'arithmétique.

i. Le point chez les grecs

Selon l'école pythagoricienne, le point est un indivisible et tout segment serait fait d'un nombre fini de points.
Mais qu'est-ce qu'un point, a-t-il une étendue ? Si oui ont-ils tous la même ?

Aristote (-384, -322), écrit que « *un point n'est pas une grandeur* ». Par là même, le point n'existerait pas.
En effet, quand bien même le point existerait et, n'étant pas une grandeur, serait sans étendue, il était certainement difficile à l'époque de concevoir qu'on puisse en assembler pour former une grandeur étendue, qu'une somme d'éléments sans étendue puisse en avoir et constituer un continu. Aristote ne pensait donc pas le continu comme nous le faisons de nos jours, comme un ensemble d'éléments de mesure nulle.

Un peu plus tard, Euclide (environ -300) donne une définition du point dans son *Livre I* des *Éléments* : « un point est ce qui n'a aucune partie ». Il s'agit de l'idée qu'un point est insécable.

L'hypothèse que tout rapport de grandeurs est un rapport d'entiers mène, par application du théorème de Pythagore dans le carré, à l'existence d'un rapport (d'entiers) dont le carré vaut 2. Ce qui est impossible. Le dénombrable discret ne pourrait rendre compte de toutes les grandeurs. D'où la crise de l'école pythagoricienne dite « crise des irrationnels ».

ii. Les irrationnels du temps des grecs

Trois démonstrations de l'irrationalité de √2 datent de l'époque de la Grèce antique.
La troisième (dans le temps) est décrite par Aristote. Elle est purement arithmétique et utilise un raisonnement par l'absurde en partant de l'hypothèse que √2 est le rapport de deux entiers qui ne sont pas tous les deux pairs. Elle ne fournit donc pas d'approximation de √2.

Les deux autres recourent à l'infini.

La méthode d'antiphérèse est décrite dans le *Livre X* des *Éléments* d'Euclide, écrit par Eudoxe (-408, -350). Comme l'étymologie de son nom l'indique, « soustraire alternativement », elle procède par soustractions, et, dans ce cas, par soustraction de segments dans un carré. La recherche du rapport de la diagonale du carré et de son côté se ramène à la même recherche dans un carré plus petit. Le processus fournit une suite infinie de proportions. Comme il ne se termine pas, on en conclut que la diagonale et le côté du carré sont incommensurables. En termes contemporains, √2 est donc irrationnel. Cette démonstration, géométrique, ne fournit pas d'approximation de √2.

L'antiphérèse avait été utilisée avant Eudoxe d'après certains auteurs. Elle aurait pu servir à définir le rapport de deux grandeurs a et b par la suite des quotients entiers partiels q_0, q_1… définis par $a = bq_0 + r_0$ avec $r_0 < b$; $b = r_0q_1 + r_1$ avec $r_1 < r_0$ etc. Il s'agit d'un procédé de même nature que celui de la recherche du PGCD de deux entiers décrite dans le *Livre VII* des *Éléments*, connu aujourd'hui sous le nom d' « algorithme d'Euclide ».
En fait, cette méthode d'antiphérèse revient à effectuer un développement en fraction continue de $\frac{a}{b}$.
Pour des grandeurs commensurables, au bout d'un nombre fini d'opérations, le quotient est nul. Sinon, le processus est infini.
Cette méthode fournit de surcroît un moyen de comparer les rapports, et de les approximer. Néanmoins, elle n'est pas utilisée dans *les Éléments*.

Les deux méthodes d'antiphérèse décrites ci-dessus montrent la recherche d'une grandeur commune à deux autres. Comme le processus est infini dans le cas de grandeurs incommensurables, tout en générant des grandeurs de plus en plus petites, le fait qu'il ne se termine pas montre qu'on ne peut trouver de grandeur suffisamment petite qui divise les deux autres.

On ne peut donc discrétiser les grandeurs par le biais d'une « grandeur unité » commune. Ce processus touche à l'infiniment grand dénombrable (le nombre d'itérations) et l'infiniment petit (les grandeurs générées). Les grandeurs, simultanément, échappent au discret et obligent les mathématiciens à considérer l'infini…

La démonstration d'Aristote évite le recours à l'infini, ce qui présente un avantage certain à cette époque confrontée aux paradoxes liés à l'infini.

iii. L'infini en Grèce antique

Les paradoxes de Zénon (-490, -428) opposent deux conceptions de l'espace et du temps, l'une discrète, l'autre continue.

La lecture de cette opposition par J. Dhombres est la suivante : l'espace et le temps sont-ils constitués d'un nombre fini ou d'un nombre infini d'éléments insécables ? En effet, une façon de se sortir de la crise des irrationnels est de supposer que le segment est constitué d'un nombre infini de points. Le discret correspondrait à un nombre fini de points et le continu à un nombre infini.
Notons que l'infiniment grand pour les grecs est du type « il est toujours possible de faire un pas de plus ». C'est un infini dénombrable. On le rencontre déjà dans un certain nombre de procédés, comme l'antiphérèse présentée ci-dessus. Le continu des grecs que décrit J. Dhombres est donc un infini discret.

E. Cousquer, quant à elle, décrit dans les paradoxes de Zénon l'opposition des conceptions d'espace et de temps discret et continu suivants : sont-ils constitués d'éléments insécables ou bien divisibles à l'infini ? Il s'agit de l'opposition d'une vision discrète atomiste (étymologiquement, atome signifie « qui ne peut

être divisé »), à une vision continue, dans le sens de divisibilité à l'infini. La vision atomiste de la matière est par la suite défendue par Démocrite (-460, -370) élève de Zénon.

Tentons de comparer les réponses que ces deux mathématiciens et historiens des mathématiques ont apportées dans leurs ouvrages aux questions posées par quatre paradoxes de Zénon.

a) Le paradoxe de la dichotomie

Il s'agit du paradoxe suivant : pour qu'un objet se meuve d'un endroit à un autre, il faut qu'il parcoure d'abord la moitié de la distance. Mais pour qu'il fasse la moitié du trajet, il faut qu'il fasse la moitié de cette moitié de trajet, et ainsi de suite à l'infini. L'objet ne peut donc atteindre le terme de son trajet.

D'après J. Dhombres, le paradoxe s'énonce ainsi : « pour aller d'un point à un autre, il faut d'abord arriver au point milieu et ainsi de suite à l'infini. Donc en un temps fini parcourir un nombre de points infini, d'où l'impossibilité. »
Cet énoncé du paradoxe se situe dans l'hypothèse où les segments seraient constitués d'un nombre infini de points (point de vue continuiste selon J. Dhombres).

J. Dhombres explique la réfutation par Aristote de ce paradoxe.
D'une part, Aristote part du principe que les grandeurs sont continues et il énonce : « *or j'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles* ». Il en déduit la continuité du temps par une argumentation du type de celle du paradoxe de Zénon concernant la dichotomie.
Le continu n'est donc pas une somme d'indivisibles, en particulier les lignes ne peuvent être formées de points. Il le démontre par le fait qu'un point, un indivisible, n'a pas d'extrémités, car ce ne pourrait être que lui-même et une extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité. Le cercle vicieux de son raisonnement est qu'Aristote considère qu'un continu ne peut être décomposé qu'en éléments continus de surcroit, selon la terminologie actuelle, de mesure non nulle.

D'après E. Cousquer, le paradoxe de dichotomie s'énonce comme suit : « Le mouvement de A à B est impossible puisque pour arriver à B il faut arriver au milieu C de AB. Pour arriver à C, il faut d'abord parvenir au milieu D de AC etc. »
Ce paradoxe viserait une conception de l'espace et du temps indéfiniment divisibles (point de vue continuiste selon E. Cousquer).
D'après elle, Aristote réfutera ce paradoxe en affirmant qu'il y a deux façons d'être infini : en étendue et en divisibilité. La continuité du temps est déduite de celle de la longueur. Il est donc possible de parcourir AB, le temps étant divisible de la même façon que la longueur.
Pour Aristote, l'hypothèse continuiste dans le sens de divisibilité à l'infini n'est donc pas remise en cause par ce paradoxe.

D'autres auteurs voient dans le paradoxe de la dichotomie le fait qu'il ne peut y avoir de mouvement. Plus exactement, le mouvement ne pourrait commencer.

b) Le paradoxe d'Achille et la tortue

Dans ce paradoxe bien connu, Achille essaie de rattraper la tortue qui est partie avant lui. Il est plus rapide qu'elle, mais pour la rattraper, il doit arriver à l'endroit où elle était lorsqu'il est parti et entre temps, la tortue a avancé. Ainsi, la tortue aura donc toujours de l'avance sur Achille.

J. Dhombres énonce le paradoxe comme suit : « Achille ne rattrapera jamais la tortue puisqu'il doit passer par tous les points parcourus par la tortue donc parcourir le même nombre de points qu'elle. Il ne peut la rattraper si parcourir un point prend une unité de temps pour la tortue comme pour Achille. »

Les deux hypothèses - la longueur est constituée d'un nombre infini ou fini de points - mènent toutes deux à une contradiction, du moins en étendant à l'infini les résultats du fini.
J. Dhombres explique la réfutation par Aristote des paradoxes de dichotomie et d'Achille par un raisonnement par l'absurde : s'il fallait un temps infini T pour parcourir une grandeur rectiligne AB à vitesse constante, on pourrait considérer une partie finie δ de ce temps. Soit alors CD la portion rectiligne parcourue dans ce temps. D'après l'axiome d'Archimède du *Livre V*, un multiple de CD serait supérieur à AB et donc un multiple de δ serait supérieur à T.
J. Dhombres, dans son analyse du paradoxe de dichotomie comme de celui-ci, fait état qu'un point se « parcourt ». Selon lui, Zénon aurait-il donc pensé le point comme ayant une étendue ?

D'après E. Cousquer, ce paradoxe s'énonce comme suit : « Achille ne rattrapera jamais la tortue car lorsqu'il arrive à l'endroit où il était précédemment, la tortue a avancé. Achille doit passer par tous les points où est passé la tortue ; il ne peut la rattraper si passer d'un point à un autre prend une unité de temps. »
Ce paradoxe est d'après elle dirigé contre les tenants de segments et de temps indéfiniment divisibles (point de vue continuiste).
Dans cet énoncé, deux arguments se superposent : la première phrase considère les points où se trouve la tortue à chaque « étape » et le fait que la tortue soit devant Achille à chacun de ces points. La deuxième considère l'espace qu'il y aurait entre deux points consécutifs.

D'autres auteurs considèrent que ce paradoxe suppose l'existence du mouvement.
Mais, comme dans le cas de la dichotomie, l'hypothèse de continuité des longueurs dans le sens de divisibilité à l'infini ne peut rendre compte du mouvement.

c) Le paradoxe de la flèche :
Selon ce paradoxe, une flèche se meut. Elle est sans cesse à un certain endroit, elle est donc immobile.

J. Dhombres, l'énonce en termes de points : « En chaque point de sa trajectoire, la flèche est nécessairement au repos puisqu'elle est en ce point. Donc la flèche ne se meut pas. »
Que la longueur soit composée d'un nombre fini ou infini de points, la flèche ne peut se mouvoir.

D'après E. Cousquer, il s'énonce comme suit : « si le temps est fait d'instants, à chaque instant la flèche est en un point donc au repos. Le mouvement est donc impossible. »
Ce paradoxe est d'après elle dirigé contre les tenants de segments et de temps constitués d'intervalles indivisibles.

On peut remarquer que l'énoncé d'E. Cousquer part de l'hypothèse d'un temps fait d'instants insécables (vision atomiste donc discrète du temps) pour arriver à ce qu'un segment serait fait de points insécables (vision atomiste donc discrète des longueurs), et rejoint alors l'énoncé en termes de points de J. Dhombres.
D'après celui-ci, Aristote réfute le paradoxe de la flèche par le fait que l'instant est indivisible et qu'aucun mouvement ne peut avoir lieu dans l'instant. Cela voudrait-il dire que selon Aristote, le temps, grandeur continue selon lui, n'est pas une somme d'instants, de même que la longueur, grandeur continue, n'est pas une somme de points ?

d) Le paradoxe des rangées mobiles :
Les énoncés de J. Dhombres et E. Cousquer sont assez semblables. Reprenons celui de cette dernière : « on suppose trois rangées de points A, B et C. La rangée A est fixe, les rangées B et C bougent

d'une unité en sens contraire pendant une unité de temps indivisible. Alors le déplacement relatif de B par rapport à C est de deux unités. On peut donc repérer un temps inférieur pendant lequel le déplacement relatif est d'une unité, ce qui s'oppose à l'hypothèse d'un instant indivisible ».
Zénon en aurait conclu : « *la moitié est égale au double* ».

Ce paradoxe part du principe que le temps est divisible par une unité insécable (un instant ?). Que le temps soit constitué d'un nombre d'instants fini ou un d'un nombre d'instants infini, l'énoncé est paradoxal. Celui-ci vise donc les points de vue continuiste et finitiste (discret) selon J. Dhombres. Du point de vue d'E. Cousquer, il vise le point de vue atomiste, discret, du temps.

L'existence d'un moment où le déplacement entre les deux segments mobiles est « simple » est garantie par le fait que ce moment correspond au déplacement entre un segment mobile et le fixe. L'hypothèse que tout segment est divisible en deux segments de même longueur, point de vue continuiste dans le sens de divisibilité à l'infini concernant les longueurs, n'est pas nécessaire à l'énoncé du paradoxe. Celui-ci part donc d'une thèse d'insécabilité du temps voire des longueurs.

Les paradoxes de Zénon peuvent être interprétés de différentes façons, selon la définition des aspects discret ou continu des grandeurs : fini vs infini ou insécable vs sécable.
Les grecs n'avaient pas les moyens théoriques de répondre aux questions soulevées par Zénon. Les mathématiques mettront 2000 ans à les développer, en deux vagues selon J. Dhombres :

- Celle du calcul infinitésimal : il permet de formaliser que la somme infinie d'intervalles de longueur ou de temps finis puisse être finie, chose inconcevable à l'époque de Zénon. Ses paradoxes n'invalident alors plus la thèse de grandeurs continues dans le sens de divisibilité à l'infini
- Celle de la définition d'un ensemble infini dans la théorie des ensembles, et le fait qu'il puisse être mis en bijection avec un sous ensemble propre. En conséquence, l'infini ne peut être manipulé comme un nombre (par exemple, $\frac{\infty}{2} = \infty$ et $\infty + 1 = \infty$).

A ces deux vagues, nous ajouterons celle de la conception du continu de la droite réelle, qui permet de concevoir que des grandeurs continues soient constituées d'une infinité d'éléments insécables – la durée fait d'instants, la longueur faite de points.

Antiphon, à la même époque que Zénon, énonce le postulat : « en doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et celle du polygone ». L'énoncé d'Antiphon fait état d'un infini réalisé, un infini actuel.
Ce postulat a été critiqué par les tenants des grandeurs infiniment divisibles : il serait toujours possible de diviser la différence entre l'aire du polygone et celle du cercle, qui ne pourraient donc être égales.

En réponse à ces critiques, Eudoxe énonce une proposition dans le *livre X* qu'il ne démontre pas : « si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié, et si l'on répète continuellement le procédé, alors il restera une grandeur inférieure à n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature. » Cette proposition reconnait la divisibilité infinie des grandeurs, donc que les grandeurs sont continues dans le sens de cette époque. Elle est proche de la définition de la limite élaborée au XIXe siècle. Elle est à la base de la méthode d'exhaustion (ainsi nommée par Grégoire de Saint Vincent au XVIIe siècle, dans le sens de « méthode par épuisement ») exposée dans le *livre XII.* La proposition permet en effet de montrer qu'en partant d'un carré inscrit dans un cercle, en doublant de façon itérative le nombre de ses côtés, on obtient un polygone dont l'aire a une différence avec celle du cercle aussi petite que toute grandeur prédéfinie.

Ceci permet, par un double raisonnement par l'absurde, caractéristique de la méthode par exhaustion, de montrer que le rapport de l'aire de deux disques est égal au rapport des carrés des diamètres.
Aucun usage de l'infini (grand ou petit) n'est donc fait, autre point commun avec la notion de limite de Cauchy et Weierstrass.
Bien qu'il faudra attendre Archimède pour en faire usage, par ce procédé, l'aire du disque peut être approchée d'aussi près que l'on veut par celle de polygones réguliers. Il s'agit une forme d'approche du continu par du discret. En effet, si un point décrit le cercle de façon continue (au sens actuel), les pentes des tangentes en ce point varient continument (toujours au sens actuel). Le cercle présente donc un aspect continu que ne présente pas le polygone qui a un nombre fini donc discret de tangentes.

Aristote considère qu'il ne peut y avoir d'infini sensible, ou bien « *il y aurait quelque chose plus grand que le ciel* ».
En mathématiques, pour ce qui est des grandeurs, il distingue l'infini par division qu'il accepte, celui qui caractérise selon lui la continuité, et l'infini par addition (ou composition) qu'il réfute : sinon, *« il serait possible de surpasser toute la longueur* ». Pour ce qui est des nombres, l'unité étant indivisible, l'infiniment petit n'est pas envisagé. Par contre, on peut toujours dépasser un nombre aussi grand qu'il soit. C'est un infini dénombrable, discret.
Dans tous les cas, il nie l'infini réalisé, abouti (infini actuel). Mais devant les problèmes liés à la négation de l'existence de l'infini, il lui confère une existence en puissance (infini potentiel) : l'infini n'est jamais achevé : « *limité, certes, mais cela sans cesse* ».

Euclide, dans ses *Éléments*, démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers. Son raisonnement est le suivant : il considère une suite finie de tous les nombres premiers jusqu'à une valeur quelconque puis leur produit P augmenté de 1. P+1 n'est divisible par aucun des nombres premiers de la suite. Alors soit il est premier, soit il admet un diviseur premier supérieur à tous les nombres de la suite. Ainsi, on peut toujours trouver un nombre premier de plus, les nombres premiers sont en quantité plus importante que tout nombre fini. Il ne s'agit pas d'une démonstration par l'absurde d'après certains auteurs : le raisonnement d'Euclide aboutit à un infini potentiel compatible avec la doctrine d'Aristote.

Archimède (-287, -212) opère sur des décompositions infinies de figures afin d'en calculer l'aire ou le volume. Il fait usage de la méthode par exhaustion ; un double raisonnement par l'absurde permet de conclure concernant la grandeur calculée. Il n'utilise ni passage à la limite, ni notion d'infini. Cette méthode règnera sur les calculs d'aires et de volumes jusqu'au développement du calcul infinitésimal.

Dès lors, les paradoxes de Zénon génèrent une grande méfiance des mathématiciens et philosophes vis-à-vis de l'infini ; ceux-ci éviteront les références à l'infini pendant tout un millénaire. Puis quelques centaines d'années seront encore nécessaires pour éclaircir cette notion. Cet évitement aura pour conséquence de retarder l'étude du mouvement continu de laquelle émargera le calcul infinitésimal.

iv. Les nombres, les grandeurs chez les grecs

Eudoxe contourne les difficultés liées aux irrationnels et à l'infini. Il développe une théorie des rapports de grandeurs continues qui n'utilise pas l'infini, ni d'ailleurs l'arithmétique ou la géométrie. C'est l'objet du *Livre V* des *Éléments* d'Euclide.
Sa théorie est équivalente aux coupures de Dedekind d'après E. Cousquer. D'après J. Dhombres, il y construit les sous corps de $\mathbb{R}$ mais il y manque la propriété de maximalité nécessaire à la construction du continu des nombres réels. Il n'y définit pas d'addition de deux rapports et la multiplication y figure rarement : l'aspect opératoire des rapports n'est pas développé.
La définition de nombre qui figure dans les *Éléments* d'Euclide, *livre VII*, est de l'ordre de la quantité mesurée par l'unité et correspond au nombre entier supérieur ou égal à 2. Le nombre appartient à un domaine dénombrable discret.

Le *livre X* a pour objet principal la classification des grandeurs incommensurables géométriques continues : segments et aires.

Pendant la période classique, les grecs considèrent que les nombres sont exclusivement les entiers. En conséquence, π et les racines carrées ne sont pas des nombres mais des rapports de grandeurs géométriques. Les *Éléments* d'Euclide ne comportent pas d'approximations d'irrationnels.
Par exemple, la méthode d'exhaustion, exposée dans le *livre XII*, permettait un calcul par défaut du nombre π, ce qu'Euclide a écarté, mais qu'Archimède a fait.

Pendant la période alexandrine (-300, 300), arithmétique et algèbre se développent dans un style proche de la tradition des ouvrages babyloniens ou égyptiens. Les fractions sont alors utilisées comme des nombres.
Archimède donne des encadrements plus précis de π et d'autres irrationnels. Héron définit une suite donnant des approximations de √2 sous forme de fractions irréductibles. Théon de Smyrne définit une suite d'approximations de π alternativement par excès et par défaut. Ils fournissent des approximations de √2 mais pas de preuve de son irrationalité.
Diophante (environ 210, 290), écrit *Arithmetica*. C'est un recueil de problèmes séparés, dans la lignée des traditions babylonienne et égyptienne. Les problèmes numériques et algébriques se dégagent de considérations géométriques. En particulier, les fractions sont utilisées comme des nombres.
Les nombres ne relèvent plus exclusivement du discret : ils incluent, de par l'usage qui en est fait, les rationnels, qui fournissent des approximations d'irrationnels. En langage contemporain, on dirait que les éléments de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ permettent d'approcher tout nombre réel. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est opérationnelle.

Les grecs de l'époque classique ont *de facto* séparé les nombres qui pour eux sont les nombres entiers, qui forment un ensemble discret, étudiés dans ce qu'ils dénomment l'arithmétique, des grandeurs, qui sont continues[7], dont l'étude inclut la géométrie, et sur lesquelles ils se permettent d'opérer des processus infinis. L'impact de ces pratiques influera les mathématiques européennes pendant des siècles.

b) Les mathématiques indiennes et arabes

Alors qu'en Europe les mathématiques régressent en empruntant le système d'écriture et le calcul par abaques des mathématiques romaines, elles se développent en Inde et dans les pays arabo-musulmans.

Les mathématiques indiennes sont très fécondes. Les indiens reprennent les écrits des grecs. Ils n'innovent pas en géométrie mais apportent des éléments techniquement importants en arithmétique et en algèbre. Les irrationnels sont additionnés et multipliés, sans aucun support théorique. Les nombres négatifs sont utilisés, ainsi que le zéro.
Brahmagupta, au VIe siècle, fournit des solutions d'équations du 3e degré. Pour lui, le zéro et les irrationnels sont des nombres.
Ainsi, le domaine des nombres s'élargit, de par leurs propriétés opérationnelles, vers ce que nous nommons aujourd'hui le continu des nombres réels.

Bhaskara au XIIe siècle note, avec le langage mathématique d'aujourd'hui, que $\frac{a}{0} = +\infty$ et $+\infty + a = +\infty$ $(a > 0)$. Il écrit : « En cette quantité, qui consiste en une fraction avec le zéro pour diviseur, il n'y a aucun changement, quoiqu'on ajoute ou l'on retranche ; de même qu'aucun changement ne se produit en Dieu, l'infini est immuable, même dans les périodes de création ou de destruction des mondes et quoiqu'à ces périodes un grand nombre de choses se dissolvent ou émergent ».

[7] Dans le sens de divisibilité à l'infini.

Vers 1500 après Jésus Christ, sans qu'il n'y ait de théorisation, quelques séries convergentes sont utilisées en Inde.
Les mathématiciens indiens ne se méfient pas de l'infini comme les grecs. Ils l'utilisent et le domestiquent quelque peu, dans le domaine numérique. La référence au continu est cependant absente.

Les savants arabes étudient les mathématiques grecques et indiennes. Ils développent des théories et des méthodes d'approximations.
Les théories des *Éléments* d'Euclide que les arabes commentent le plus sont celles des parallèles du *livre I*, des proportions du *livre V* et des irrationnels du *livre X*.
Ils montrent que la théorie des quantités irrationnelles du *livre X* peut être considérée comme une théorie arithmétique et que les transformations qui y sont faites peuvent être comprises sans recours à la géométrie. Les quantités irrationnelles des grecs acquièrent de ce fait le statut de nombres irrationnels.
Ils reprennent aussi la théorie des proportions du *livre V*, la critiquent en considérant qu'elle ne donne pas la véritable nature des proportions, qui est la mesure d'un rapport. Ils reprennent la définition qui repose sur la suite des quotients obtenus par la méthode d'antiphérèse : deux rapports sont dits égaux s'ils définissent la même suite de quotients partiels. La comparaison est elle aussi définie à l'aide des quotients partiels. Al Hayyam en 1077 a même le souci de montrer l'équivalence de sa théorie avec celle du *Livre V* d'Euclide. L'infini n'est pas évité, il est utilisé à des fins théoriques.
Al Tusi au XIIIe siècle énonce : que a et b soient des grandeurs commensurables ou non, $\frac{a}{b} = \frac{d}{1}$, où d est un nombre.
Le concept de nombre est ainsi élargi au continu des réels positifs contemporain. Cependant, le continu des nombres n'est pas un objet d'étude.

La notation décimale inventée par les indiens pour les entiers est étendue aux autres nombres par Al Kashi aux environs de 1400.

2. La période moderne en Europe

a) Le réveil de l'Europe

Du Ve au XIIe siècle, dans la partie de l'Europe qui était dominée par les romains, les mathématiques évoluent peu : les connaissances mises en pratique sont celles des romains, moins évoluées que celles développées par les grecs.
Les notations sont inadaptées au calcul écrit ; les calculs se font sur des abaques.
A partir du XIIe siècle, les croisades et les voyages de savants dans les centres intellectuels arabes provoquent une renaissance des textes grecs et arabes qui sont traduits mot pour mot. Néanmoins l'église impose de façon autoritaire sa vision du monde via les textes sacrés et ceux d'Aristote, qui servent sa vision géocentrique du monde, pendant encore quatre siècles.
Cependant, l'étude des nombres qui formeront le continu des réels progresse : Léonard de Pise montre au XIIIe siècle l'existence d'irrationnels non classés dans le *livre X* des *Éléments*.
Le mouvement continu, dont l'étude est délaissée depuis les paradoxes de Zénon, connait un regain d'intérêt : Oresme introduit au XIVe siècle la représentation graphique du mouvement avec un axe de temps horizontal (un précurseur de la droite des réels ?) et la vitesse représentée par des segments verticaux.
Les mathématiques sont reconnues en tant que moyen d'appréhender les phénomènes physiques qualitativement, loin des discours philosophiques.

Au XVIe siècle jusqu'à la moitié du XVIIe siècle, les mathématiques en Europe se développent sous l'impulsion des besoins de la mécanique et de l'étude du mouvement continu.
Les mathématiciens s'intéressent à nouveau aux problèmes liés à l'infini :
Stevin (1548, 1620) montre l'existence d'une infinité de sortes d'irrationnels.
Grégoire de Saint Vincent (1584, 1667) réfute les paradoxes de Zénon par la convergence des suites géométriques : une somme infinie de grandeurs continues non nulles peut être finie.
Fermat (1601, 1665) résout des problèmes d'extrema et calcule la tangente à une courbe continue par une méthode qui s'apparente au passage à la limite : il parle de différences qui « s'évanouissent ».
Kepler (1571, 1630) abandonne la méthode d'exhaustion d'Archimède pour un passage à la limite.
Son élève Cavalieri (1598, 1647) n'accepte pas la simplification de Kepler, mais définit une surface comme formée de segments de droites, un volume comme formé de surfaces planes. Ce sont les *indivisibles* qui « découpent » le continu en parties qui ne sont pas des infiniment petits, et que Cavalieri ne définit nulle part. Il ne s'agit pas d'une discrétisation du continu puisque le nombre d'indivisibles qui découpent la grandeur n'est pas fini ou dénombrable.
Son point de vue est imbriqué avec le point de vue géométrique et ne permet pas de déterminer des extrema, des tangentes et normales, des vitesses et accélérations.
Au même moment, Roberval développe lui aussi une méthode des indivisibles. Pour ce dernier, il s'agit de sommation infinie, l'idée est donc plus proche d'une discrétisation du continu que celle de Cavalieri. La méthode de Roberval est un précurseur du calcul intégral.
La méthode des indivisibles est rapide et puissante. Elle a cependant l'inconvénient d'aboutir à des résultats faux dans certains cas et de ne pas avoir de fondement théorique.

Ainsi, pendant cette période, les mathématiciens commencent à manipuler des sommes infinies de grandeurs continues et des différences ou des « portions » de grandeurs continues relevant de l'infiniment petit.

Les mathématiciens s'habituent aussi à représenter et manipuler les irrationnels comme des nombres (par exemple Stevin et les italiens Cardan, Tartaglia, Bombelli, Ferrari). D'une part, Stevin introduit la représentation décimale en y incluant celle des irrationnels. D'autre part, il insiste sur le fait que les irrationnels possèdent les mêmes propriétés opératoires que les nombres rationnels. Ils sont utilisés sans fondement autre que l'évidence des calculs.
Certains mathématiciens les utilisent avec moult scrupules. Par exemple l'allemand Stiffel qualifie en 1544 les irrationnels de nombres, « *conduits et obligés par les résultats qui proviennent de leur utilisation, résultats que nous percevons comme réels, certains et constants*. » Mais par ailleurs, la représentation décimale infinie et non périodique le dérange au point de dire que tout comme un nombre infini n'est pas un vrai nombre, un irrationnel n'est pas un vrai nombre, qu' « *il reste caché dans une nuée d'infini* ».
Du point de vue des approximations d'irrationnels, Viète (1540, 1603) approche π avec 10 décimales.
Cependant, Newton et Pascal ne les considèrent toujours qu'en lien avec la géométrie qui reste la référence au continu.

La découverte (ou plutôt redécouverte ?) des décimaux est essentiellement attribuée à Stevin dans « *La Disme* » (1585). Stevin est conscient que les décimaux ont un intérêt pratique, qu'ils ne représentent pas tous les nombres mais qu'on peut approcher tous les nombres de manière satisfaisante par des décimaux. En termes contemporains, il sait que l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
L'invention du logarithme par Neper (1550, 1617) et l'établissement de tables logarithmiques et trigonométriques généralisent l'utilisation des décimaux dans les calculs de valeurs approchées.

Stevin établit une correspondance biunivoque entre les nombres et les grandeurs. En conséquence, le nombre relève du continu, dans le sens des grecs, c'est à dire indéfiniment divisible.

Descartes (1596, 1650) est le premier à mettre en correspondance l'ensemble continu des nombres avec la droite graduée qui deviendra la droite réelle.

b) Le calcul différentiel et intégral, ou l'algébrisation des grandeurs continues

Grâce aux avancées des scientifiques de la renaissance, les textes de la Grèce antique ne font plus loi.
Le XVIIe siècle marque, avec le « *la nature est écrite en langage mathématiques* » de Galilée, l'explosion de la mécanique. Les mathématiciens vont de l'avant, sans se préoccuper de la rigueur de leurs démarches. La volonté de se doter des moyens de décrire le mouvement (continu) - vitesse et accélération – est source de progrès.

Leibniz (1646, 1716) est le premier à ne pas baser son œuvre mathématique sur la géométrie. Il identifie les raisons et les nombres. Le nombre est pour lui ce qui est susceptible d'être soumis à des opérations.
Il énonce son Principe de Continuité : « *La nature ne fait pas de saut* ». Ce principe peut se comprendre comme une forme de divisibilité à l'infini proche de la notion contemporaine d'ensemble dense en lui-même. Un autre aspect de continuité pour Leibniz est qu'en passant d'un nombre à un autre (dans le sens de l'ordre), on passe par toutes les valeurs intermédiaires. Cette vision du continu est plus proche de la complétude - en termes d'aujourd'hui - en ce qu'elle exprime que le continu n'a pas de trou.
Il traite l'empilage des nombres, autrement dit le continu des nombres réels d'aujourd'hui, par des séries convergentes, convergence démontrée via l'arithmétique et le calcul des infinis.
En particulier, π entre dans le champ numérique. En effet, Leibniz établit en 1674 que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

Deux hommes sont à l'origine de l'algèbre de l'infiniment petit et se déclarent chacun son créateur : Newton (1643, 1727) et Leibniz.

Leibniz part de la suite des carrés des entiers, construit la suite des premières différences et de celle des différences secondes qui sont constantes.
Par analogie avec l'arithmétique, pour les valeurs de la fonction $y \to y$, il note 1 les différences entre deux valeurs voisines, puis il préfère la notation dy à 1, il utilise ∫, première lettre de somme dans le style du XVIIe français, d'où $\int dy = y$.
Il pose $\int ydy = \frac{y^2}{2}$ en considérant le graphe de $y \to y$.
Il établit la formule d'intégration par parties $\int ydx + \int xdy = xy$, réalise que la différentiation et l'intégration (en son sens) sont des opérations inverses.
Leibniz procède jusque-là par analogie avec les différences portant sur les variables entières, donc discrètes.
Un tournant épistémologique se réalise lorsqu'il prend conscience que d*x* « *peut avoir avec x une raison plus petite que n'importe quelle quantité assignable* ». Sa démarche qui s'inspire jusque-là du discret s'inscrit dans le continu.
Il utilise des infiniment petits actuels, les infinitésimaux. L'ordre n'est alors plus archimédien. Pour ces deux raisons, le calcul différentiel et intégral de Leibniz va à l'encontre d'Aristote et du *livre V* des *Éléments*, dans lequel figure l'axiome d'Archimède.

Les infinitésimaux de Leibniz permettent le développement de nouveaux outils d'étude du mouvement continu. Mais ils sont critiqués.

C'est ainsi qu'Euler (1707, 1783) et Lagrange (1736, 1813) utilisent la formule établie par Taylor en 1715 sans référence à la géométrie ni aux infiniment petits. Euler ne questionne pas la nature du reste dans le développement en série ; Lagrange en fait parfois des majorations. Cauchy puis Weierstrass vont travailler à se débarrasser de ces quantités « *évanouissantes* » que sont les infinitésimaux.

c) Le retour de la rigueur

Les avancées de Cauchy (1789, 1857) sont un pas décisif vers l'exigence de rigueur.
Dans son cours à l'École Polytechnique, en 1821, il définit les notions de limite et de continuité d'une fonction, de fonction dérivée, telles que nous les connaissons aujourd'hui, aux notations en ε et δ près que Weierstrass introduira plus tard. Il n'utilise pas d'infiniment petits actuels[8]. Cependant, ses écrits montrent des hésitations de langage entre la notion de limite et l'utilisation de quantités infinitésimales. Il énonce et démontre le théorème des accroissements finis, établit la convergence des séries entières, définit la fonction exponentielle.

Sa référence au continu reste l'espace euclidien. Ceci n'est pas sans poser de problème : les géométries non euclidiennes se développent et remettent en cause les « évidences intuitives » qui proviennent de la géométrie euclidienne.
Par exemple, il énonce la réciproque du critère de Cauchy et décrète qu'il s'agit d'une évidence. Sa démonstration du théorème des valeurs intermédiaires n'en est pas une, puisqu'elle est basée sur une visualisation géométrique. Il introduit la limite supérieure sans en démontrer l'existence, énonce le théorème des suites croissantes majorées sans le démontrer.
En effet, il lui manque l'ensemble continu des nombres réels, construit sur des bases rigoureuses.

Il énonce un théorème faux concernant la continuité de fonctions de deux variables : si $x \longmapsto f(x,y)$ continue et $y \longmapsto f(x,y)$ est continue, alors $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ est continue.
Un autre théorème faux de Cauchy est le suivant : si (f_n) est une suite de fonctions continues en x_0 et si la série $\sum f_n(x_0)$ converge, alors la fonction $\sum f_n$ est continue en x_0. Abel puis Seidel remarquent que les séries de Fourier fournissent des contre exemples à ce théorème. Seidel et Stokes en 1847, puis Cauchy en 1853, élaborent la notion de convergence uniforme.
Ces énoncés faux sont des applications erronées du Principe de Continuité qui présuppose trop de régularités.

Les notions de grandeur continue et de nombre réel restent floues malgré la rigueur apportée par Cauchy et Abel en analyse.
Bolzano prend le parti de refuser les argumentations qui reposent sur des évidences géométriques et propose une nouvelle démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. Elle repose cependant sur la vérification par l'ensemble des nombres réels de l'axiome de la borne supérieure, ou, de façon équivalente, de celui des fermés emboités ou encore de celui du critère de Cauchy. Il manque à Bolzano le fondement théorique de l'ensemble des nombres réels. Dhombres en conclut que ce théorème « pose spécifiquement le problème de la nature de la variable ».

Darboux montre en 1875 que le théorème des valeurs intermédiaires ne caractérise pas les fonctions continues puisque, d'après le théorème des accroissements finis, toute fonction dérivée satisfait celui-ci.

Deux courants cohabitent alors : certains s'opposent à la considération des fonctions pathologiques et à la construction des nombres réels, comme Du Bois-Reymond, Lipschitz, Hermite, Poincaré…

[8] D'infinitésimaux.

D'autres exhibent des fonctions pathologiques et considèrent qu'une construction rigoureuse des nombres réels devient indispensable.

d) Les constructions des nombres réels

Dans les années 1870, plusieurs mathématiciens construisent les nombres réels comme corps continu de nombres, sans recours à la géométrie. Les concepts de l'analyse peuvent alors se fonder sur les seules opérations arithmétiques.

Dedekind, dans son ouvrage *la création des nombres* publié en 1872 et traduit en français par Sinaceur en 2008, affirme la portée didactique du recours à l'intuition géométrique dans l'enseignement des débuts du calcul différentiel. Il y expose qu'il tient cependant à baser celui-ci sur un fondement arithmétique pur. Pour cela, il construit l'ensemble des nombres réels par la méthode des coupures.
Il part du constat que la droite numérique est « infiniment plus riche en éléments ponctuels que le domaine des nombres rationnels en individus numériques »[9]. En s'inspirant du continu intuitif de la droite, il crée « de nouveaux nombres de telle sorte que le domaine des nombres acquière la même complétude, ou disons-le tout de suite la même continuité que la ligne droite »[10].
Pour cela, il définit une coupure sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ par une partition de $\mathbb{Q}$ en deux classes non vides C_1 et C_2telles que tout nombre de C_1 soit strictement supérieur à tout nombre de C_2. Il existe deux sortes de classes, celles telles qu'il existe un rationnel maximum de C_2 ou un rationnel minimum de C_1 et les autres. Pour montrer que la deuxième sorte de coupure existe, il prend comme exemple : $C_2 = \{x \in \mathbb{Q} \quad / x \leq 0 \; ou \; x > 0 \; et \; x^2 < 2 \}$ et $C_1 = \{x \in \mathbb{Q} \; / \; x \notin C_2\}$.
Puis il construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels comme réunion des rationnels et des coupures de deuxième sorte.
Il y définit une addition, une relation d'ordre et montre qu'il obtient un corps totalement ordonné.

Enfin, il montre qu'en renouvelant le procédé, on retrouve $\mathbb{R}$. Cela veut dire que si C_1 et C_2 sont deux ensembles non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est $\mathbb{R}$, et tels que tout x_1 de C_1 majore strictement tout x_2 de C_2, alors il existe un unique réel x qui majore les éléments de C_2 et minore les éléments de C_1. C'est cette propriété d'unicité, que certains auteurs nomment « inextensibilité » et d'autres « complétude », qui caractérise pour Dedekind le continu.
Ainsi que lui a fait remarquer Cantor, la propriété d'inextensibilité est vérifiée par l'ensemble des nombres entiers qui peut pourtant « *être considéré comme un prototype de la discontinuité* ». Dedekind lui répond que les domaines qu'il appelle continus sont à la fois totalement ordonnés, divisibles à l'infini et possèdent la propriété relative aux coupures qui est pour lui l' « *essence de la continuité* ». Il écrit cependant « *qu'il reste bien du travail pour s'émanciper de la notion d'ordre afin de définir le continu* ».

Le concept de coupure n'est pas inventé par Dedekind, il a été utilisé par Hamilton vers 1835. Par ailleurs, on pourrait énoncer la définition 6 du *livre V* des *Éléments* d'Euclide, qui définit l'égalité de deux raisons, en termes de coupures sur les rationnels strictement positifs de la manière suivante : deux raisons sont les mêmes si et seulement si elles déterminent la même coupure.

C'est donc la continuité, en termes d'inextensibilité, de maximalité, qui est la découverte de Dedekind. Elle permet de définir de façon claire les notions de borne supérieure et de limite supérieure, de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires et la réciproque du critère de Cauchy.
La limite d'une suite croissante et bornée (x_n) peut être définie comme la coupure (C_1, C_2) définie de la manière suivante :

[9] Dedekind (2008) page 69
[10] idem

C_1 ={$x \in \mathbb{R}$ /*pour tout n entier, il existe m entier*, $m > n$ *et* $x > x_m$} ;
$C_2 = \{x \in \mathbb{R} \ / x \notin C_1\}$.

Cantor construit les nombres réels en résolvant en 1872 le problème du critère de Cauchy. (Méray élabore et publie aussi en 1872 une construction similaire).
Il définit la notion de suite fondamentale par une suite (x_n) où $x_n \in \mathbb{Q}$ et, dans le langage d'aujourd'hui, (x_n) est de Cauchy. Il établit sur l'ensemble de ces suites fondamentales une addition, une multiplication, une relation d'ordre.
Étant données deux suites fondamentales, trois cas se présentent :

- Il existe un rationnel $\alpha > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ $y_n - x_n > \alpha$;
- Il existe un rationnel $\alpha > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ $x_n - y_n > \alpha$;
- Pour tout rationnel $\alpha > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ $|y_n - x_n| < \alpha$.

Dans le 1er cas, on dit que $(x_n) < (y_n)$; dans le 2e cas que $(x_n) > (y_n)$ et dans le 3e cas qu'elles sont équivalentes. Un nombre réel d'ordre 1 est une classe d'équivalence de suites fondamentales. $\mathbb{R}$ est défini comme l'ensemble des nombres réels d'ordre 1. Cantor montre que c'est un corps commutatif totalement ordonné. Il contient $\mathbb{Q}$, que Cantor nomme l'ensemble des nombres réels d'ordre 0.
On peut définir l'ensemble des nombres réels d'ordre 2 mais il ne se distingue pas de $\mathbb{R}$. Autrement dit, en langage moderne, $\mathbb{R}$ est complet, c'est-à-dire qu'une suite fondamentale de $\mathbb{R}$ converge vers un nombre réel.
Il établit le lien avec la droite de la géométrie par l'axiome suivant : à tout nombre réel correspond un point de la droite qui a ce nombre comme abscisse.

Cantor et Dedekind reconnaissent dès le départ l'équivalence de leurs constructions.

Weierstrass en 1863 avait déjà proposé une construction des nombres réels, basée sur des suites de nombres rationnels, mais qui ne fournissait pas le caractère inextensible ou complet des constructions de Dedekind et de Cantor. C'est l'aspect « sans trou » du continu qui est visé dans ces constructions. L'aspect « sans saut » est quant à lui déjà présent dans l'ensemble des rationnels sur lequel ces constructions reposent.

Selon Hourya Sinaceur (1991), l'axiome d'inextensibilité n'est pas simple. Certains mathématiciens lui préfèrent l'axiome dit « de Cantor », connu aussi sous le nom d'axiome des intervalles emboités, qui exprime plus clairement la continuité.

En fin de compte, les rationnels étant construits à partir des entiers, ces constructions de $\mathbb{R}$ reposent sur la construction des nombres entiers. C'est avec l'axiomatisation des entiers naturels par Peano en 1889 qu'elles seront achevées. Le continu des nombres réels construit par Dedekind et Cantor est construit sur le discret des nombres entiers.

Hilbert qualifie les méthodes de Cantor et de Dedekind de « génétiques » et leur trouve un intérêt pédagogique. Il préfère la méthode axiomatique qu'il développe en 1899.
Il introduit une famille de nombres, notés *x*, *y*,... de sorte que cette famille constitue :
(a) un corps commutatif pour les deux lois + et × .
(b) un corps totalement ordonné
(c) un groupe ordonné archimédien pour la loi +
(d) un système qu'il ne soit pas possible d'agrandir en lui rajoutant des éléments de manière à obtenir un système vérifiant encore (a), (b) et (c).

Les axiomes (c) et (d) sont dits axiomes de continuité. Le (d) est la forme axiomatisée de l'aspect maximal « sans trou » de $\mathbb{R}$.

L'avantage de la méthode de Hilbert est qu'elle ne fait pas intervenir l'infini puisqu'uniquement des chaînes logiques finies.
L'axiome (d) assure que, si un tel système existe, il est unique à un isomorphisme près. On peut donc appeler ensemble des nombres réels toute famille satisfaisant (a), (b), (c), (d).
L'existence d'une telle famille peut résulter des constructions précédentes de Cantor et Dedekind (ou d'autres constructions). Cependant, la démarche de Hilbert consiste à établir que les quatre axiomes (a), (b), (c), (d) ne sont pas contradictoires, ce qui assurerait, selon Hilbert, l'existence d'une famille d'objets satisfaisant les axiomes. Cependant il ne démontre pas la non contradiction de ses axiomes. En effet, cela reviendrait à prouver la non contradiction de la théorie des ensembles, ce qu'on ne peut faire par des chaînes logiques finies.

Finalement, si K est un corps totalement ordonné, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- K vérifie la propriété de la borne supérieure ;
- K vérifie le théorème de la limite monotone pour les suites ;
- K est archimédien et complet ;
- K est archimédien et vérifie le théorème des suites adjacentes ;
- K est archimédien et vérifie l'axiome des segments emboités de Cantor ;
- K est isomorphe à $\mathbb{R}$.

De plus, il n'est pas possible d'agrandir K en lui rajoutant des éléments de manière à obtenir un système qui soit encore un corps commutatif totalement ordonné archimédien. C'est le caractère maximal « sans trou » du continu $\mathbb{R}$.

Une fois la droite réelle construite, les points peuvent être isolés en tant qu'éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$. La définition du point nécessite donc une définition globale du continu $\mathbb{R}$. C'est la raison pour laquelle elle est critiquée par certains mathématiciens du XXe siècle qui la voient comme étant purement conceptuelle.

La propriété archimédienne des nombres réels standards fait qu'il n'existe pas d'infinitésimal non nul.
L'analyse non standard, développée au XXe siècle par Robinson, construit un ensemble de nombres réels non standards qui est totalement ordonné mais pas archimédien ni complètement réticulé. Il inclut $\mathbb{R}$ ainsi que des nombres infiniment grands et infiniment petits. Un infiniment petit est inférieur à tout nombre réel strictement positif. Les infinitésimaux de Leibniz connaissent une nouvelle vie au sein de cette théorie.

e) L'idée de continu dégagée de la notion d'ordre

Bolzano (1781, 1848) qui n'était pas satisfait de la notion de continuité de Leibniz, a défini des notions de voisinage et de point isolé assez proches des notions contemporaines, au moyen de conditions métriques.
Dedekind et Cantor, à leur tour, tâchent de caractériser le continu, en dehors du continu totalement ordonné, par des considérations topologiques.

Dedekind définit pour cela les notions topologiques contemporaines de voisinage et de point isolé. Cette dernière permet de définir un ensemble discret par le fait que tous ses points sont isolés.

Parallèlement, ces mathématiciens caractérisent les ensembles infinis :
Dedekind utilise ce que Bolzano avait utilisé comme propriété des ensembles infinis en tant que définition : le fait qu'ils puissent être mis en correspondance biunivoque avec une de leur partie propre.

À la suite, Cantor montre qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, puis entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres algébriques, mais qu'il ne peut exister une telle bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Cantor nie et rejette les infinitésimaux. Par contre, il analyse et hiérarchise l'infiniment grand. Il montre que le cardinal de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal d'un ensemble infini. Il le note « Aleph zéro », $\aleph_0$. Il note $\aleph_1$ le plus petit cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$ et fait l'hypothèse que le cardinal de $\mathbb{R}$, qu'il note c pour continuum, et aussi appelé « puissance du continu », est égal à $\aleph_1$. En d'autres termes, toute partie de $\mathbb{R}$ est soit au plus dénombrable, soit équipotente à $\mathbb{R}$. Cette conjecture est appelée « hypothèse du continu ». C'est le premier des 23 problèmes de Hilbert.

Dans sa quête de caractérisation du continu, Cantor découvre des espaces qui possèdent certaines propriétés caractéristiques du continu et qui ne le sont pourtant pas, dont son ensemble triadique.
Selon certains auteurs, Cantor aurait par conséquent caractérisé un ensemble continu dans un espace métrique par le fait qu'il soit parfait et bien enchainé.

Quant à lui, J. Dhombres explique que Cantor en arrive à la caractérisation dans un espace métrique d'un ensemble continu par le fait qu'il soit bien enchaîné et que la condition nécessaire et suffisante du critère de Cauchy soit vérifiée.
Cantor établit que les seuls sous-ensembles complets et bien enchaînés de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire continus dans le sens qu'il aurait donné à ce terme) sont $\mathbb{R}$ et les segments.
Puis il tâche de caractériser les sous-ensembles complets et bien enchaînés de $\mathbb{R}^2$.

Cantor s'aperçoit alors qu'il a besoin d'abandonner la recherche de la caractérisation du continu pour investiguer davantage la notion d'ensemble infini.
Il travaille à la question de l'hypothèse du continu tout le reste de sa vie.
Gödel montre en 1938 que cette hypothèse n'est pas réfutable dans la théorie des ensembles ZFC.
Puis Cohen prouve en 1963 qu'elle ne peut se déduire des axiomes de ZFC. Et donc que ce problème est indécidable dans la théorie ZFC.

Ces résultats montrent le caractère problématique de l'existence de l'infini continu. Les intuitionnistes refusent de penser l'infini actuel, même dénombrable. Ils proposent de concevoir le continu autrement que de manière ensembliste.

3. Conclusion de la partie I A

L'histoire du discret et du continu en mathématiques rencontre l'histoire de nombreux grands problèmes qu'ont posés mathématiciens et philosophes depuis 2500 ans. En effet, ces aspects sont présents dès l'émergence des mathématiques et sont liés aux questions : l'infini existe-t-il, s'il existait quel serait-il ? Quels objets recouvre la notion de nombre ? Quel statut donner aux irrationnels ? Qu'est-ce qu'un point ? Le temps et l'espace sont-ils continus ? Qu'est-ce qui caractérise le continu ? Nous en proposons une frise récapitulative en annexe 1.

L'objet de la partie suivante est, à la lumière de la science contemporaine, de : circonvenir les notions de discret et de continu, de définir autant que possible le discret et le continu du point de vue des mathématiques savantes, et de croiser les notions formalisées, partiellement ou pas, avec les intuitions que l'individu peut avoir de l'un comme de l'autre et les idées développées par quelques philosophes à ce sujet.

B. Qu'est-ce que le discret, qu'est-ce que le continu en mathématiques aujourd'hui ?

Du côté des mathématiques savantes, la topologie a permis, dans un passé relativement récent de l'histoire des sciences, de définir formellement ce que sont, dans le cas des espaces métriques, des espaces discrets et des espaces continus.
La notion de discret est apparue tard, au XIVe siècle. Nous verrons qu'il est relativement simple d'en avoir une idée intuitive ainsi que de la définir. Quant à elle, l'idée de continu fait son chemin depuis l'antiquité, non sans poser des questions coriaces aux mathématiciens et aux philosophes. En effet, le continu présente de nombreuses facettes qui diffèrent selon les aspects observés. Entre le discret et le continu, se trouve le dense, qui se définit en mathématiques d'une part dans les espaces métriques et d'autre part dans les espaces ordonnés.
Nous allons répertorier les différents aspects du dense et du continu que nous mettrons face à ceux du discret.
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ serviront à illustrer notre propos.

1. Du point de vue de l'étymologie et de l'intuition

LE DISCRET	**LE CONTINU**
Individus isolés	D'un seul tenant Pluralité d'expériences : temps, mouvement, tracé d'une ligne au crayon, corde **Les invariants du continu** sont - l'invariance par changement d'échelle. Plus formellement, les homothéties préservent la structure du continu - L'absence de sauts et de trous
Canonicité du comptage	Pas de continu canonique intuitif

Figure 1

Le mot « *discret* » vient du latin *discretus* qui signifie séparé, isolé.
Ainsi le discret consiste en des individus isolés et implique une idée de séparation.
Toute collection finie a donc un caractère discret.
L'être humain, dans l'action de comptage d'éléments d'une collection finie, dispose d'une expérience du discret.
Les ensembles infinis de nombres qui illustrent le plus naturellement le discret sont $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Ils sont prototypiques de l'infini dénombrable.

Étymologiquement, le mot « *continu* » vient du latin *continuus* qui désigne ce qui est d'un seul tenant.
Pour se représenter le continu, l'individu peut faire appel à une pluralité d'expériences :

- Celle du temps.
  Saint Augustin et Weyl décrivent tous deux l'intuition du temps en tant que flux continu. En effet, l'individu fait l'expérience d'un temps qui n'a jamais de lacune. Le temps de la physique représenté sur un axe orienté présuppose un temps continu.
  Cependant, sa mesure lui confère un aspect discret, quelle qu'en soit l'unité. De nos jours, l'individu peut le voir par le déplacement non continu d'aiguilles sur un cadran ou bien par un affichage digital.

- Celle du mouvement d'un objet qui ne saute pas.
  Par exemple le mouvement d'une voiture dont la trajectoire est sans « accident » est continu.

- Celle du tracé d'une ligne au crayon, sans le lever.
  C'est d'ailleurs l'idée retenue pour la « définition » d'une fonction continue au lycée dans les manuels correspondants au programme de Terminale S de 2012[11].

- Celle de l'aspect d'une corde d'un seul tenant - si on la considère d'un point de vue macroscopique et non à l'échelle des particules.

Contrairement au discret, il n'existe pas de continu canonique intuitif comme le comptage.

D'après Longo (1999), les invariants du continu sont :
- L'invariance par changement d'échelle - plus formellement, les homothéties conservent le continu ;
- L'absence de sauts ;
- L'absence de trous.

Nous reviendrons plus amplement sur ces deux derniers aspects.

2. En philosophie

LE DISCRET	**LE CONTINU**
Leibniz, Hegel : le discret est « l'éclatement »	Leibniz, Hegel : le continu est « la Permanence », « l'identité »
Leibniz : le discret a précédé le continu dans son élaboration du calcul infinitésimal	Leibniz et Thom : le continu précède ontologiquement le discret
Kant : le discret est le « je pense » comme principe logique	Kant : le temps et l'espace sont des substrats continus. Le continu est intuitif

Figure 2

Historiquement, le premier face à face du discret et du continu vient de Zénon d'Élée et de ses paradoxes. Ceux-ci visent aussi bien le point de vue atomiste (discret) que le point de vue continuiste. À cette époque, le continu est essentiellement compris dans le sens de la possibilité indéfinie de division. Tant pour un segment de droite que pour un intervalle de temps, le discret y est opposé au continu.
La solution mathématique des contradictions du paradoxe d'Achille et la tortue est apparue à la fin du XVIe siècle, lorsque Grégoire de Saint Vincent montre que la convergence des séries géométriques permet de les réfuter.

Selon Dhombres (1978), pour réfuter les arguments de Zénon, Aristote commence par établir la continuité des grandeurs dans son *livre V* « De la Physique ». Il décide de « dire ce qu'est être ensemble et d'être séparé, et ce qu'est être au contact, intermédiaire, consécutif, contigu, continu ».
Aristote explique que le consécutif est ce entre quoi « il n'y a aucun intermédiaire de même genre ». Ceci semble plutôt caractéristique du discret puisque c'est le contraire de l'aspect divisible à l'infini, sans saut. À l'époque d'Aristote, il est peut-être difficile de concevoir des grandeurs – ou des nombres - sans que chacun ait un suivant.

[11] Le programme de 2012 se garde d'en donner une définition.

Aristote poursuit : le contigu est ce qui, « étant consécutif, est en outre en contact ». Ce critère est proche de l'aspect sans trou. Et sont en contact « les choses dont les extrémités sont une seule chose ». Pour Dhombres, Aristote donne une définition sémantique du continu.
Dans son *livre VI*, Aristote écrit : « J'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles ». Il en déduit la continuité du temps par une argumentation du type de celle du paradoxe de Zénon concernant la dichotomie.
Au contraire, pour Aristote, l'instant est indivisible et aucun mouvement ne peut avoir lieu dans l'instant.

Pour Descartes, le nombre entier est une notion innée. Le nombre réel est la mesure de l'étendue, de la durée, au sens des proportions euclidiennes. L'image du nombre continu s'incarne dans la ligne géométrique. Descartes ne s'intéresse cependant pas à la notion de continuité.

Leibniz crée, simultanément avec Newton, une algèbre des infiniment petits.
On peut constater que dans son travail sur les infinitésimaux[12], Leibniz part de considérations sur les entiers, donc du discret pour aller vers le continu.
D'un point de vue philosophique, Leibniz décrit l'univers en s'appuyant sur les nombres, ce qui lui permet de définir une hiérarchie à laquelle il ajoute un Principe de Continuité : « Rien ne se fait tout d'un coup et c'est une de mes grandes maximes et des plus vérifiées, que la nature ne fait jamais de saut ».

Dans la philosophie de Hegel comme dans celle de Leibniz, le discret est l'éclatement alors que le continu est la Permanence, l'Identité.

Kant publie en 1781 sa « *Critique de la raison pure* ». Il essaye d'y établir l'existence d'une connaissance ayant un fondement a priori.
Il expose que la pensée opère avec des jugements analytiques, « *où le prédicat appartient au sujet* », par exemple *« tout corps est étendu* ». Il qualifie d'analytiques certains axiomes euclidiens, par exemple « *le tout est plus grand que sa partie* ».
Ou bien la pensée opère avec des jugements synthétiques, « *où le prédicat est en-dehors du concept* », par exemple *« tout corps est pesant* ». Les jugements synthétiques accroissent la connaissance. Ils peuvent être *a posteriori*, basés sur une intuition des faits - Hume les nomme *« matters of facts ».* Ou, nouveauté kantienne, ils peuvent être *a priori*, basés sur une intuition pure qui se compose du temps et de l'espace. Kant soutient ainsi que l'arithmétique fait appel au sens interne, le temps, alors que la géométrie fait appel au sens externe, l'espace. Le temps et l'espace sont des substrats continus. Le continu existe donc, son existence repose sur l'intuition pure.

Pour Kant, le discret est le *« je pense »* comme principe logique. Le formalisme logique et le structuralisme en sciences humaines se placent dans cette lignée.

3. Dans les modes de pensée

LE DISCRET	**LE CONTINU**
Comptage	Géométrique (mouvement continu des figures)
Algèbre	Analyse
Formalisme de la théorie des ensembles	$\mathbb{R}$ avec support géométrique puis formalisé

Figure 3

[12] Voir partie I A.

Les mathématiques humaines ont débuté avec le comptage de collections finies (donc discrètes). Une propriété des entiers strictement positifs est que tout entier (à part 1) admet un successeur et un prédécesseur.
Cette propriété est à la base de l'apprentissage des nombres entiers, de l'addition et de la soustraction sur les nombres entiers en début de scolarité.
Elle est essentielle dans de nombreux raisonnements mathématiques sur les entiers, dont le raisonnement par récurrence.

Puis, les hommes ont été amenés à utiliser les nombres rationnels et décimaux. De par leur écriture avec les nombres entiers, ils ont un caractère discret.
En particulier, les nombres décimaux comportant un nombre de décimales fixé a les mêmes propriétés de comptage que les entiers.

L'algébrisation des mathématiques y amène d'autres aspects discrets.
Étymologiquement, le mot algèbre vient de l'arabe et signifie « réduction d'une fracture ». L'idée de séparation est bien présente.
Historiquement, l'algèbre est associée aux démarches algorithmiques et de classification. Ces démarches comportent un nombre fini d'étapes ce qui leur confère aussi un caractère discret.
Enfin, le test binaire « = » y prédomine.

Au XXe siècle, le formalisme de la théorie des ensembles contribue à donner un caractère discret au raisonnement dans les mathématiques : elles sont dès lors fondées sur des suites discrètes de symboles. En particulier, les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont obtenus par itération d'idées insulaires.

Le caractère continu des mathématiques est présent dans les raisonnements mettant en œuvre le mouvement continu des figures en géométrie. Il en sera à nouveau question dans le paragraphe concernant la géométrie.
L'outil algébrique a eu tendance à prendre le dessus sur les preuves de type géométrique lorsque Descartes a développé la géométrie analytique. Longo (1999) fait remarquer que cette généralité est parfois fictive et cite pour exemple qu'il n'y a pas de discours moderne sur les variétés différentielles sans un dessin au tableau.

Le mot « analyse » vient du grec et signifie « résoudre et délier ». Il implique une idée de « mouvement vers le détail ». Le développement de l'analyse est lié à celui de l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
En analyse réelle, le test « ≤ » prédomine. Ce test est binaire comme le « = », mais génère des intervalles qui sont des ensembles continus.

Le continu mathématique est parachevé dans la construction des nombres réels, d'abord soutenu par l'intuition géométrique de la droite, puis avec les formalisations de plusieurs mathématiciens dont Dedekind et Hilbert.

4. Quantitativement

LE DISCRET	**LE CONTINU**
Le fini $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$: infini dénombrable, du « et ainsi de suite »	$\mathbb{R}$: infini indénombrable Card($\mathbb{R}$) = c appelé « le continu » L'existence d'un infini intermédiaire : indécidable dans la théorie ZFC.

Figure 4

Peut-on comparer le cardinal des ensembles discrets infinis et celui des ensembles continus ?

Pour les intuitionnistes, cette question est un non-sens puisqu'ils ne reconnaissent pas l'existence de l'infini actuel.
Pour les formalistes, l'infini existe sous le regard pensant, il est basé sur le concept intuitif d'appartenance et d'inclusion. Nous allons nous tenir à leur point de vue.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des ensembles infinis dénombrables, ils représentent l'infini du « *et ainsi de suite* », l'infini discret. Cependant, un ensemble dénombrable n'est pas nécessairement discret.
Par exemple $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais ne sont pas discrets pour leur topologie naturelle.
Un autre exemple d'ensemble dénombrable non discret est l'ensemble $\left\{\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}\right\}$, pour sa topologie naturelle.

Réciproquement, les sous-ensembles discrets d'un espace topologique ne sont pas toujours dénombrables. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un espace topologique non dénombrable muni de la topologie discrète.
Cependant, les sous-ensembles discrets de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle sont finis ou dénombrables.
Ainsi :

- Considérons un ensemble infini discret de $\mathbb{R}$. Chacun de ses points est inclus dans un voisinage qui l'isole des autres. Cependant ce voisinage contient un rationnel. Or l'ensemble des rationnels est dénombrable. Cet ensemble discret est donc dénombrable.
- Soit A un ensemble infini discret de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \left\{x \in A \,/\, A \cap \left]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right[= \{x\}\right\}$. Comme tous les points de A sont isolés, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
  Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n rencontre au plus une fois $\left]k - \frac{1}{n}; k + \frac{1}{n}\right[$. Par conséquent A_n est fini ou dénombrable, donc A est dénombrable.

$\mathbb{R}$ est un ensemble infini indénombrable, Card($\mathbb{R}$) = c est appelé « *le continu* ».

Nous avons vu que l'existence d'un infini intermédiaire est un problème indécidable dans la théorie ZFC.

5. Topologiquement : points isolés, points limites

LE DISCRET	**LE CONTINU**
Ensemble discret : tous ses points sont isolés $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: discrets pour la topologie usuelle	$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas de point isolé Un fermé est parfait lorsqu'il n'a pas de point isolé $\mathbb{R}$: parfait.

Figure 5

L'idée intuitive d'un ensemble « *sans saut* » est formalisée dans le cas d'un espace topologique par le fait qu'il n'ait pas de point isolé.

Rappelons quelques points de topologie :

Un point adhérent à une partie A d'un espace topologique E est un point *x* de E qui peut être « *approché* » par des points de A au sens où chaque voisinage de *x* – selon la topologie de E – rencontre A. Un tel point *x* n'est pas nécessairement un point de A. En particulier, tout point de A est adhérent à A. Cette notion dépend de l'espace topologique dont A est un sous ensemble.
On dit qu'un point *x* est un point limite de A lorsqu'il est un point adhérent à A\{*x*}. C'est-à-dire tel que tout voisinage de *x* contient au moins un point de A différent de *x*. Par conséquent, tout point limite de A est adhérent à A.
Enfin, un point isolé de A est un point de A qui n'est pas un point limite de A.

La topologie discrète formalise le discret : sur tout ensemble, la topologie discrète est l'ensemble des parties de cet ensemble.
On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est discrète lorsque la topologie induite sur A est la topologie discrète. Ceci équivaut à ce que tout point de A est isolé dans E.

Ainsi le fait qu'un point soit isolé, le fait qu'un ensemble soit discret, dépendent de la topologie choisie.

Pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, tous les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont isolés. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont discrets.
Par contre, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas de point isolé.

Selon Robinet (1986), Bolzano aurait défini un espace topologique continu par le fait qu'il soit égal à son adhérence.
Toujours selon elle, pour Dedekind, un ensemble continu est ce qu'on désignerait selon la terminologie moderne par un ensemble parfait.
Voici la définition d'un ensemble parfait : si un ensemble E est fermé, le dérivé de E est E privé de tous ses points isolés. Si le fermé E coïncide avec son dérivé, il est dit parfait. Ainsi, un ensemble est parfait si et seulement s'il est fermé sans point isolé, c'est-à-dire qu'il est composé de ses points limite.

Par la suite, Cantor a exhibé son ensemble triadique qui est parfait, mais non continu. Nous y reviendrons plus tard.

6. Divisibilité à l'infini

LE DISCRET	**LE CONTINU**
$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: non divisibles à l'infini.	$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: divisibles à l'infini.

Figure 6

L'idée de caractériser le continu par la divisibilité à l'infini est présente dès l'antiquité. Elle correspond à l'idée intuitive d'un ensemble « *sans saut* ».
Dans le domaine numérique, cette idée se traduit par le fait qu'on puisse trouver un nombre « situé entre » deux autres nombres. Le calcul de la moyenne arithmétique des deux nombres est un moyen d'en trouver un.

L'expérience fournit de multiples exemples d'ensembles « *sans saut* » :
- On peut trouver une longueur comprise entre deux autres, par le geste, par construction géométrique ou par des considérations numériques sur leurs mesures.
- On peut trouver un temps compris entre deux autres par des battements plus rapprochés par exemple ou par des considérations numériques sur leurs mesures.

La divisibilité à l'infini est formalisée de nos jours par la notion d'ensemble ordonnée dense en lui-même :

> Un ensemble ordonné (E, ≤) est dit dense en lui-même si, pour tout couple (*x, y*) d'éléments de E tels que $x < y$ il existe un élément z de E tel que $x < z < y$.

Pour l'ordre usuel, les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont denses en eux-mêmes alors que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne le sont pas.

On peut aussi trouver : un décimal entre deux rationnels quelconques ; un décimal entre deux réels quelconques ; un rationnel entre deux réels quelconques. La notion de sous-ensemble dense au sens de la relation d'ordre formalise cette idée :

> Un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné (E, ≤) est dit dense dans E au sens de la relation d'ordre si, pour tout couple (*x, y*) d'éléments de E tels que $x < y$ il existe un élément a de A tel que $x < z < y$.

Ainsi, au sens de la relation d'ordre, $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

7. Topologiquement dans un espace métrique : complétude

LE DISCRET	LE CONTINU
$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ - ne sont pas complets - ne vérifient pas l'axiome des intervalles emboités	$\mathbb{R}$ est complet $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome des intervalles emboités Continu = inextensible par le procédé des coupures (Dedekind) Continu = complet bien enchaîné (Cantor)

Figure 7

Si des considérations numériques fournissent aisément un moyen de ne pas « faire de saut » entre deux nombres distincts, ce n'est pas le cas pour le fait qu'il n'y ait « pas de trou » entre les nombres.

Nous avons vu dans notre « petite histoire du continu à travers celle des nombres » que Dedekind a cherché par sa méthode des coupures à « remplir les trous que les nombres rationnels ne remplissent pas » sur la droite réelle. L'inextensibilité de $\mathbb{R}$ selon son procédé formalise l'idée intuitive d'ensemble « *sans trou* ».

Dans le cas plus général d'un espace métrique, cette idée intuitive est formalisée par le fait que l'espace soit complet.

Un espace métrique E est complet si toute suite de Cauchy de E a une limite dans E.

Il est toujours possible de « remplir les trous » d'un espace métrique en le complétant par des classes d'équivalences de suites de Cauchy. La construction de $\mathbb{R}$ par Cantor s'inscrit dans cette démarche.
Une propriété équivalente à la complétude d'un espace métrique est celle des fermés emboités.

Topologiquement, l'idée qui s'apparente à celle d'absence de saut est que pour tout point *x* d'un espace topologique E, on puisse trouver un point d'un sous-ensemble A de E aussi « proche » de *x* que l'on veut. Elle est formalisée par la notion de sous ensemble partout dense :

Un ensemble A est partout dense dans un espace topologique E si l'adhérence de A est E.

Un espace métrique est partout dense dans sa complétion. Ainsi, $\mathbb{Q}$ qui n'est pas complet est partout dense dans sa complétion $\mathbb{R}$.
Un espace métrique complet aurait-il donc toutes les caractéristiques du continu ? Non pas : les ensembles $\mathbb{Z}$ et $[0 ; 1] \cup [2 ; 3]$ par exemple sont complets pour la distance usuelle mais ne sont pas « d'un seul tenant ».

8. Topologiquement : connexité

LE DISCRET	LE CONTINU
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$: non connexes	$\mathbb{R}$: connexe $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$: bien enchainés

Figure 8

La connexité formalise topologiquement l'idée intuitive d' « objet d'un seul tenant ». Elle est donc une des caractéristiques du continu.
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas connexes ce qui leur confère un caractère discret.
R est connexe et ses parties connexes sont les intervalles.

Dans un espace métrique, la notion d'espace bien enchainé correspond à une condition moins forte que la connexité, que Cantor nommait malgré tout « d'un seul tenant ». La définition en est la suivante : un espace métrique E est bien enchainé si pour tous points *x* et *y* de E, et tout a>0, il existe un nombre fini de points x_0, x_1, …, x_n de E qui vérifient $x_0=x$, $x_n = y$ et pour tout k entier appartenant à $[0 ; n-1]$, $d(x_k, x_{k+1})<a$.

Tout espace métrique connexe est bien enchainé mais la réciproque est fausse. Par exemple, $\mathbb{Q}$ est bien enchainé mais n'est pas connexe.
Cantor, qui voulait caractériser le continu en général, c'est-à-dire le continu d'ensembles non totalement ordonnés, en arrive à la définition que nous énoncerions aujourd'hui de la façon suivante : un espace métrique est continu lorsqu'il est complet et bien enchainé. Donc *« sans trou et qui se tient à peu de chose près ».*

9. Propriété de la borne supérieure – notion d'ensemble ordonné

LE DISCRET	**LE CONTINU**
$\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ ne vérifient pas la propriété de la borne supérieure	$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ vérifient la propriété de la borne supérieure $\mathbb{R}$ unique corps totalement ordonné qui satisfait la propriété de la borne supérieure

Figure 9

On dit qu'un ensemble ordonné E possède la propriété de la borne supérieure lorsque toute partie non vide majorée de E possède une borne supérieure.
Les ensembles denses $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ ne vérifient pas la propriété de la borne supérieure.
Les ensembles discrets $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ la vérifient. Plus précisément, dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, toute partie non vide majorée admet un plus grand élément.
Quant à $\mathbb{R}$, il est l'unique corps totalement ordonné qui satisfait à la propriété de la borne supérieure. Ainsi, la propriété de la borne supérieure est caractéristique du continu si l'ensemble est un corps totalement ordonné. Elle garantit que les procès infinis déterminent à la limite un unique nombre.

10. En géométrie affine classique et euclidienne

LE DISCRET	**LE CONTINU**
Droite, plan et espace : ensembles de points en théorie des ensembles Transformations : opèrent sur les points Certaines démonstrations utilisent des points de vue ponctuels	Droite, plan et espace : exemples types de ce qui a un caractère continu Transformations : opèrent de façon continue Certaines démonstrations utilisent le déplacement de parties d'une figure et sont associées à des « gestes » continus

L'intersection de deux droites, d'une droite et d'un plan est soit une droite (continu) soit un point (discret).

Figure 10

Par géométrie affine classique, nous entendons ici celle des espaces affines sur R, de dimension 1, 2 ou 3.

Quelles sont les conceptions du point au sens de la géométrie euclidienne ou affine classique [13] ?

Dans son premier livre des éléments, Euclide définit le point par « *ce qui n'a aucune partie* ». Le point n'a donc ni longueur, ni largeur, ni épaisseur, on ne peut lui associer de grandeur, il est indivisible. Les figures du plan et de l'espace sont constituées de points.

[13] Par opposition par exemple au point fractal cantorien.

Dans l'enseignement de niveau Licence, une axiomatisation des espaces affines en termes de points, de droites et de la relation d'incidence d'un point à une droite est possible[14].
Une autre axiomatisation, plus courante à ce niveau d'enseignement, consiste à définir les espaces affines à partir d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Leurs éléments sont appelés points. Les espaces affines de dimension 0 sont les points, deux de dimension 1 sont les droites, ceux de dimension 2 sont les plans.

Hilbert a construit une axiomatisation de la géométrie qui n'utilise pas la théorie des ensembles. Les objets primitifs non définis sont le point, la droite et le plan. (Hilbert, en réponse à des critiques concernant l'emploi de mots courants pour des objets ayant peu de rapport avec le réel, proposait de remplacer les mots « point », « droite » et « plan » par les mots « chaise », « table » et « pot à bière »).
Ses axiomes d'incidence définissent l'appartenance d'un point à une droite ou à un plan (ainsi que l'inclusion d'une droite dans un plan).

Dans tous les cas, la droite, le plan et l'espace sont composés de points. C'est aussi le cas de leurs sous-ensembles, en particulier des figures géométriques usuelles comme les cercles, les triangles ou les quadrilatères. Ceci confère un caractère discret à ces objets géométriques. Ainsi, pour Aristote, il était impossible que des points puissent former un continu.
Ce caractère discret dépasse la suggestion faite par le mot *« point* » : une chaise a elle aussi un caractère discret si l'on considère qu'une *« table »* et un « *pot à bière »* sont constitués d'éléments *« chaise* ».

Les transformations du plan, de l'espace opèrent sur les points.
De nombreuses démonstrations en géométrie euclidienne ou affine utilisent des points de vue ponctuels.

Mais par ailleurs, comme nous l'avons vu dans le paragraphe concernant les aspects philosophiques, la droite, le plan et l'espace sont les exemples types de ce qui a un caractère continu.

De nombreuses démonstrations voire définitions en géométrie euclidienne utilisent le déplacement d'une figure ou celle de ses parties. Elles sont associées à des « gestes » continus.

En voici quelques exemples :

- Euclide ne définit pas l'égalité des angles ni celle des longueurs. Il considère que deux angles ou deux longueurs sont égaux à partir du moment où, par déplacement (au sens commun), on peut les superposer. Il suppose donc implicitement que le déplacement conserve les angles et les longueurs.
- Quelques démonstrations du théorème de Pythagore utilisent l'idée de la conservation de l'aire par déplacement. C'est aussi le cas de la construction d'un carré d'aire moitié de celle d'un carré donné.

- De façon plus générale, si on considère les transformations du plan et de l'espace, non pas du point de vue ponctuel, ni du point de vue statique (une figure / son image), mais d'un point de vue global et dynamique, elles sont associées à des gestes continus.

À « l'intersection » du discret et du continu :
L'intersection de deux droites non disjointes, d'une droite et d'un plan non disjoints, est soit une droite (continu) soit un point (discret).

[14] Lelong-Ferrand (1985)

11. En probabilités

LE DISCRET	LE CONTINU
Historiquement, la théorie est développée dans le discret Le discret est souvent traité dans le continu lorsque le nombre d'éventualités est « grand »	Historiquement, les probabilités sur des espaces continus sont développées après l'avoir été sur des espaces discrets Une probabilité prend ses valeurs dans [0 ;1]

Figure 11

Historiquement, la théorie des probabilités s'est développée sur des espaces discrets finis. Puis elle est développée sur des espaces infinis et continus.

Aujourd'hui, les probabilités sur un espace discret sont souvent traitées dans le continu lorsque le nombre d'éventualités est « grand », pour un traitement plus rapide des problèmes. Nous y reviendrons dans la partie IV.

12. En physique, quelques pistes…

LE DISCRET	LE CONTINU
En relativité : temps et espace séparés En mécanique quantique : description granulaire de la matière	En mécanique classique : temps, espace, mouvement (le plus souvent) sont continus En relativité : espace-temps variété différentiable localement homéomorphe à R^4 En mécanique quantique : état défini en termes de probabilité appartenant à [0 ;1] Séparation des objets pas toujours possible.

Figure 12

En mécanique classique, le temps, l'espace, le mouvement (le plus souvent) ont des caractères continus. Ce sont les besoins liés à l'étude du mouvement continu en physique qui ont mené au développement du calcul différentiel et intégral au XVIIIe siècle.
Jusqu'au XIXe siècle, les physiciens envisageaient l'espace rempli d'un continuum parfait d'Éther.

En théorie de la relativité, le temps et l'espace sont séparés. Néanmoins, l'espace-temps est une variété différentiable localement homéomorphe à $\mathbb{R}^4$, ce qui confère à l'espace-temps un caractère localement continu.

En mécanique quantique, la matière est décrite de façon granulaire, d'où un caractère discret. L'état, lui, est défini en termes de probabilité appartenant à [0 ;1], d'où un caractère continu.
Par ailleurs, la séparation des objets n'est pas toujours possible.

13. Conclusion de la partie I B

Les limites entre le discret et le continu sont difficiles à circonvenir.

Nous avons vu que les ensembles $\mathbb{D}$ des décimaux et $\mathbb{Q}$ des rationnels, qui sont denses dans $\mathbb{R}$ - dans le sens topologique de partout dense dans $\mathbb{R}$ ainsi que le sens de la relation d'ordre - présentent des aspects du continu : ils sont divisibles à l'infini, ils n'ont pas de point isolé. Ils sont donc « sans saut ». Par ailleurs, $\mathbb{Q}$ est invariant par homothétie et présente de ce fait un autre aspect du continu.
$\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ présentent aussi des aspects du discret : ils peuvent être mis en bijection avec l'ensemble des entiers naturels, ils peuvent s'écrivent avec un nombre fini d'entiers, ils ont une infinité non dénombrable de « trous ». Pour la topologie usuelle, ils ne sont pour autant ni discrets, ni continus.

L'ensemble triadique de Cantor est un autre exemple bien connu d'ensemble présentant les deux aspects.
Cantor construit son ensemble triadique alors qu'il recherche la caractérisation du continu. Notons cet ensemble P. Il est inclus dans [0 ; 1]. P vérifie :

- (1) Il est fermé et tous les points de P sont des points limites pour P. P est donc parfait ;
- (2) Il ne contient aucun intervalle non réduit à un point. Les points de P sont séparés par une infinité d'intervalles ouverts. Autrement dit, l'intérieur de P est vide ;
- (3) Il est de mesure nulle (au sens de Lebesgue) ;
- (4) Il peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$: il a la puissance du continu.

Cet ensemble a certaines des propriétés du continu : il est parfait, il a la puissance du continu. Il est fermé dans un espace complet donc complet.
Mais il a aussi des propriétés du non continu : il n'est pas connexe, qui plus est, il ne contient aucun intervalle non réduit à un point. Ceci permet de le qualifier de « totalement discontinu ». Enfin, il est de mesure nulle.
Cependant, il n'est pas non plus discret puisque tous ses points sont des points limite, il n'a donc pas de point isolé. Ne pourrait-on pas le qualifier de « totalement non discret » ?

Voilà donc un ensemble doué de quelques-unes des propriétés du continu et qui ne l'est manifestement pas… mais qui n'est manifestement pas discret non plus. Il est cependant dense en lui-même.

Deux points se dégagent de cette analyse :

- Le continu présente de nombreuses facettes et sa définition n'est pas achevée. Les différents aspects du continu ne peuvent prétendre être des critères du continu séparément. C'est la conjonction de plusieurs aspects qui permet de le caractériser, dans le cas des espaces métriques.
  L'intuition, quant à elle, mène à des perceptions seulement partielles du continu.

- Le discret ne s'oppose pas nécessairement au continu. Les ensembles denses des rationnels et des décimaux en sont des exemples.
  La frontière entre discret et continu dépend de l'aspect retenu (complétude, avec ou sans saut, avec ou sans trou…). Est-ce une des raisons pour lesquelles les rationnels positifs, directement issus de l'ensemble discret $\mathbb{N}$, auront mis des siècles à acquérir leur statut de nombre ? Et continuent à poser des problèmes d'enseignement au niveau collège en France et hors de nos frontières ?

Les questions suivantes sont encore débattues à nos jours :

- Du discret et du continu, lequel engendre l'autre ?
- D'un point de vue théorique, le point sert-il à définir le continu ou est-ce l'inverse ?

Le rôle historique du comptage est indéniable ; la théorie des nombres, la logique et les théories des ensembles, après Dedekind et Cantor, font provenir le continu mathématique des entiers.
Au contraire, Leibniz et récemment Thom considèrent le continu comme un donné originel et le discret comme une singularité.

Pour Weyl, les points ne font pas partie de notre intuition du continu temporel.
Pour Wittgenstein, ils ne font pas partie non plus du continu spatial. Les courbes ne sont pas faites de points, ce sont des lois. Le point est sans dimension puisqu'il est l'intersection de deux droites qui sont elles-mêmes des lois à une dimension. Le point n'est qu'une construction conceptuelle.
Au contraire, Euclide définit la ligne comme étant constituée de points, eux-mêmes définis comme « *ce dont la partie est nulle* ». La théorie des ensembles, quant à elle, construit le continu de la droite réelle et impose de voir le continu comme un ensemble de points.
Weyl, Wittgenstein et Thom rejettent cette inversion des rôles.

La caractérisation du continu, le statut du point, celui de l'infini, restent aujourd'hui des questions d'actualité dans le champ des mathématiques savantes.
Cependant elles sont présentes en France dans l'enseignement primaire et secondaire. Où, de quelle manière, avec quelles conséquences sur les apprentissages des élèves ?

C. Conclusion de la partie I

Dès l'école primaire, les élèves manipulent les nombres entiers puis quelques rationnels dont les décimaux. Ils démarrent donc leur scolarité avec des nombres d'un ensemble discret puis pratiquent des nombres d'ensembles denses.
Ils commencent à reporter ces nombres sur la droite graduée.

Peut-être cette droite, utilisée par la suite à tous les niveaux du secondaire, est-elle supposée donner un outil de conceptualisation du continu de la droite réelle aux élèves ?

Il serait hâtif de l'affirmer : nous avons vu que le point donne un aspect « granulaire » à la droite, aspect qui s'apparente au discret. Par ailleurs notre analyse historique montre que le fait qu'une accumulation de points puisse former un continu a été un obstacle conceptuel.

En collège, les élèves côtoient les rationnels et certains irrationnels (les racines carrées, π), les approximations décimales via leur calculatrice, ils reportent les intervalles solutions d'inéquations sur la droite réelle. La géométrie les met en contact avec le point de l'espace euclidien, avec l'infini (ne leur dit-on pas qu'une droite est infinie ?), avec le continu de l'espace euclidien, par le biais des tracés sans lever le crayon, des décompositions et recompositions de figures planes ou dans l'espace.
Les élèves de collège côtoient donc des objets et des modes de pensée discrets et continus en passant par des ensembles denses de nombres. Les quelques fonctions qu'ils étudient sont continues.

Ceux qui suivent une scolarité jusqu'au baccalauréat manipulent le continu via l'ensemble des nombres réels et les sous-ensembles continus de $\mathbb{R}$ que sont les intervalles. Ils ont dans la plupart des séries, concernant les fonctions continues, un avant-goût du calcul de limites et du calcul différentiel. Ils étudient des suites, fonctions d'un ensemble discret à valeurs dans un ensemble continu.
Ceux de la voie générale utilisent le nombre *e*, étudient de surcroit le calcul intégral, les probabilités discrètes et continues ; ils sont exposés à la notion de continuité de fonction et peuvent approximer quelques irrationnels par des suites.

Les difficultés des élèves relevant du sens qu'ont pour eux les nombres et leurs écritures sont avérées, à tous les niveaux d'enseignement - elles sont aussi signalées chez les étudiants post-bac. Le discret et le continu interagissent de façon étroite entre nombres entiers et non entiers, mais aussi entre suites et fonctions, entre probabilités discrètes et continues et dès qu'il est question de point.

Dans certains cas, le discret précède le dense ou le continu, par exemple les programmes officiels imposent, et cela paraît bien naturel, d'étudier les nombres entiers avant les autres, les probabilités discrètes avant les probabilités continues.
Dans d'autres le continu précède le discret, par exemple l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle précède celle des suites.
Lorsque l'ordre résulte d'un choix, comme c'est le cas des suites et des fonctions, est-il dicté par un questionnement didactique ?

On peut se demander quelle(s) conception(s) les élèves se construisent, comment ils gèrent les interactions entre le discret et le continu malgré, ou grâce, à ce que leur scolarité en mathématiques leur propose, ou ne leur propose pas.

Nous pouvons, avant une analyse fine qui sera menée plus tard dans le cadre de ce travail, avancer qu'au cours de la scolarité des élèves, certains écueils liés au discret et au continu sont problématisés, explicités, alors que d'autres sont présentés - ou juste présents - comme des évidences. Alors que l'étude de ce qu'est le continu et de son histoire montrent que celui-ci ne va pas de soi.

Les mathématiques de Mésopotamie, de la période alexandrine en Grèce, d'Inde, des pays arabo-musulmans, de l'époque des lumières, se sont construites en partie en écartant les problèmes soulevés par l'infini et le continu : il s'agissait de créer des mathématiques qui « marchent », en ce sens qu'elles permettent de résoudre les problèmes de l'époque, qu'ils soient d'arpentage, de commerce, de physique...
Des mathématiques qui « marchent » au collège et au lycée sont-elles suffisantes pour former les citoyens ? Des mathématiques outils pour la résolution de problèmes sont-elles suffisantes pour les élèves qui se destinent à des études scientifiques, ou simplement pour ceux qui ont la curiosité et le désir de comprendre le « pourquoi » de ces outils ? Nous tâcherons d'apporter des éléments de réponse à ces interrogations dans les parties suivantes.

Ce double travail concernant le discret et le continu (en passant par le dense) en mathématiques - historique d'une part, descriptif des mathématiques contemporaines d'autre part – va nous permettre d'appréhender les notions de discret et de continu dans leur complexité au sein des thèmes de l'analyse et des probabilités, en fin de collège et au lycée, et nous aider à y repérer un certain nombre de difficultés d'ordre épistémologique qui leur sont inhérentes.

II. Outils théoriques ; méthodologie

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre théorique de la théorie de l'activité, telle qu'elle a été adaptée à la didactique des mathématiques par exemple par Robert (1998) – même si ce n'était pas encore complètement explicite. Les activités y sont définies du point de vue des sujets (les élèves), elle est « *ce que développe le sujet lors de la réalisation de la tâche*[15] ».
Afin d'appréhender l'activité possible des élèves (prise au sens large, y compris l'écoute), il convient d'analyser la tâche (prise au sens large, y compris l'exposition de connaissances), en situation.

La tâche fait intervenir une ou des notions à enseigner. Ainsi, l'étude du « relief » de ces notions est-elle nécessaire au préalable de l'analyse de la tâche. Abboud-Blanchard et al. (2017) définissent le relief comme suit : « *il s'agit d'une étude croisant les aspects épistémo-mathématiques, curriculaires et cognitifs (difficultés déjà répertoriées par exemple) des notions* ».

Nous adoptons l'hypothèse que l'apprentissage est, en grande partie et pour beaucoup d'élèves, provoqué par les activités possibles des élèves telles qu'elles sont organisées par l'enseignant, notamment en classe. Ainsi, tâches et déroulement forment un couple indissociable dans l'analyse de ces activités en classe. Celle du déroulement tient compte essentiellement du mode de travail des élèves (individuel ou en groupe, type d'artefact mis à disposition etc.) et des interventions de l'enseignant.

A. Spécificité de ce travail

Nous avons constaté dans la partie I. que le caractère discret ou continu des objets n'est pas facilement définissable, la notion de continu ne l'est pas non plus dans les savoirs savants ; de plus, et en partie en conséquence, discret et continu ne sont pas « étiquetables » en tant que savoir à enseigner au lycée, ils sont toujours présents, de manière diffuse, à tous les niveaux d'enseignement des mathématiques, imbriqués dans des savoirs qui eux, sont à enseigner. Nous faisons cependant l'hypothèse qu'ils impactent l'enseignement au lycée, où ils vivent, même plus ou moins cachés.

Ils ne sont par ailleurs pas « attrapables », ne serait-ce que par la citation de ces mots, dans les programmes officiels, comme c'est le cas de la plupart des notions abordées.
Ni l'un ni l'autre ne constitue un domaine de travail, en ce qu'ils ne consistent pas en un ensemble cohérent de tâches et il n'y a pas de niveau de conceptualisation visé.
Ils ne sont pas travaillés de façon isolée, ni de façon suivie.
Les difficultés des élèves à leur propos ne sont pas répertoriées.

Pour ces raisons, afin de pouvoir traquer le discret et le continu dans les programmes, les manuels, les productions d'élèves, mais aussi dans le discours des enseignants et leurs énoncés d'exposition de connaissances et de tâches, l'étude du relief de ces notions a besoin d'être conséquente.

Les aspects épistémo-mathématiques de la partie I. permettent d'élaborer une référence cohérente pour repérer les traces du discret et du continu dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées, les notions mathématiques ou les concepts sur lesquels les manuels et les enseignants peuvent s'appuyer, et ce qui peut faire obstacle.

Ainsi, l'étude de la partie I. a permis de mettre au jour les notions qui ont freiné la conception du continu mathématique. Il s'agit essentiellement de celles de point et d'infini. Comment un ensemble de points peut-il former un ensemble continu ? Comment un nombre ou un point sur une ligne peut-il ne pas avoir de successeur ? Comment se peut-il que le tout ne soit pas plus grand que la partie ? Les difficultés conceptuelles liées à ces notions donnent un aperçu des éventuelles difficultés des élèves à concevoir le continu.

[15] Vandebrouck et al. (2008), Robert et Vandebrouck (2017)

Par ailleurs, les précurseurs du continu dégagés historiquement – l'infini, le divisible à l'infini – peuvent être des précurseurs du continu mathématique chez les élèves du secondaire.

La référence établie dans la partie I. permet aussi de détecter les conceptions spontanées du discret et du continu chez les élèves.

Enfin, nous adoptons l'hypothèse que les enseignants comme les élèves ont besoin de cohérence, qui favorise et est constitutif de la conceptualisation. Vu la dispersion des notions de discret et de continu au long des années de fin de collège et de lycée, nous insistons sur ce point.

B. Outils

1. Le relief

Le relief nous permet d'établir une référence pour analyser l'enseignement des notions de discret et de continu, par une étude croisée :

- Du savoir savant, appréhendé par notre étude épistémologique et mathématique de la partie I. ;
- Du savoir à enseigner : par une étude des programmes (l'ordre dans lequel la notion est abordée, les contenus, les éventuels manques), des manuels et des énoncés d'épreuves nationales (Brevet et Baccalauréat). Les manuels renseignent sur les ressources des enseignants, les épreuves nationales pilotent en partie leurs pratiques.
- Des aspects cognitifs dont les difficultés des élèves et leurs conceptions spontanées.

La théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) étiquette les transformations du savoir. L'étude du relief s'intéresse à ce qui est retenu du savoir identifié dans l'étude épistémo-mathématique, dans le savoir à enseigner.

Du point de vue cognitif, nous solliciterons la distinction par Vygotsky (1986) de deux types de concepts, les concepts quotidiens et les concepts scientifiques. Vergnaud (1989) décrit les concepts quotidiens comme relevant du développement de l'enfant alors que les concepts scientifiques relèvent de son apprentissage. Il explique que la compréhension des concepts quotidiens se construit par l'expérience spontanée non organisée ; par opposition, celle des concepts scientifiques provient d'une action finalisée et intentionnelle de l'adulte.
L'étude du relief permet de repérer ce qui est mobilisable chez les élèves en termes de conceptions plus ou moins spontanées, plus ou moins proches des concepts quotidiens[16] et du savoir savant, identifiées grâce à l'étude du savoir savant, et qui peuvent servir de point d'appui (souvent partiel).

2. Discret, continu : quel(s) type(s) de notion ?

Pouyanne écrit dans Pariès et al. (2007) que dans l'enseignement, « *souvent, avant même d'avoir été définies, des notions sont manipulées par le biais de leurs propriétés opératoires* [17]». Il nomme une telle notion : « notion Non Encore Formalisée » -pour lequel nous utiliserons l'acronyme NEF dans la suite de ce travail. Les exemples qu'il en donne sont les aires et les longueurs en primaire et au secondaire, ou encore les nombres réels au lycée.

[16] Vygotsky (1986)
[17] Pariès et al. (2007) page 9

Il note que certaines notions peuvent présenter plusieurs états formalisés ou partiellement formalisés à un même moment du cursus scolaire. La notion de distance en est un exemple.
Il note aussi qu'une même notion peut être (partiellement) formalisée dans différents cadres. La dénomination de la notion, commune aux différents cadres, souligne qu'il s'agit de la même notion.
Pouyanne remarque que le plus souvent, le fait qu'une notion est NEF est caché aux élèves. C'est ce qu'il appelle « *le choix qui ne se discute pas (pas maintenant)* ». D'après lui, ce choix est nécessaire dans le cas où aucune définition formelle de la notion n'est accessible au niveau d'enseignement considéré. Il est aussi conforme au développement des mathématiques au cours de l'histoire, qui s'est effectué en progressant alternativement « *vers l'avant et vers ses fondements* ».

La partie I. de ce travail en donne quelques exemples : les notions de limite et de continuité, de discret et de continu, d'infini, de point, de nombre réel se sont développées par ce processus de va et vient, ont été formalisées quelques dizaines, voire centaines d'années, après leur émergence et leur utilisation. Certaines de ces notions sont explicitement nommées et utilisées au lycée tout en n'étant (éventuellement) formalisées que plus tard, dans l'enseignement supérieur. C'est le cas des notions de nombre réel, mais aussi de celles de fonction continue, de limite, d'infini, de point.
Par rapport aux notions précitées, celles de discret et de continu ont ceci de particulier qu'elles sont présentes bien que peu nommées dans l'enseignement secondaire.

Pouyanne estime que « *la conscience des mécanismes de formalisation, de l'existence de notions cachées et de leur détection influe sur l'organisation et la cohérence des notions sur le long terme et permet de prendre en compte la dualité entre intuition et rigueur qui lie l'objet « vraiment pensé » (conceptualisé ?) à son statut logique* [18]».
Une analyse des savoirs savants et des savoirs à enseigner permettra de mieux préciser les notions de discret et de continu en tant que notion NEF en fin de collège et au lycée, de déceler la cohérence ou le manque de cohérence que les mathématiques à enseigner et effectivement enseignées (du moins dans les extraits dont nous disposons) apportent à ces notions.

Robert (1998) (complété dans Pariès et al. (2007)) distingue par ailleurs « *très généralement trois types de notions : les extensions de concepts sans « accidents » ou avec accidents, les notions RAP (réponse à un problème) et les notions FUG (Formalisatrices, Unificatrices, Généralisatrices)* [19]». Cette distinction est un outil supplémentaire qui nous permettra de caractériser les introductions aux notions qui sont nouvelles pour les élèves.

3. Outils d'analyse des contenus

Pour des études plus précises liées à des contenus particuliers, nos analyses font intervenir différents outils.

Les cadres, registres et points de vue[20] :
L'idée de « cadre » est empruntée à Douady (1986) : un cadre repose sur des fondements (implicites ou non, admis ou non) et contient un certain nombre d'objets, de propriétés et un corpus de problèmes. Ainsi, au lycée, la majorité des contenus se situent dans les cadres numérique, algébrique, graphique, le cadre de l'analyse, celui des statistiques et celui des probabilités.
Celle de « registre » est empruntée à Duval (1995) : un registre de représentation est un mode d'écriture. Il peut intervenir dans différents cadres. Ainsi, le registre des tableaux de valeurs intervient dans les cadres précités.
Un « point de vue » est une façon d'aborder un problème. Un changement de point de vue amène à changer de stratégie de résolution de de ce problème (Robert, 1995, pages 42 et 50).
Cependant, selon les domaines, la distinction n'est pas si claire entre cadre et registre. Pour nous, l'étiquetage par un cadre donné est en partie relatif, il dépend du niveau scolaire, de ce qui est dit en classe, du contexte. Ce que recouvre un cadre peut ainsi changer au cours de la scolarité ou même selon les élèves. En outre, les

[18] Pariès et al. (2007) page 11
[19] Page 163 ; Ibid. page 12
[20] Robert, A. dans Vandebrouck, F. (Ed.) (2008), page 55.

activités graphiques des élèves peuvent imbriquer un travail des représentations graphiques dans un cadre fonctionnel et un travail dans le cadre graphique. De la même façon, Vandebrouck (2011) a illustré le fait que les élèves de la fin du lycée travaillaient les fonctions dans le cadre algébrique et non pas sur des représentations algébriques dans le cadre fonctionnel. Notre parti pris de travailler sur les activités nous amène à utiliser la catégorie cadre graphique plutôt que registre graphique lorsqu'il y a une ambigüité et qu'on ne peut pas être sûr qu'il ne s'agit que d'un travail sur des représentations graphiques. Quand l'élève relie des points, il est dans le cadre graphique et dans le registre graphique.
Cadres et registres s'interpénètrent et selon le discours qui accompagne l'activité, le travail peut se situer au niveau du registre ou bien à celui du cadre.

Nous procédons à des analyses de tâches telles qu'exposées dans Pouyanne et Robert (2004) et repris dans Vandebrouck (2008). Les énoncés d'exercices sont analysés en termes d'ouverture de la question, de types de connaissances (anciennes ou non, mobilisables ou disponibles), de présence d'implicites ou d'ambiguïtés, voire d'incohérences.
Pour chaque tâche, la mise en fonctionnement des connaissances attendues est analysée : est-ce une application simple et immédiate (d'une définition, d'un théorème, d'une méthode ...) ?
Quand ce n'est pas le cas, des adaptations sont nécessaires. Elles peuvent de différents types, plusieurs types pouvant intervenir en même temps. Il s'agit :

- De reconnaissances de modalités d'application ;
- D'introduction d'intermédiaires (des notations, des objets mathématiques…) ;
- De mélanges de plusieurs connaissances ou de plusieurs cadres ou registres, de changements de points de vue, d'interprétations, de mises en relations ;
- D'introduction d'étapes dans un calcul ou un raisonnement ;
- D'utilisation de questions précédentes ;
- De choix (forcés ou non) ;
- De combler un manque de connaissances.

4. Niveau de conceptualisation

Le niveau de conceptualisation visé pour une notion se traduit « *en termes de tâches et de connaissances, outils et objets, caractérisées par un certain niveau de formalisation, de rigueur et des modes de raisonnement attendus et à organiser dans un ensemble de connaissances « déjà là »* »[21].

Ainsi, un niveau de conceptualisation des notions de discret et de continu pourrait être envisagé au terme des trois années de lycée : ce qui pour l'une comme pour l'autre peut être mobilisable, disponible, en tant qu'outil et objet, quel type de tâche peut leur être associé, quelles définitions pourraient être adoptées.
Ce niveau de conceptualisation se construit sur les années de lycée, alors que les élèves ont déjà acquis un certain niveau à l'école primaire et au collège et que ceux qui poursuivent l'étude des mathématiques dans le supérieur continuent à l'enrichir. Ainsi, il apparait nécessaire de prendre en compte le temps long (Théorie de l'activité – Vergnaud (2007)).

5. Le méta

Le discret et le continu peuvent être traqués non seulement dans les tâches proposées aux élèves et les énoncés des expositions de connaissances, mais aussi dans le discours (les commentaires, remarques etc.) des manuels et celui des enseignants sur les notions mathématiques étudiées et les tâches abordées.
Ce discours fait partie du « méta » en didactique des mathématiques tel que Robert et Robinet (1996) l'ont défini. Partant des définitions émanant de la psychologie, elles définissent le méta par ce qui concerne :

- La connaissance du sujet sur la connaissance,
- Le discours de l'enseignant sur les mathématiques,
- La réflexion sur les concepts.

[21] Abboud-Blanchard et al. (2017).

Dans le travail que nous menons, le méta sur lequel nous nous focaliserons est celui du discours sur les mathématiques, leur fonctionnement et leur utilisation. En plus du discours de l'enseignant en classe, nous tenons compte de celui des documents officiels, des manuels et des élèves en classe.

Les recherches que Robert et Robinet citent « *s'appuient sur l'hypothèse que les élèves peuvent améliorer ou faciliter leur apprentissage des mathématiques par la prise en compte, par l'enseignant et par eux-mêmes, de tels éléments, de niveau « méta »* »[22].
Robert et Robinet soulignent cependant les questions méthodologiques de recherches qui visent à montrer cette hypothèse :

- Par quels moyens traquer des éléments de connaissances des sujets (élèves et enseignants) sur leurs connaissances ?
- Comment évaluer l'impact du méta sur la réussite des élèves ?
- Les effets du méta ne sont pas immédiats, ils agissent sur un temps long. Comment les analyser s'ils s'étalent sur des mois voire des années ?

Nous faisons l'hypothèse que dans l'enseignement de notions NEF, le méta fait partie des quelques « bras de levier » qui peuvent être actionnés, permettant d'expliciter quelque peu ce qui ne peut être rigoureusement exposé et de rassurer les élèves quant à des notions qu'ils utilisent alors qu'ils ne peuvent les maîtriser.
Cette hypothèse est corroborée par le fait que les questions méthodologiques soulevées par Robert et Robinet au sujet du méta sont aussi au cœur de notre recherche sur le discret et le continu en fin de collège et au lycée.

C. Problématique et méthodologie

Le sujet de cette thèse est vaste ; dans les mathématiques à enseigner, les contenus concernant le discret et le continu sont dispersés ; l'étude du relief, non l'avons vu, est conséquente. Dès lors, nous avons dû délimiter les thèmes à étudier, parmi ceux des programmes officiels du lycée. Discret et continu jouent un rôle central et interagissent pour les suites et les fonctions d'une part, et les probabilités discrètes et continues d'autre part, tout en jouant ce rôle de façon différente, ne serait-ce que par leur affichage dans les programmes et par l'ordre d'apparition du discret et du continu. En algorithmique et dans les mathématiques discrètes du lycée par exemple, les interactions entre discret et continu sont *a priori* moins nombreuses.
C'est pourquoi nous focalisons nos questions de recherches sur les thèmes de l'analyse et des probabilités, au niveau lycée.

La méthodologie est en partie spécifique à chacun, nous la détaillerons dans les parties correspondantes. Cependant, elle est guidée par des idées directrices communes.

1. La problématique

Notre but est de dresser un état des lieux, un paysage partiel mais signifiant, sur le discret et le continu, qui nous permette d'aboutir à des propositions concernant les variables sur lesquelles il est possible de jouer : le savoir à enseigner et les tâches et les déroulements proposées aux élèves, dans le but d'impacter positivement les apprentissages des élèves compte tenu de leurs conceptions spontanées, leurs connaissances anciennes et de leurs difficultés.
Or discret et continu ne font pas l'objet de définitions ni de théorèmes.

[22] Robert et Robinet (1996) page 3

Nos études portent donc sur des notions du thème de l'analyse ou de celui des probabilités qui, elles, font l'objet de définitions et de théorèmes et embarquent du discret et du continu (fonctions, suites, valeur moyenne, variables aléatoires discrètes et continues).

Pour chacune de ces notions :
Concernant le savoir savant :

- Où le discret et le continu se logent-ils, où et comment interagissent-ils ?
- Quels prolongements sont possibles de l'un à l'autre, quelles ruptures ?

Concernant le savoir à enseigner et ce qui est proposé aux élèves, nous nous posons les questions suivantes :

- À travers quoi le discret et le continu sont-ils mobilisés ? Cela peut être à travers des notions, notations, tâches, techniques, outils numériques, expériences et conceptions identifiées dans mon analyse épistémo-mathématique…
- Comment discret et continu se traduisent-ils en termes d'activité ? Quel discours est tenu sur le discret et le continu ?
- Qu'est-ce qui permet de construire le discret, le continu ?

Concernant les activités observées des élèves :

- Quelles difficultés ont-ils concernant le discret et le continu, quelles sont celles qui sont liées aux interactions entre eux ? Sur quels appuis peut-on construire des apprentissages les ?

2. La méthodologie

a) Le relief - les mathématiques

Dans un premier temps, nous identifions les notions à enseigner porteuses d'aspects du discret ou d'aspects du continu identifiés dans la partie I.
Nous faisons une brève analyse mathématique de ces notions à un niveau théorique proche mais supérieur à celui de la classe de Terminale, en prenant pour focus les différents aspects du discret et du continu.
Certaines notions se déclinent en deux « versions », l'une dans le discret et l'autre dans le continu. Les deux versions présentent des analogies tout en étant en partie différentes. Ainsi, nous mettrons en correspondance d'une part suites et fonctions (continues et dérivables) et d'autre part variables aléatoires discrètes et variables aléatoires continues.

Pour ce qui est des mathématiques à enseigner, nous analysons les programmes officiels ainsi que les documents officiels qui les accompagnent, un échantillon de manuels, d'exercices extraits de sujets du Diplôme National du Brevet (DNB) et du Baccalauréat.
L'analyse porte sur les jeux de cadres et de registres, de changements de point de vue, le caractère outil ou objet qui interviennent dans les différents contenus. Nous portons une attention particulière aux notations car celles-ci peuvent induire un caractère discret ou continu. Par ailleurs, un contexte, intra ou extra mathématique, peut être porteur de l'un ou l'autre caractère. Le type de nombres mobilisés, entiers ou non entiers est aussi un indicateur de caractère discret ou continu des contenus. Enfin, les outils numériques utilisés, offrent des fonctionnalités qui soutiennent l'un ou l'autre caractère.

Nous détaillons particulièrement l'analyse des introductions des notions identifiées au préalable, ainsi que les expositions de connaissances associées, dans lesquelles nous pensons trouver une grande partie des traces du discret et du continu ainsi que du méta qui les entoure.
Pour des raisons évidentes, les exercices dont les tâches font intervenir des aspects du discret et du continu, ou des deux, identifiés préalablement, sont eux aussi ciblés.

En ce qui concerne nos analyses de manuels, nous tenons à préciser que celles-ci sont partielles en ce qu'elles ne concernent qu'un ou deux chapitres du manuel. Par conséquent, en aucun cas nos résultats ne peuvent constituer un jugement sur l'intégralité d'un manuel ou d'une collection.

b) Le relief - les aspects cognitifs

Afin d'identifier les difficultés des élèves et leur conceptions spontanées, nous avons balayé un large spectre de données :

- Des copies provenant de devoirs surveillés en classe et d'épreuves du Baccalauréat ;
- Des travaux d'élèves faits en classe, seuls ou en groupe ;
- Des entretiens que nous avons menés avec un ou deux élèves à la fois sur le thème des suites ;
- Le récit de la séquence sur les suites dans une de nos classes de Première S ;
- Une analyse de séance d'introduction aux probabilités continues en Terminale S.

Les effectifs de copies et de travaux d'élèves sont parfois réduits à une trentaine. Dans ce cas, les fréquences calculées n'ont pas une grande valeur statistique, mais elles donnent malgré tout une idée de la répartition des productions des élèves.

Nous n'aborderons pas les problématiques des élèves en grande difficulté scolaire. Le Ministère de l'Éducation Nationale qualifie ainsi les élèves « *qui, à un moment de leur scolarité, sont en échec, ou considérés en échec, dans leur parcours d'apprentissage et ne parviennent pas à approcher les compétences attendues* »[23]. Les difficultés de ces élèves dépassent largement le champ des mathématiques. Elles ne rentrent donc pas dans notre champ d'étude.
Ce sont les difficultés des élèves qui sont liées aux notions de discret et continu qui nous intéressent, dans le cas d'élèves ayant une scolarité dans un contexte (social, culturel, familial, de santé…) sans grande particularité.

Ainsi, nous avons choisi les élèves avec lesquels effectuer les entretiens selon les critères suivants :

- Ils se sont montrés sérieux au long de l'année : ils ont fait le travail demandé, ont été attentifs en cours ;
- Leurs notes montrent qu'ils réussissent convenablement en mathématiques dans l'ensemble mais ont des difficultés avérées en ce qui concerne les suites ;
- Ils sont motivés par le fait de passer du temps en entretien afin de revenir sur les difficultés qu'ils ont eues et de mieux réussir (leur Terminale lorsqu'ils sont en Première, le Bac lorsqu'ils sont en Terminale).

Compte tenu du côté diffus des notions de discret et de continu dans les mathématiques à enseigner, nous avons inclus des analyses « du côté des enseignants » concernant leurs pratiques, leurs conceptions du discret et du continu à travers l'enseignement de l'analyse et des probabilités.
Ainsi, nous avons analysé les réponses de futurs enseignants, étudiants en Master MEEF, à des questions ciblées sur les suites et les fonctions.
Concernant les enseignants en exercice, nous avons joué sur un large spectre de données adaptées à ce que nous recherchons : un questionnaire sur leur enseignement des fonctions ainsi que l'analyse d'une séance en classe et d'un échantillon de capsules vidéo sur internet qui ont pour thème l'introduction aux probabilités continues.

Les manuels et les énoncés d'examens nationaux sont, à la fois, des ressources pour les enseignants et produits par des enseignants. En cela, les manuels et les énoncés d'examens nous renseignent à la fois sur les mathématiques à enseigner et sur les pratiques et les conceptions des enseignants.

Le sujet de recherche étant nouveau, et les questions posées dans le cadre de ce travail étant vastes, il nous a semblé important que les données proviennent de sources variées et larges. Il n'y a pas de souci d'exhaustivité dans nos choix, un objectif d'exhaustivité nous semble par ailleurs illusoire à ce stade de notre recherche.

[23] Rapport n°2013 – 095 de novembre : *2013 Le traitement de la grande difficulté au cours de la scolarité obligatoire.*

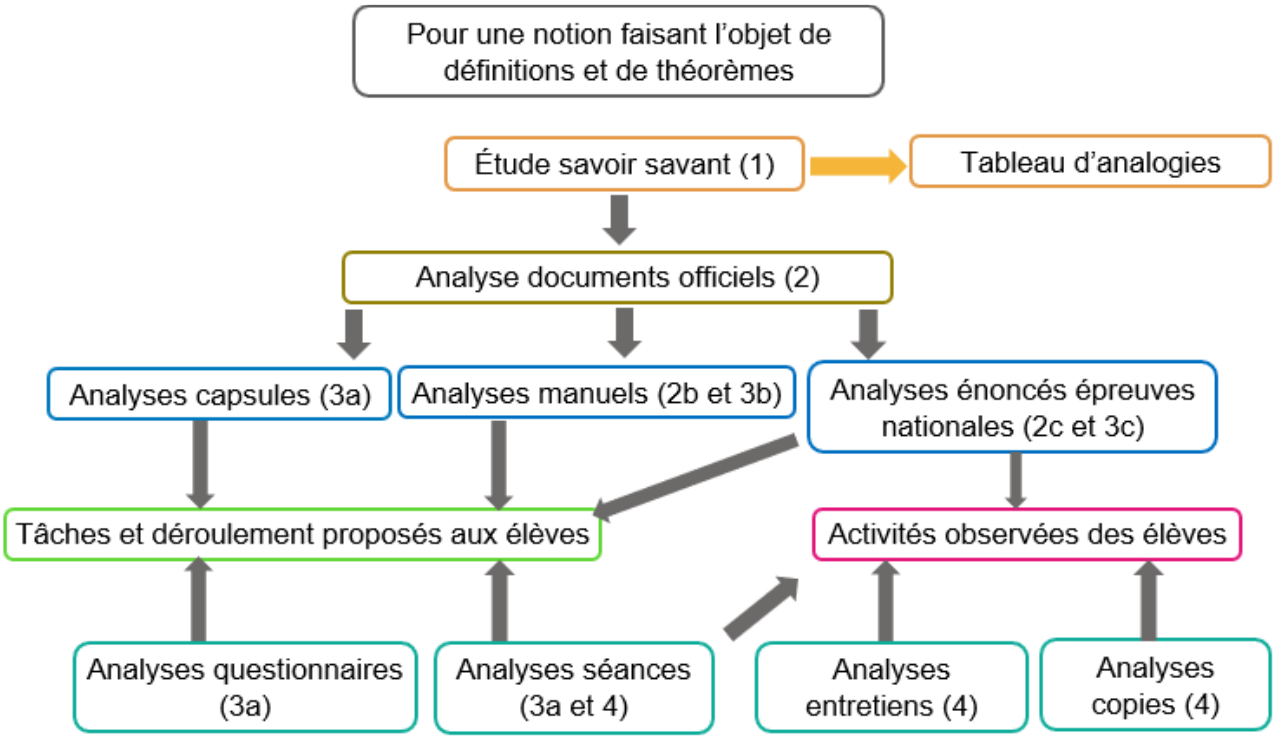


Diagramme récapitulatif de la méthodologie

Légende :
Le savoir savant (1)
Le savoir à enseigner (2) : documents officiels (a) ; manuels (b) ; épreuves nationales (c)
Les tâches et déroulements proposés aux élèves (3) : enseignants (a) ; manuels (b) ; épreuves nationales (c)
Les activités observées des élèves (4)

Explications :
Pour une notion faisant l'objet de définitions et de théorèmes dans le programme officiel :
L'étude du savoir savant (1) permet de chercher les analogies, correctes, erronées ou absentes, entre des notions, des techniques sur les suites et les fonctions d'une part, les variables aléatoires discrètes et continues d'autre part.
Les flèches signifient « est nécessaire en vue de ».
Ainsi, l'étude du savoir savant sur une notion permet l'analyse des documents officiels (2a) concernant cette notion. Soulignons que nos analyses de documents officiels concernent le collège et le lycée général et s'arrêtent à 2017.
Ces analyses permettent celles de manuels, d'énoncés d'épreuves nationales qui complètent l'analyse du savoir à enseigner sur cette notion particulière (2b et c).
Les manuels et les épreuves nationales renseignent aussi sur ce qui est proposé aux élèves (3 b et c) mais aussi sur les pratiques des enseignants qui en sont les concepteurs (3a).
L'étude sur ce qui est proposé aux élèves est complétée à travers des analyses de capsules internet qui sont courtes vidéos de cours, de questionnaires aux enseignants, de séances en classe (3a).
Les analyses le sont en termes d'analyse de tâches (au sens large, incluant les expositions de connaissances), particulièrement de mise en fonctionnement des connaissances des élèves, avec une attention particulière sur les changements de cadre, de registre, de point de vue, sur le discours concernant de près ou de loin le discret et le continu. Mais aussi en termes de déroulement s'il y a lieu (c'est le cas des séances d'enseignement, des capsules internet).
Nous accédons aux difficultés des élèves et aux points sur lesquels on peut s'appuyer en termes de connaissances anciennes, de conceptions spontanées, par le biais d'analyses de séances, d'entretiens et de copies (4).
Dans chaque partie, nous mettrons en vert les types d'analyses de données effectuées.

III. Fonctions, suites

A. Notions de fonction, de représentation graphique d'une fonction, en collège et en classe de Seconde

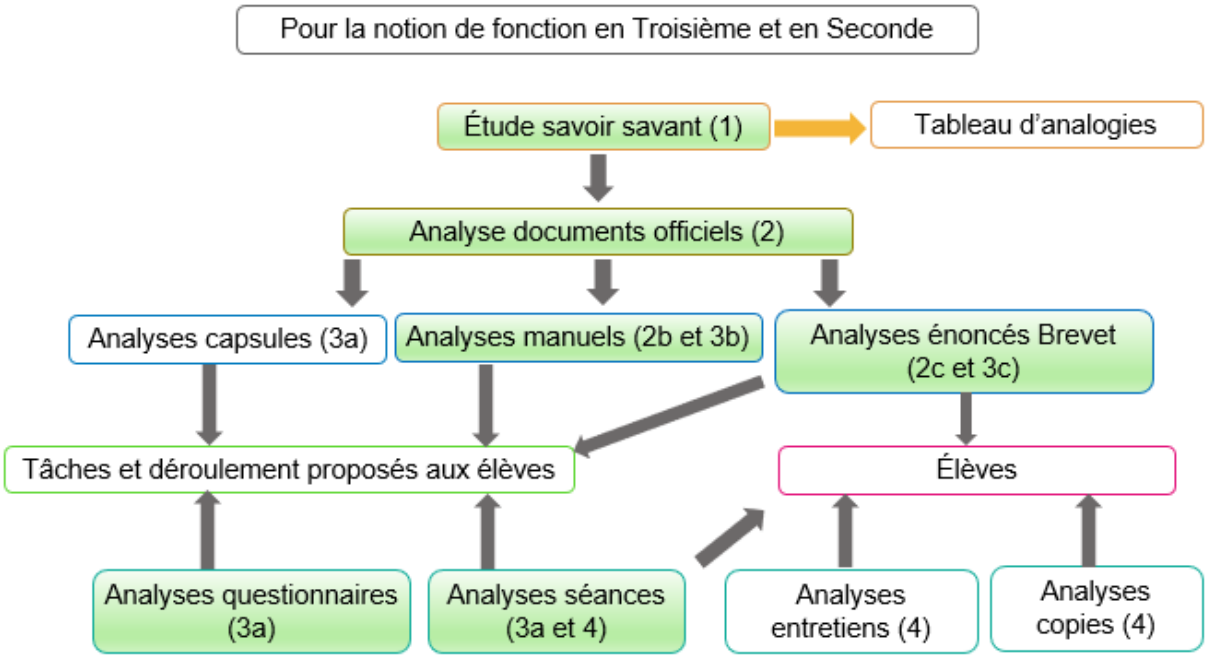


Diagramme récapitulatif de la méthodologie de la partie III A : Étude de la notion de fonction en Troisième et en Seconde

Dans la partie III A, pour plus de simplicité, le mot « courbe » désigne la représentation graphique, dans un repère de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous verrons qu'il s'agit de l'acception la plus courante du mot « courbe » dans les mathématiques enseignées au collège et au lycée.

1. Dans les mathématiques à enseigner au collège et en seconde générale

Nous allons brièvement analyser dans les programmes et quelques manuels de collège et de classe de seconde des vingt dernières années la façon dont la fonction et sa représentation graphique sont introduits ainsi que les types de tâches qui y sont préconisées. La mise en perspective des différentes approches officielles et l'étude de leur évolution nous permet de mieux souligner les caractères discret et continu de ces approches ainsi que les interactions entre les mondes du discret et du continu qu'elles permettent, encouragent (ou pas).

A ces niveaux d'enseignement, la continuité d'une fonction n'est pas abordée ; cependant, la façon dont la notion de fonction et sa représentation graphique sont introduites, les tâches dans lesquelles les fonctions sont outil, les types de nombres mobilisés (entiers, rationnels…) contribuent à conférer un caractère discret ou continu à cette notion.

Nous nous poserons la question de savoir si la fonction est introduite en tant qu'objet. Dans ce cas, quelle est (quelles sont) la (ou les) définition(s) proposée(s) ? Quelles propriétés en sont étudiées ?
Est-elle introduite en tant qu'outil ? Dans ce cas, outil de résolution de quel type de tâche ?
Quelle incidence ce mode d'introduction peut-il avoir sur le caractère discret ou continu qui peut lui être attribué par l'élève ?

Vandebrouck (2011) propose d'analyser le domaine de travail des fonctions à la transition lycée-université à travers le filtre de trois perspectives :

- La perspective globale qui met en jeu les propriétés de la fonction sur un intervalle (par exemple la continuité ou la dérivabilité sur un intervalle, le sens de variation) ;
- La perspective locale qui met en jeu les propriétés de la fonction « *sur un voisinage d'un point aussi petit soit-il* » (par exemple la continuité ou la dérivabilité en un point) ;
- La perspective ponctuelle, qui ne met en jeu que la valeur de la fonction en un point. Certaines propriétés globales sont ponctuelles universelles (par exemple la parité, la périodicité, la croissance par positivité de la dérivée).

Au niveau d'enseignement que nous considérons ici, seules les perspectives ponctuelle et globale sont présentes, les propos qui suivent ne font par conséquent pas référence à la perspective locale.
La représentation graphique d'une fonction est porteuse à la fois des perspectives ponctuelle et globale au collège et au lycée. Par exemple, elle est un ensemble de points, elle permet de lire des images et antécédents, de résoudre des équations, ce qui relève de la perspective ponctuelle. Elle permet aussi de conjecturer le sens de variation ou la convexité, de résoudre des inéquations, de chercher un extremum absolu, ce qui relève de la perspective globale.
Il nous parait raisonnable de faire l'hypothèse que la perspective ponctuelle véhicule un caractère exclusivement discret ; que le continu ne peut être véhiculé que par la perspective globale à ce niveau d'enseignement. Nous appuierons en partie nos analyses sur ce filtre.

Une question de notre travail concernant le discret et le continu sur le thème des fonctions se pose, dans le cadre graphique, dès lors qu'un nombre fini de points de la représentation graphique d'une fonction est placé dans un repère. Relie-t-on alors les points ? Pourquoi ? Si oui, comment ? Par des segments de droite, par une courbe de fonction de classe C^1 (ce que certains auteurs de manuels qualifient de « façon régulière et continue » et qui revient aux courbes « lissées » sur les tableurs) ?

Nous porterons aussi une attention particulière au caractère discret ou continu des ensembles de définition des fonctions abordées ; aux glissements éventuels d'ensembles discrets de nombres à des intervalles de $\mathbb{R}$; aux utilisations des courbes de fonctions continues ou continues par morceaux dans des contextes discrets. Nous relèverons le type de nombres (entiers ou pas) utilisés par les manuels dans les activités préparatoires, dans les expositions de connaissances et les exercices sur le thème des représentations graphiques de fonctions.

a) Les programmes de Troisième et de Seconde depuis 1999

Lors de la réforme des mathématiques modernes, les fonctions sont définies dès la classe de cinquième par un processus de correspondance, donc dans une perspective ponctuelle. Les ensembles de départ et d'arrivée sont finis. Les fonctions sont dans le monde du discret.
En classe de quatrième, l'ensemble $\mathbb{R}$ est introduit et les ensembles de définition des fonctions sont étendus à des ensembles infinis, dont $\mathbb{R}$; le graphe d'une fonction f définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F est défini en tant qu'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y = f(x)$.
En classe de Troisième, la notion de représentation graphique d'une fonction est introduite sur le cas particulier des fonctions linéaires et affines ; cette notion embarque une perspective globale d'autant plus porteuse de caractère continu que la représentation graphique est une droite.

Les programmes officiels qui se sont succédés depuis la réforme des mathématiques modernes ont modifié l'approche de la notion de fonction.
Pour une meilleure mise en perspective de l'évolution des notions de fonction et de représentation graphique d'une fonction, et en vue d'une meilleure compréhension de l'approche actuelle, examinons les éléments des programmes de collège, puis de la classe de seconde, faisant référence aux fonctions et leurs représentations graphiques d'un passé plus récent.

Dans ce qui suit, nous analysons les programmes officiels depuis 1999, dans lesquels les notions de fonctions et de représentation graphique de fonction sont introduites formellement en classe de Troisième. Par contre, la notion de graphe d'une fonction est absente.

i. Le programme officiel de 1999 pour la classe de Troisième

Dans ce programme[24], la notion de fonction n'est abordée que dans le contexte des fonctions linéaires et affines. Celles-ci sont définies selon un processus de correspondance. Ce type de définition relève de la perspective ponctuelle, elle est porteuse du caractère discret.
Les recherches d'image et d'antécédent (ce dernier n'est pas nommé, il est décrit comme « le nombre ayant une image donnée ») occupent une place importante, tant dans le registre algébrique que le registre graphique.
Le programme officiel ne comporte pas de définition de la représentation graphique de fonction. Cependant, la représentation graphique y fait l'objet de nombreux « *commentaires* » décrivant des types de tâches attendues :

- Lecture de coordonnées de points (qui relève de la perspective ponctuelle) ;
- Interprétation graphique des coefficients de la fonction affine (qui relève des perspectives ponctuelle et globale) ;
- Lecture de sens de variation, d'extremum de la fonction (qui relève de la perspective globale).

Les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines font aussi l'objet d'une activité de démonstration ; ainsi, il y est écrit, dans les commentaires page 112 : « *L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine […] La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée.* »
La propriété : « la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine » se démontre à ce niveau par condition nécessaire et suffisante.
La condition : « tout point $M(x;y)$ appartenant à la droite passant par O et par le point A de coordonnées $(1;a)$ est tel que $y=ax$ » se démontre aisément avec le théorème de Thalès dans le cas où x et a sont positifs.

La réciproque s'énonce comme suit : « pour tout nombre (réel) x, si $y=ax$ et si $M(x;y)$ alors M appartient à la droite passant par O et A ». Elle peut se démontrer de la façon suivante : le point d'abscisse x de la droite (OA) a pour ordonnée ax d'après le sens direct. C'est le point M, qui est donc sur (OA). Ce raisonnement nécessite la propriété : « pour tout x (de la droite réelle) il existe un point et un seul de (OA) d'abscisse x ».
Cela fait intervenir :

- Une bijection de l'ensemble des réels sur l'axe des abscisses (qui à tout réel associe le point d'abscisse ce réel) ;
- Une bijection de l'axe des abscisses sur la droite (OA) qui à tout point de l'axe des abscisses associe le point de la droite (OA) de même abscisse. Dans le cadre géométrique, cette bijection implique que la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(x;0)$ coupe la droite (OA) en un et un seul point.

Pour conclure la démonstration, sur un graphique, l'enseignant peut montrer par un double geste (continu) que lorsque x décrit la droite réelle représentée par l'axe des abscisses, les points de (OA) d'abscisse x décrivent (OA).

Les deux sens de cette démonstration mobilisent un jeu de cadre entre les cadres géométrique, graphique et algébrique. Selon la classification de Vandebrouck (2011), elle se situe dans une perspective ponctuelle universelle. Cependant, la droite, dans le cadre géométrique, embarque le monde du continu et avec elle le continu des nombres réels représentés sur l'axe des abscisses. De ce point de vue, la démonstration de la réciproque est particulièrement riche.

[24] Bulletin officiel n°10 du 15 octobre 1998

Le programme de 1999 demande d'utiliser une translation pour « obtenir » la représentation graphique d'une fonction affine à partir de celle de la fonction linéaire associée. La translation transforme les droites en droites. La représentation graphique d'une fonction affine est donc elle aussi une droite, un objet continu.

Par ailleurs, dans les « *compétences* » exigibles sur la proportionnalité du même programme officiel, il est écrit page 113 :

> *« Dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre,*
> - *Représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative,*
> - *Lire et interpréter une telle représentation.* »

Les représentations graphiques sont donc présentées comme des outils de gestion de données pour l'étude de phénomènes dans lesquels une grandeur est fonction d'une autre.
Remarquons qu'il est difficile de comprendre ce que le programme officiel entend par représenter graphiquement « *d'une façon exacte* » ou « *d'une façon approximative* ».
Et dans le cas de grandeurs discrètes, comment ce programme suggère-t-il de représenter graphiquement la situation ? Par un ensemble discret de points ou par une (demi) droite ?

ii. Le programme du collège de 2005 pour les classes de 5e et de 4e

Le Bulletin Officiel n° 5 du 25 aout 2005 apporte des modifications aux programmes des classes de 5e et de 4e. L'alignement de points sur une droite, dans le cadre graphique, apparait dans la colonne des « *compétences* » (celle du milieu) comme un outil de caractérisation de la proportionnalité de deux « *suites* » de nombres en classe de 4e :

Représentations graphiques [Thèmes de convergence]	- Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine. *[SVT, Histoire, Géographie, Physique, Technologie]*	Les élèves travaillent sur des exemples de situations de proportionnalité et de non proportionnalité. Ils peuvent démontrer que si les points sont alignés avec l'origine, alors il y a proportionnalité entre les suites définies par les abscisses et les ordonnées de ces points. La réciproque est admise. Cette propriété caractéristique de la proportionnalité prépare l'association, en classe de troisième, de la proportionnalité à la fonction linéaire.

Extrait du Bulletin Officiel du 25 aout 2005 page 17

Les points dont il est question peuvent être en nombre fini ou infini, voire former un ensemble continu. Ainsi, le mot « suite » est utilisé ici pour des listes de nombres qui peuvent être finies comme infinies - ce qui n'exclut pas des ensembles continus de nombres. Pour cette raison, ce mot ne nous parait pas approprié.

Dans les « *commentaires* » (colonne de droite), il est écrit que les élèves *« peuvent démontrer que si les points sont alignés avec l'origine alors il y a proportionnalité entre les suites définies par les abscisses et les ordonnées de ces points. La réciproque est admise. Cette propriété caractéristique de la proportionnalité prépare l'association, en classe de 3e, de la proportionnalité à la fonction linéaire*. »
La démonstration que ce programme propose de faire avec les élèves est celle du sens direct de la propriété étudiée au paragraphe précédent.

En juillet 2005, un document « *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège* », intitulé « *Proportionnalité au collège* », est édité par Éduscol. Page 4, on peut lire :

> « *Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, au domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction – définie, elle, sur l'ensemble des (réels) –dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).* »

Ce document invite les enseignants en classe de 3e, dans ce passage,

- À considérer que la fonction utilisée pour modéliser la situation de proportionnalité étudiée est définie sur $\mathbb{R}$;
- À questionner avec les élèves le « *domaine d'adéquation* » de ce modèle continu avec le phénomène étudié. Ce « *domaine* » dépend de l'ensemble des valeurs prises, théoriquement, par les mesures des

grandeurs dans la situation étudiée ; à ce niveau d'enseignement, il peut s'agir d'un intervalle (exprimé par une locution du type « tous les nombres entre… » ou « tous les nombres supérieurs ou égaux à… ») ou d'un ensemble discret de valeurs (fini ou non).

iii. Le programme du collège de 2008

Le Bulletin Officiel n°6 du 28 aout 2008 édite de nouveaux programmes pour toutes les classes de collège.
En classe de 4e, ce qui concerne la proportionnalité dans le cadre graphique est modifié comme suit :

- Le « *commentaire* » sur la démonstration de l'alignement des points disparait ;
- Le reste du contenu est conservé mais passe hors socle commun.

Le support continu que constitue la droite subsiste donc mais n'est plus mobilisé dans une activité de démonstration. Le jeu de cadres entre les cadres géométrique, graphique et algébrique, sollicité par la démonstration de l'alignement des points disparait.

En classe de 3e, les fonctions sont introduites en tant que notion à part entière, dégagée des notions de fonctions linéaires et affines, à étudier hors socle commun. Dans les « *commentaires* » il est précisé que « *toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme* ».
Alors quelle(s) définition(s) d'une fonction est envisagée ? Une piste de réponse se trouve dans les « *capacités* » attendues des élèves concernant les notions d'image et d'antécédent : « *déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule*. »
Or si une courbe ou une formule permettent de définir une fonction, ce n'est pas le cas d'un tableau de données – à moins que l'ensemble de départ soit fini ou que le type de la fonction soit connu (et que la fonction dépend d'un nombre fini de paramètres).
Ce programme vise-t-il des fonctions dont l'ensemble de définition est fini ? Compte tenu de l'extrait du document « *Ressources* » de 2005 cité ci-dessus qui incite à modéliser les phénomènes par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, nous en doutons. Les élèves ne disposant pas de fonction de référence, il ne s'agit pas non plus de fonctions de type connu.
Il s'agirait donc d'un prolongement implicite du discret fini au continu.

Le programme de 2008 comporte des « *capacités* » attendues, hors socle commun, sur les représentations graphiques de fonctions linéaires et affines. Les élèves doivent savoir représenter graphiquement les fonctions linéaires et affines ; connaitre la relation entre les coordonnées $(x; y)$ d'un point d'une droite que constitue l'équation réduite de la droite et savoir que cette relation est caractéristique de l'appartenance du point à la droite. Le vocabulaire de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine fait partie des connaissances attendues hors socle commun.
Notons que les démonstrations concernant les représentations graphiques de fonctions linéaires et affines ne sont pas mentionnées par ce programme officiel.

iv. Le programme de 2015 pour le cycle 4

Le Bulletin Officiel du 26 novembre 2015 définit le programme pour l'ensemble du cycle 4, c'est-à-dire pour les classes de 5e, 4e et 3e.
Chaque thème est décliné en deux colonnes : celle de gauche correspond aux « *connaissances et compétences associées* » au thème ; celle de droite correspond aux « *exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève* ». Les thèmes (en gras) comme les sous-thèmes sont énoncés par des verbes d'action à l'infinitif : les notions mathématiques sont des outils de résolution de problèmes.

Résoudre des problèmes de proportionnalité	
Reconnaitre une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.	Étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ; ces relations peuvent être exprimées par : » des formules (par exemple la longueur d'un cercle ou l'aire d'un disque comme fonction du rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension comme fonction de l'intensité) ; » des représentations graphiques (par exemple des nuages de points ou des courbes) ; » un tableau (dont des lignes ou des colonnes peuvent être proportionnelles ou non).

Extrait du Bulletin Officiel du 26 novembre 2015 page 372

En collège, la proportionnalité ou non-proportionnalité entre deux grandeurs peut ainsi être, selon le terme employé par le Bulletin Officiel, « *exprimée* » dans le cadre algébrique, le cadre graphique ou le cadre numérique (avec le registre des tableaux de valeurs).
Les exemples concrets qui y sont mentionnés mobilisent des grandeurs continues. Remarquons que, cependant, l' « expression » de la relation entre les grandeurs, dans le cas d'une représentation d'un nuage de points ou d'un tableau de valeurs, se situe dans le discret fini.

Comprendre et utiliser la notion de fonction	
Modéliser des phénomènes continus par une fonction. Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations). » Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. » Notion de variable mathématique. » Notion de fonction, d'antécédent et d'image. » Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$. » Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.	Utiliser différents modes de représentation et passer de l'un à l'autre, par exemple en utilisant un tableur ou un grapheur. Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite. Etudier et commenter des exemples (fonction reliant la tension et l'intensité dans un circuit électrique, fonction reliant puissance et énergie, courbes de croissance dans un carnet de santé, tests d'effort, consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse, production de céréales en fonction des surfaces ensemencées, liens entre unités anglo-saxonnes et françaises, impôts et fonctions affines par morceaux…). Faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

Extrait du Bulletin Officiel du 26 novembre 2015 page 373

Les fonctions y sont décrites comme des outils de modélisation de phénomènes continus qui permettent de résoudre des problèmes. Ce programme marque l'abandon de la modélisation d'un phénomène discret par un objet du monde du continu et par conséquent la nécessité de questionner le « *domaine d'adéquation* » du modèle.
Par ailleurs, il préconise d'aborder la notion de fonction dès la classe de 5e, par l'étude de « *relations de dépendance entre grandeurs mesurables* ». Il donne une liste de huit exemples à « *étudier et commenter* », dans lesquels les grandeurs sont continues.
Les modes de définition d'une fonction envisagés dans le programme de 2008 (par une courbe, un tableau de données, une formule) ne sont plus mentionnés. Aucune définition de la notion de fonction n'est proposée. Par contre, ce programme préconise le jeu entre « *différents modes de représentation* ».
Les notions d'image et d'antécédent sont toujours présentes. Cependant, elles n'ont pas la place prépondérante qu'elles tenaient dans les deux programmes officiels précédents. Les fonctions n'apparaissent plus seulement comme un « *processus de correspondance* » entre des valeurs numériques (qui relève de la perspective ponctuelle), mais aussi comme un outil de modélisation de la dépendance de deux grandeurs continues mesurables (qui relève de la perspective globale, dans le monde du continu) : la fonction « *relie* » les deux grandeurs. Par voie de conséquence (du moins pouvons-nous le supposer), la notion de variable

mathématique figure dans les « *connaissances et compétences* » attendues, en amont de celles d'image et d'antécédent. Sans pour autant en proposer une définition.

Par rapport au programme précédent, le contexte d'étude de phénomènes continus amplifie la perspective globale des fonctions ; la démonstration de la nature de la représentation graphique d'une fonction linéaire disparait totalement et avec elle le continu de la droite dans le cadre géométrique. Les représentations graphiques des fonctions sont cependant toutes des courbes (au sens défini en préambule de cette partie). Les tâches de recherches d'images et d'antécédents ne sont pas exclues, elles n'occupent cependant plus la place qu'elles avaient auparavant. L'étude des fonctions s'inscrit donc dans le monde du continu.

v. Conclusion concernant les programmes de collège depuis 1999

En 1999, la fonction linéaire est la première fonction rencontrée par les élèves, en classe de Troisième, suivie par la fonction affine. Les fonctions font donc d'emblée partie du monde du continu. Un travail sur les notions d'image et d'antécédant est attendu, dans les cadres algébrique et graphique.
La modélisation d'un phénomène discret par une fonction continue peut donner lieu à une discussion sur ce que le document ressource de 2005 nomme le « domaine d'adéquation » de ce modèle continu.

Dans les deux programmes officiels suivants de 2008 et de 2015, la notion de fonction est introduite dans une relative généralité, dégagée du cas particulier des fonctions affines.
En 2008, les fonctions doivent être « *déterminées par une courbe, un tableau de données ou une formule* » ; la fonction apparait comme un « *processus de correspondance* ». D'après notre analyse supra, ces fonctions sont implicitement définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$; dans le cas de leur « détermination par un tableau de données », elles correspondent à un prolongement implicite du discret fini au continu.
Les notions d'image et d'antécédent sont les seules pour lesquelles des « *capacités* » sont attendues des élèves.
Le cas particulier des fonctions linéaires et affines tient tout de même une place prépondérante ; elles doivent être travaillées dans les cadres algébrique et graphique.
Dans le prolongement du programme de 2008, les fonctions sont à nouveau introduites dans une relative généralité dans le programme de 2015. Elles apparaissent comme un outil de modélisation de phénomènes continus, complété par leur aspect « *processus de correspondance* ». Elles s'inscrivent donc davantage dans le monde du continu.

Depuis 1999, la démonstration concernant la nature de la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine a progressivement disparu des programmes officiels ; et avec cette démonstration, les jeux de cadres géométrique, graphique, algébrique autour de la droite, qui est un support intuitif du continu d'après la première partie de ce travail. Ces jeux de cadres permettent au continu de la droite dans le cadre géométrique et au discret de la droite comme ensemble de points dans un repère d'interagir au sein d'une même activité mathématique.
On peut supposer, et cela reste à voir dans les manuels et les pratiques des enseignants, que cette démonstration est remplacée par une mise en évidence sur des exemples de l'alignement de points dont les coordonnées sont proportionnelles : des tableaux de valeurs comportent des coordonnées de points dont les abscisses sont « simples » - voire entières - une constatation de l'alignement ou du non alignement de ces points est faite à l'aide une règle.
Si les points sont alignés, il ne reste plus qu'à « glisser » du discret fini (points en nombre fini, tableau de valeurs en nombre fini) au continu (de la droite, de $\mathbb{R}$). Dans le cadre graphique, on relie les points en traçant une droite ; dans le cadre algébrique, l'égalité qui traduit la proportionnalité des abscisses et des ordonnées des points en nombre fini se prolonge « naturellement » à une égalité dans $\mathbb{R}^2$.

De ce point de vue, le programme officiel de 2008 semble considérer que tout tableau de valeurs peut caractériser une fonction au même titre qu'une formule algébrique ou une courbe. Dans ces conditions, le continu est-il perçu comme tel (au moins dans son sens intuitif) par les élèves ? Après tout, ce « glissement » du discret fini au continu pourrait induire chez eux une vision discrète des courbes dans cadre graphique et le contexte des fonctions, qui pourrait être renforcée par la prédominance, dans les exemples et exercices, de l'utilisation de points à abscisses (voire ordonnées) entières.

Lorsqu'on connait un nombre fini de points d'une représentation graphique d'une fonction, la question de savoir si on les relie, et si oui de quelle manière, serait-elle devenue obsolète au collège ? Le dernier programme officiel en date évite la question de savoir si on les relie en proposant (implicitement) que les fonctions vues en collège soient continues.

Plus généralement, d'objet mathématique, la fonction et sa représentation graphique sont progressivement envisagées par les programmes officiels comme un outil d'étude de phénomènes, discrets ou continus dans un premier temps, puis uniquement continus depuis 2015.
Les jeux discret/continu au sein d'activités de modélisation ont eux aussi progressivement disparu, au profit d'un « tout continu ».

vi. Le programme de 2001 pour la classe de Seconde

La notion d'intervalle est abordée pour la première fois à ce niveau d'enseignement. Le programme de la classe de Seconde publié au Bulletin Officiel n°2 du 30 aout 2001, dans les « *capacités attendues* » concernant le « *contenu* » dénommé « *ordre des nombres* » stipule de « *caractériser les éléments d'un intervalle et les représenter* ».
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ figurent dans les « *contenus* » de ce programme officiel. Dans les « *commentaires* » qui s'y rapportent, l'ensemble des réels est défini en tant qu' « *ensemble des abscisses des points d'une droite* ».
L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses intervalles sont ainsi « définis », dans le cadre graphique, par le biais de la droite réelle et de ses segments, supports intuitifs du continu. Les intervalles peuvent être définis de surcroit, dans le cadre algébrique, par des doubles inégalités.

La première « *capacité attendue* » sur les fonctions est d' *« identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule* ». Les trois modes de définition d'une fonction proposés seront les mêmes, au mot près, dans le programme de 3e de 2008. Les « *commentaires* » associés proposent de montrer aux élèves « *quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini* ». Dans ce contexte, on peut comprendre qu'une fonction puisse être caractérisée par un tableau de données.

Le premier « *commentaire* » de ce programme sur les fonctions est une injonction à étudier « *des situations issues de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques* ». L'étude de phénomènes en les modélisant par des fonctions apparait comme un objectif principal de ce programme.

Le « *contenu* » de l'intitulé « *étude qualitative d'une fonction* » concerne les notions de sens de variation et d'extremum d'une fonction sur un intervalle (notions qui relèvent de la perspective globale), dans le prolongement du programme de 3e de 1999. Par conséquent, les notions de sens de variation et d'extremum ne sont pas à étudier dans le cas de fonctions définies sur un ensemble fini.

Les aspects de dépendance de deux variables (qui relève de la perspective globale) et de « processus de correspondance », décrit dans ce programme par les mots de « *boite noire* », (qui relève de la perspective ponctuelle) cohabitent largement en 2001, pour la notion de fonction.

vii. Le programme de 2009 pour la classe de Seconde

Les « *capacités attendues* » et les « *commentaires* » associés de 2001 se retrouvent, au mot près, dans le Bulletin Officiel n°30 du 23 juillet 2009 qui publie les programmes de 2009. En plus d'exemples de fonctions définies sur un ensemble fini, le programme propose de montrer aux élèves des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$. Remarquons que de tels exemples peuvent préparer les élèves à l'étude des suites qui figurent alors au programme de la classe de Première.

Dans le préambule sur les fonctions, ce programme précise que l'objectif de l'étude de ce thème en classe de Seconde est de résoudre des problèmes. Il y est écrit que la résolution de problèmes « *vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en*

particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées ». Les nombres non entiers devraient donc être davantage mobilisés et les questions d'approximation davantage présents lors de la résolution de problèmes ; nous y serons attentive dans l'analyse des manuels.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ ne sont plus mentionnés que dans une rubrique à la fin du document, page 10, intitulée « *notations mathématiques* ». Il y est écrit que les élèves « *doivent savoir […] utiliser la notation des ensembles de nombres et des intervalles* ». Les intervalles, comme les ensembles de nombres, figurent donc dans ce programme, en tant que notation – par conséquent uniquement en tant qu'outil.

viii. L'aménagement du programme de la classe de Seconde de 2017

Cette rubrique est reprise mot pour mot dans La circulaire n° 2017-082 du 2 mai 2017 qui aménage le programme de 2009 dans le but affiché de « *tenir compte des nouveaux programmes de cycle 4*[25] ».

La circulaire réaffirme que la résolution de problème est l'objectif de l'étude des fonctions, en prenant appui sur les acquis du collège concernant la modélisation de phénomènes continus (donc par des fonctions continues) et la résolution de problèmes mobilisant ces modélisations. Les problèmes peuvent être issus de la géométrie, des sciences autres que mathématiques, ou encore de la vie courante. Les résolutions de problèmes doivent mener à celles d'équations et d'inéquations, à la recherche d'extremum.

Le tableau de données fait partie de ce que la circulaire nomme « *les différents cadres de définition d'une fonction* ». Les fonctions devant être des outils de modélisation de phénomènes continus, elles ne peuvent pourtant pas être définies par un tableau de valeurs.
Dans cet aménagement de programme, la notion d'ensemble de définition d'une fonction disparait des « *contenus* », « *capacités attendues* » et « *commentaires* ». La monotonie d'une fonction est abordée explicitement pour les fonctions définies sur un intervalle, les fonctions à étudier sont les fonctions affines, du second degré et inverse. Il n'est fait aucune mention de fonctions définies sur une ensemble fini ou dénombrable.

Tout se passe comme si les fonctions étaient *de facto* des objets définis sur des réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$, intervalles qui n'ont par ailleurs pas le statut d'objet mathématique puisqu'ils ne sont qu'une notation mathématique.
Les suites peuvent alors difficilement apparaitre comme des fonctions particulières.
Le tableau de données est malgré tout maintenu dans son statut d'outil de caractérisation d'une fonction.

ix. Conclusion sur les programmes de Seconde depuis 2001

En 2001, les fonctions à étudier en classe de Seconde ont un ensemble de définition qui peut être discret fini ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$. Le programme officiel de 2009 rajoute le cas des fonctions définies sur $\mathbb{N}$. Dans le dernier aménagement de programme de mai 2017, l'étude des fonctions définies sur un ensemble discret est abandonnée. Implicitement, seule l'étude de fonctions définies sur des réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ subsiste.

En 2001, l'ensemble des réels et ses intervalles doivent encore être travaillés en tant qu'objets. Depuis 2009, l'ensemble des réels et ses intervalles n'apparaissent plus qu'en tant qu'outils.
Conjointement, l'ensemble de définition d'une fonction disparait en tant qu'objet mathématique. Le tableau de valeurs, qui relève du discret fini, apparait comme pouvant caractériser une fonction définie sur une réunion finie d'intervalles. Comme nous l'avons développé supra concernant les programmes du collège, ce raccourci est erroné dès lors que la fonction n'est pas une fonction de référence connue des élèves. Dans le cadre graphique, ce raccourci revient à dire que la donnée d'un nombre fini de points d'une courbe permet de tracer cette courbe.

[25] Site education.gouv.fr consulté le 9 juin 2018 à l'adresse :
http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=115984

La notion de fonction ne figure aujourd'hui officiellement plus qu'en tant qu'outil de modélisation permettant de résoudre des problèmes issus de phénomènes continus.

Les jeux entre discret et continu disparaissent donc du thème des fonctions, pour un « tout continu » implicite, à la fois dans les notions mathématiques utilisées et les phénomènes qu'ils modélisent.

Aujourd'hui, la fonction, telle qu'officiellement introduite en fin de collège et étudiée en classe de Seconde, a d'emblée quadruplement des aspects continus :

- Elle est généralement définie sur un intervalle (rarement une réunion finie d'intervalles) de $\mathbb{R}$;
- Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Elle est (la plupart du temps) continue ;
- Elle est un outil de modélisation de phénomènes continus.

b) Quelques manuels de Troisième depuis 1999, récents énoncés de Brevet

i. Manuel « Transmath » de 2003, classe de Troisième, édition Nathan (programme de 1999)

Ce manuel comporte deux chapitres sur les fonctions : le premier concerne les fonctions linéaires et le deuxième les fonctions affines. Pour les analyses détaillées de ces deux chapitres, consulter l'annexe 2.

Dans les deux chapitres, nous pouvons constater une nette prédominance des nombres entiers : ils sont presque exclusivement mobilisés dans les « activités » d'introduction ; dans les exercices qui étudient des situations discrètes ou continues, ils côtoient de rares décimaux et des fractions (simples) ; les exercices qui se situent dans le cadre algébrique comportent quelques calculs avec des fractions simples elles aussi.

Les phénomènes étudiés sont essentiellement discrets. Les quelques phénomènes continus trouvent leur place en approfondissement dans des contextes géométriques et (plus rarement) cinématiques.

Nous avons trouvé deux exercices étudiant des phénomènes dont les grandeurs ont des mesures entières et où les résultats qui ne tombent pas « juste » nécessitent une interprétation réfléchie.

Le vocabulaire de la modélisation est totalement absent. Cependant, le domaine d'adéquation est abordé dans l'exposition de connaissances sur les fonctions linéaires.

ii. Manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, édition Hachette (programme de 2008)

Le manuel est édité à la suite de la parution du programme de 2008 ; il couvre le thème des fonctions en trois chapitres : le premier des trois introduit les généralités sur les fonctions, le suivant aborde les fonctions linéaires et le troisième les fonctions affines. Pour les analyses détaillées de ces trois chapitres, consulter l'annexe 3.

Le premier chapitre du manuel définit les fonctions sous leur caractère discret de « machine » qui à un nombre fait correspondre un nombre ; les tableaux de valeurs sont fortement présents dans les « activités » et les exercices et comportent essentiellement des nombres entiers en valeurs de départ.

Les représentations graphiques données dans les énoncés sont sans exception des courbes de fonctions continues.
Une « activité » introductrice du premier chapitre problématise clairement la question « Relier ou non les points ; si oui, comment ? » sur l'exemple de la fonction carré. Le tableau de valeurs, dans ce cas, est sollicité

pour des valeurs de la variable qui subdivisent l'intervalle $[0; 1]$ avec un pas de 0,1, et amener les élèves à percevoir l'infinité des valeurs de cet intervalle (précurseur du continu de cet intervalle). Ces préliminaires permettent de trancher entre différents types de graphiques proposés : des points isolés, des points reliés par des segments, des points reliés de façon lisse.
Cette « activité » est une source de réflexion potentielle riche pour les élèves.

Les démonstrations de la nature des représentations graphiques des fonctions linéaires et affines, bien qu'absentes du programme officiel, font l'objet d' « activités » d'introduction.

Au total, cinq exercices comportent des tâches de représentations graphiques de fonctions non affines à effectuer « à main levée », sur papier quadrillé voire millimétré, empruntant le résultat de l' « activité » décrite précédemment. Les extrema des fonctions étant présents dans les tableaux de valeurs, et aucun exemple de fonction non continue sur un intervalle étant présenté, les élèves pourraient en induire que le procédé est correct dans tous les cas.

Les phénomènes étudiés sont continus dans le premier chapitre et la plupart des exercices sur les fonctions linéaires ; les « activités » d'introduction sur les fonctions linéaires et affines, la majorité des exercices sur les fonctions affines relèvent de phénomènes discret (essentiellement des prix en fonction de nombres d'articles achetés ou loués). Les résultats « tombent juste » et ne soulèvent pas de difficulté.

Les questions de modélisation sont présentes dès le premier chapitre, dans lequel le domaine d'adéquation est abordé ; elles sont très présentes dans le chapitre sur les fonctions linéaires.

Les nombres mobilisés sont en majeure partie des entiers ; lors d'étude de phénomènes concrets, les décimaux sont aussi présents ; des fractions simples interviennent dans les exercices relevant du cadre algébrique.

iii. Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, édition Nathan (programme de 2008)

Le thème des fonctions est traité dans ce manuel, comme dans le précédent, en trois chapitres. Pour les analyses détaillées de ces trois chapitres, consulter l'annexe 4

Conformément au programme officiel, les fonctions sont définies de trois façons : par un graphique, un tableau de valeurs ou une formule (la fonction y apparait comme une « *machine à produire des nombres* »). Les représentations graphiques insérées au cours des pages sont toutes des représentations graphiques de fonctions continues ; les tableaux de valeurs et les formules véhiculent un caractère discret ; ainsi les aspects discrets et continus de la fonction cohabitent largement.

D'après un exercice corrigé, l'auteur attend que la tâche consistant à représenter un tableau de valeurs soit effectuée par la représentation des points isolés correspondants.
Deux exercices peuvent permettre une réflexion plus poussée sur la représentation graphique d'un phénomène dont la variable est continue à partir d'un tableau de valeurs et par conséquent la question : « Relier ou non les points ; si oui, comment ? ».
Bien que les démonstrations sur la nature des représentations graphiques des fonctions linéaires et affines soient absentes du programme officiel, elles sont toutes deux présentes dans le manuel ; celle concernant la représentation graphique d'une fonction linéaire est moins porteuse de son caractère continu que la démonstration rencontrée supra. Le discours de l'enseignant qui entoure ces démonstrations, inaccessible dans le cadre de ce travail, a d'autant plus d'importance.

Les phénomènes modélisés par les fonctions sont essentiellement continus.
Les quelques phénomènes discrets abordés concernent le plus souvent des prix en fonction d'un nombre d'articles achetés ou loués, ils sont plus fréquents dans le dernier chapitre sur les fonctions affines ; dans tous les exercices modélisant des phénomènes discrets, les résultats « tombent justes » et n'appellent pas de réflexion sur le modèle ou les résultats qu'il fournit.

Des questionnements au sujet de l'adéquation du modèle sont cependant présents, dans le second chapitre, en rapport avec la positivité des mesures des grandeurs en jeu et non de leur appartenance à un ensemble discret.

Les nombres sollicités sont essentiellement des entiers ; les décimaux sont présents dans les exercices modélisant les phénomènes continus. Les rares fractions et irrationnels interviennent dans les exercices qui se situent dans le cadre algébrique.

iv. Manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième, édition Nathan (programme de 2015)

Comme dans l'édition précédente du manuel « Transmath » que nous venons d'analyser, le thème des fonctions est abordé en trois chapitres. Pour les analyses détaillées de ces trois chapitres, consulter l'annexe 5.

Les différentes « définitions » de la fonction (par une formule, par le graphique, par tableau de valeurs), bien que ne figurant plus au programme officiel, occupent une place importante de la page de l'exposition de connaissances sur les fonctions. La fonction apparait comme une « machine » en « activité » d'introduction et aussi en exercice.
La fonction du point de vue de dépendance d'une grandeur (continue) en fonction de l'autre (continue elle aussi), ainsi que la variable mathématique, sont absents de l'exposition de connaissances, malgré la place que le programme officiel leur fait. L'aspect « association d'une grandeur à une autre » est cependant présent dans les exercices qui suivent.
Malgré les préconisations du programme officiel, les fonctions utilisées dans les trois chapitres analysés modélisent un nombre non négligeable de phénomènes discrets, comparable à celui de l'édition précédente (des exercices dont le contexte est discret sont repris intégralement de cette dernière). Les phénomènes discrets et continus occupent même une part égale dans les exercices introductifs des chapitres.
Il semblerait que l'auteur ait conservé des usages provenant du programme officiel précédent, usages qui amplifient les aspects discrets de la fonction. Il pourrait aussi estimer que les contextes discrets et les aspects discrets de la fonction permettent une appropriation des nouvelles notions visées plus simple pour les élèves que les seuls contextes et aspects continus.
En tout état de cause, le contexte discret qui est utilisé dans la première « activité » d'introduction sur les fonctions linéaires (le prix de tickets de bus en fonction du nombre de tickets) est l'occasion pour l'auteur d'aborder le domaine d'adéquation du modèle continu en demandant si l'on peut interpréter l'image de 1,5 « pour la situation étudiée ».

Conformément au programme officiel, la démonstration de la nature de la représentation graphique d'une fonction linéaire a disparu du manuel ; la nature de cette représentation graphique a même un statut de définition dans l'exposition de connaissances. La translation (qui a réapparu dans le programme officiel du cycle 4 de 2015) retrouve une place en tant qu'outil pour démontrer la nature de la représentation graphique d'une fonction affine à partir de celle de la fonction linéaire associée ; la translation transforme les droites en droites et ainsi « conserve » le continu des représentations graphiques des fonctions considérées.

Les tâches relevant de la construction de la représentation graphique d'une fonction non affine sont rares : nous en avons trouvé deux. Dans les deux, deux grandeurs continues sont fonction l'une de l'autre et seul un tableau de valeurs de la fonction est donné, ce qui peut mener à un questionnement riche avec les élèves sur « Relier ou non les points ; si oui, comment ? ». Dans un cas, la représentation graphique, « papier / crayon », devrait en toute rigueur être un ensemble de points isolés ; dans l'autre, la représentation graphique, sur tableur, est guidée de telle sorte que celui-ci affiche des points reliés par des segments (de façon discutable). Les contextes (de balistique pour l'un, de taux d'alcoolémie pour l'autre) peuvent permettre d'alimenter le débat avec les élèves, débat qui peut amener à discuter les questions de modélisation.
L'exercice qui étudie les tarifs postaux en fonction de la masse du colis envoyé, modélisés par une fonction en escalier, garde une place dans cette édition ; cependant, la question de la représentation graphique de cette

fonction est supprimée. Les élèves n'ont donc plus d'exemple de graphique d'une fonction définie sur un intervalle présentant des points de discontinuité.

Les nombres sollicités sont de type comparable à l'édition précédente.

v. Manuel « Dimensions » de 2016, classe de Troisième, éditions Hatier (programme de 2015)

Ce manuel traite la totalité du thème des fonctions dans un seul chapitre. Pour les analyses détaillées de ces trois chapitres, consulter l'annexe 6.

La notion de fonction est abordée en des termes proches de ceux du programme officiel de 2015. Le manuel abandonne les trois modes de « définition » des fonctions qui marquaient le programme officiel précédent.
Cependant, comme dans le manuel « Transmath » de 2016 analysé précédemment, les phénomènes discrets occupent une place non négligeable : des deux exemples de l'exposition de connaissances sur la notion de fonction, l'un relève d'un phénomène discret et l'autre d'un phénomène continu ; les deux « problèmes résolus » et les situations modélisées par des fonctions affines relèvent tous de phénomènes discrets. Les raisons qui guident les auteurs des deux manuels sont-elles semblables ?

Les représentations graphiques exposées sont toutes des représentations de fonctions continues.
Nous n'avons trouvé qu'une seule tâche de construction de représentation graphique de fonction non affine. Elle doit être effectuée à partir d'un tableau de valeurs et via le tableur. Elle n'est pas guidée, la question est malgré tout posée dans les termes suivants : « *Représenter la fonction modélisant cette situation* ». Elle peut être l'occasion de discuter la non unicité du modèle.

Les démonstrations de la nature de la représentation graphique des fonctions linéaires et affines sont absentes de ce manuel, ainsi que les questions d'adéquation des modèles.

vi. Le « sujet zéro » du Brevet de mathématiques

Suite au changement des programmes du collège, dans toutes les disciplines, à la rentrée 2016, l'épreuve du Diplôme National du Brevet (DNB) a évolué. Éduscol a édité en avril 2016[26] un « sujet zéro » pour la nouvelle mouture du DNB. De tels sujets sont importants en ce qu'ils guident les pratiques des enseignants du niveau concerné.
Nous nous intéressons, dans ce qui suit, à l'exercice numéro 2 dont voici l'énoncé :

Exercice 2

Le *marnage* désigne la différence de hauteur entre la basse mer et la pleine mer qui suit.

On considère qu'à partir du moment où la mer est basse, celle-ci monte de 1/12 du marnage pendant la première heure, de 2/12 pendant la deuxième heure, de 3/12 pendant la troisième heure, de 3/12 pendant la quatrième heure, de 2/12 pendant la cinquième heure et de 1/12 pendant la sixième heure. Au cours de chacune de ces heures, la montée de la mer est supposée régulière.

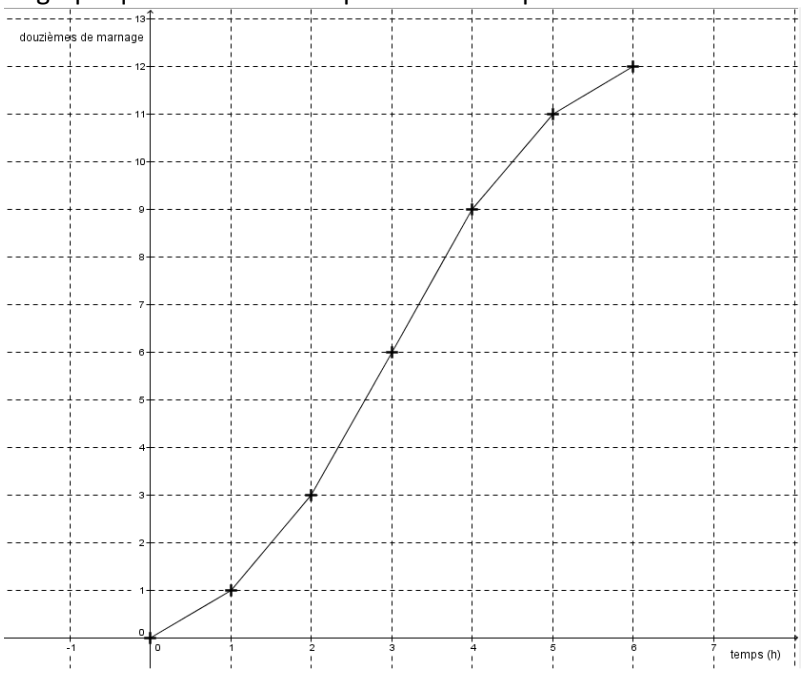
1) À quel moment la montée de la mer atteint-elle le quart du marnage ?
2) À quel moment la montée de la mer atteint-elle le tiers du marnage ?

La variation du niveau de la mer lors des marées est un phénomène continu. Le marnage est une fonction sinusoïdale du temps qui peut être approximée grâce à la règle dite « des douzièmes » qui est décrite dans l'énoncé ci-dessus. Cette approximation est une fonction affine par morceaux. L'énoncé tente de le signifier par « *la montée de la mer est supposée régulière* » (c'est nous qui soulignons).

[26] Voir sur le site http://eduscol.education.fr/

La fonction sinusoïdale est elle aussi « régulière ». Elle l'est même davantage que la fonction affine par morceaux qui l'approxime puisqu'elle est non seulement continue mais aussi dérivable et de fonction dérivée continue. Cependant, l'approximation est pratique car elle suppose une vitesse de marnage constante entre deux heures entières consécutives et permet ainsi de faire des calculs de marnage. On est donc en présence d'un phénomène continu dont la vitesse est continue, modélisé par une fonction continue dont la fonction dérivée prend un ensemble de valeurs discret.

Voici une représentatin graphique de la fonction qui modélise le phénomène :



Que peut faire un élève devant la deuxième question de cet énoncé ?
Avant tout, il a besoin de traduire « tiers du marnage » par « 4 douzièmes du marnage ». Par une procédure graphique ou par une procédure de calcul sur les fractions.

Ensuite, il peut interpréter « régulier » comme l'entend probablement le concepteur du sujet, c'est-à-dire que la vitesse de marnage est constante par intervalle.
Dans ce cas, il peut avoir recours à une procédure calculatoire : en deux heures, le marnage est de trois douzièmes. L'heure suivante, le marnage est de trois douzièmes supplémentaires. La vitesse de marnage étant constante, l'accroissement du marnage est proportionnel au temps. Il faut donc un tiers d'heure, soit 20 minutes, pour que le marnage soit de quatre douzièmes.

Il peut avoir recours à un graphique tel que présenté ci-dessus. Il peut alors faire une lecture approchée de l'heure qui correspond à quatre douzièmes de marnage, ou faire un calcul exact inspiré du théorème de Thalès, ou utiliser une procédure mobilisant directement la proportionnalité comme décrit ci-dessus.

Les pratiques des enseignants de Troisième que nous avons interrogés découragent les élèves d'utiliser la règle pour tracer des fonctions autres que affines. Cette procédure ne serait donc pas privilégiée par les élèves.

L'élève peut interpréter « régulier » (qui n'a pas de définition mathématique dans ce contexte à ma connaissance) d'une tout autre façon : il peut placer les sept points correspondants aux heures entières puis les relier de façon « lisse » (c'est-à-dire la courbe d'une fonction de classe C^1). Une lecture graphique permet de terminer. Il obtiendra une valeur comprise entre 2h 20 min et 2h 30 min. Cette procédure est favorisée par l'utilisation de logiciels traceurs pour l'obtention courbes polynomiales (ou moins probablement sinusoïdales) par l'enseignant pendant l'année de Troisième. Néanmoins, l'énoncé ne comporte visiblement pas de papier quadrillé, ce qui défavorise toute procédure graphique de ce genre.

L'élève peut aussi ne pas savoir comment interpréter le mot « régulier » et manquer d'idée pour répondre. Il peut aussi être gêné par la multiplicité des réponses vraies possibles (ou de façon équivalente la multiplicité

des courbes « régulières » passant par les sept points) : si un élève est conscient de la multitude des fonctions qui peuvent modéliser le problème tel qu'il est énoncé, il a en quelque sorte « trop » d'idées pour le résoudre. L'énoncé n'invite pas à la multiplicité des réponses possibles et peut déranger un tel élève « trop » performant. Dans les deux cas, l'élève peut écrire qu'il ne peut pas savoir sans justification ou peut ne rien écrire du tout.

Conclusion :
La question 2 de cet exercice requiert une modélisation continue dont le choix est à la charge de l'élève. Le mot « régulier » ne suffit pas à déterminer de modélisation particulière. Chacune correspond à une façon de relier les sept points du graphique.
La question aurait pu être exprimée en termes d'estimation par exemple, laissant entendre la multiplicité des réponses possibles. Cet énoncé véhicule au contraire l'attente d'une réponse univoque ; alors que c'est seulement à l'intérieur du modèle que la réponse est unique.
Un élève pour lequel le mot « régulier » n'évoque rien, ou un élève qui aurait plus de connaissances ou d'imagination que d'autres peut dans le doute ne rien répondre ; un élève qui n'aurait vu que des courbes « lisses » au collège, aurait une réponse plus difficile à formuler que celui qui a relié des points isolés par des segments au cours de sa scolarité.

vii. Sujets du Diplôme National du Brevet (DNB)

Nous avons consulté les énoncés du DNB de mathématiques de l'année 2017 afin d'analyser ceux qui comportent des énoncés mobilisant des modélisations de phénomènes discrets ou continus par des fonctions. Dans ces sujets, la modélisation est-elle clairement définie – ou clairement attendue des élèves ? Est-ce que les résultats « tombent justes », posent-ils des difficultés d'interprétation ?

Brevet de Polynésie, septembre 2017 :
Voici un extrait de l'exercice 2 ; nous nous focaliserons sur les questions 4, 5 et 6.

Temps en heure	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Distance en km	0	15	…	55	70	80	100	110	135	160

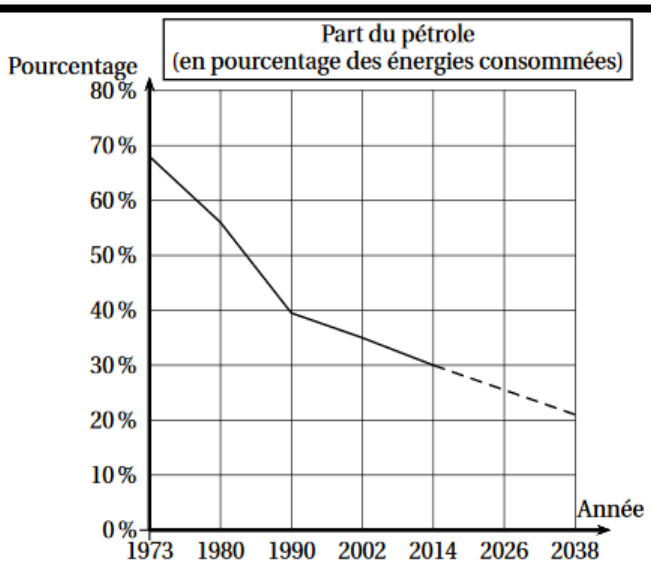
1. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 2 h 30 min de course ?
2. Montrer qu'il a parcouru 30 km lors de la troisième heure de course.
3. A-t-il été plus rapide lors de la troisième ou bien lors de la quatrième heure de course ?
4. Répondre aux questions qui suivent sur la feuille ANNEXE , qui est à rendre avec la copie.
   a. Placer les 9 points du tableau dans le repère. On ne peut pas placer le point d'abscisse 1 puisque l'on ne connaît pas son ordonnée.
   b. En utilisant votre règle, relier les points consécutifs entre eux.
5. En considérant que la vitesse du cycliste est constante entre deux relevés, déterminer, par lecture graphique, le temps qu'il a mis pour parcourir 75 km.
6. On considère que la vitesse du cycliste est constante entre le premier relevé effectué au bout de 0,5 h de course et le relevé effectué au bout de 1,5 h de course ; déterminer par lecture graphique la distance parcourue au bout de 1 h de course.

La situation étudiée par cet exercice donne lieu à une modélisation par une fonction continue, affine par morceaux et croissante. Elle présente ainsi des similitudes avec la modélisation de l'exercice du « sujet zéro » que nous venons d'analyser.
L'énoncé demande clairement de placer les 9 points puis de les « *relier à la règle* » ; il précise ensuite la signification de cette modélisation : on fait l'hypothèse que la vitesse est constante entre deux relevés. Ainsi,

les élèves n'ont pas de choix à effectuer sur le modèle continu à adopter et les réponses sont univoques – à condition que la question 5 soit comprise comme suit : « déterminer, par lecture graphique, le temps qu'il a mis pour parcourir les 75 premiers kilomètres ».
La question 5 a pour réponse 2,25 h que les élèves peuvent choisir ou non de convertir en heures et minutes.
La question 6 a pour réponse un nombre entier de km.

Brevet Wallis et Futuna décembre 2017 :
La fréquence cardiaque maximale recommandée des individus (en pulsations par minutes), est calculée en fonction de leur âge en années, selon deux modèles affines différents. La grandeur temps est discrétisée en années ; la grandeur fréquence cardiaque est mesurée par des rationnels bien qu'exprimée en pratique en nombre entier de pulsations par minutes. La situation est modélisée par deux fonctions continues.
Les questions ne donnent pas lieu à des difficultés d'interprétation : elles portent essentiellement sur les fréquences cardiaques ; les résultats sont décimaux ; théoriquement, un nombre de pulsations par minutes pouvant être décimal, les élèves peuvent en donner une valeur approchée entière, ou pas.
La seule question portant sur un âge donne un résultat entier.

Brevet Amérique du Sud novembre 2017 :



Les pointillés indiquent que l'on suppose que la baisse de la part du pétrole va se poursuivre sur le rythme observé depuis 2002.
En suivant cette supposition, on peut modéliser la part du pétrole (exprimée en pourcentage) en fonction de l'année a par la fonction P, définie ainsi :

$$P(a) = \frac{-17}{48}a + 743{,}5.$$

a. Écrire le calcul permettant de vérifier que $P(1990) \approx 38{,}7$.

b. D'après ce modèle, à partir de quelle année la part du pétrole sera-t-elle nulle?

Intéressons-nous à la question b. La variable « année » est discrète et la modélisation du phénomène continue.
La résolution de $P(a) = 0$ donne une valeur rationnelle non décimale : $a \approx 2099{,}29$.
Les élèves peuvent aussi tester les valeurs de $P(a)$ pour les valeurs de a entières et supérieures à 2038. Ou plus simplement trouver les deux valeurs entières de a consécutives telles que pour l'une $P(a)$ soit positif et pour l'autre, $P(a)$ soit négatif.
Les élèves peuvent répondre donc correctement de deux façons :

- « Au cours de l'année 2099 » ; la variable est alors considérée comme continue ;
- « À partir de 2100 » ; la variable est alors considérée comme discrète.

viii. Conclusion sur les manuels du collège et les sujets du DNB

La fonction est définie, dans sa généralité, dans les deux manuels de 2008 et les deux manuels de 2016 analysés. Conformément au programme officiel, elle apparait en tant que processus de correspondance dans les deux manuels de 2008, qui s'appuient sur l'image d'une « machine » à transformer des nombres ; cette approche renforce le caractère discret de la fonction et perdure dans un manuel de 2016.
L'autre manuel de 2016 adopte l'approche préconisée par le nouveau programme du collège de 2015, qui met l'accent sur l'aspect de dépendance de deux grandeurs (continues). La fonction y est plongée d'emblée dans le monde du continu.

Les représentations graphiques de fonctions non affines sont présentes dans les manuels de 2008. L'un d'eux prend le parti de problématiser dans une « activité » la question « Relier ou non les points ; si oui, comment ? » sur l'exemple de la fonction carré sur l'intervalle $[0; 3]$. L'infinité des points de la représentation graphique est mise en avant par le biais de la divisibilité à l'infini de l'intervalle sur lequel la fonction est définie ; la divisibilité à l'infinie n'est pas exprimée dans ces termes précis, elle l'est à travers un travail de subdivision de l'intervalle borné, subdivision qu'une expérience de pensée permet d'affirmer qu'elle pourrait se poursuivre à l'infini. Cette propriété qui rappelons-le est un précurseur du continu, permet d'invalider des représentations faites de points isolés ; après invalidation d'un tracé par points reliés par des segments, la courbe « lisse » est retenue. Cette « activité » au contenu riche semble cependant légitimer la procédure de représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs par des courbes « lisses » que le manuel mobilise par la locution « *à main levée* ». Nous relevons cinq telles représentations graphiques dans le reste du chapitre. Les tableaux de valeurs y sont choisis de telle sorte que les extrema des fonctions y soient présents ; par conséquent, les changements de sens de variation « tombent juste ».
Le second manuel de 2008, lui, prend le parti de représenter graphiquement (à la main) un tableau de valeurs par des points isolés. Cette procédure est montrée en exercice corrigé puis est reprise dans deux exercices de fin de chapitre. Par ailleurs, ce manuel propose un exercice sur les tarifs postaux : ceux-ci sont donnés par un tableau de valeurs, certes, mais les valeurs des tarifs sont constantes par intervalle ; une représentation graphique faite de points isolés est proposée afin d'être validée ou invalidée par les élèves. Ce manuel propose en fin de chapitre un exercice à effectuer via le tableur : celui-ci permet de représenter graphiquement une situation géométrique par une courbe « lisse » permettant de conjecturer la valeur en laquelle le maximum est atteint, valeur ensuite encadrée au dixième.

Les manuels de 2016 proposent chacun un exercice comportant une représentation graphique non affine à partir d'un tableau de valeurs ; elle est à réaliser sur tableur. Dans un manuel, la fonction modélise un phénomène continu (et même de classe C^1) d'alcoolémie dans le sang en fonction du temps ; l'énoncé guide cependant les élèves vers des points reliés par des segments. Le même manuel propose un exercice dans lequel le phénomène est continu (la hauteur d'une balle lancée en fonction du temps) et un tableau de 11 valeurs est donné ; la représentation graphique est à effectuer sur papier, l'énoncé ne dit pas de quelle manière.
L'autre manuel de 2016 propose une modélisation d'un phénomène discret de correspondance entre l'âge d'un chien et l'âge d'un homme, en années entières. L'énoncé ne guide pas les élèves vers un type de graphique particulier. Le manuel ne présentant que des graphiques « continus », comment cette représentation graphique là est-elle envisagée par l'auteur ?

Nous pouvons constater quatre choses :

- La question « Relier ou non les points ; si oui, comment ? » est abordée explicitement dans les manuels de 2008 ; elle fait l'objet d'environ 5 tâches au sein des exercices de chacun de ces deux manuels. En 2015, elle ne fait plus l'objet que d'une ou deux tâches, dans les tous derniers exercices, sans que la question ne soit posée explicitement. La question est donc nettement moins abordée ; en particulier, l'exercice sur les tarifs postaux de la collection « Transmath » est repris de l'édition 2008 à celle de 2015, en enlevant cependant la question sur la représentation graphique. En résumé, les tâches se raréfient et perdent en richesse.
- Les représentations graphiques sont à faire essentiellement sur papier en 2008, sur tableur en 2015. Le tableur, qui offre un large choix dans les représentations graphiques permettant de représenter un tableau de valeurs, pourrait être utilisé dans le but de poser la question qui nous occupe, ce n'est pas le cas.

- Les choix faits par les auteurs des manuels de 2008 quant à la question « Relier ou non les points ; si oui, comment ? » sont différents d'une collection à l'autre ; chacun reste cohérent tout au long du chapitre par rapport au choix qui est fait.
- Les représentations graphiques qui sont données dans les expositions de connaissances et les énoncés sont toutes des courbes continues.

La démonstration de ce que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite a perduré dans les manuels de 2008 malgré son absence dans le programme officiel de cette année-là. Les auteurs y voyaient-ils l'occasion de faire une « belle » démonstration convoquant le théorème de Thalès et un jeu de plusieurs cadres ? En tout état de cause, cette démonstration offre bien la possibilité de montrer aux élèves que le continu de l'axe des abscisses est « transporté » sur la droite représentative de la fonction.
Cette démonstration ne figure plus dans les manuels de 2016 ; l'un des deux manuels mobilise la translation qui a refait son entrée dans le programme officiel afin de démontrer la propriété correspondante sur les fonctions affines.

Dans tous les manuels, les fonctions apparaissent explicitement comme des modèles de situations concrètes en ce qui concerne les fonctions linéaires. Le domaine d'adéquation est abordé (sans ce vocable), essentiellement à propos de valeurs négatives pour des phénomènes mesurés par des valeurs positives. Un seul manuel questionne ce domaine avec une valeur décimale alors que la grandeur est à mesures entières.

Les phénomènes étudiés sont essentiellement discrets dans le manuel de 2003 qui réserve les phénomènes continus aux exercices « d'approfondissement ». Rappelons que seules les fonctions linéaires et affines étaient alors abordées.
Dans les manuels relevant des programmes suivants, dans l'ensemble :
- Les phénomènes étudiés sont continus lorsqu'il s'agit de fonctions non affines ou d'exercices sur les fonctions linéaires.
- Ils sont discrets en introduction aux fonction linéaires et dans tous ce qui concerne les fonctions affines. Pourtant, le programme de 2015 spécifie que les fonctions doivent modéliser des phénomènes continus. Comment expliquer ce décalage ? Est-ce par habitude ? Par manque d'exemple de phénomènes continus affines ? Parce que, d'après les auteurs, les phénomènes discrets sont plus adaptés, permettent une appropriation plus simple par les élèves des fonctions linéaires et affines ?

Le « sujet zéro » du DNB propose un exercice dans lequel une fonction modélise un phénomène continu et est outil dans la résolution du problème étudié. Il est donc tout à fait dans l'esprit du programme de collège de 2015.
Les mesures des grandeurs en jeu sont entières mais aussi fractionnaires.
Les tâches sont potentiellement riches dans les choix qu'elles requièrent et les types de nombres qu'elles mobilisent. L'analyse de la deuxième question montre que la modélisation de ce phénomène continu pose des questions d'ordre mathématique délicates que l'on peut résumer, dans le cadre graphique, par notre question de recherche : « Relier ou non les points ; si oui, comment ? ».
Les tâches que nous avons repérées dans les manuels ne préparent cependant pas les élèves à y répondre sereinement le jour de l'examen.
Les sujets du DNB de 2017 qui comportent une modélisation continue concernent aussi bien des phénomènes discrets que continus. Notre analyse montre qu'ils sont posés de façon claire pour un élève de Troisième. Les phénomènes discrets ont pour variable de départ le temps discrétisé en nombre entier d'années ; l'un d'eux nécessite une interprétation du résultat qui peut être formulé de deux façons.

Les « activités » et les exercices des chapitres sur les fonctions mobilisent essentiellement des entiers, que les énoncés soient contextualisés ou non. Lorsque les variables de départ sont continues, le continu des nombres n'est généralement pas mobilisé, à la présence de quelques décimaux près.
Hors situations contextualisées, dans le cadre algébrique, on repère quelques calculs d'images ou d'antécédents qui sont des fractions simples de numérateurs et dénominateurs compris entre 1 et 9.
Depuis le programme de 2008, les valeurs qui « ne tombent pas juste » lors d'étude de phénomènes discrets et qui demandent un travail d'interprétation en contexte ont disparu des manuels.

Le but des auteurs est certainement de ne pas d'ajouter des difficultés d'ordre numérique à celles de l'apprentissage de la notion de fonction.
On peut s'interroger sur la pertinence de ce choix :

- Si le but est d'outiller les citoyens pour qu'ils puissent résoudre des problèmes et prendre des décisions éclairées, il est probable que les problèmes en question ne mènent pas tous à des solutions entières.
- Si le but est de préparer certains élèves au lycée général, c'est les habituer à ce que la donnée des $f(n)$, où n prend un « petit » nombre de valeurs entières, équivale à celle des $f(x)$, où x décrit un intervalle de $\mathbb{R}$.

Tableau récapitulatif de l'analyse de manuels de Troisième

Légende : déf : définition ft : fonction lin : linéaire chap : chapitre

Manuel	Transmath 2003	Phare 2008	Transmath 2008	Transmath 2016	Dimensions 2016
Déf fonction		Processus de correspondance	Processus de correspondance + déf par graphique + déf par tableau + déf par formule	Processus de correspondance + déf par graphique + déf par tableau + déf par formule	Dépendance de grandeurs
Déf représentations graphique (cas général)		Oui	Non mais représentation graphique qui définit fonction	Non mais représentation graphique qui définit fonction	Oui
Représentation graphique d'un tableau de valeurs		Oui : courbe « lisse » ; Problématisé par une activité sur papier mobilisant divisibilité à l'infini ; 5 ex de représentations graphiques dites « *à main levée* »	Oui : points isolés + ex tarifs postaux : fonction en escalier + ex sur tableur, courbe « lisse »	Oui : un ex sur papier (situation de balistique, non guidé) + un ex sur tableur (situation alcoolémie, points reliés par segments)	Oui : un ex sur tableur (situation âge d'un chien, non guidé)
Détermination extremum		Non, dans le tableau de valeurs	Oui, encadrement via tableur + cadre graphique	Non	Non
Démonstration nature rep graph fonction lin et affine	Oui	Oui	Oui	Ft lin : non Ft affine : oui	Non
Modélisation	Dans chap ft lin Adéquation sur valeurs négatives	Dans chap généralités + chap ft lin Adéquation sur valeurs décimales et négatives	Dans chap ft lin Adéquation sur valeurs négatives	Dans chap ft lin Adéquation sur valeurs négatives	Dans exposition de connaissances ft lin. Pas d'adéquation
Type de phénomènes	Surtout discrets ; Continus en approfondissement	Continus : chap généralités + ex ft lin Discrets : intro ft lin + tout le chap ft affines	Surtout continus Discrets : intro ft lin + tout le chap ft affines	Surtout continus Discrets : intro ft lin + tout le chap ft affines	Surtout continus Discrets : exposition de connaissances + ex corrigés + ft affines

c) Quelques manuels de Seconde depuis 2001

Nous avons procédé à l'analyse de quatre manuels de Seconde. Il s'agit :

- Du manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, édition Hachette (programme de 2001) ;
- Du manuel « Math'x » de 2005, classe de Seconde, édition Didier (programme de 2001) ;
- Du manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, édition Didier (programme de 2009) ;
- Du manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, édition Nathan (programme de 2009).

Ces analyses sont détaillées en annexe 7.

L'ensemble des quatre manuels définit la fonction par un processus de correspondance. Le vocabulaire employé pour la variable (nommée x) diffère cependant : dans les manuels de 2000 et de 2005, il est écrit que x « décrit » l'ensemble de définition, ce qui véhicule un point de vue global et donc un caractère continu. Les manuels de 2010 écrivent que la fonction « associe à chaque » x son image, ce qui véhicule un point de vue ponctuel et donc un caractère discret.

Le manuel « Math'x » de 2010 est finalement le seul à reprendre dans son exposition de connaissance les trois « définitions » d'une fonction qui figurent au programme officiel. Il le fait sous forme d'exemples ; celui qui est utilisé pour la « définition » d'une fonction par un tableau de valeurs est maladroit puisque la variable est une longueur qui est continue.

Dans le même temps, ce manuel est aussi le seul à faire de la question « Relier les points : oui, non, si oui comment ? » un objectif du chapitre. La question est posée dans une « activité » d'introduction ; puis elle est abordée dans l'exposition de connaissances ; à nouveau posée dans un TP ; puis elle est présente de façon implicite dans le dernier exercice du chapitre. Le manuel de la même collection, édition de 2005, propose un seul exercice sur cette question. Dans les deux autres manuels, la question n'est pas posée. C'est essentiellement à travers cette question que le manuel « Math'x » de 2010 aborde le discret et le continu en ce qui concerne les fonctions.

Le manuel « Déclic » de 2000 n'aborde pour ainsi dire pas les questions de discret et de continu dans le chapitre analysé. C'est aussi le cas du manuel « Math'x » de 2005.
Le manuel « Antibi » de 2010 aborde le discret et le continu essentiellement à travers les tâches de recherche d'ensemble de définition, qui sont absentes des autres manuels.

Le « Math'x » de 2010 est aussi le seul à ne pas aborder la non unicité de la fonction (ou de sa représentation graphique) à partir d'un tableau de variation et éventuellement quelques autres indices. Cette non unicité fait l'objet de tâches dans les trois autres manuels ; elle est explicitement soulignée, par deux fois, dans les deux cadres - fonctionnel et graphique - dans le manuel « Antibi » de 2010.

Le manuel « Math'x » de 2010 est enfin le seul à inclure l'aspect de dépendance entre deux grandeurs à la définition d'une fonction ; à mobiliser le vocabulaire de la modélisation dans ce chapitre.

Chaque collection de manuel adopte un vocabulaire particulier en ce qui concerne les courbes de fonction à partir d'un tableau de valeurs ou de points isolés :

- Le « Déclic » comporte une tâche qu'il nomme « *tracer une courbe point par point* ». La consigne est alors de « *joindre les points par une courbe lissée* » ; ce manuel est par ailleurs le seul à questionner l'emplacement des extrema de la fonction ;
- La collection « Math'x » donne la même consigne sous la forme suivante : « *tracer une courbe harmonieuse* » ;
- Le manuel « Antibi » la donne sous la forme : « *tracer une courbe continue et régulière* ».

A chaque collection son vocabulaire ?
En tous cas, les courbes représentent implicitement des fonctions continues et en fait de classe C^1. Les situations modélisées peuvent fournir un argument en ce sens, ce n'est pas le cas de toutes les tâches qui comportent un tracé de fonction « lisse ».

Lorsque la variable est discrète, les représentations graphiques sont abordées différemment aussi selon les manuels :

- Les manuels « Déclic » de 2000 et Antibi » de 2010 ne montrent de telles représentations graphiques que dans des contextes d'évolution d'un phénomène au cours du temps. Les points sont reliés par des segments. Cependant le manuel « Antibi » mélange au sein du même exercice « points reliés par des segments » et « points reliés par une « *courbe continue et régulière* » », ce qui vient brouiller quelque peu le propos ;
- Les manuels « Math'x » montrent (et celui de 2010 fait construire) que la représentation graphique d'une variable discrète est un ensemble de points isolés.

Conformément aux programmes officiels, les phénomènes étudiés dans chaque manuel sont issus des mathématiques (géométrie, arithmétique), des sciences physique, économiques et sociale, de la biologie. Ils sont le plus souvent continus.
Le nombre de situations modélisées par une fonction, leur caractère discret ou continu, sont variables d'un manuel à l'autre : comparativement aux manuels « Math'x », le manuel « Déclic » de 2000 et le manuels « Antibi » de 2010 comportent peu de situations, qui sont toutes continues sauf trois pour le premier manuel et 8 pour le second. Les manuels « Math'x » comportent davantage de situations modélisées, celui de 2005 n'en a qu'une discrète, celui de 2010 en a 5.
Dans les situations continues, la variable est généralement une mesure de temps ou une longueur.
Dans les situations discrètes, généralement, elle mesure le temps discrétisé (en jours, en années), un effectif (de personnes, d'objets). Ou bien la situation est intra mathématique, dans le domaine de l'arithmétique.

Par opposition aux manuels de collège, les manuels de Seconde abordent dans quelques exercices ciblés le fait que la donnée des $f(n)$, où n prend un « petit » nombre de valeurs entières, n'est pas équivalente à celle des $f(x)$, où x décrit un intervalle de $\mathbb{R}$. Ce nombre restreint d'exercices est-il suffisant ? Ils consistent en des tâches isolées, peut-être trop ?
Par ailleurs, même quand la variable est continue, les valeurs non entières de celle-ci restent peu mobilisées. Et les tâches d'approximation sont quasi-absentes des quatre manuels. Jusqu'à quel point les nombres qui sont entre deux entiers ont-ils une existence chez les élèves ?

Le mot « fonction » est utilisé aussi bien dans le cas où la variable est discrète ou continue, sauf dans le manuel « Math'x » de 2005. Par contre, le mot « courbe » est exclusivement réservé aux représentations de fonctions définie sur une réunion finie d'intervalles.

Le tableur et les logiciels de géométrie dynamique sont très peu présents dans les manuels analysés.

Résumons :
Dans ces manuels de Seconde, les fonctions apparaissent largement comme des objets continus :

- De par leur ensemble de définition qui est le plus souvent un intervalle de $\mathbb{R}$;
- De par les représentations graphiques données dans les manuels qui sont quasi-exclusivement des courbes de fonction continue (de classe C^1) ;
- De par les situations étudiées relevant majoritairement de phénomènes continus.

Nous retrouvons les arguments qui nous ont amenée, après l'analyse des programmes de la classe de Seconde, à conclure que la fonction a d'emblée de multiples aspects continus.
Remarquons que l'absence de fonction définie sur un intervalle et présentant des points de discontinuité ne permet pas de préparer les élèves à la nécessité de la notion de continuité d'une fonction au programme de la classe de Terminale.

Le caractère discret des fonctions lorsqu'elles sont mobilisées dans le cadre algébrique est bien entendu conservé ; ceci est amplifié par la prédominance des entiers dans les tâches numériques et dans les lectures graphiques.
Les fonctions à variables discrètes sont présentes dans chaque manuel ; la place qui leur est faite, leur représentation graphique, les questions abordées à leur propos, diffèrent largement d'un manuel à l'autre.

Les manuels analysés, pour ce qui est des éléments que nous avons observés, suivent les préconisations du programme officiel de façon variable ; ils font des choix de contenu, de type de tâches, de vocabulaire et de notations qui sont distincts. Ces choix sont plus ou moins explicites. Ils induisent une activité potentielle des élèves fort différente d'un manuel à l'autre en ce qui concerne les tâches mettant en jeu les mondes du discret et du continu ; enfin ils sont dans une grande mesure cohérents avec leurs choix.

Nous pouvons faire l'hypothèse que les manuels de la classe de Première et de Terminale opèrent aussi des choix qui leur sont propres. Or les élèves changent de manuel tous les ans ; les différences de choix d'un manuel à l'autre quant au traitement du discret et du continu pourraient brouiller les messages que chaque manuel tente de faire passer.
Les enseignants sont-ils à même de décrypter ces choix, d'expliciter les implicites aux élèves, de combler certains manques ?

Tableau récapitulatif de l'analyse de manuels de Seconde

Légende : ens : ensemble déf : définition ft : fonction act : activité exp : exposition SES : Sciences économiques et sociales

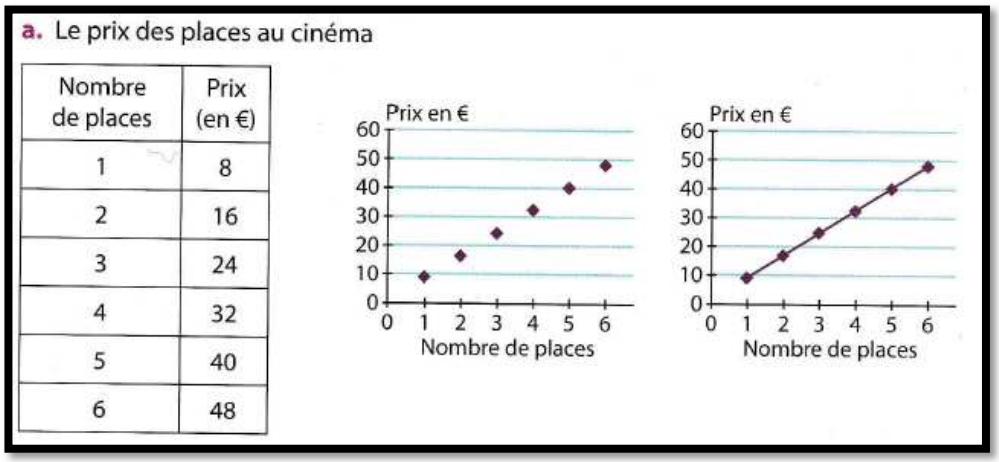
Manuel	Déclic 2000	Math'x 2005	Math'x 2010	Antibi 2010
Déf fonction	Processus de correspondance ; x « *décrit* » l'ensemble de déf	Processus de correspondance ; x « *décrit* » l'ensemble de déf	Déf : processus de correspondance pour « chaque » nombre x + déf par courbe / tableau / formule + aspect covariation de deux grandeurs	Processus de correspondance pour « *chaque* » nombre x
Déf représentations graphique (cas général)	Nommée « courbe représentative » « *l'abscisse x décrit l'ensemble de définition* »	Nommée « courbe représentative » « *l'abscisse x décrit l'ensemble de définition* »	Nommée « courbe représentative » « *x prend toutes les valeurs de D* » (D est l'ensemble de déf)	Nommée « représentation graphique » « *x prend toutes les valeurs de D* » (D est l'ensemble de déf)
Ens de déf	Pas d'ensemble de déf fini ; Pas de tâche	Pas de tâche	Pas de tâche	Fait l'objet de tâches ; Réunion finie d'intervalles + 1 discret fini + 2 discret infini
« Relier ou non les points » ?	Points toujours reliés : pas de question	Question posée une fois sur un ens de déf fini	Question posée dans act d'introduction + dans l'exp de connaissances + TP	Points toujours reliés : pas de question
Représentation graphique d'un tableau de valeurs (en particulier tableau de variations) ;	Tâche nommée « *courbe point par point* » - procédure : « *on joint les points par une courbe lissée* » soit tableau de variation donné ; soit variations lues sur calculatrice ; soit indication changement de variation en des valeurs entières	6 ex en tout 1 ens de déf fini : « *graphique* ». En ex sans situation ni expression algébrique « *tracer une courbe pouvant représenter f* ». En ex en situation, f est unique, tâche nommée « *tracer la courbe* » - procédure : « *joindre harmonieusement* »	1 act + TP + 4 ex dont 3 ex en situation continue : « *tracer une belle courbe/ une courbe harmonieuse* » TP « *courbe lissée* » sur tableur	A partir d'un tableau de variations : ex corrigé + « à retenir » + 6 ex: « *À un tableau de variation peuvent être associées de nombreuses fonctions/courbes* » A partir tableau de valeurs : 2 ex contexte continu, « *courbe continue et régulière* »
Modélisation	Vocabulaire absent Situations : 9 géométriques + 5 physique + 2 biologie + 4 SES (1 éco + 3 pb évolution : variable discrète)	Vocabulaire absent Situations : 12 géométriques + 6 physique + 5 biologie + 2 SES dont 1 discret	Titre du chapitre Pas présent dans les exercices. Situations : 17 géométrique + 6 physique + 7 biologie + 5 SES dont deux discrets finis + 3 arithmétique	Vocabulaire absent Situations : 5 géométriques + 7 physique + 5 biologie (3 discrets 2 continus) + 4 SES (3 discret 1 continu) + 2 arithmétique
Type de phénomènes	3 discrets avec mot « fonction » et courbes points reliés par segments 17 autres continus avec courbes « lisses »	1 discret fini (n°61) avec points isolés et variable n et pas mot « fonction » 24 autres continu (variables : longueur, temps)	5 discrets dont deux finis et [deux infinis en arithmétique avec mot « fonction »] 33 autres continus (variables : longueur, surface, volume, temps)	8 discrets [dont 6 finis et 2 infinis en arithmétique] avec mot « fonction » 15 autre continus (variables : longueurs, temps)
Type de graphique	Courbes de fonctions continues « lisses » + 3 courbes points reliés par segments (pb discret évolution) + une courbe en escalier	Courbes de fonctions continues « harmonieuses » + 1 graphique points isolés	Courbes de fonctions continues « harmonieuses » + 4 graphiques points isolés (3 donnés + 1 à faire)	Courbes fonctions continues « *courbe continue et régulière* » 4 courbes points reliés par segment (dont 3 pb discret évolution) Autres situations discrètes : pas de graphique.
Courbe avec indices	Oui : tableau de variation ; quelques valeurs	Oui : tableau de variation ; quelques valeurs	Non – non unicité pas abordée	Oui : tableau de variation
Variable discrète **Variable continue**	x x	n x, a, b, t, q	Pas de nom x, t	n x, t, a

2. Du côté des élèves – relier les points

a) L' « activité » « Relier les points ? » du manuel « Math'x »

Nous avons analysé supra le chapitre du manuel « Math'x » de Seconde, édition de 2010, concernant les fonctions. Ce chapitre comporte une « activité » intitulée « Relier les points ? ».
Rappelons que deux situations sont exposées, pour chacune, un tableau de valeurs est donné ainsi que deux graphiques possibles : l'un constitué de points isolés, l'autre de ces mêmes points reliés par une courbe de fonction continue. Il est demandé de préciser la variable puis de choisir entre les deux graphiques en argumentant la réponse.
La première situation est discrète et la deuxième est continue (une température est fonction de l'heure de la journée).
Examinons la première situation : le prix de places de cinéma est fonction du nombre de places. Le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité dont le coefficient est 8 : il est simple à calculer ; par ailleurs, les points sont visiblement alignés (avec l'origine).
Selon le manuel que les élèves auront eu en année de Troisième et les choix faits par leur enseignant, ils peuvent

- Soit repérer que le nombre de place ne prend que des valeurs entières et opter pour le premier graphique
- Soit opter pour le deuxième graphique : après avoir observé que le tableau est un tableau de proportionnalité (ou que les points sont alignés avec l'origine), les élèves peuvent se remémorer leur cours de mathématiques de l'année de Troisième sous la forme suivante : la proportionnalité est associée aux fonctions linéaires et ces fonctions sont représentées par des droites.


a. Le prix des places au cinéma

Nombre de places	Prix (en €)
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	48

Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, édition Didier, page 31

Cette « activité » a été donnée en devoir maison à une classe de Seconde de 32 élèves.
Les élèves ont unanimement associé la courbe de fonction continue à la deuxième situation.

Cinq élèves ont répondu que la courbe à associer à la première situation est la seconde. Leur argument était que la fonction est linéaire, elle est donc représentée par une droite. Ils ont donc procédé selon la deuxième option décrite supra.
Nous n'avons pas accès à ce que les enseignants ont fait faire à ces élèves en Troisième. La moitié d'entre eux avaient en classe de Troisième le manuel « Phare » analysé plus haut. D'après notre analyse, ce manuel offre l'occasion de considérer la fonction comme un modèle et de questionner son domaine d'adéquation. Cependant, toutes les représentations graphiques y sont des courbes « lisses ».

b) Relier les points : de quelques points de la représentation graphique d'une suite géométrique à la courbe d'une fonction exponentielle

Nous avons été amenée, en tant qu'enseignante, à introduire les fonctions exponentielles dans une classe de 34 élèves de Terminale ES. Nous allons, dans la partie III E, analyser les enjeux de cette introduction.

À la différence d'élèves de Seconde, les élèves de Terminale ont étudié les suites en classe de Première ; ils ont alors appris que la représentation graphique d'une suite est un ensemble de points isolés.

Dans ce but, nous avons conçu un dispositif (tâches et déroulement) que nous exposerons et analyserons dans la partie III E. Notons que les élèves travaillaient seuls, tout en ayant la possibilité de discuter des réponses avec leurs voisins s'ils le souhaitaient. Nous leur avions demandé de changer la couleur de leur stylo pour la prise des notes aux moments des corrections. Cela nous a permis de différencier leur propre réponse de celle qu'ils ont notée au moment de la mise en commun.

Voici la première partie de l'énoncé donné aux élèves :

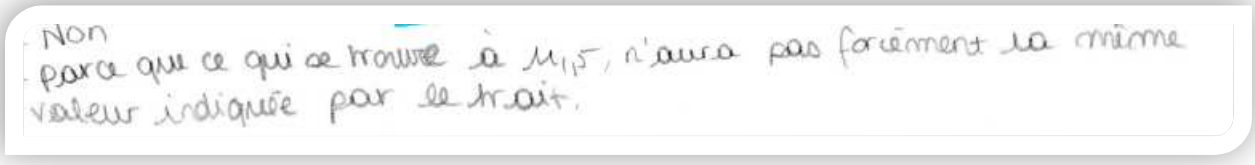
Un nénuphar pousse sur un étang. Tous les mois, la surface qu'il occupe double et plus généralement sa surface augmente d'un même rapport sur un intervalle de temps de même durée (si c'est un intervalle d'un mois alors ce rapport est 2).
On note u_0 sa surface en m² au 1er juin et u_n sa surface en m² n mois plus tard. Le 1er juin, sa surface mesure 1m², on a donc $u_0 = 1$.

a) Calculer la surface occupée par le nénuphar le 1er juillet et le 1er aout.
b) Exprimer u_n en fonction de n.
c) Placer, en noir, les points de coordonnées (n, u_n) pour n allant de 0 à 4 sur la feuille de papier millimétré donnée en annexe. On appellera Z, A, B, C et D les points obtenus dans cet ordre et on prendra 2cm comme unité sur l'axe des abscisses, 1 cm comme unité sur l'axe des ordonnées. Sans rien rajouter au graphique, répondre aux questions suivantes : est-ce que ça a un sens de relier les points ? Pourquoi ?

Intéressons-nous aux réponses des élèves aux deux dernières questions : « est-ce que ça a un sens de relier les points ? Pourquoi ? ».

La majorité des élèves estiment que relier les points n'a pas de sens (à l'écrit, 20 élèves sur 22 qui ont répondu, soit 91% des réponses). Pendant la séance, un élève justifie oralement sa réponse par le fait qu' « *on ne sait pas ce qui se passe entre deux valeurs* ». Un autre élève dit qu' « *il n'y a pas rien mais on ne sait pas si l'évolution du nénuphar est constante ou non et du coup pour tracer la courbe ça implique de donner des valeurs à « u » 1,5 et du coup on peut pas savoir.* »
Un autre élève dit que « *c'est parce qu'une suite est définie sur* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ *c'est les entiers naturels et pas un nombre à virgule. Du coup il n'y a rien entre un entier et l'autre* ».
Ainsi, deux types d'arguments pour le « non » cohabitent dans la classe. L'un est contextuel, l'autre est mathématique (ou un argument d'autorité ?) :

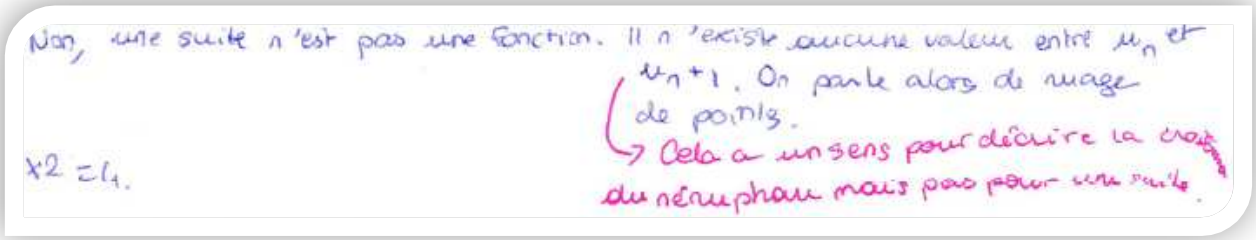
- Cela n'a pas de sens de relier les points car on ne peut pas savoir ce qui se passe entre deux valeurs consécutives. Ils sont 6 sur les 20 à avancer ce type d'argument. Ces élèves ne pensent pas que l'information de l'énoncé « plus généralement sa surface augmente d'un même rapport sur un intervalle de temps de même durée » puisse leur donner le moyen d'interpoler la suite, du moins pour un certain nombre de valeurs. Ci-après un exemple dans lequel l'élève exprime que l'interpolation choisie risque de ne pas modéliser correctement la situation à un mois et demi. Remarquons que l'élève n'hésite pas à utiliser une notation indicée par un décimal non entier ; le fait que (u_n) soit une suite ne fait pas partie de son argumentaire.



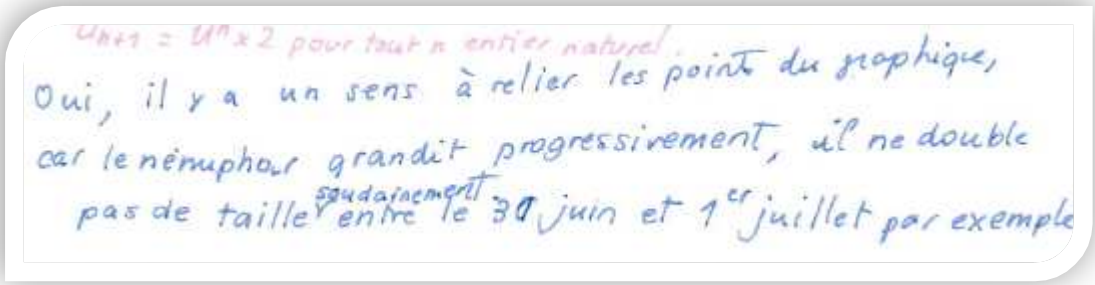
Deux élèves invoquent un manque d'information sur la « régularité » de la croissance. Par exemple :


c) Non, parce qu'on ne sait pas si la surface du nénuphare grandit de manière régulière, irrégulière ...

- Cela n'a pas de sens de relier les points car il s'agit d'une suite, pas d'une fonction. Ils sont 7 élèves sur les 20 à avancer ce type d'argument. En voici un exemple (ce qui est rajouté en rose est la correction prise par l'élève *a posteriori*) :



Ils ne sont que 2 élèves à répondre « oui » à l'écrit. Leur argument porte sur le fait le nénuphar poursuit sa croissance progressivement au cours du temps. Un des deux exprime que le relier les points a un sens puisque la surface croit en fonction du temps de façon continue (c'est le mot « *progressivement* » que l'élève utilise pour traduire cette continuité) :



Le jour de la séance, au moment de la correction en classe entière, les élèves sont dans l'ensemble d'accord pour dire que le nénuphar a une surface entre le 1er et le 2e mois, entre le 2e mois et le 3e mois etc. Et que par conséquent, si du point de vue de la suite relier les points n'a pas de sens, du point de vue de la modélisation de la croissance du nénuphar, relier les points en a un. La question est de savoir comment. C'est l'enseignante qui se charge de ce récapitulatif. Remarquons que l'argument est ici celui de la continuité du temps (et donc de l'absence de « trou » dans la représentation graphique), pas celui de la continuité de la surface en fonction du temps.

L'enseignante pose oralement la question de savoir comment relier les points. Une première idée d'élève est « ça ressemblait à une parabole ». L'enseignante affiche la courbe de la fonction carré avec le logiciel GeoGebra. Les élèves constatent qu'ajouter 1 a pour effet de translater la courbe de façon satisfaisante vers le haut. Les 5 points sont soit sur la courbe soit assez proches. L'enseignante demande de calculer u_5 et le carré de 5 pour constater le grand décalage entre les deux valeurs, ce qui permet d'écarter le modèle de la parabole.

Un élève fait une réflexion sur la croissance du nénuphar en montrant avec le doigt qui monte et qui descend en « zigzagant » un exemple graphique de ce que la courbe ne peut pas être. Cet élève suggère ainsi, avec un argument graphique, que la courbe est celle d'une fonction monotone.

L'enseignante pose oralement la question du calcul de la surface du nénuphar au bout de deux mois et demi. Elle laisse les élèves chercher. Pendant ce temps, quelques-uns se demandent encore pourquoi relier les points a un sens. La question, pour eux, n'est pas tranchée.

Dans la suite de la séance, les élèves calculent les surfaces du nénuphar aux demis mois puis aux quarts de mois. Ils construisent à chaque étape les points correspondants sur leur feuille de papier millimétré. Il n'y a alors plus d'obstacle à tracer une courbe « lisse » reliant ces points.

Conclusion sur ces deux analyses de réponses d'élèves à la question de « relier ou non les points » :
Quantifions le nombre d'élèves qui argumentent leur réponse par un résultat intra mathématique, sans tenir compte de la situation exposée : en classe de Seconde, environ un élève sur six répond à la question en mobilisant un résultat du cours de Troisième ; en classe de Terminale, le tiers des élèves qui répondent à la question mobilisent un résultat du cours de Première. Pour les premiers, s'il y a proportionnalité, le graphique est une droite ; pour les seconds, s'il y a une suite, le graphique est fait de points isolés.
Pour que l'activité mathématique d'un certain nombre d'élèves ne se résume pas à l'application de règles que l'on pourrait qualifier de « raccourcis », un travail de réflexion sur la modélisation de phénomènes, qu'ils soient discrets ou continus, par des objets discrets et continus nous semble indispensable.

3. Du côté des enseignants

a) Les futurs enseignants (étudiants en Master MEEF 1)

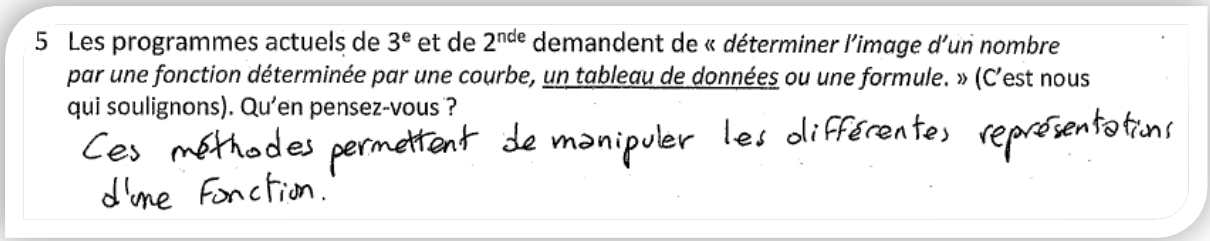
Nous avons proposé aux formateurs de deux masters MEEF première année à Paris de soumettre un questionnaire à leurs étudiants. Ceux-ci avaient 15 minutes pour le remplir. Il comportait six questions. Le questionnaire figure en annexe 8.
En mars 2016, les formateurs ont profité de ce questionnaire pour démarrer une séance concernant le discret et le continu ; ils ont donné un intitulé au questionnaire : « *Discret-continu : quelques questions pour initier la séance de travail* ». Une partie importante des étudiants étant absente, seuls 24 étudiants y ont répondu.
En septembre 2016, le questionnaire a été donné après une séance sur le discret et le continu et les formateurs ne lui ont pas donné d'intitulé. 46 étudiants ont répondu à ce questionnaire.

La question 5 est intitulée : « Les programmes actuels de 3e et de 2nde demandent de « *déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule*. » Qu'en pensez-vous ? ».
La question est ouverte ; notre but est de savoir ce que les futurs enseignants perçoivent de la non congruence entre la donnée d'une courbe, d'une formule, et plus particulièrement d'un tableau de valeurs dans le cas où l'ensemble de définition est infini et en particulier continu (en dehors de cas particuliers).

En voici les résultats :
20% des étudiants en mars 2016 soulignent l'inexactitude de la courbe par rapport à l'exactitude de la formule. Comme nous voulions que les étudiants orientent leurs réponses vers le registre du tableau de valeurs, nous avons souligné « *un tableau de valeurs* » dans le texte de la question pour les étudiants de septembre 2016. Cela a eu pour conséquence la quasi-absence de cette réponse.

Nous avons cumulé les absences de réponse et les réponses n'exprimant rien de suffisamment clair. En mars 2016, cette catégorie représentait 42% des réponses, elle n'en représente plus que 24% en septembre. Le fait que « *un tableau de valeurs* » soit souligné a fermé suffisamment la question pour que les trois quarts des étudiants expriment une idée intelligible.

La fréquence des étudiants ne repérant que la présence de différents cadres ou registres dans cet extrait de programme passe de 8% à 17%. En voici un exemple :


5 Les programmes actuels de 3e et de 2nde demandent de « *déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* » (C'est nous qui soulignons). Qu'en pensez-vous ?
Ces méthodes permettant de manipuler les différentes représentations d'une fonction.

L'extrait du programme officiel peut aussi amener l'étudiant à focaliser sa réponse sur l'idée de détermination de l'image d'un nombre :

- Les programmes actuels de 3e et de 2nde demandent de « *déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* » (C'est nous qui soulignons). Qu'en pensez-vous ?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$



le tableau de données permet de trouver l'image de l'abscisse x ($f(x)$) et d'analyser la monotonie de f

Le tableau ci-après récapitule les fréquences des réponses qui comportent un élément allant dans le sens de ce qu'un tableau de valeurs ne suffit pas toujours à définir une fonction :

	Mars 2016	**Septembre 2016**	**Total**
Tableau : insuffisant pour déterminer une fonction	4 %	15 %	11 %
Tableau : comporte peu d'images	8 %	20 %	16 %
Tableau associé au cas discret (ou cas fini)	17 %	7 %	10 %
Total	29 %	42 %	37 %

Les étudiants qui expriment leur réponse en termes de « discret et continu » sont plus nombreux en mars qu'en septembre 2016 ; ceci s'explique certainement par le fait que leur questionnaire comportait un intitulé comportant « discret-continu ».
Ces étudiants expriment que le tableau de valeurs appartient au monde du discret alors que la formule et la courbe appartiennent au monde du continu. Par exemple :

- Les programmes actuels de 3e et de 2nde demandent de « *déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* » (C'est nous qui soulignons). Qu'en pensez-vous ?

cela les obligent à considérer une fonction dans un cadre discret dans le cas d'un tableau de données alors que dans les autres cas, on considère plus facilement la fonction dans un cadre continue

Un étudiant anticipe les conséquences de la « définition » d'une fonction par un tableau de valeurs sur les élèves après la classe de Seconde ; il voit dans la formulation du texte officiel le risque de « *conforter* » les élèves dans leur « amalgame » entre suites et fonctions :

Cela pose problème par les élèves risquent d'être conforter dans leur amalgame entre suites et fonctions en envisageant les fonctions comme de valeurs discrètes sans à déterminer la formule à partir du tableau.

Au total, environ 60 % des étudiants ne perçoivent pas l'insuffisance potentielle d'un tableau de valeurs afin de définir une fonction (et de surcroît « d'analyser la monotonie de f », comme l'indique le deuxième extrait ci-dessus). L'habitude d'effectuer des représentations graphiques, des conjectures de sens de variation à partir de tableaux de valeurs peut-elle l'expliquer ? Les calculatrices permettent de passer d'un tableau de valeurs à une courbe en appuyant sur une touche, ce qui peut aussi les faire apparaitre comme congruents. Alors il y a-t-il un véritable manque dans la formation des futurs enseignants ?

b) Les enseignants de 3e et de 2nde en exercice

Nous avons soumis un questionnaire à sept enseignants de Troisième et six enseignants de Seconde générale au cours de l'année scolaire 2015-2016 (soit avant la mise en place du programme pour le cycle 4 du collège paru en novembre 2015). Ces enseignants étaient en poste dans diverses académies. Un seul enseignait en REP.
Un des buts du questionnaire est d'appréhender comment les enseignants introduisent les fonctions en classe de Troisième et la réintroduisent en classe de Seconde. En particulier, utilisent-ils des exemples de phénomènes concrets, et dans l'affirmative, sont-ils discrets, sont-ils continus ? Les enseignants utilisent-ils l'outil informatique, si oui comment ?

Un autre but est de voir comment le passage d'un tableau de données d'une fonction, ou de façon équivalente de quelques points dans un repère, au tracé de la courbe représentative de la fonction, est traité par les enseignants. Une question qui est liée est de savoir s'il leur semble nécessaire de distinguer avec les élèves les situations dans lesquelles la variable est discrète et celles dans lesquelles la variable est continue.
Est-ce que les élèves se posent des questions à ce sujet ? Quels sont les objectifs des enseignants ? Ceux-ci considèrent-ils qu'il y a là une difficulté conceptuelle pour les élèves ou pas ? Si oui, jugent-ils qu'il soit utile d'y consacrer du temps avec eux, ou bien qu'à ce niveau d'enseignement, il est inutile de pointer du doigt certaines difficultés liées à la nature de la variable, à l'obtention du tracé et à la nature de la représentation graphique d'une fonction ?

Dans ce qui suit, les encadrés reproduisent fidèlement les réponses des enseignants.

i. Les enseignants de Troisième

La première question posée a pour objectif de savoir dans quel ordre les enseignants abordent les éléments liés à la notion de fonction. Ils traitent tous en premier les généralités sur les fonctions pour y mettre en place les notions de fonction, d'image, d'antécédent dans différents cadres et registres ; puis le cas particulier des fonctions linéaires ; puis celui un peu plus général des fonctions affines. Ils suivent en cela le même ordre que le programme officiel et les manuels.

La seconde question posée a pour but de savoir si les enseignants démontrent avec leurs élèves la nature de la représentation graphique d'une fonction linéaire à l'aide du théorème de Thalès, bien que cette démonstration ne figure plus au programme officiel.
Aucun ne mobilise cette démonstration. Les jeunes enseignants (6 ans d'ancienneté ou moins) n'y avaient pas pensé. Les autres (qui ont enseigné cette démonstration par le passé) ne le font plus : par manque de temps avec les élèves ou parce qu'ils l'estiment trop difficile pour eux ; ces enseignants font le choix d'autres contenus jugés plus « utiles » ou plus « importants » pour les élèves (selon les enseignants : le repérage ; les notions d'image et d'antécédant ; la proportionnalité des accroissements dans le cas affine)
Voici un exemple de réponse allant de ce sens ; l'enseignant relève en creux que cette démonstration mobilise différents cadres, ce qui la rend difficile pour les élèves :

2. Avec le théorème de Thalès, on peut démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine. Cette démonstration a disparu des programmes en 2008. Est-ce que vous l'abordez quand même en classe ? Non
Pourquoi ? Les démonstrations sont difficiles pour les élèves et par manque de temps je ne démontre pas tout et donc pas cela. Je choisi de faire avec eux dans l'année certaines démonstrations en géométrie et d'autres en numérique. Ces dernières années ayant plutôt des classes de 3e en difficultés je reconnais ne pas faire beaucoup de démonstrations

La question 3 : « *Est-ce que vous donnez à vos élèves des exemples pour introduire la notion de courbe d'une fonction ? Si oui, pouvez-vous citer vos préférés ?* » est complétée par la question 4 qui concerne l'utilisation de l'outil informatique dans le déroulement de cette introduction. Les enseignants répondent de façon très variée :

- Deux utilisent des exemples concrets de phénomènes discrets décrits en langue naturelle (du type : prix en fonction du nombre de places) ;
- Deux partent de courbes représentant des phénomène continus ;
- Un part d'un tableau de valeurs à représenter graphiquement, puis utilise un grapheur du type GeoGebra pour représenter la courbe ;
- Un utilise un phénomène discret d'évolution dans le temps, représenté graphiquement par des points reliés par des segments ; cet exemple est complété par un problème géométrique d'optimisation d'une aire en fonction d'une longueur. Cet enseignant utilise le tableur et les différents types de représentations graphiques qui figurent dans le menu « graphiques ».

C'est d'ailleurs le seul enseignant qui mobilise ce menu du tableur (il s'agit de celui dont l'établissement est en REP) ; quatre enseignants utilisent GeoGebra, l'un avec sa fonctionnalité de tableur puis de grapheur, deux autres avec uniquement sa fonctionnalité de grapheur ; un enseignant utilise GeoGebra dans sa fonctionnalité de géométrie dynamique pour montrer aux élèves la représentation graphique d'une fonction en termes de lieu géométrique.

La question suivante concerne un exercice de manuel que nous avons analysé plus haut (partie A 1 b ii). La voici :

5. a) Est-ce que vous donnez un exercice comme celui-là en 3e ?
Si oui dans quel but ?
Si non pourquoi ?
Les élèves posent-ils des questions sur la façon de tracer ?
Si oui lesquelles ?

b) Trouvez-vous qu'un énoncé de ce type est univoque ou équivoque ?
Pourquoi ?

34 On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2$.

1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

2) Dans un repère orthogonal d'unités 1 cm, représenter graphiquement la fonction f pour x compris entre -3 et 3.

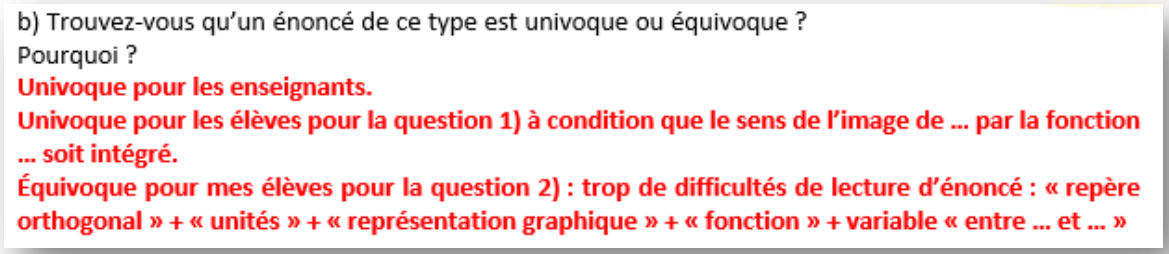
J'ai relié à main levée les points placés.

Un seul enseignant trouve un intérêt très limité à cet exercice car « *il n'est pas lié à un problème* ». Il le donnerait éventuellement en « *application directe* ».
Un autre enseignant y décèle un problème d'ensemble de définition : la fonction est-elle définie pour juste ces sept valeurs ? Comme l'aide fournie demande de relier les points, la réponse est non et l'enseignant parlerait aux élèves d'extrapolation.
Les autres le donneraient volontiers, pour des raisons diverses :

- Faire travailler le fait qu'un point de coordonnées $(x;y)$ appartient à la courbe de la fonction si et seulement si $y = f(x)$ (deux enseignants) ;
- Faire du calcul mental d'images (à compléter par des calculs d'antécédents) (un enseignant) ;
- Montrer comment tracer une courbe « à main levée » sur un exemple « simple » (deux enseignants).

Deux enseignants trouvent que l'énoncé est équivoque pour les raisons qui nous occupent dans notre travail : l'un, comme nous l'avons vu, pour des raisons d'ensemble de définition ; l'autre car « *cet énoncé nécessite des compléments (continuité à admettre)* ».

Un autre enseignant dont le collège est en REP, le trouve équivoque à cause de la complexité pour ses élèves du vocabulaire de la question 2 :


b) Trouvez-vous qu'un énoncé de ce type est univoque ou équivoque ?
Pourquoi ?
Univoque pour les enseignants.
Univoque pour les élèves pour la question 1) à condition que le sens de l'image de … par la fonction … soit intégré.
Équivoque pour mes élèves pour la question 2) : trop de difficultés de lecture d'énoncé : « repère orthogonal » + « unités » + « représentation graphique » + « fonction » + variable « entre … et … »

Tous les enseignants sauf un rapportent que les élèves relient les points à la règle ; un seul enseignant rapporte qu'ils demandent s'il faut relier les points (il s'agit de l'enseignant qui introduit les fonctions à partir d'un tableau de nombres, qui a écrit à la question 5b qu'il manque l'hypothèse de continuité).
Les élèves demandent comment relier les points lorsque l'enseignant leur demande de ne pas le faire à la règle. Il semble y avoir un consensus parmi les enseignants qui est de leur dire de prendre la règle si la fonction est linéaire ou affine, de tracer « à main levée » sinon.

A la question de savoir s'ils estiment utile de distinguer avec les élèves les situations dans lesquelles la variable est discrète et celles dans lesquelles la variable est continue :

- Quatre enseignants répondent que c'est inutile, ou trop difficile, pour les élèves (deux des quatre ne traitent de toutes façons pas de phénomènes discrets) ;
- Deux considèrent que c'est utile pour voir des situations de natures différentes.
- Un enseignant introduit des tâches où « *on ne tombe pas sur des entiers* » dans un contexte discret entier, afin que les réponses nécessitent des « *ajustements* ».

Questionnés sur les nouveaux programmes de cycle 4 pour la rentrée 2016 dans lesquels ne figure que la modélisation de phénomènes continus : « *Est-ce d'après vous préférable pour les élèves ?* » :

- Un seul répond que c'est mieux, il y avait une « *overdose de places de cinéma* » ;
- Un autre ne traitait de toutes façons que des phénomènes continus ;
- Les autres trouvent que c'est dommage car les problèmes discrets sont plus simples (trois enseignants), que c'est se priver d'une source de problèmes intéressants (un enseignant).

ii. Les enseignants de Seconde

Le questionnaire pour les enseignants de Seconde comporte les questions du questionnaire pour les enseignants de Troisième auquel nous avons supprimé les questions qui ciblent le programme de Troisième uniquement.

Pour introduire (ou plutôt réintroduire) les fonctions,

- Quatre enseignants utilisent des phénomènes continus (dans le cadre géométrique, ou un exemple « concret » d'une hauteur - de marée ; d'un saut à l'élastique - en fonction du temps). Ils mettent en valeur l'aspect de dépendance entre deux variables des fonctions ;
- Un utilise un exemple de phénomène discret et décrit la fonction comme une machine ;
- Un utilise le registre graphique avec différents types de fonctions (continues ; présentant des discontinuités) et des courbes paramétrées qui ne représentent pas des fonctions ;

Du point de vue des TICE pour aborder les fonctions :

- Deux n'utilisent pas les outils TICE ;

- Celui qui utilise un phénomène discret pour l'introduction aux fonctions mobilise ensuite GeoGebra pour tracer les courbes ;
- Deux utilisent le tableur pour générer un tableau de valeurs puis un grapheur comme GeoGebra en faisant vérifier que la courbe passe par les points tirés du tableau de valeurs. L'un d'eux dit aux élèves que même ce que GeoGebra affiche n'est que l'allure de la courbe, par opposition avec l'objet théorique, car le logiciel affiche des pixels ;
- Un utilise GeoGebra dans sa dimension de logiciel de géométrie dynamique pour tracer un lieu géométrique.

Tous les enseignants sauf un (qui est celui qui introduit les fonctions comme une « machine ») estiment qu'il est important d'aborder avec les élèves comment on relie les points d'un graphique.
L'un d'entre eux note qu'il tient à donner du sens aux multiples passages d'un tableau de valeurs à une courbe de fonction, en particulier avec la calculatrice.
Quatre d'entre eux envisagent les conséquences sur les apprentissages des élèves à plus ou moins long terme :

- L'un d'eux « *fait appel au sens de variation pour dire qu'on ne sait pas comment relier* » et un autre soulève la question du sous-entendu de la monotonie de la fonction entre deux abscisses de points isolés consécutifs :

> 4. Si vos élèves de 2nde ne soulèvent pas la question de la manière dont on relie des points pour obtenir une courbe est-ce à vous de de la poser tout de même aux élèves ? **oui**
> Pourquoi ? **notamment pour soulever le fait qu'il peut y avoir des « sous-entendus » quand on relie ces points (monotonie par exemple dans une situation concrète telle que la température), aussi pour dire qu'il n'y a aucune raison de tracer des segments de droite…**

- Un autre tient à soulever la question afin de préparer les élèves à distinguer la notion de suite et celle de fonction, « *mais aussi pour préparer les statistiques (nuage de points)* » ;
- Un autre a pour objectif d' « *aborder l'intuition de la continuité sous-jacente* » en vue de la mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie pour chercher un encadrement de solution d'équation (qui mobilise, rappelons-le, le théorème des valeurs intermédiaires) :

> 4. Si vos élèves de 2nde ne soulèvent pas la question de la manière dont on relie des points pour obtenir une courbe est-ce à vous de de la poser tout de même aux élèves ?
> Pourquoi ? oui il faut aborder l'intuition de la notion de continuité sous jacente (qui sera indispensable en fin de 2de, dans la mise en oeuvre d'un algo trouvant un encadrement d'une solution de l'équation f(x)=k)

A la question de savoir s'ils estiment utile de distinguer avec les élèves les situations dans lesquelles la variable est discrète et celles dans lesquelles la variable est continue :

- Deux estiment cette distinction essentielle, en vue des apprentissages à venir sur les suites, sur les probabilités en Terminale ; l'un d'eux estime aussi qu'à ce propos l'ensemble de définition manque en classe de Troisième. Voici un exemple :

> 3. Dans les exercices en contexte, vous semble-t-il utile de distinguer avec les élèves les situations dans lesquelles la variable est discrète et celles dans lesquelles la variable est continue ? oui
> Pourquoi ? cela me parait essentiel pour l'approche des suites en 1ère , et également pour préparer les probas de terminale (modèle discrèt / modèle continu)

- Un enseignant estime qu'il faut le faire en Première, au moment de l'étude des suites ;
- Un autre ne le fait que s'il aborde un phénomène discret et que des questions d'adéquation se posent ;
- Un le fait « *indirectement avec les tables de valeurs* » - nous comprenons tables des calculatrices ;
- Un estime le sujet trop difficile.

iii. Conclusion

Que ce soit en Troisième ou en Seconde, les enseignants font des choix d'enseignement personnels variables, motivés, à l'intérieur desquels on peut déceler pour certains une cohérence.

L'introduction aux fonctions est faite en Troisième avec des phénomènes discrets pour certains enseignants, continus pour d'autres. Ceux qui font le choix de phénomènes discrets estiment que cela est plus simple pour les élèves. Il se peut que ces phénomènes induisent plus facilement l'idée intuitive de « machine » utilisée pour définir les fonctions. Les élèves relient les points des représentations graphiques correspondantes à la règle, selon leur ancienne habitude.
Dans une situation continue où la fonction est donnée par une formule, les enseignants montrent aux élèves que les tracés à la règle sont erronés en calculant l'image d'un nombre supplémentaire (mobilisant implicitement la divisibilité à l'infini des intervalles). Le cas des fonctions affines par morceaux est donc écarté.
Finalement, la consigne donnée en Troisième est de relier les points à la règle lorsque la fonction est linéaire ou affine, à main levée sinon. Comment les enseignants gèrent-ils le fait que les courbes représentant des phénomènes d'évolution discrets sont tracées habituellement par les élèves en reliant les points - non nécessairement alignés - à la règle ?
En classe de Seconde, les enseignant choisissent en majorité des phénomènes continus. La façon dont les points sont reliés (et s'ils sont reliés) est une question importante pour la majorité d'entre eux qui estiment qu'elle impacte les apprentissages à venir, sur le sens de variation d'une fonction en classe de Seconde, sur les suites en classe de Première par exemple. Un enseignant estime, au contraire, qu'il vaut mieux expliquer la différence entre suite et fonction le moment venu en classe de Première.

L'outil informatique est utilisé dans l'introduction aux fonctions par la majorité des enseignants. Parmi eux, quelques-uns génèrent un tableau de valeurs sur tableur ; la plupart utilisent le logiciel GeoGebra en tant que grapheur et certains enseignants spécifient qu'ils font vérifier l'appartenance des points, dont les coordonnées figurent dans le tableau, à la représentation graphique obtenue. Un enseignant enseigne la représentation graphique d'une fonction en tant que lieu géométrique à l'aide de ce logiciel.
On peut se demander si la question de la réciproque est soulevée avec les élèves.
Un seul enseignant, qui est en collège REP, utilise le tableur et les différents types de graphiques qu'il génère pour aborder avec ses élèves la question « relier ou non les points ; si oui comment ? ».

Certains choisissent de montrer aux élèves les notions avec ce qui semble être un maximum de simplicité, en limitant la variété des exemples abordés (phénomènes uniquement discrets, versus uniquement continus par exemple en Troisième ; absence de question d'adéquation du modèle). Ce choix est majoritaire en classe de Troisième alors qu'en classe de Seconde, les enseignants préfèrent dans l'ensemble exposer les élèves à une dose de complexité, sur des points qui varient d'un enseignant à l'autre.
Un autre choix est tout à fait visible en classe de Seconde, bien que variable lui aussi d'un enseignant à l'autre : soit de cibler l'enseignement sur les apprentissages en cours, soit d'anticiper les apprentissages à venir - anticipations ayant trait aux mondes du discret et du continu.

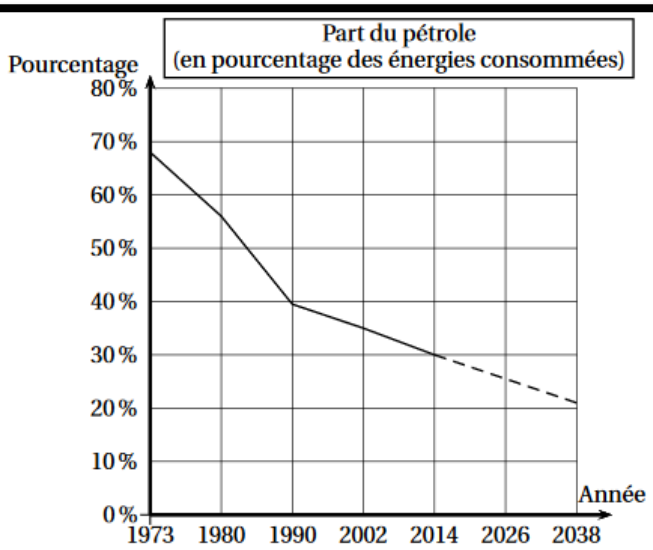
c) Quelques réponses de l'APMEP

Nous avons demandé le point de vue d'une dizaine d'enseignants de l'APMEP (réunis autour du thème des « activités » d'introduction) sur la question « Relier les points, oui, non ; si oui, comment ? » lorsque les élèves abordent les représentations graphiques de fonctions en Troisième.

Ces enseignants pensent que pour les élèves, joindre les points est une habitude ancienne. Par exemple un des jeux classiques pour les petits consiste à joindre dans l'ordre, au crayon, des points numérotés. Ils ont alors la surprise de découvrir qu'ils ont dessiné quelque chose.
Par ailleurs en SVT, comme en physique ou en géographie, les élèves tracent des graphiques dans lesquels ils relient les points.
Donc joindre les points ou pas, la question ne se pose pas pour les élèves de collège.
Les enseignants de mathématiques n'ont plus qu'à apprendre aux élèves de Troisième que si les points ne sont pas alignés, on trace une courbe lisse à la main. Sinon, on trace une droite.

En plus, le tableur fait ça très bien !

Mais tout n'est pas si simple lorsque des points isolés sont reliés : revenons à l'énoncé du Brevet donné en Amérique du Sud en novembre 2017 :



Les pointillés indiquent que l'on suppose que la baisse de la part du pétrole va se poursuivre sur le rythme observé depuis 2002.
En suivant cette supposition, on peut modéliser la part du pétrole (exprimée en pourcentage) en fonction de l'année a par la fonction P, définie ainsi :

$$P(a) = \frac{-17}{48}a + 743{,}5.$$

a. Écrire le calcul permettant de vérifier que $P(1990) \approx 38{,}7$.

b. D'après ce modèle, à partir de quelle année la part du pétrole sera-t-elle nulle ?

Nous avons analysé la question b de cet énoncé dans la partie III A 1 b. Nous avons identifié deux procédures possibles pour les élèves ; l'une consiste à tester le signe de valeurs de $P(a)$ pour des a entiers supérieurs à 2038 en tenant compte, implicitement ou pas, de la décroissance de la fonction P. L'autre consiste à résoudre l'équation $P(a) = 0$.
Nous avons aussi identifié deux réponses possibles des élèves, selon qu'ils considèrent la variable temps comme discrète ou continue.

Voici l'intégralité du corrigé de la question b. proposé sur le site de l'APMEP :

b. • **Par essais successifs**, on effectue plusieurs calculs :

$$P(2090) = \frac{-17}{48} \times 2090 + 743{,}5 \approx 3{,}3$$

$$P(2099) = \frac{-17}{48} \times 2099 + 743{,}5 \approx 0{,}1$$

$$P(2100) = \frac{-17}{48} \times 2100 + 743{,}5 \approx -0{,}25$$

• **Par mise en équation**, la part du pétrole est nulle se traduit par : $\frac{-17}{48} \times a + 743{,}5 = 0$ $\frac{-17}{48} \times a = -743{,}5$ $a = -743{,}5 \div \frac{-17}{48}$ $a = -743{,}5 \times \frac{48}{-17}$. Finalement $a \approx 2099{,}3$

Les deux procédures que nous avons exposées (l'une dans le monde du discret puis l'autre dans le monde du continu) le sont aussi par l'auteur du corrigé. Elles donnent lieu à deux valeurs différentes. Alors quelle est la réponse ?

d) Conclusion sur les enseignants

Au vu de ces analyses, il nous semble possible de conclure que les enseignants de Troisième minimisent l'exposition de leurs élèves aux questions soulevées par le passage de données en nombre fini à une représentation dans le continu (d'un tableau de valeurs à une fonction sur un intervalle ; de points isolés à une courbe). Ceci reflète (ou est reflété dans) le contenu des manuels et des épreuves de brevet, dont nous avons analysé supra les tendances, et dans lesquels, le plus souvent, « tout se passe bien ». Le logiciel GeoGebra est largement sollicité, davantage en tant que grapheur qu'en tant que tableur ou logiciel de géométrie dynamique ; cette utilisation d'un grapheur n'incite certainement pas à problématiser avec les élèves la nature de la représentation graphique d'une fonction dont l'expression est connue.
Les enseignants se disent limités par le temps et préfèrent s'assurer que les élèves maîtrisent au mieux certaines tâches qu'ils estiment importantes, qui sont variables d'un enseignant à l'autre : recherches d'images et d'antécédent par le calcul ou par lecture graphique ; tâches qui mobilisent la proportionnalité des accroissements dans le cas affine.

Les étudiants de Master MEEF semblent pour la majorité d'entre eux peu avertis sur ces questions.

Ponctuellement, comme nous le montre l'exemple de brevet ci-dessus dans lequel un phénomène discret est représenté par une courbe de fonction continue, l'enseignant peut être démuni pour répondre à une question dans laquelle « tout ne tombe pas juste », compte tenu de l'enseignement tel qu'il est pratiqué au collège.

Au lycée général, d'après nos données, les enseignants de Seconde sont davantage sensibles à ces questions ; la plupart tentent de sensibiliser leurs élèves sur une ou plusieurs notions mathématiques qui leur semble importantes (le sens de variation, la continuité, les suites par opposition aux fonctions…). Leur choix semble s'opérer en fonction de leur perception des enjeux d'apprentissage de l'année de Seconde, voire de Première ou de Terminale. Il pourrait donc être lié à leur expérience (ou leur absence d'expérience) d'enseignement dans ces classes.

B. Fonction continue en Terminales ES, L et S

1. Dire qu' « une courbe est continue » a-t-il un sens en mathématiques ?

Il est courant d'entendre élèves ou enseignants de lycée parler de « courbe continue ». Cette locution est peu utilisée à l'écrit. Est-ce parce qu'il est mathématiquement incorrect de qualifier de « continue » une courbe de fonction continue ?

Supposons qu'une fonction f est à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, qu'elle est représentée graphiquement dans un repère orthonormé (comme c'est le plus souvent le cas en collège et en lycée). La courbe de f est le lieu des points $M(x;y) \in \mathbb{R}^2$tels que $x \in I$ et $y = f(x)$. Elle est homéomorphe à son graphe $\Gamma = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y = f(x)\}$.

Afin d'éviter la caractérisation des sous-ensembles continus de $\mathbb{R}^2$ qui, nous l'avons vu dans la partie I, reste problématique, nous allons montrer que Γ et l'intervalle de définition I de f sont homéomorphes. Alors les propriétés topologiques de l'intervalle I sont transférées au graphe.

Considérons la fonction h de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $h(x) = (x; f(x))$.
$h = id \times f$; les fonction id et f étant continues sur I, h est continue sur I.
La fonction h est injective donc elle est bijective de I sur $h(I)$= Γ.
Montrons que $h^{-1} : h(I) \longrightarrow I$ est continue.
Soit $(x_0; f(x_0))$ un élément de $h(I)$. Pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2}$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a alors $\sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} < \varepsilon$ implique $|x - x_0| < \varepsilon$
h est bijective et bicontinue, c'est donc un homéomorphisme de I dans C.
I étant un ensemble continu, Γ l'est aussi. Il est donc correct de qualifier le graphe Γ et la courbe de f de « continus ».

2. La continuité dans les mathématiques à enseigner en Terminale

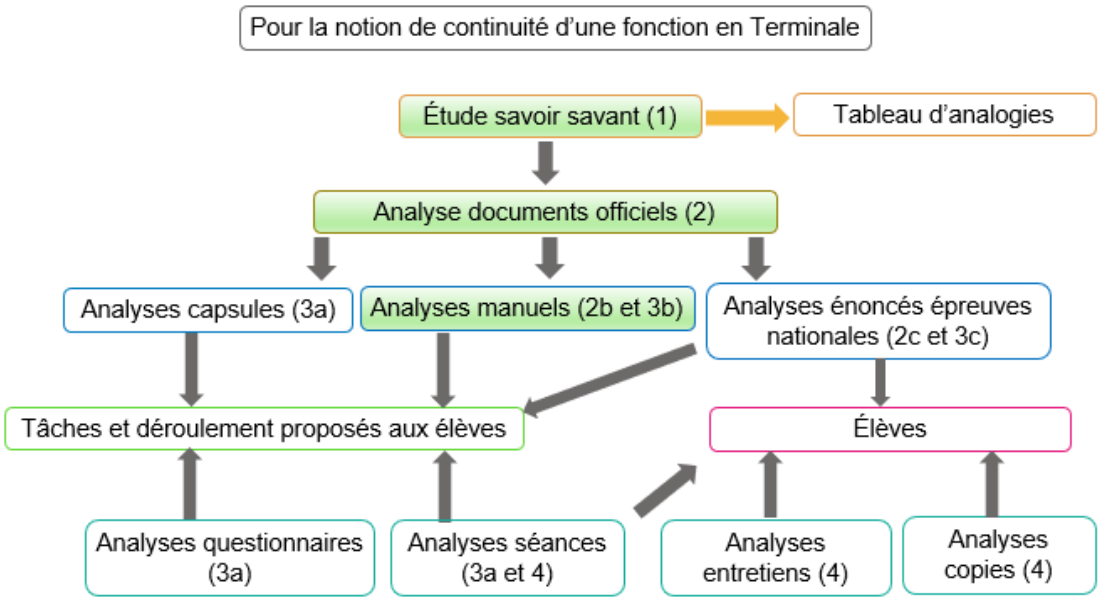


Diagramme récapitulatif de la méthodologie de la partie III B :
Étude de la notion de continuité en Terminale

Après cet aparté mathématique, comme dans la partie III A, pour plus de simplicité, le mot « courbe » désigne à nouveau la représentation graphique, dans un repère de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.

a) Les programmes officiels

i. Programme de 2001 pour la classe de Terminale

En 2001, la continuité d'une fonction est abordée pour la première fois dans le cursus de l'élève en classe de Terminale.
Dans le programme officiel de la classe de Terminale S[27], le thème « *Langage de la continuité et tableau de variation* » fait suite à celui de « *Limites de suites et de fonctions* ».

Langage de la continuité et tableau de variations		
Continuité en un point a. Continuité d'une fonction sur un intervalle.	On définira la continuité de f en un point a par $\lim\limits_{a} f=f(a)$ ou $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$ On illustrera la notion de continuité sur un intervalle en parlant de tracé sans lever le crayon. On présentera à titre de contre-exemple le cas de la fonction partie entière.	Les fonctions rencontrées en terminale sont le plus souvent continues sur leur intervalle d'étude ; on indiquera clairement que les fonctions construites à partir des fonctions polynômes, trigonométriques, logarithmes ou exponentielles sont continues. Démontrer qu'une fonction est continue en un point ou sur un intervalle n'est pas un objectif du programme.
Théorème (dit des *valeurs intermédiaires*) : "soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$".	Ce théorème pourra être admis ou démontré à l'aide de suites adjacentes. On démontrera le corollaire suivant : "si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $[a;b]$". On étendra ce corollaire au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. On pourra approcher la solution de l'équation $f(x)=k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou au tableur.	On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variations suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x)=k$.

Extrait du programme officiel de Terminale S de 2001 page 65

Ainsi, la continuité d'une fonction se situe d'abord dans une perspective locale avec la continuité en un point : f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

L'intuition du tracé de la courbe « sans lever le crayon », qui relève de la perspective globale, est mobilisée dans un deuxième temps en tant qu'illustration de la définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle. Dans la partie I, nous avons vu qu'une des expériences intuitives du continu est le tracé d'une ligne sans lever le crayon ; il peut donc paraitre naturel de mobiliser celle-ci dans le but de donner une version « intuitive » de la définition. Cette version revient à définir la continuité d'une fonction sur un intervalle par l'absence de « saut » de sa représentation graphique ; elle n'est cependant pas satisfaisante en ce qu'elle ne prend pas en compte les discontinuités de deuxième espèce[28] et ne distingue pas clairement la discontinuité et la non définition en un point.
D'après Hanke (2018), la traduction mathématique de cette « définition intuitive » est la propriété : une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement si son graphe $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / x \in I \text{ et } y = f(x)\}$ est connexe par arc.

[27] Bulletin officiel n°4 du 30 aout 2001
[28] Si une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ présente une discontinuité en un point a de I et si f admet en a une limite à droite et une limite à gauche (quand elles sont envisageables), alors cette discontinuité est dite de première espèce. Sinon, elle est dite de deuxième espèce.

Revenons au programme officiel et à l'ordre dans lequel les notions sont introduites (continuité en un point suivie de continuité sur un intervalle). Les élèves ont une image de l'égalité de $f(a)$ et de la limite d'une fonction en a associée au tracé continu au voisinage de ce point. La définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle par le fait qu'elle est continue en tout point de l'intervalle peut alors paraitre bancale.

Dans le registre des tableaux de variations, il est précisé que les flèches obliques symbolisent non seulement le sens de variation de la fonction mais aussi sa continuité.
Le programme officiel demande de présenter un exemple de fonction non continue : la fonction partie entière.

Le même bulletin officiel expose le programme de la classe de Terminale ES. La notion de continuité d'une fonction y figure en amont de celle de limite d'une fonction et ne fait pas l'objet d'une définition mathématique ; il est écrit qu' « *on se limitera à une approche intuitive* », sans préciser laquelle.
Dans la partie I, nous avons analysé quelques expériences qui permettent aux individus de se représenter le continu : l'écoulement du temps, le mouvement d'un objet qui ne saute pas, le tracé d'une ligne au crayon sans le lever, la corde d'un seul tenant. Nul doute que dans un contexte de fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, le support intuitif de la continuité tout désigné est le tracé de la courbe de cette fonction sans lever le crayon – d'autant plus que c'est celui qui est mobilisé explicitement dans le programme de la série S en tant qu'illustration de la notion de continuité sur un intervalle !

Le symbolisme des flèches obliques dans les tableaux de variations est le même qu'en Terminale S.

ii. Programme de 2011 pour la classe de Terminale

De même qu'en 2001, à partir de septembre 2012, les élèves de filières S, ES et L rencontrent officiellement la notion de continuité d'une fonction en classe Terminale.
Cependant, dans la partie « Organisation du programme » de la classe de Première, sous partie « Analyse » dans laquelle figurent suites et fonctions, le programme officiel en vigueur en septembre 2011[29] stipule : « *Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets* ». Les fonctions apparaissent comme des outils de résolution de problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus, et pourquoi pas, discrets.
Les programmes officiels de Terminale générale de 2011[30] préconisent dans toutes les séries une « *approche intuitive* » de la continuité d'une fonction, sur un intervalle.
Voici un extrait du programme de Terminale S. Celui des séries ES et L est identique, à l'exception des exemples de fonctions non continues qu'il n'est pas demandé de donner dans les séries ES et L.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires		On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Extrait du programme officiel de Terminale S de 2012 page 5

[29] Bulletin officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010
[30] Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011

Aucune « *capacité* » n'est attendue à propos de la définition de la continuité. Seul un « *commentaire* » apparait : « *on se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle* ».
Aucune indication n'est donnée sur l' « *approche intuitive* » à adopter. Pour les raisons que nous avons écrites ci-dessus, « le tracé de la courbe sans lever le crayon » est l'approche toute désignée.
Toute définition mathématique de la continuité d'une fonction est écartée. La continuité ne peut vivre en Terminale générale que comme une notion Non Encore Formalisée, dont le cadre graphique fournit une « intuition » partielle.
Dans ce contexte, la continuité d'une fonction peut faire l'objet de tâches de lectures graphiques.
La preuve rigoureuse de la continuité d'une fonction que ce programme permet fait appel à la propriété admise : « une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle ». Pour rappel, la dérivabilité est abordée en classe de Première, fait l'objet de compléments en Terminale ; les intervalles sur lesquels des fonctions de référence sont dérivables font partie des connaissances attendues des élèves de lycée qui prouvent la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle par somme, produit, quotient et quelques cas particuliers de composition de fonctions dérivables. L'enseignant peut aussi choisir d'énoncer la propriété de continuité de la somme, du produit, du quotient, de la composée de fonctions continues (avec les restrictions qui s'imposent).
Que ce soit à travers cette preuve de la continuité d'une fonction sur un intervalle ou son « *approche intuitive* », la perspective locale de la définition en série S retenue en 2001 est abandonnée pour une perspective globale dans toutes les séries ; peut-être est-elle davantage porteuse de caractère continu ?

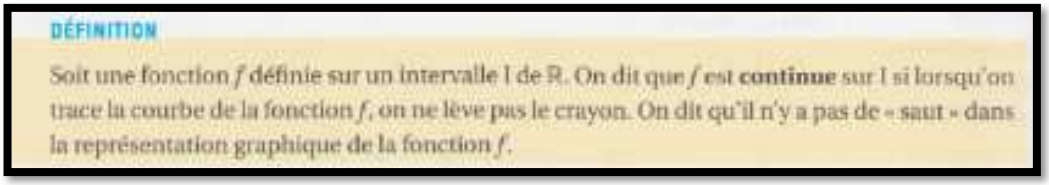
La continuité d'une fonction sur un intervalle est elle-même un outil de preuve de l'existence de solutions d'équations du type $f(x) = k$: par application du théorème (admis) des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone sur un intervalle. En séries ES et L, il est écrit que la propriété doit être « *présentée* » aux élèves dans le cadre graphique.
Comme dans le programme officiel précédent, les flèches symbolisent la continuité de la fonction, en plus de sa stricte monotonie par morceaux ; après tout, les flèches se tracent elles aussi « sans lever le crayon » ! Les images des bornes des intervalles de stricte monotonie, placées « au bout » des flèches (ou les limites aux bornes en série S), complètent cette représentation toute en symboles. Le programme acte officiellement que le registre de représentation des tableaux de variation suffit à justifier l'application du théorème des valeurs intermédiaires.
Le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone apparait donc comme une propriété non démontrable à ce niveau d'enseignement, énoncée sur la base de l'intuition du continu qui était celle de Cauchy : les deux « lignes continues » (la courbe de la fonction, la droite horizontale d'équation $y = k$) se coupent nécessairement en un point unique.

Plus loin dans le programme officiel, la continuité d'une fonction sur un intervalle apparait
- Comme outil de preuve de l'existence de primitives ;
- Comme une de propriétés qui caractérisent les densités de probabilité.

b) Les manuels de 2012

Comment les manuels se sont-ils emparés de cette approche de la continuité du programme de 2011 ? Analysons des manuels de séries ES et L puis de série S.

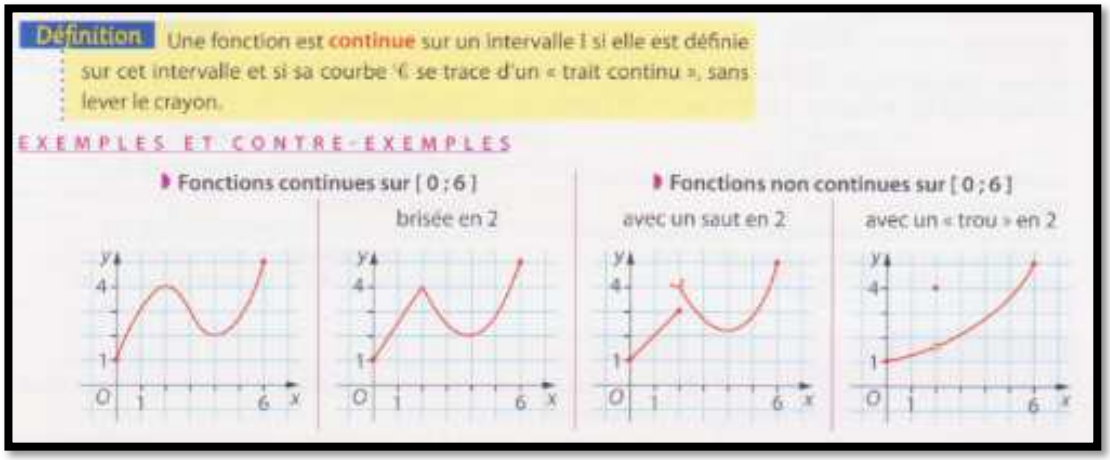
Les quatre manuels de séries ES et L que nous avons analysés (éditions 2012 des manuels « Hyperbole » éditions Nathan, « Odyssée » éditions Hatier, « Déclic » éditions Hachette et « Transmath » éditions Nathan) choisissent tous l'approche dans le cadre graphique exposée dans le programme de 2001 en série S : une fonction définie sur un intervalle est continue lorsqu'il est possible de tracer sa représentation graphique sans lever le crayon.
Les absences de « trou » ou de « saut » sont aussi mobilisées.
Dans le manuel « Odyssée », séries ES et L, édition Hatier, de 2012, la continuité d'une fonction sur un intervalle est définie comme suit :


DÉFINITION

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **continue** sur I si lorsqu'on trace la courbe de la fonction f, on ne lève pas le crayon. On dit qu'il n'y a pas de « saut » dans la représentation graphique de la fonction f.

L'intuition du continu induite par le tracé d'une courbe sans lever le crayon est assortie d'une phrase qui pourrait avoir un statut de définition intuitive « bis » : la fonction serait continue sur un intervalle lorsque sa courbe ne comporte pas de « saut ». Intuitivement, un « saut » en a mesure la différence entre la limite à gauche en a (si elle existe) et $f(a)$[31], ou entre $f(a)$ et la limite à droite en a (si elle existe). Remarquons que l'absence de « trou » (horizontalement) de la courbe est assurée par l'ensemble de définition de la fonction qui est un intervalle, donc un ensemble continu[32]. Ce vocabulaire est peu précis, un « saut » provoque un « trou », verticalement !

Le manuel « Déclic » de 2012, séries ES et L, édition Hachette choisit la définition la suivante :



L'intuition de la continuité retenue est celle du tracé sans lever le crayon.
On remarquera que l'idée intuitive de « trou » qui y est représentée dans l'exemple de fonction non continue « *avec un « trou » en 2* » correspond davantage à un « saut », double dans ce cas :

- La fonction étant définie sur un intervalle qui est un ensemble continu, la représentation graphique n'a dans tous les cas pas de « trou ».
- Ce qui différencie le premier exemple « *avec un saut en 2* » de l'exemple « *avec un « trou » en 2* » est que la fonction est discontinue à droite en 2 dans le premier cas, alors qu'elle est discontinue à droite et à gauche en 2 dans le deuxième cas. La dénomination « trou » n'est donc pas opportune et risque de forger chez les élèves l'idée que les deux exemples ne relèvent pas du même type de discontinuité.

La continuité d'une fonction est décrite dans le manuel Transmath de 2012, séries ES et L, éditions Nathan, via l'idée intuitive du tracé de la courbe sans lever le crayon. L'absence de « saut » est soulignée :


f est une fonction définie sur un intervalle I.

Lorsque la courbe de la fonction f se trace d'un trait continu, c'est-à-dire « sans lever le crayon », « sans sauts », on traduit cette idée intuitive en disant que la fonction f est **continue** sur l'intervalle I.

Le concepteur a préféré ne pas donner un statut de définition à sa phrase ; il l'a décrite comme une « approche graphique ».

[31] Nous retrouverons ce « saut » dans la partie IV : si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, le « saut » $F(a) - F(a^-)$ est égal à $P(\{X = a\})$.
[32] L'usage des mots « saut » et « trou » qui est fait ici ne correspond pas à celui qui est fait dans la partie I.

En série S, nous avons consulté les éditions 2012 des manuels « Symbole » éditions Belin, « Hyperbole » éditons Nathan, « Indice » éditions Bordas et « Math'x » éditions Didier, « Repères » éditions Hachette. Nous avons aussi consulté le manuel en ligne de Terminale S sur le site « Sésamath »[33] .

Les manuels « Indice », « Hyperbole » et « Repère » choisissent de garder la définition de la continuité d'une fonction en un point retenue par le programme officiel précédent, à savoir : f (définie sur un intervalle contenant a) est continue en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Cette définition n'est pas sans poser des difficultés puisqu'elle contient des implicites :

- Celui que la limite de *f* en *a* existe ;
- Celui de la définition d'une limite finie d'une fonction en un point, qui ne figure pas au programme de 2012.

Dans ce cas, une phrase concernant le tracé de la « courbe représentative » sans lever le crayon sans statut - de définition, de remarque ni de propriété - apparait juste après la définition rigoureuse.

Attardons-nous un instant sur le manuel « Indice ». En parallèle avec la définition donnée en page gauche, l'exercice résolu proposé en page droite de rechercher la continuité d'une fonction *f* en un point *a* :

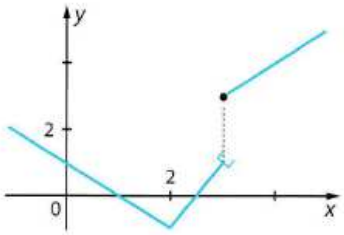
Reconnaître la continuité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 1 - x & \text{si } x < 2 \\ f(x) = 2x - 5 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ f(x) = x & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

1. Tracer la courbe représentative de *f*. Émettre une conjecture sur la continuité de *f*.
2. *f* est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution

1. La courbe représentative de *f* nous permet de conjecturer que *f* est continue sur $]-\infty ; 3[$ et sur $[3 ; +\infty[$ mais n'est pas continue en 3 (puisqu'il faut lever le crayon en 3 pour tracer la courbe).



2. Les fonctions $x \mapsto 1 - x$; $x \mapsto 2x - 5$ et $x \mapsto x$ sont des fonctions polynômes. Elles sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty ; 2[$, $[2 ; 3[$ et $[3 ; +\infty[$. *f* est donc continue sur $]-\infty ; 2[$, $[2 ; 3[$ et $[3 ; +\infty[$. Le problème se pose en 2 et en 3.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} (1 - x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (2x - 5) = f(2) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = f(2)$, donc *f* est continue en 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x) = 2 \times 3 - 5 = 1$ et $f(3) = 3$. $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x) \neq f(3)$, donc *f* n'est pas continue en 3.

La conjecture est ainsi démontrée.

Manuel « Indice » de 2012, classe de Terminale S, éditeur Bordas, page 51

La méthode consiste à chercher les limites à gauche et à droite : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$ puis à les comparer à $f(a)$. Notons que les notions de limite à droite et à gauche ne sont pas au programme de Terminale S.

L'auteur conclue que la fonction est continue sur [3 ; +∞[… Puis qu'elle n'est pas continue en 3.

Les manuels qui optent pour une approche dans le cadre graphique lui octroient un statut de définition ou de « *définition intuitive* », sauf le « Math'x » qui ne lui donne aucun statut et le « Sésamath » qui lui donne un statut de remarque.

Tous optent pour la « définition » du tracé de la « courbe représentative » sans lever le crayon. Pour l'illustrer, un ou des exemples de fonctions discontinues sont donnés dans le cadre graphique auxquels la plupart des manuels ajoute une remarque qui souligne la présence d'un « saut » ou d'une « rupture ».

[33] http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsobl_2016

Attardons-nous un instant sur le manuel « Math'x ». En parallèle avec la définition donnée en page gauche, l'exercie résolu en page droite propose de répondre à la question de la continuité de la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ par lecture graphique.

2 Connaître la fonction partie entière et sa courbe représentative

Énoncé La partie entière d'un nombre x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x. On le note $E(x)$.

1. Calculer $E(-1)$; $E(-0{,}6)$; $E(0{,}85)$; $E(0{,}99)$.

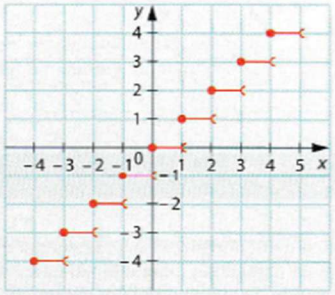
2. Représenter graphiquement la fonction E sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction E est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Si non, sur quels intervalles est-elle continue ?

Solution

1. $E(-1) = -1$; $E(-0{,}6) = -1$; $E(0{,}85) = 0$; $E(0{,}99) = 0$.

2. E est constante par intervalles :
pour $-1 \leqslant x < 0$, $E(x) = -1$; pour $0 \leqslant x < 1$, $E(x) = 0$;
pour $1 \leqslant x < 2$, $E(x) = 1$.
Plus généralement, pour tout entier relatif n, $E(x) = n$ sur $[n ; n+1[$.



3. La courbe présente un saut en tout point d'abscisse entière. E n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais est continue sur tout intervalle $[n ; n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Manuel « Math'x » de 2012, classe de Terminale S, éditeur Didier, page 39

L'auteur utilise la présence d' « *un saut en tout point d'abscisse entière* » pour conclure que cette fonction est continue sur tout intervalle $[n; n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. Or la fonction partie entière n'est continue en aucun entier.

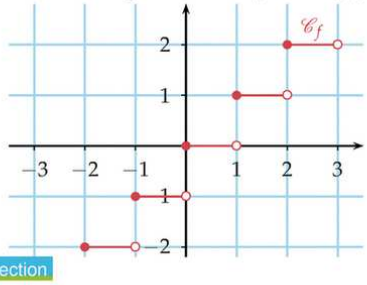
Le manuel « Sésamath » choisit lui aussi de présenter la fonction partie entière en exercice résolu :

MÉTHODE 3 Interpréter graphiquement la continuité d'une fonction

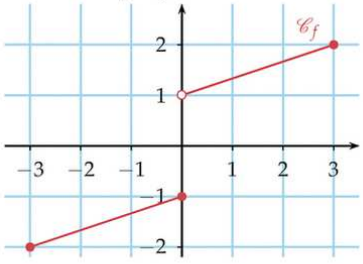
Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en x_0 :
- le symbole • indique le point de la courbe de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$;
- le symbole ○ indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en x_0.

Exercice d'application Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est continue.

1) Soit la fonction partie entière $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



2) Soit la fonction f représentée ci-dessous.



Correction

1) En tout point d'abscisse $a \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{C}_f$ présente un saut : on a $f(a) = a$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = a - 1$.
Ainsi, f n'est pas continue en a mais f est continue sur tout intervalle $[a ; a+1[$.

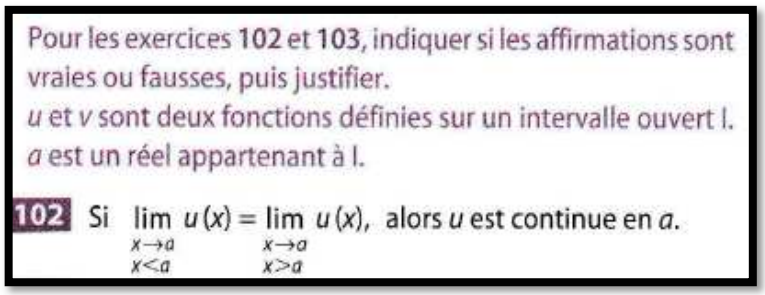
2) f est « affine par morceaux ». $\mathscr{C}_f$ a un « saut » en 0 donc f n'est pas continue sur $[-3 ; 3]$ mais elle est continue sur $[-3 ; 0]$ et $]0 ; 3]$. En effet, on a $f(0) = -1$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$.

La fonction partie entière serait aussi à la fois non continue en tout entier a et continue sur tout intervalle $[a; a+1[$. Et la fonction du second exemple continue sur $[-3; 0]$ et discontinue en 0.

Nous avons déjà remarqué le même type de conclusion erronée dans le manuel «Indice » qui adopte pourtant une définition de la continuité différente.
Faisons un parallèle avec la monotonie d'une fonction qui est une notion qui fait appel à la perspective globale : si une fonction définie sur un intervalle $[c;d]$ change de monotonie en un réel a de $[c;d]$ (par exemple croissante puis décroissante), ne dit-on pas à juste titre qu'elle est croissante sur $[c;a]$ et décroissante sur $[a;d]$ – a étant inclus dans les deux intervalles ?
Les auteurs des manuels observés seraient-ils tentés de traiter la continuité sur le même modèle ?
En tout état de cause, l'approche « intuitive » de la continuité par le tracé sans lever le crayon favorise cette erreur :

- d'une part en écartant la pespective locale de la continuité au profit de la perspective globale ;
- d'autre part en faisant correspondre l'ensemble sur lequel la fonction est continue avec l'ensemble des abscisses des points tracés par ce geste continu. Par exemple pour « tracer au crayon » la représentation graphique de la fonction partie entière, on part d'un point d'abscisse entière pour tracer vers la droite un segment horizontal de longueur 1, qui inclue la première extrémité mais pas la deuxième, on lève le crayon pour recommencer au point d'abscisse suivante etc.

La totalité des manuels propose quelques exercices comportant des tâches simples et isolées sur la continuité de fonctions ; celles-ci sont le plus souvent définies par leur représentation graphique, sur un intervalle, et comportent un petit nombre de points de discontinuité.
Les manuels qui adoptent une définition de la continuité en termes de limites proposent des exercices à résoudre dans les mêmes termes. Ces exercices ont des exigences plus grandes en termes de preuve. En voici un exemple :


Pour les exercices **102** et **103**, indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.
u et *v* sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I.
a est un réel appartenant à I.

102 Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} u(x)$, alors *u* est continue en *a*.

Manuel « Indice » de 2012, classe de Terminale S, éditeur Bordas, page 61

Il s'agit d'exhiber une fonction qui a une limite en a à droite et à gauche qui coïncident, mais pas avec $f(a)$.
Les élèves peuvent trouver un exemple dans le cadre graphique ou dans le cadre algébrique.

En série S, le programme officiel de 2011 suggère qu'en dispositif d' « Accompagnement Personnalisé », les élèves abordent des « *exemples de fonctions discontinues, ou à dérivée non continue* ».
Sur les cinq manuels analysés, nous avons décelé quatre manuels qui proposent de tels exemples :

- Le manuel « Symbole » propose en approfondissement une approche de la fonction de Bolzano, continue mais nulle part dérivable sur $[0;1]$;
- Le manuel « Hyperbole » propose en exercice résolu en page droite de l'exposition de connaissances sur la notion de continuité (une tâche de représentation graphique et de recherche d'expression algébrique d'une fonction qui modélise des tarifs postaux, fonction constante par morceaux) ; dans la même veine, un « TP » définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète (donc une fonction constante par morceaux), demande d'étudier sa continuité et de donner son expression algébrique ;
- Le manuel « Indice » propose en « approfondissement », dans le chapitre sur les fonctions trigonométriques, un exemple de fonction à dérivée non continue. Il s'agit de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
- Le manuel « Math'x » comporte deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$: la page droite de l'exposition de connaissances sur la continuité a un exercice résolu sur la fonction partie entière partiellement analysé ci-

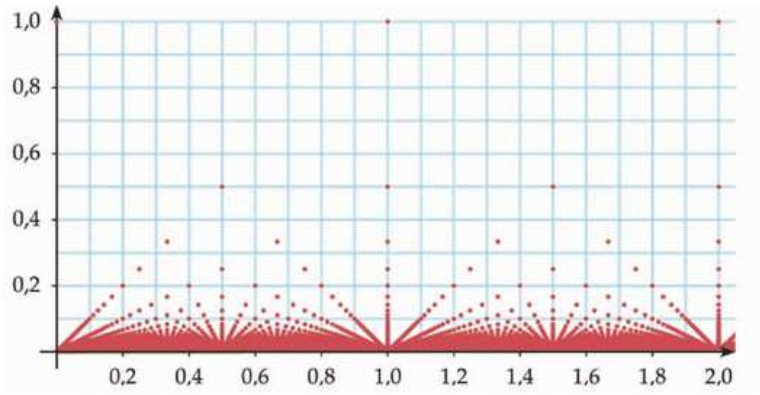
dessus ; le premier « TP » a pour objectif d'« *étudier un cas concret de fonction non continue* » (une fonction qui modélise un problème de rangement de chocolats dans une boite).

- Le manuel « Sésamath » définit en « TP » une fonction nulle part continue (la fonction de Dirichlet) ainsi qu'une fonction continue en tout nombre irrationnel et discontinue ailleurs (la fonction de Thomae). Une représentation graphique de cette dernière est donnée :

La **fonction de Dirichlet** D et la **fonction de Thomae** T sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

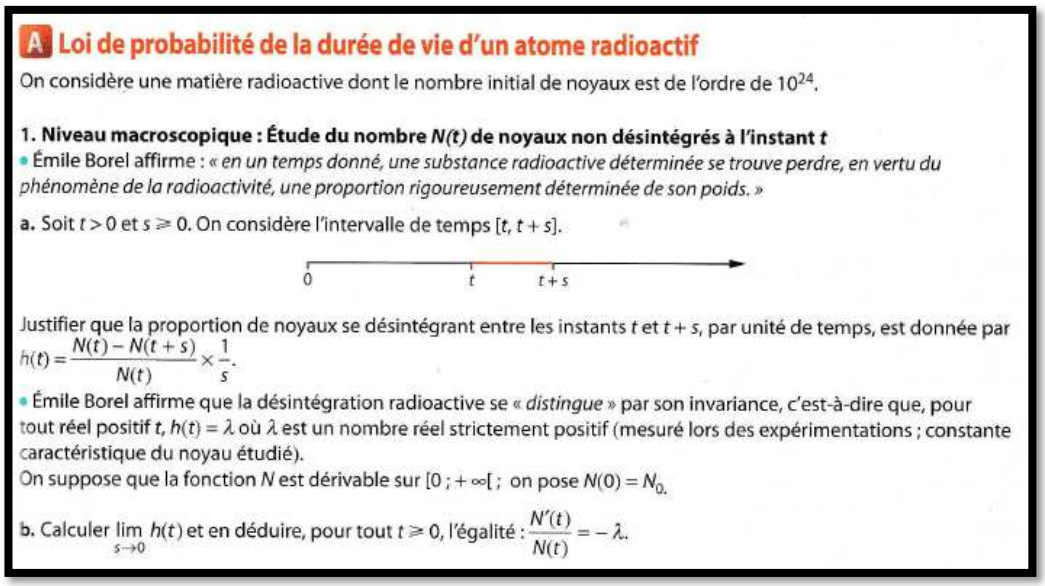
$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ et } T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

Introduite par Dirichlet[2] en 1829, la fonction D est discontinue partout ce que le résultat établi précédemment montre. Cette fonction est appelée aussi **fonction indicatrice des rationnels**.
Introduite par Thomae[3] en 1875, la fonction T est continue en tout nombre irrationnel mais discontinue en tout nombre rationnel. Cette fonction est appelée aussi la **fonction popcorn** (voir sa représentation ci-dessous !).



Le phénomène de radioactivité est source de divers problèmes dans les manuels de Terminale S, d'autant plus qu'il figurait dans les « *modalités de mise en œuvre* » du programme officiel de Terminale S de 2000[34] dans le but de motiver l'introduction de la fonction exponentielle par la résolution de l'équation différentielle $f' = kf$.
Si une matière radioactive comporte un nombre N_0 de noyaux à l'instant initial, la fonction qui au temps t associe le nombre de noyaux non désintégrés de cette matière radioactive à l'instant t est une fonction de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{N}$ (en fait dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ inclus dans $[0; N_0]$). Voilà donc un autre exemple de fonction constante par morceaux ; elle présente des discontinuités et ne peut par conséquent être dérivable sur $[0; +\infty[$.
Cependant, le nombre de noyaux radioactifs est tel que le phénomène est couramment modélisé par une fonction continue et dérivable.
Ce phénomène est mobilisé par le manuel « Math'x » de Terminale S, édition 2012, dans un « TP » qui illustre la loi exponentielle dans le chapitre sur les lois à densité :

[34] Bulletin officiel n°4 du 30 aout 2001



A Loi de probabilité de la durée de vie d'un atome radioactif

On considère une matière radioactive dont le nombre initial de noyaux est de l'ordre de 10^{24}.

1. Niveau macroscopique : Étude du nombre $N(t)$ de noyaux non désintégrés à l'instant t

• Émile Borel affirme : *« en un temps donné, une substance radioactive déterminée se trouve perdre, en vertu du phénomène de la radioactivité, une proportion rigoureusement déterminée de son poids. »*

a. Soit $t > 0$ et $s \geqslant 0$. On considère l'intervalle de temps $[t, t+s]$.

Justifier que la proportion de noyaux se désintégrant entre les instants t et $t+s$, par unité de temps, est donnée par $h(t) = \dfrac{N(t) - N(t+s)}{N(t)} \times \dfrac{1}{s}$.

• Émile Borel affirme que la désintégration radioactive se « *distingue* » par son invariance, c'est-à-dire que, pour tout réel positif t, $h(t) = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement positif (mesuré lors des expérimentations ; constante caractéristique du noyau étudié).

On suppose que la fonction N est dérivable sur $[0 ; +\infty[$; on pose $N(0) = N_0$.

b. Calculer $\lim\limits_{s \to 0} h(t)$ et en déduire, pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$.

Manuel « Math'x » de 2012, classe de Terminale S, éditeur Didier, page 413

L'énoncé ne différencie pas la fonction qui au temps t associe le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t de la fonction continue et dérivable qui modélise le phénomène. La fonction N apparait donc à la fois discontinue en un grand nombre de points et dérivable sur $[0; +\infty[$.

3. Conclusion

L'analyse des programmes officiels et des manuels confirme que la locution « courbe continue » y est absente ; elle est donc cantonnée à un usage oral.
Nous y voyons deux raisons possibles :

- Le mot « courbe » est rarement utilisé dans les programmes officiels, quand il l'est, c'est dans le sens de « représentation graphique » ;
- Comme nous l'avons vu dans la partie I, la caractérisation des ensembles continus n'est pas aboutie en dehors des corps totalement ordonnés.

L'abandon dans le programme officiel de 2011 de la définition mathématique de la notion de continuité qui figurait dans le programme de 2001 entraine la perte de la perspective locale sur cette notion.
A partir de 2012, la continuité doit être abordée dans le cadre graphique, travaillée dans le registre des tableaux de variation ; la perspective qui prédomine est donc globale, porteuse de caractère continu.
Les manuels de Terminale ES et une partie de ceux de Terminale S « définissent » la continuité d'une fonction sur un intervalle par le tracé de sa courbe sans lever le crayon. Le choix du statut à donner à cette « définition » se révèle délicat pour les auteurs : certains lui donnent un statut de définition, d'autres de remarque ou de propriété, d'autres enfin ne lui en donnent aucun.
Seule une partie des manuels de Terminale S fait le choix en 2012 de garder une définition rigoureuse locale de la continuité, en termes de limites. Ils ajoutent à cette définition l'aspect graphique de la continuité qu'est le tracé sans lever le crayon. La seule conséquence est la présence de quelques exercices comportant une tâche de calculs ou de lectures graphiques de limites à droite et à gauche (qui ne figurent pas au programme officiel) afin de déterminer la continuité d'une fonction en un point.

La « définition » de la continuité d'une fonction (à part dans quelques manuels de Terminale S) et les propriétés afférentes sont énoncées sur la base d'observations graphiques considérées comme des « évidences intuitives », symbolisées par les flèches et les valeurs « au bout » des flèches dans les tableaux de variation.
La « définition » de la continuité sur un intervalle par le tracé de sa représentation graphique sans lever le crayon et la représentation de cette continuité par des flèches dans le registre du tableau de variation privent

la notion de continuité de son caractère local ; la monotonie d'une fonction est une notion globale sur un intervalle, elle est représentée par des flèches dans le registre des tableaux de variation depuis la classe de seconde. Ceci pourrait expliquer ce qui ressemble fort à un « glissement » de la monotonie vers la continuité d'une fonction – nous faisons ici référence aux exercices corrigés des manuels qui écrivent qu'une fonction est continue sur un intervalle d'extrémité a et fermé en a, tout en étant discontinue en a. La continuité, telle que le programme officiel demande de la « définir » et de la représenter serait-elle aux yeux des auteurs de manuel une notion exclusivement globale sur un intervalle - et la discontinuité une notion locale ? Cela est loin de favoriser le jeu continu/discontinu.

Remarquons qu'aujourd'hui, les élèves ne traçant pour ainsi dire plus de représentation graphique de fonctions « à la main », le tracé de courbe « sans lever le crayon » relève davantage de l'expérience de pensée que de l'expérience physique.

La perception du continu et de la continuité d'une fonction par des élèves de Terminale qui suivent ce programme peut cependant être proches de celles des mathématiciens de l'époque de Cauchy pour lesquels, malgré la rigueur que celui-ci apporta à la définition de la continuité d'une fonction, l'espace euclidien restait la référence au continu. C'est ainsi qu'il pensa démontrer le théorème des valeurs intermédiaires alors que son argument était basé sur une visualisation de deux « lignes » qui se coupent dans le plan euclidien.

Le programme officiel de Terminale S de 2011 préconise l'étude, en « Accompagnement personnalisé », de cas de fonctions discontinues ou à dérivée non continue. Parmi les six manuels consultés, cinq proposent dans un des leurs « exercices d'approfondissements » ou « TP » des exemples de fonctions qui ne sont pas de classe C^1 : deux étudient des fonctions constantes par morceaux ; deux autres des fonctions continues plus « pathologiques » ; un dernier une fonction discontinue partout et une autre discontinue sur un ensemble dense dans l'ensemble des réels. Ces exemples nous semblent bienvenus dans un contexte d'enseignement des fonctions proche d'un « tout continu », de la classe de Troisième à la classe de Terminale (dans lequel le mot « fonction » semble embarquer la propriété de continuité sur un intervalle et la notion de continuité a finalement peu de raison d'être).

L'exemple de l'étude de la radioactivité nous montre qu'il convient d'être vigilant sur le discours qui entoure la modélisation de phénomènes discrets par une fonction continue, afin de garder une cohérence entre les quelques aspects théoriques qui entourent la continuité d'une fonction en Terminale (enrichis par les exemples de fonctions qui présentent des discontinuités) et la discontinuité de phénomènes modélisés par une fonction continue.

C. Suites et fonctions en Première et Terminale série S

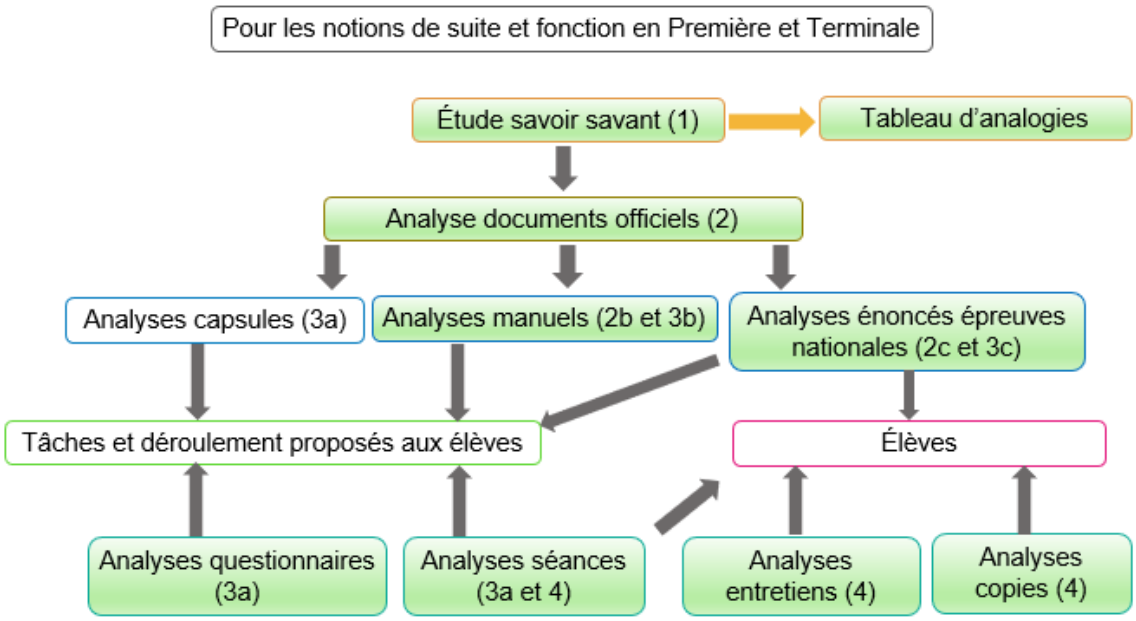


Diagramme récapitulatif de la méthodologie de la partie III C :
Étude des notions de suite et de fonction en Première et Terminale

L'objet de cette partie est d'analyser le relief sur les suites au lycée général, ainsi que les pratiques des enseignants, en portant une attention particulière aux interactions possibles entre suites et fonctions.

1. Dans les mathématiques à enseigner au cycle Terminal du lycée, série S

Nous restreindrons cette analyse à la série S, les séries ES et L ayant des versions allégées des programmes de la série S, qui n'offrent pas d'intérêt particulier dans notre travail.

Les suites sont introduites en classe de Première dans les deux derniers programmes officiels (de 2000 et de 2010) alors que les élèves ont étudié les fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ depuis la classe de Troisième, dans une (relative) généralité depuis 2008. Leur étude se poursuit en classe de Terminale (programmes officiels de 2001 et de 2011).

Nous nous bornerons à l'analyse des derniers programmes en date. En effet, dans les grandes lignes, le texte a peu évolué au cours de cette décennie ; notons la disparition de l'étude numérique, sur un ou deux exemples, de la rapidité de convergence d'une suite, ainsi que de la notion de suites adjacentes. Nous développerons particulièrement les « contenus » et « capacités » qui sont porteurs du caractère discret des suites ou de possibles interactions avec les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

En cohérence, nous analyserons trois manuels et des énoncés de Baccalauréat de la série S.
Les questions de perspectives (ponctuelle, ponctuelle universelle, locale, globale) seront évoquées. La perspective ponctuelle est porteuse de caractère discret ; cependant, la perspective globale n'est pas nécessairement porteuse de caractère continu dans un contexte discret, ce qui la rend moins pertinente dans notre analyse concernant les suites que dans celle sur les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

a) Dans les programmes de Première et de Terminale de la série S

i. Les suites dans le programme de Première S de 2010

Dans la partie « Organisation du programme », sous partie « Analyse » dans laquelle figurent suites et fonctions, le programme officiel en vigueur en septembre 2011[35] stipule : « *Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets* ». Puis que « *L'étude de phénomènes discrets fournit un moyen d'introduire les suites et leur génération* ». Les phénomènes discrets y apparaissent donc comme des outils d'introduction aux suites ; réciproquement les suites doivent être mobilisées en tant qu'outils de résolution de problèmes par la modélisation de phénomènes discrets et, pourquoi pas, continus.

Voici l'extrait du programme officiel de Première S entré en vigueur en 2011 sur le thème des suites :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Suites Modes de génération d'une suite numérique.	• Modéliser et étudier une situation à l'aide de suites.	Il est important de varier les approches et les outils.
	◇ Mettre en œuvre des algorithmes permettant : - d'obtenir une liste de termes d'une suite ; - de calculer un terme de rang donné.	L'utilisation du tableur et la mise en œuvre d'algorithmes sont l'occasion d'étudier en particulier des suites générées par une relation de récurrence.
Suites arithmétiques et suites géométriques.	■ Établir et connaître les formules donnant $1+2+\ldots+n$ et $1+q+\ldots+q^n$.	
Sens de variation d'une suite numérique.	• Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.	◇ On peut utiliser un algorithme ou un tableur pour traiter des problèmes de comparaison d'évolutions et de seuils.
Approche de la notion de limite d'une suite à partir d'exemples.		Par exemple, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour l'approche expérimentale de la notion de limite. On ne donne pas de définition formelle de la limite.

Extrait du programme officiel de Première S de 2010 page 3

Il n'indique pas de définition spécifique pour la notion de suite ; on comprend qu'il s'agit de la notion de suite numérique. Or les suites numériques peuvent être définies selon deux points de vue différents :

- Une suite numérique est une liste infinie (dénombrable) ordonnée de nombres réels ;
- Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$[36].

La première définition permet aisément celle de sous suite, ce qui n'est pas le cas de la seconde. Les sous suites ne figurent cependant pas au programme officiel du lycée et les effets du choix de l'un ou l'autre point de vue concernant les sous suites ne peuvent se constater au lycée.

[35] Bulletin officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010

[36] La formalisation des suites en tant que fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vient de Peano à la fin du XIXe siècle. Alors que les suites sont utilisées depuis l'antiquité.

Modes de génération

Au programme officiel figurent les « *modes de génération* » des suites. Il s'agit certainement de la génération par une expression en fonction de la variable, que nous nommerons « forme explicite » et de celle par une relation de récurrence, que nous nommerons « forme récurrente ».

Bien entendu, la génération par « forme explicite » est identique à la définition d'une fonction par son expression algébrique ; et nous avons vu dans la partie III A que certains élèves ont pu être exposés à des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ en classe de Seconde, le lien entre les deux notions peut ainsi être fait.

Dans certains cas, l'expression de u_n en fonction de n peut se prolonger à un intervalle $[a;+\infty[$ où $a \in \mathbb{N}$, ce qui permet de définir simplement une fonction f de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in [a;+\infty[\cap \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

La « forme récurrente » introduit un point de vue nouveau dans le thème de l'analyse, qui est propre au discret dénombrable : en l'absence de tout autre donnée, les termes de la suite ne peuvent être calculés que de proche en proche, chacun ayant un prédécesseur (sauf le premier terme) et un successeur. Ce mode de génération apporte un aspect « dynamique » à la définition de la suite.

Dans le cas le plus simple, la relation de récurrence exprime un terme en fonction de son prédécesseur et la forme algébrique de cette relation permet d'écrire qu'il existe une fonction réelle d'une variable réelle g telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

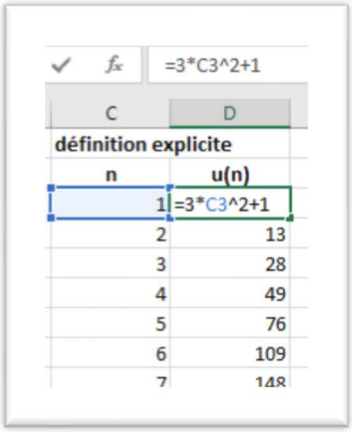
Notons que les fonctions réelles d'une variable réelle f (nommons-la « fonction qui définit ») et g (nommons-la « fonction qui génère ») telles que $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ ne sont pas uniques ; les expressions algébriques peuvent permettre d'en identifier une simplement.

Dans le thème des suites, des « fonctions qui définissent » et des « fonctions qui génèrent » coexistent ; de plus, les suites sont des fonctions particulières qui ne se distinguent des « fonctions qui définissent » que par leur ensemble de définition. Ces incursions aux multiples facettes de la notion de fonction dans le thème des suites sont une source potentielle de difficultés pour les élèves. Nous aurons l'occasion de le vérifier dans la partie III. C. 2.

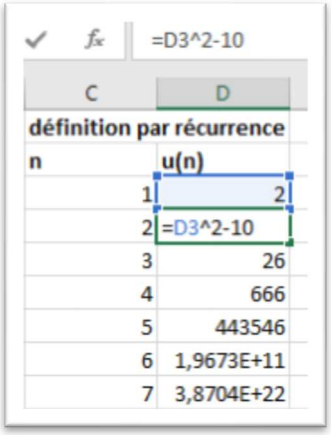
Les outils numériques

Le tableur et l'algorithmique permettent, chacun à leur manière, de mettre en scène les différences entre les deux.

Habituellement, sur tableur, une colonne des valeurs de n est créée et les valeurs de u_n sont générées dans la colonne qui la jouxte à droite. Si la suite est définie par une « fonction qui définit », la « fonction » rentrée pour générer les termes en faisant glisser la poignée de recopie vers le bas prend pour argument la valeur située à sa gauche. Dans l'exemple ci-dessous, le contenu de la cellule D3 est calculé à partir de celui de la cellule C3 :



Si la suite est définie par une « fonction qui génère », la « fonction » rentrée sur le tableur pour générer les termes en faisant glisser la poignée de recopie vers le bas prend pour argument la valeur située au-dessus. Dans l'exemple ci-dessous, le contenu de la cellule D4 est calculé à partir de celui de la cellule D3 (dans laquelle il est d'ailleurs nécessaire de rentrer une valeur numérique qui est le premier terme de la suite) :



La différence entre les deux modes de génération est matérialisée par le fait que l'argument de la « fonction » entrée se situe dans deux colonnes différentes et par la nécessité de rentrer le premier terme de la suite dans le cas où elle est définie par récurrence.

L'algorithmique figure au programme officiel de Première. Un algorithme est un moyen de définir les suites selon l'un ou l'autre des deux modes de génération. Prenons un exemple classique en langue naturelle :

(Algorithme 1)
U=3
Pour i allant de 1 à p
U prend la valeur 2×U
Fin Pour

(Algorithme 2)
U prend la valeur 3×2^p

À l'issue de ces deux algorithmes, si l'entier p a été au préalable affecté à la variable algorithmique p, la variable algorithmique U contient le terme u_p de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2, le premier via sa forme récurrente, le second via sa forme explicite.
La présence de l'instruction « Pour… Fin Pour » matérialise le calcul « de proche en proche » des termes lorsqu'ils sont définis par une relation de récurrence.
Dans les deux algorithmes, le nom de la variable algorithmique U ne comporte pas l'indice du terme calculé ; dans le cas de l'algorithme 1, i contient successivement toutes les valeurs de l'indice i ($1 \leq i \leq p$) et U contient successivement toutes les valeurs de u_i qui sont « écrasées » de proche en proche.
Le nom de la variable mathématique (qui est l'indice) ne peut pas figurer dans celui de la variable algorithmique U, ce qui pourrait être une source de difficulté pour les élèves.

Les représentations graphiques

Les représentations graphiques des suites figurent dans la colonne « capacités » du programme officiel, en face du « contenu » « sens de variation ». Le programme ne spécifie pas le type de représentation graphique attendu.
Une suite peut être représentée dans un repère en dimension 2 par l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$: les points sont isolés par opposition aux fonctions continues que les élèves côtoient habituellement. Si la suite est définie par une relation du type $u_n = f(n)$ (f définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{N}$), les points isolés se situent sur la courbe représentative de la fonction f.
Une suite peut être représentée sur une droite munie d'un repère par l'ensemble des points d'abscisse u_n.
Dans le cas où la suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = g(u_n)$, les points peuvent être obtenus par une construction dans le plan faisant intervenir la première bissectrice et la courbe représentative de la fonction g. Ce type de représentation est parfois nommé « en escalier », en escargot ».
Ce type de représentation requière un travail dans le cadre graphique faisant intervenir les notions d'images et d'antécédent du cadre fonctionnel, de symétrie du cadre géométrique.

Les suites arithmétiques et géométriques figurent au programme officiel de Première. Les termes des unes comme des autres peuvent être générés selon les deux modes décrits ci-dessus.

Remarquons que la « fonction qui définit » une suite géométrique est à un facteur près une fonction exponentielle qui n'est pas encore définie à ce niveau d'enseignement.

Le programme officiel ne spécifie pas les notations à adopter. La notation usuelle du terme général d'une suite u est bien entendu u_n, cependant rien n'empêche d'utiliser la notation fonctionnelle $u(n)$, qui est d'ailleurs celle des calculatrices graphiques des élèves du lycée.

Les calculatrices du lycée permettent d'entrer les suites selon les deux modes de génération. La variable est alors par défaut nommée n. Cela permet entre autres de calculer un terme d'indice donné, générer un tableau de valeurs, obtenir une représentation graphique - par points isolés, ou en « escalier » si la suite est définie par récurrence.
Lorsqu'une suite est définie par récurrence par la donnée de u_{n+1} en fonction de u_n, selon les modèles de calculatrices, les élèves peuvent entrer la relation de récurrence telle quelle ou devoir la modifier pour exprimer de u_n en fonction de u_{n-1}. Ceci constitue une tâche en soi, à laquelle les élèves peuvent être préparés par un travail de type algébrique sur la notation indicielle.

Si la suite est définie par une « fonction qui définit », les élèves peuvent en obtenir un tableau de valeurs en l'entrant dans le mode « fonction » de la calculatrice (la variable se nomme alors x par défaut), puis régler le pas à 1. S'ils font appel à la représentation graphique, ils obtiennent celle de la fonction définie sur $[a; +\infty[$.

La notion de limite est abordée « *à partir d'exemples* ». La définition formelle ne figure donc pas.

Le sens de variation des suites

Attardons-nous sur le contenu intitulé « *sens de variation d'une suite numérique* » ; pour simplifier le propos, nous nous bornerons au cas de la stricte croissance d'une suite
Le programme officiel ne spécifie pas quelle définition du sens de variation d'une suite est attendue. Or deux énoncés équivalents caractérisent la stricte croissance d'une suite :

- $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1})$, qui est celui qui est habituellement énoncé au lycée comme dans le supérieur. Il relève de la perspective ponctuelle universelle. Cet énoncé fait intervenir tout terme et son successeur ; en cela, il relève aussi de la perspective locale dans le monde du discret et a un aspect dynamique (propriété qui se « passe » d'un rang au suivant).
- $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, si\ n < p\ alors\ u_n < u_p\right)$, qui est celui de la stricte croissance d'une fonction, doublement quantifié, restreint à $\mathbb{N}$. En pratique, il n'offre d'utilité que lorsqu'il est établi que la suite est croissante ; il permet alors d'en déduire la comparaison de termes non consécutifs d'une suite. Il relève de la perspective globale.

La démonstration de l'équivalence des deux énoncés est à la portée d'un élève de Terminale mais pas d'un élève de Première puisqu'elle comporte un raisonnement par récurrence.
Donner le premier énoncé en définition en classe de Première n'exclut pas de « donner une intuition » aux élèves que le premier énoncé implique le second et de montrer avec eux que le second implique le premier. Cela présente l'intérêt :

- De légitimer l'utilisation du vocabulaire commun aux suites et aux fonctions quant à leur sens de variation (« sens de variation », « croissant », « décroissant », « monotone » sont utilisés pour les suites comme pour les fonctions) ;
- D'étendre explicitement l'aspect local de la monotonie d'une suite à un aspect global, ce qui justifie la propriété parfois mobilisée au lycée : si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$.

Il est aussi possible de souligner les points communs entre la monotonie des suites et celle des fonctions dans le cadre graphique, lorsque les suites sont représentées dans un repère du plan par des points isolés.

En classe de Première, la preuve de ce que tout terme est inférieur au terme suivant mobilise le plus souvent une des méthodes suivantes :

- La recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs ;

- La comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1 dans le cas d'une suite à termes strictement positifs ;
- La propriété : si une fonction f est monotone sur $[0; +\infty[$, alors la suite de terme général $f(n)$ est a le même sens de variation que f.

Dans la mobilisation de la définition comme dans les deux premières méthodes, le travail s'effectue dans le cadre algébrique. Si la suite est donnée sous forme explicite (u_n en fonction de n), il est nécessaire d'exprimer dans un premier temps u_{n+1} en fonction de n ; les élèves peuvent être préparés à cette tâche par un travail de type algébrique sur la notation indicielle.
Puis il s'agit de prouver une inégalité ou de résoudre une inéquation dont l'inconnue est l'entier naturel n.
Les élèves de Premières sont familiers avec les preuves d'inégalités et les résolutions d'inéquations dans $\mathbb{R}$. En quoi les tâches sont-elles semblables, en quoi diffèrent-elles ?

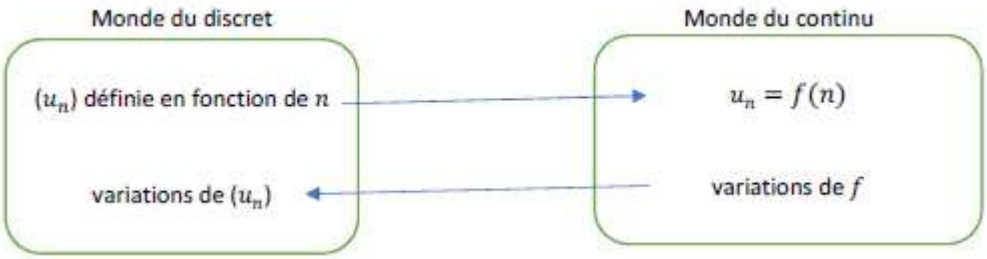
Prenons l'exemple très simple où les élèves ont besoin de chercher le signe de $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$ (dans $\mathbb{N}$ bien entendu). Les élèves peuvent raisonner par disjonction de cas. Cependant ils sont coutumiers de résolutions d'inéquations dans $\mathbb{R}$ et nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils auront plutôt tendance à résoudre l'inéquation $2n - 3 \geq 0$, qui équivaut à $n \geq \frac{3}{2}$. Une adaptation est nécessaire puisque ceci équivaut dans $\mathbb{N}$ à $n \geq 2$.

Prenons un deuxième exemple simple : la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Dans $\mathbb{R}$, cette recherche de signe nécessite un tableau de signe ou un raisonnement par disjonction de cas ou encore l'appel à la propriété sur le signe d'un trinôme du second degré. Dans $\mathbb{N}$, un raisonnement par implication qui fait intervenir la positivité du numérateur et celle du dénominateur suffit.

Prenons un troisième exemple : la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n = n^2 - 6n + 1$. Là aussi, un raisonnement par disjonction de cas peut permettre de répondre, à la condition de repérer par avance que si $n \geq 6$, l'expression est positive et si $n \leq 5$ l'expression est négative. Les élèves sont coutumiers avec la recherche du signe d'un trinôme par celui de son discriminant et de ses racines, nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils auraient tendance à mobiliser celle-ci. Or les racines du trinôme, $3 + 2\sqrt{2}$ et $3 - 2\sqrt{2}$, sont irrationnelles. Comment les élèves vont-ils les nommer : x_1 et x_2 selon leur habitude ? Mais l'indéterminée se nomme n et pas x. Et les nommer n_1 et n_2 peut paraître enfreindre un implicite qui est que n désigne un entier. Puis une adaptation est nécessaire pour déduire de la recherche du signe du trinôme dans $\mathbb{R}$ celui du trinôme dans $\mathbb{N}$.

Ces exemples montrent que la preuve d'une inégalité dont l'indéterminée est dans $\mathbb{N}$ nécessite dans certains cas des adaptations par rapport au cas où l'indéterminée est dans $\mathbb{R}$; les raisonnements par implication peuvent s'appliquer plus souvent lorsque l'indéterminée est dans $\mathbb{N}$ que lorsqu'elle est dans $\mathbb{R}$. Or rien n'indique dans le programme officiel qu'il faille faire un travail spécifique avec les élèves. Que font les manuels, les enseignants ?

Dans la troisième méthode, on a un va et vient entre les deux « mondes », le cadre fonctionnel est mobilisé :



Notons que lorsque le sens de variation de f change en des valeurs non entières, la conclusion portant sur la monotonie de (u_n) demande une adaptation qu'il ne faut pas négliger.

Le changement de notation de u à f souligne que l'un est un objet « suite » et l'autre un objet « fonction » (sous-entendu définie sur un intervalle). Ce qui permet de mobiliser les outils de calcul différentiel ou parfois plus simplement des propriétés de monotonie de fonctions de référence connues des élèves.
Les élèves peuvent ne voir dans ce changement de notation qu'une habitude puisqu'ils effectuent des calculs de dérivées de fonctions le plus souvent nommées f… et se demander pourquoi ne pas tout simplement calculer $f'(n)$. Cette incursion dans le monde du continu à partir de celui du discret peut échapper aux élèves qui n'y verraient alors qu'un jeu de symboles.
En Première S, les élèves peuvent aussi dans certains cas trouver le sens de variation d'une fonction composée en mobilisant les propriétés qui figurent officiel dans le thème des fonctions :

Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction u étant connue, k étant une fonction constante et λ un réel.

Extrait du programme officiel de Première S de 2010 page 2

Notons que la notation u choisie pour énoncer ces propriétés peut prêter à confusion puisque u est aussi le nom de la suite de terme général u_n.

Cette troisième méthode de recherche du sens de variation d'une suite est porteuse de caractère continu : le continu de la fonction f (nous avons vu que les fonctions définies sur des intervalles sont pour ainsi dire toutes continues en classe de Première).
Compte tenu des éléments qui précèdent, nous nous demandons cependant ce qui différencie u et f pour un élève de Première ou de Terminale.

Exploiter la représentation graphique

Terminons l'analyse du programme officiel de Première S, par la « capacité attendue » du programme officiel « *exploiter une représentation graphique des termes d'une suite* », qui figure en face de l'intitulé « *sens de variation d'une suite numérique* ». De quelle capacité s'agit-il ?
Nous voyons plusieurs possibilités :

- Travailler le lien entre suite et fonction dans le cas où la suite est définie par une « fonction qui définit » et représentée dans le plan par les points de coordonnées $(n; u_n)$;
- Conjecturer le sens de variation d'une suite ;
- Conjecturer la limite d'une suite.

ii. Les suites dans le programme de Terminale

En classe de Terminale S, le préambule sur le thème de l'analyse du programme officiel entré en vigueur en 2012[37] motive lui aussi l'étude des suites et des fonctions par la résolution de problèmes : « *L'un des objectifs du programme est de permettre à l'élève, par une consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions, d'étudier un plus grand nombre de phénomènes discrets ou continus* ».

Le « *Contenu* » sur les suites concerne en premier lieu le raisonnement par récurrence. Celui-ci mobilise les aspects du discret dénombrable décrits ci-dessus en ce qui concerne la « forme récurrente » d'une suite. Dans le cadre de ce travail, nous faisons le choix de ne pas analyser davantage le raisonnement par récurrence, qui a fait par ailleurs l'objet d'études didactiques (par exemple Grenier (2012)).

Le programme se poursuit par l'existence et la recherche de limites par comparaison, par « opérations sur les limites », puis le théorème de convergence des suites croissantes majorées. Dans les « *Commentaires* », il est dit qu' « *Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite* $+\infty$ ».

[37] Bulletin officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011

Les tâches concernant la recherche de limite par « opérations sur les limites » demandent un travail de type algébrique sur les limites ; les autres requièrent un travail sur les inégalités dans $\mathbb{N}$ dont nous avons analysé certains impacts sur le travail des élèves ci-dessus.

iii. Analogies dans les définitions, méthodes et propriétés entre suites et fonctions au niveau du lycée général

Dans ce qui suit, nous désignerons par « notions analogues » des notions qui présentent des analogies, que ce soit dans le vocabulaire ou les notations, la forme algébrique, l'idée sous-jacente.
Nous ferons de même pour les propriétés, méthodes et.

Pour certaines notions et propriétés mathématiques inscrites dans le discret, fini ou infini dénombrable, il existe des notions analogues - voire équivalentes - dans le continu. Et réciproquement.
Des méthodes associées à des types de tâches analogues peuvent être elles aussi analogues ou équivalentes.

Nous nous focalisons ici sur les notions présentes dans le programme officiel des Terminales L, ES et S de 2011, concernant les suites et les fonctions (par « fonction » nous entendons dans cette partie C 1 a iii : « fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$ », par opposition à « suite » et selon l'usage prédominant au lycée). Ces notions et celles qui leur sont associées (monotonie, limite etc.) peuvent-elles être mises en correspondance ? Quelles méthodes et propriétés relatives aux suites et aux fonctions présentent des analogies ? Nous tâcherons de répondre à ces questions, ce qui nous amènera à déborder quelque peu du programme officiel de Terminale.

Suite ; suite des accroissements

Les notions de suite et de fonction comportent davantage que des analogies puisque les suites sont des fonctions, qui se différentient des autres fonctions par leur ensemble de définition.

Ce n'est pas le cas des notions de « suite des accroissements » et de « dérivée en un point ».
Cependant, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{1} = \frac{u_{n+1}-u_n}{n+1-n}$ est un taux d'accroissement entre deux valeurs consécutives d'une suite ; le nombre dérivé en un point est la limite du taux d'accroissement en ce point.
Toutes deux ont donc en commun d'être fortement liées aux taux d'accroissements. De façon imagée, ce sont, compte tenu de la nature de la variable, entière dans un cas, réelle dans l'autre, « des taux d'accroissement on ne peut plus proches ».

Ceci a par exemple pour conséquence, en économie, sous certaines conditions, d'approcher le coût marginal[38] pour une production discrète par la dérivée de la fonction coût. Les manuels de Première et de Terminale, L, ES ou S comportent des exercices qui mobilisent cette approximation.

Autour du sens de variation :

La détermination du signe des écarts $(u_{n+1} - u_n)$ d'une suite permet de déterminer la monotonie de cette suite ; le signe de la dérivée d'une fonction permet de déterminer la monotonie d'une fonction dérivable.
Ces deux notions analogues de « suite des accroissements » et de « dérivée en un point » permettent donc, dans les deux « mondes », par une recherche de signe, de déterminer un sens de variation.

[38] Définition de Wikipedia à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Co%C3%BBt_marginal : « *Pour une production discrète — par exemple une production d'objets — le coût marginal d'une unité est le taux d'accroissement de la fonction coût C entre cette unité et la précédente* $C_m(n) = C(n) - C(n-1)$. »

Comme nous l'avons vu supra, la définition classique de la stricte croissance d'une suite - $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$ – est équivalente à la définition doublement quantifiée : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n > p \Rightarrow u_n > u_p$, qui est celle de la définition de la stricte croissance d'une fonction dans le cas particulier où elle est définie sur $\mathbb{N}$.
Réciproquement, l'analogue de la définition classique de la stricte croissance d'une suite est, pour une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: $\forall x \in I,\ f(x+1) > f(x)$. Ceci ne constitue pas une définition de la stricte croissance de la fonction f sur I.

La propriété : « Si la fonction f est croissante alors la suite de terme général $f(n)$ est croissante » est énoncée et utilisée en classe Première.
Elle permet de déterminer la monotonie d'une suite via des méthodes de recherche de monotonie relevant du continu (signe de la dérivée, monotonie de fonctions composées de types $\lambda f, f+k, \sqrt{f}, \frac{1}{f}$). La réciproque de cette propriété est fausse.
Les suites étant des fonctions particulières, les propriétés de monotonie de suites composées de types $\lambda u, u+k, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$ sont identiques aux propriétés de monotonie des fonctions composées analogues. Cependant, elles ne figurent pas au programme officiel.

Autour des limites

Les notions de limite en $+\infty$ sont identiques pour les suites et les fonctions.
Celle de limite d'une fonction en un point n'a pas d'analogue en ce qui concerne les suites dont l'ensemble de définition est discret. La limite d'une fonction en -∞ n'a bien entendu pas non plus d'analogue en ce qui concerne les suites.

La propriété de la limite monotone dans $\mathbb{N}$ est énoncée en Terminale S en tant que théorème.
Elle a un analogue qui la prolonge, dans $\mathbb{R}$, qui n'est cependant pas énoncée en Terminale :

> Théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$ [39] :
> Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$.
> Alors f admet une limite à gauche en b qui est finie si f est majorée et égale à $+\infty$ sinon.
> Et f admet une limite à droite en a qui est finie si f est minorée et égale à $-\infty$ sinon.

La propriété de la limite monotone dans $\mathbb{N}$ a pour corollaire : toute suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$.
La propriété analogue (toute fonction strictement croissante sur un intervalle $[a;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) est fausse.

Les propriétés d'opérations, comparaisons, compositions de limites sont analogues pour les suites et pour les fonctions.

Une propriété est parfois utilisée en Terminale bien qu'elle ne fasse pas l'objet d'un énoncé dans le programme : « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A$ ».
Sa contraposée s'énonce ainsi : « Si $(f(n))$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors f n'a pas de limite en $+\infty$ ».
La réciproque est fausse : la suite $(\sin(2\pi n))$ converge alors que la fonction $x \longmapsto \sin(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Autour de la continuité

La notion de continuité d'une fonction n'a bien entendu pas d'analogue dans le domaine des suites. Le théorème des valeurs intermédiaires est faux en ce qui concerne les suites.

[39] Pour une version plus générale de ce théorème, voir : Ramis, E., Deschamps, C., Odoux, J. (1976). *Cours de mathématiques spéciales, volume 3 (page 119)*. Paris, Masson.

Autour de la convexité

La notion de convexité d'une fonction figure au programme de Terminale ES.
Son analogue dans le domaine des suites existe, bien qu'il ne soit pas au programme du lycée général. Par définition, une suite est convexe lorsque la suite des écarts $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante. Remarquons l'analogie de cette définition avec la propriété caractéristique d'une fonction convexe lorsqu'elle est dérivable : « Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante ».

Cette dernière propriété est équivalente, dans le cadre graphique, à : « Une fonction dérivable est convexe si et seulement si les coefficients directeurs des tangentes à sa courbe en fonction de x sont croissants ».
Une implication analogue dans le cas des suites est vraie : « Si une suite (u_n) est convexe alors les pentes $\frac{u_n - u_0}{n}$ sont croissantes ». (Pour une démonstration de cette propriété, voir : Demailly (2010). Les pentes $\frac{u_n - u_0}{n}$ sont les coefficients directeurs des droites passant par les points de la représentation graphique de la suite dans le plan de rangs 0 et n.
Sa réciproque est fausse : comme Demailly (2010), notons les pentes $p_n = \frac{u_n - u_0}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Soit la suite définie par : $u_0 = 0$; $u_1 = 0{,}5$; $u_2 = 1{,}1$; $u_3 = 1{,}66$; pour tout $n \geq 4, u_n = n^2$.
Alors $v_0 = 0{,}5$; $v_1 = 0{,}6$; $v_2 = 0{,}56$. Donc la suite (u_n) n'est pas convexe.
Et $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}55$; $p_3 = \frac{1{,}66}{3} > p_2$; pour tout $n \geq 4, p_n = n$. Les pentes sont croissantes.
Cette suite constitue un contre-exemple de la réciproque de la propriété.

Suites géométriques et fonctions exponentielles

Les suites géométriques sont définies pour toute raison réelle q. Pour les bases q strictement positives, elles admettent un prolongement continu unique défini sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété : pour tous réels x et y, $q^{x+y} = q^x q^y$. Nous y consacrons la partie III E.

On peut observer une analogie entre l'expression des écarts entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, $u_{n+1} - u_n = (q - 1) \times u_n$, et celle de la dérivée de la fonction exponentielle de base q lorsque $q > 0$: $f'(x) = \ln q \times f(x)$.

Les limites des fonctions exponentielles et des suites géométriques au voisinage de $+\infty$ sont les mêmes. Cependant, dans le cadre de l'enseignement au lycée et à l'université, il ne s'agit pas d'un cas particulier de la propriété citée plus haut : « Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$, alors $\lim_{n \to +\infty} f(n) = A$ ». En effet, dans les manuels de lycée comme dans les cours de Licence que nous avons consultés, les suites géométriques préexistent aux fonctions exponentielles et sont étudiées au préalable. La propriété des limites des fonctions exponentielles apparait alors comme un prolongement des limites des suites géométriques.

Autour des sommes

L'opérateur de sommation finie ou infinie du discret, $\sum$, a pour analogue l'opérateur d'intégration $\int$ dans le continu. Rappelons que ce dernier a été introduit par Leibniz qui a utilisé la lettre « S » pour « somme », en majuscule et dans le style français du XVIIe siècle.

Les notions de moyenne arithmétique et de valeurs moyenne d'une fonction sur un intervalle présentent des analogies que nous analyserons dans la partie D qui suit.

La récurrence

Le raisonnement par récurrence, abordé en Terminale S, est basé sur l'existence d'un « suivant » pour tout élément de $\mathbb{N}$. Il n'a pas d'analogue dans le continu.

Suites		Fonctions
Notion de suite des accroissements $(u_{n+1}-u_n)$	$\leftrightarrow$	Notion de dérivée
Monotonie (définition - cas stricte croissance) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$	$\times$	Définition analogue fausse
Monotonie (définition équivalente - cas stricte croissance) : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad n > p \Rightarrow u_n > u_p$	$\Leftrightarrow$	Monotonie (définition - cas stricte croissance) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
Monotonie (méthode) : recherche du signe des accroissements $(u_{n+1}-u_n)$	$\leftrightarrow$	Monotonie (méthode) : recherche du signe de la dérivée
La suite de terme général $f(n)$ est croissante	$\Leftarrow$	La fonction f est croissante
Propriété : monotonie de $\lambda u, u+k, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$ connaissant la monotonie de u	$\Leftrightarrow$	Propriété : monotonie de $\lambda f, f+k, \sqrt{f}, \frac{1}{f}$ connaissant la monotonie de f
Définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\Leftrightarrow$	Définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
Pas de définition analogue	$\times$	Définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x),\ a \in (\mathbb{R} \cup -\infty)$
Propriété de la limite monotone dans $\mathbb{N}$: - Toute suite croissante majorée converge ; - Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$	$\leftrightarrow$	Théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$ (partie 1) : Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$. Alors f admet une limite à gauche en b - Finie si f est majorée ; - Égale à $+\infty$ si f n'est pas majorée
Propriété : toute suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$	$\times$	Propriété analogue fausse
Pas de théorème analogue	$\times$	Théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$ (partie 2) : Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$. Alors f admet une limite à droite en a - Finie si f est minorée ; - Égale à $-\infty$ si f n'est pas minorée
Théorèmes sur les limites : - D'opérations ; - De comparaison ; - De composition.	$\Leftrightarrow$	Les mêmes théorèmes
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A\ (A \in \overline{\mathbb{R}})$	$\Leftarrow$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A\ (A \in \overline{\mathbb{R}})$
$(f(n))$ n'a pas de limite en $+\infty$	$\Rightarrow$	f n'a pas de limite en $+\infty$
Pas de notion analogue ; Théorème analogue faux	$\times$ $\times$	Notion de continuité ; Théorème des valeurs intermédiaires
Suite convexe (définition) : dont la suite des écarts $(u_{n+1}-u_n)$ est croissante	$\leftrightarrow$	Fonction convexe (propriété caractéristique - cas dérivable) : dont la dérivée est croissante
Suite convexe (propriété) : alors les pentes $\frac{u_n-u_0}{n}$ sont croissantes. Propriété dont la réciproque est fausse	$\leftrightarrow$ $\times$	Fonction convexe (propriété caractéristique – cas dérivable) : dont les coefficients directeurs des tangentes à la courbe sont croissants.
Suite géométrique (définition) : $(q^n), q \in]-\infty;0]$	$\times$	q^x pas défini pour $q \in]-\infty;0]$
Suite géométrique (définition) : $(q^n), q \in]0;+\infty[$	$\leftrightarrow$	Fonction exponentielle de base q (définition) : $x \mapsto q^x, q \in]0;+\infty[$
Suite géométrique (u_n) (propriété) : $u_{n+1} - u_n = (q-1) \times u_n$	$\leftrightarrow$	Fonction exponentielle f (propriété) : $f'(x) = \ln q \times f(x)$

Suite géométrique (u_n) (propriété) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si $0 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $q > 1$	↔	Fonction exponentielle f (propriété) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si $0 < q < 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $q > 1$
$\sum$	↔	$\int$
Définition moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$	↔	Définition valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
Raisonnement par récurrence	×	Pas d'analogue

Légende :

↔	notions, définitions, propriétés ou méthodes analogues
⇔	définitions, propriétés ou méthodes équivalents
⇐ ou ⇒	implications – la réciproque est fausse si pas de signe d'équivalence
×	notions, définitions, propriétés sans analogue ou avec analogue erroné

b) Dans les manuels

Les analogies entre moyenne arithmétique et valeur moyenne sont l'objet de la partie suivante III D ; le prolongement des suites géométriques aux fonctions exponentielles fait l'objet de la partie III E. Tous deux sont abordés, à ce jour, en classe de Terminale générale.
Dans cette partie III C, nous nous focalisons sur les autres analogies entre suites et fonctions, qui relèvent majoritairement de la classe de Première.

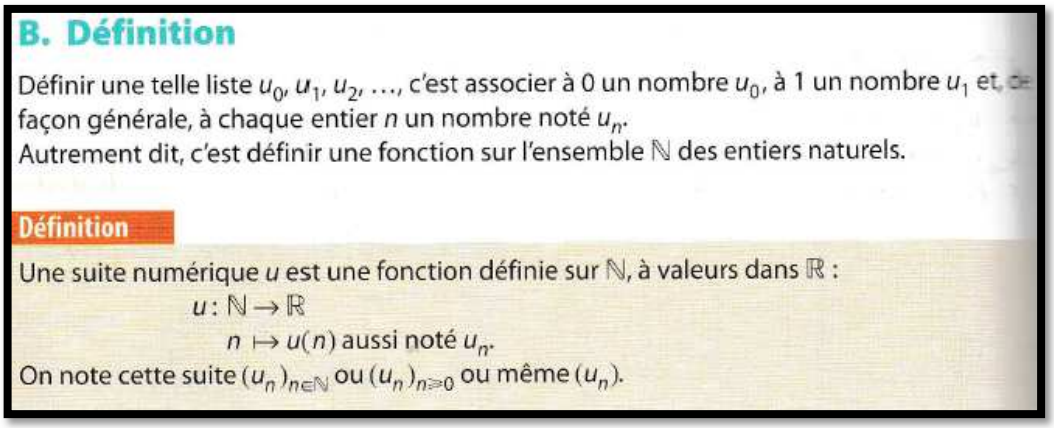
Nous analysons trois manuels de Première S qui mettent en œuvre le programme de 2010 : Le « Math'x » de 2011, éditions Didier ; le « Transmath » de 2011, éditions Nathan ; le manuel en ligne « Sésamath »[40].
Les trois manuels traitent le programme officiel sur les suites dans le même ordre : un premier chapitre a pour but de définir les notions de suite, de suite arithmétique, de suite géométrique. Il inclue un travail sur la génération des termes d'une suite et leur représentation graphique. Un second chapitre définit et travaille le sens de variation d'une suite et approche la notion de limite.

Notre analyse porte essentiellement sur la façon dont les suites sont situées par rapport aux fonctions : dans leur mobilisation en tant que modèle, leur définition, les notations associées, le mode de génération des images, leur représentation graphique. Quelle définition du sens de variation est mobilisée, la propriété « si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ » est-elle énoncée, est-elle mobilisée dans les exercices ? Nous porterons aussi attention au travail spécifique sur $\mathbb{N}$ que ces manuels peuvent offrir.

i. La définition des suites ; la définition du sens de variation

Les trois manuels définissent les suites en tant que fonctions particulières, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Le manuel « Transmath » fait aussi référence, dans l'exposition de connaissances, à l'aspect de liste infinie des suites dans le préambule à la définition d'une suite.

Cependant, seule la notation indicielle est utilisée dans les manuels « Transmath » et « Sésamath ». La notation fonctionnelle est mobilisée ponctuellement dans l'exposition de connaissances du « Math'x », concernant la définition d'une suite.



B. Définition

Définir une telle liste $u_0, u_1, u_2, \ldots$, c'est associer à 0 un nombre u_0, à 1 un nombre u_1 et, de façon générale, à chaque entier n un nombre noté u_n.
Autrement dit, c'est définir une fonction sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Définition

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n)$ aussi noté u_n.

On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou même (u_n).

Manuel Math'x, Première S de 2011, éditions Didier, page 128

La notation indicielle fait l'objet d'un travail algébrique dans deux à cinq exercices par manuels.
Lorsque la suite est définie par la donnée de u_n en fonction de n, la tâche consiste le plus souvent à exprimer u_{n+1} en fonction de n (comme nous l'avons vu supra, cela permet de préparer les élèves à la recherche du sens de variation d'une suite). Lorsque la suite est définie par récurrence par la donnée de u_{n+1} en fonction de u_n, la tâche consiste le plus souvent à exprimer u_n en fonction de u_{n-1} (comme nous l'avons vu supra, cela prépare les élèves à entrer une suite sous forme récurrente dans leur calculatrice). Le manuel « Transmath » ne propose cependant que des tâches dans lesquelles la suite est définie de façon explicite ; ceci est cohérent avec le fait que la calculatrice y est quasi-absente des chapitres sur les suites.

[40] http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1s_2015 au 03/08/2018

La définition d'une suite par récurrence fait l'objet de plusieurs remarques dans les trois expositions de connaissances, signe que les auteurs soignent particulièrement ce point. Les manuels soulignent que cette définition permet de calculer les termes « *de proche en proche* » ; que pour calculer un terme, il faut calculer tous les précédents à partir du premier (avec un sous-entendu : si on ne dispose pas d'un terme entre le premier et celui que l'on cherche… ce qui est le cas dans les exercices).

Les trois manuels donnent la définition classique du sens de variation des suites. Les méthodes de recherche de sens de variation attendues sont exposées clairement.

ii. La représentation graphique

La représentation graphique par points de coordonnées $(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{u_n})$

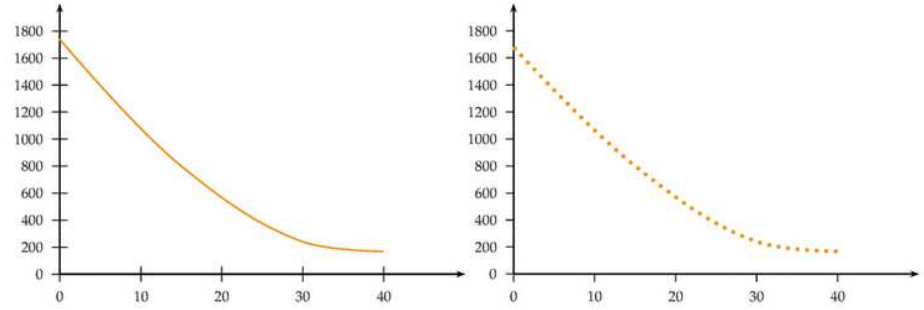
La représentation graphique des suites par des points isolés de coordonnées $(n; u_n)$, qui est le cas particulier de celle d'une fonction, est traitée différemment d'un manuel à l'autre.

Le manuel « Math'x », démarre le premier chapitre par une « activité » qui propose pour une situation concrète discrète deux représentations graphiques possibles : l'une est une « courbe lisse » sur laquelle les points à coordonnées entières sont marqués, l'autre ne comporte que ces points à coordonnées entières. Il est demandé laquelle des deux « *convient le mieux pour cette situation* ». Une note dans la marge donne l'objectif de cette « activité » : « *Distinguer une situation discrète d'une situation continue* » ; auquel nous rajoutons la distinction dans le cadre graphique entre courbe de fonction continue et représentation graphique d'une fonction définie sur un sous ensemble de $\mathbb{N}$.
L'exposition de connaissance du « Math'x » montre la représentation graphique des premiers termes d'une même suite par des points isolés en dimension 1 et 2 ; en page droite en face, un exercice corrigé montre la façon d'obtenir un graphique de points isolés en dimension 2 sur tableur.
L'exposition de connaissances montre, plus loin, la représentation graphique des suites arithmétiques, formée de points alignés, qui fait l'objet de lectures graphiques dans un exercice de fin de chapitre.
Dans deuxième chapitre du « Math'x », la représentation graphique par points isolés illustre le sens de variation d'une suite dès l' « activité » d'introduction à ce sujet, puis dans l'exposition de connaissances et dans un exercice qui fait figurer dans un même repère la représentation graphique de la fonction racine carrée et celle de la suite des carrés des entiers, à effectuer « à la main ».
Cette représentation graphique est aussi utilisée dans le « Math'x » pour illustrer la notion de limite dès l' « activité » d'introduction à ce sujet, puis dans l'exposition de connaissances.
Dans les tâches qui comportent une représentation graphique de ce type, la suite est toujours donnée sous sa forme explicite, sauf dans un « TP » qui confronte trois modélisations d'un même phénomène par trois suites différentes dont deux sont définie par récurrence et une de façon explicite ; les trois représentations figurent sur le même graphique afin de « *critiquer et comparer* » les modèles.

Le manuel « Sésamath » démarre son premier chapitre, comme le « Math'x », par une « activité » qui propose une situation discrète et deux graphiques qui pourraient la représenter :

DÉBAT 1 Choisir le bon modèle

Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobile. On note x le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée.
Le coût de production de x pièces en euros est noté $C(x)$.
Quelle représentation graphique sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$ vous semble la plus pertinente ? Expliquer.



Manuel « Sésamath » de Première S, page 106

L'intention est là aussi de distinguer une situation discrète d'une situation continue, la représentation graphique d'une fonction définie sur un sous ensemble de $\mathbb{N}$ d'une courbe de fonction continue. Remarquons qu'une partie de la question, « *sur l'intervalle* $[0; 40]$ », ajoute de la complexité au « débat » qu'elle est censée provoquer : la situation est discrète mais l'intervalle continu !
Les points à coordonnées entières ne sont pas représentés sur la courbe, peut-être l'auteur a -t-il jugé qu'ils sont trop nombreux, trop rapprochés ?
Des tâches de représentation graphique des premiers termes d'une suite par points isolés de coordonnées $(n; u_n)$ « à la main » sont présentes à plusieurs reprises : dans l' « activité » n°2 qui suit le « débat » ; dans une « méthode » dans l'exposition de connaissance suivie d'un exercice d'application ; dans trois exercices. Dans tous les cas, soit les premiers termes sont donnés soit la suite est sous forme explicite.
Ce type de graphique est utilisé pour illustrer, dans l'exposition de connaissance du second chapitre, les notions de sens de variations et de limite. Il permet de conjecturer le sens de variation dans un exercice, la limite dans deux exercices.

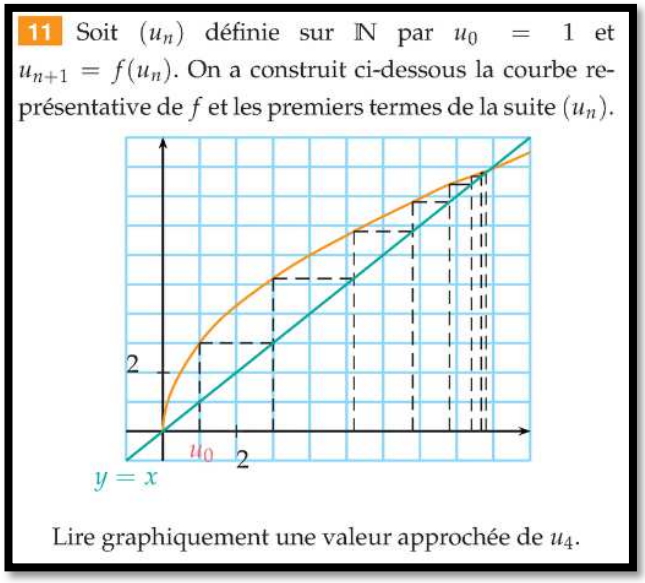
Quant au manuel « Transmath », il n'utilise ce type de représentation graphique que pour illustrer les notions de sens de variation et de limite.

La représentation graphique « en escalier »

Le manuel « Math'x » ne traite ce type de représentation graphique que dans le second chapitre ; la méthode fait l'objet d'une « activité » en début de chapitre puis est mobilisée dans 3 exercices au total, avec pour objectif de conjecturer un sens de variation ou une limite ; dans le premier exercice, la représentation graphique est donnée et dans les deux autres, elle est à effectuer « à la main ».

Le manuel « Transmath », dans le même esprit, mobilise ce type de représentation dans le but de conjecturer un sens de variation ou une limite. Le nombre d'exercices de ce type est supérieur à celui du « Math'x » (Le « TP » qui expose la méthode de construction en fin de premier chapitre et 9 exercices en tout).

Le manuel « Sésamath » mobilise cette construction plus tôt, plus souvent et dans des tâches plus variées.
Dès le premier chapitre, dans l'exposition de connaissances, la méthode est expliquée avec un exercice d'application. De tels graphiques sont donnés dans 7 exercices avec des tâches de lectures graphiques de termes de la suite (suite arithmétique, géométrique, ou pas).
En voici un exemple :



Manuel « Sésamath » de Première S, page 117

Un exercice comportant une tâche de construction « à la main » est posé.
Dans le deuxième chapitre, ce type de représentation est, comme dans les deux autres manuels, utilisé pour conjecturer le sens de variation et la limite d'une suite. Ceci fait l'objet d'une « méthode » avec un exercice corrigé en exposition de connaissances puis de 4 exercices.

iii. Les notations $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Les trois manuels utilisent les lettres u et f pour désigner respectivement une suite et une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$; le nom des variables est systématiquement respectivement $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a; +\infty[$.

Le manuel « Math'x » de Première S

Dans le manuel « Math'x », les notations $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ n'apparaissent que dans le second chapitre sur les suites qui, rappelons-le, concerne le sens de variation et la limite d'une suite.
La notation $u_n = f(n)$ y est mobilisée pour la première fois dans l'exercice résolu en page droite face à l'exposition de connaissances sur le sens de variation d'une suite, en vue d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = -3 + \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$:

Énoncé

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = -3 + \frac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$;

b. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 4n + 3$ pour tout $n \geqslant 0$

c. $u_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Solution

a. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -3 + \frac{2}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante.
Par conséquent, f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ (chapitre 2, propriétés **5** et **6**).
Pour tout $n \geqslant 1$, on a évidemment $n + 1 \geqslant n \geqslant 1$.
Par décroissance de f, on en déduit que $f(n + 1) \leqslant f(n)$,
c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

b. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 4n + 3$.
Comme $n \geqslant 0$, $4n + 3 \geqslant 3$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$,
c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.

c. Pour tout n, on a bien $u_n > 0$.

De plus, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$.

Or, pour $n \geqslant 1$, $\frac{2n}{n+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2n \geqslant n + 1 \Leftrightarrow n \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ puisque $u_n > 0$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

MÉTHODE

Pour étudier le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on dispose de plusieurs méthodes.

• Si $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$:
– si f est croissante, pour tout n,
$n + 1 \geqslant n \Rightarrow f(n + 1) \geqslant f(n)$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$;
– si f est décroissante, pour tout n
$n + 1 \geqslant n \Rightarrow f(n + 1) \leqslant f(n)$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.

• Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:
– si, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$;
– si, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$.

• si $u_n > 0$ pour tout n, comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :
– si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$;
– si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Manuel Math'x, Première S de 2011, éditions Didier, page 159

Les deux autres méthodes attendues sont exposées dans la résolution des deux questions suivantes de l'exercice. Le texte du corrigé montre le raisonnement suivi, qui est généralisé dans l'encadré « méthode ».
Trois exercices de recherche de sens de variation peuvent mobiliser cette méthode ; leur énoncé laisse toute liberté dans le choix de la méthode ; celles du calcul du signe de la différence ou du quotient de deux termes consécutifs permettent presque toujours de répondre aux questions.

La notation $u_{n+1} = f(u_n)$ est explicitement mobilisée dans l' « activité » qui introduit la représentation graphique « en escalier » ; elle n'est pas explicitement demandée dans les 3 exercices qui mobilisent ce type de représentation mais elle y est un passage obligé.
Elle est aussi présente dans un exercice qui ne fait pas nécessairement intervenir le cadre graphique dans lequel la suite est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{1}{4}x + 1$. Les questions sont : est-elle décroissante ? géométrique ? semble-t-elle avoir pour limite $\frac{4}{3}$? Des contre exemples numériques peuvent suffire pour les deux premières questions.

Dans la catégorie « un peu de logique », deux exercices se suivent :

49 **1.** Démontrer que si la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, la suite $(f(n))_{n\geqslant 0}$ est également croissante.

2. Énoncer la réciproque. Montrer, à l'aide d'une représentation graphique par exemple, que cette réciproque est fausse.

50 **Vrai ou faux ?**
Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$ est croissante.

Manuel Math'x, Première S de 2011, éditions Didier, page 171

Le premier concerne le sens de variation des suites définies par « une fonction qui définit » et le second par « une fonction qui génère ».
Le premier demande de démontrer la propriété dans le cas où la fonction f est croissante ; la deuxième question demande d'en énoncer la réciproque, puis de montrer que celle-ci est fausse. L'idée d'un contre-exemple dans le cadre graphique est suggérée, ce qui ferme quelque peu la question (l'auteur se doute peut-être qu'elle est délicate pour les élèves qui doivent pour le traiter prendre des initiatives).
Le second, plus ouvert, est énoncé sous forme d'un « Vrai ou faux ? ». Les élèves doivent là aussi prendre des initiatives, d'autant plus que le cadre dans lequel trouver un contre-exemple n'est pas donné.
Le fait que les deux exercices soient situés l'un après l'autre n'est certainement pas dû au hasard. Ils permettent de confronter le sens de variation d'une suite lorsque la « fonction qui définit » est croissante versus lorsque la « fonction qui génère » est croissante.

Le manuel « Sésamath » de Première S

Le manuel « Sésamath » fait des choix assez semblables dans la mobilisation de la notation $u_n = f(n)$: elle est explicite dans l'exposition de connaissances du second chapitre. La propriété sur le sens de variation commun de la suite et de la fonction y est énoncée sans être démontrée, puis elle est mobilisée dans la « méthode » sur la recherche du sens de variation d'une suite qui suit (toujours sans faire l'objet d'une démonstration).
Deux exercices la mobilisent explicitement et de façon tout à fait correcte :

14 ► **MÉTHODE 3** p. 136

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = 4n - 7$
2) $u_n = \sqrt{n}$
3) $u_n = n^2 - 4n + 5$
4) $u_n = \dfrac{1}{4n}$

Manuel « Sésamath » de Première S, page 136

Trois autres exercices de recherche de sens de variation peuvent être effectués en mobilisant cette propriété, ou l'une des deux autres.

La notation $u_{n+1} = f(u_n)$ est mobilisée explicitement dès le premier chapitre du « Sésamath » qui propose de plus nombreuses tâches que les deux autres manuels sur les représentations graphiques en escalier. La notation est explicite dans l'exposé de la méthode et dans les deux premiers exercices de ce chapitre qui la mobilisent (voir extrait ci-dessus de l'exercice n°11 page 117). Elle est ensuite toujours implicite.

Le manuel « Sésamath » n'aborde par la réciproque de la propriété « si f est croissante alors la suite de terme général $f(n)$ est croissante ». Ni le sens de variation de (u_n) lorsqu'elle est définie par une « fonction qui génère » croissante.

Le manuel « Transmath » de Première S

Le manuel « Transmath » semble faire de la mobilisation de ces deux notations (associées à deux modes de générations de suite) un fil conducteur de ses deux chapitres.
Nous avons repéré pas moins de 17 exercices qui mobilisent explicitement la notation $u_n = f(n)$.
Dans le premier chapitre, elle l'est dans le but de calculer des termes de la suite. Dans le second chapitre pour préparer les élèves à la propriété « (u_n) a le même sens de variation que f » puis l'utiliser pour trouver le sens de variation de la suite. Cette propriété a le statut de « théorème » et fait l'objet d'une démonstration soignée dans l'exposition de connaissances. :

Théorème 1 La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- **Si** f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, **alors** la suite (u_n) est strictement croissante.
- **Si** f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, **alors** la suite (u_n) est strictement décroissante.

Le théorème est encore vrai pour une fonction croissante ou décroissante.

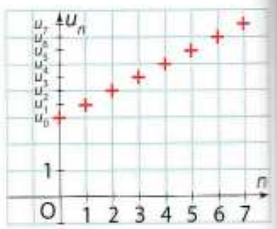
Démonstration

- Pour tout entier naturel n, $n < n + 1$. La fonction f est strictement croissante, donc $f(n) < f(n + 1)$. Ainsi, $u_n < u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement croissante.
- Pour tout entier naturel n, f étant strictement décroissante, $n < n + 1$ entraîne $f(n) > f(n + 1)$ et $u_n > u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple. La fonction affine $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 3$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$; la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n}{2} + 3$$

est du type $u_n = f(n)$. Elle est donc strictement croissante.

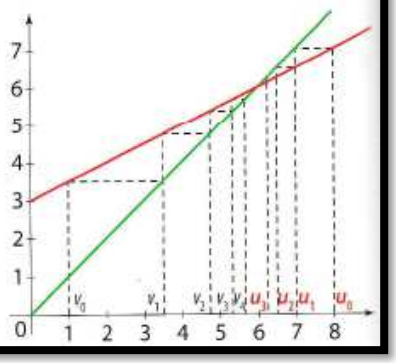


Attention. Le théorème 1 ne s'applique pas aux suites définies par récurrence. Par exemple, les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + 3 \end{cases}$$

sont telles que $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction affine $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 3$, qui est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Cependant, la suite (u_n) est strictement décroissante alors que la suite (v_n) est strictement croissante.



Manuel Transmath, Première S de 2011, éditions Nathan, page 146

L'auteur signale en caractère gras les « si… alors » de l'énoncé du théorème puis donne un contre-exemple de ce que le théorème ne s'applique pas aux suites définies par une « fonction qui génère ».
Un exercice de type « Vrai ou faux » pose successivement les deux mêmes questions sous forme de deux affirmations :

d) Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante.
e) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{3} + 1$.
La suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

Manuel Transmath, Première S de 2011, éditions Nathan, page 153

Ce ne sont pas moins de 9 exercices qui mobilisent la notation $u_{n+1} = f(u_n)$ de façon explicite dans le manuel « Transmath ». Dans le premier chapitre, le « TP » qui introduit la méthode de représentation en escalier mobilise le logiciel GeoGebra dans lequel f est rentrée en tant que fonction. Le but des autres exercices est de calculer les premiers termes de la suite, en parallèle avec les exercices dans lesquels la suite est définie par $u_n = f(n)$:

Pour les exercices 47 à 49

Trouvez la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, et calculez les termes de u_0 à u_5.

47 a) $u_n = 2n + 5$ b) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 2}$

48 a) $u_n = n^2 + 2n - 5$ b) $u_n = |3 - 2n|$

49 a) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ b) $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

Pour les exercices 50 et 51

Trouvez la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, et calculez les termes de u_1 à u_5.

50 a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

51 a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$

58 f est la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

1. On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = f(n)$. Calculez $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_{50}, u_{100}$.

2. On note (v_n) la suite définie par $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
Calculez v_1, v_2, v_3, v_4.

Manuel Transmath, Première S de 2011, éditions Nathan, page 132

Remarquons la formulation malheureuse dans laquelle f semble être unique : « *Trouver la fonction f telle que, pour tout entier naturel n,* $u_n =$… ». A ce propos, ce manuel ne met en scène nulle part la réciproque de la propriété « si f est croissante, alors la suite de terme général $f(n)$ l'est aussi »
Dans un exercice corrigé, « la fonction qui définit » est désignée par « *la fonction associée à la suite* (u_n) ».

iv. Derniers points

La propriété « si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n0}$ »
Elle est aussi traitée et utilisée de façon très variable d'un manuel à l'autre.
Le manuel « Math'x » l'énonce dans une « note » en marge de l'exposition de connaissances sur le sens de variation d'une suite. Cette propriété y est utilisée dans 12 exercices.
Les deux autres manuels ne l'énoncent pas. Le manuel « Transmath » l'utilise dans 21 exercices, le « Sésamath » dans 2 exercices.

Le travail algébrique dans $\mathbb{N}$
Les manuels « Math'x » et « Sésamath » font faire un travail spécifique de révision sur les expressions à exposants entiers. Ce travail prépare les calculs et simplifications d'expressions qui proviennent de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
La plupart des signes de $u_{n+1} - u_n$ des exercices de ces manuels sont constants sur $\mathbb{N}$ et se démontrent par de simples implications.

Dans le manuel « Sésamath », nous avons trouvé une expression $(2n - 7)$ qui change de signe en une valeur non entière.
Le manuel « Math'x » propose un exercice dans lequel $u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$. Le trinôme du second degré en n a deux racines irrationnelles.

29 Soit $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b. La suite est-elle monotone ?

2. a. Résoudre l'inéquation $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$ dans $\mathbb{N}$.

b. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n \geqslant 3}$?

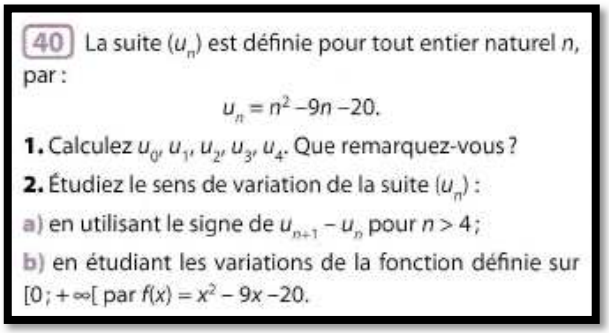
3. a. Déterminer un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 10^{50}$.

b. Justifier que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^{50}$.

Manuel Math'x, Première S de 2011, éditions Didier, page 168

Il est intéressant de noter que cet exercice a été retiré dans l'édition de 2015, qui par ailleurs est quasiment identique (du moins en ce qui concerne les deux chapitres sur les suites).

Le manuel « Transmath » propose davantage de recherches de signes de $u_{n+1} - u_n$ non constants que les deux autres manuels (Nous avons trouvé 4 exercices).
Un exercice demande de chercher le sens de variation de la même suite en mobilisant deux méthodes différentes :



40 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = n^2 - 9n - 20.$$

1. Calculez u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Que remarquez-vous ?

2. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) :

a) en utilisant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n > 4$;

b) en étudiant les variations de la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 9x - 20$.

Manuel Transmath, Première S de 2011, éditions Nathan, page 158

L'élève doit chercher le signe de $u_{n+1} - u_n = 2n - 8$ puis celui de $f'(x) = 2x - 9$. Ce dernier change de signe en une valeur non entière.
Les autres exercices de ce manuel aboutissent respectivement aux recherches de signes de : $u_{n+1} - u_n = 2n - 9$; $f'(x) = 6(x - 9)(x - 1)$; $u_{n+1} - u_n = 2^n - 40$.

La modélisation

Le « Débat » du manuel « Sesamath » reproduit plus haut comporte la seule question de modélisation d'un phénomène par une suite versus par une fonction de ce manuel, qui ne mobilise pas le vocabulaire de la modélisation ni les mots « discret » et « continu ».
Le manuel « Transmath » ne pose aucune question à ce sujet.
Le manuel « Math'x », quant à lui, utilise les mots « discret » et « continu » une fois, dans sa première « activité » analysée supra. Les deux exercices en page droite face à l'exposition de connaissances sur les suites, dont le premier est un « exercice résolu », proposent trois phénomènes à modéliser.
Bien entendu, les trois manuels proposent de nombreuses modélisations de phénomènes discrets par des suites dans les deux chapitres, sans pour autant les qualifier de « modèles » (à part les deux exercices du « Math'x » cités ci-dessus).

v. Conclusion

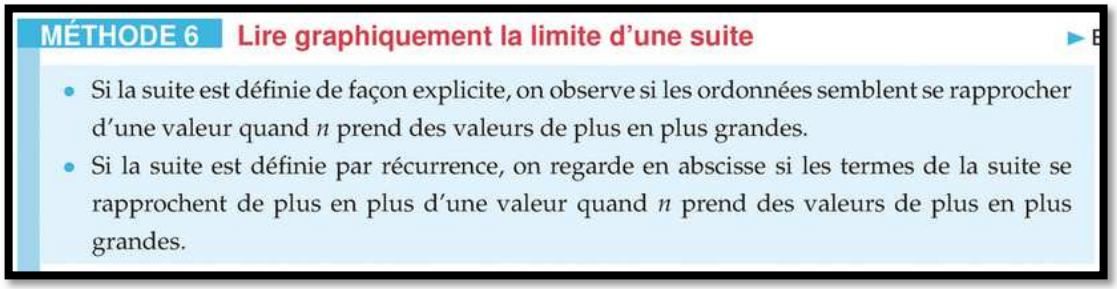
Examinons les points communs des trois manuels.
Ils définissent une suite par cas particulier d'une fonction, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; la notation indicielle est cependant la quasi règle (la seule exception est dans l'exposition de connaissances du manuel « Math'x »).
Ils décrivent avec soin le mode de génération par récurrence des suites, en utilisant la même idée liée aux propriétés de $\mathbb{N}$ dans lequel tout nombre admet un successeur et les mêmes mises en garde, en particulier sur l'impossibilité de calculer avec la seule relation de récurrence un terme sans connaitre le précédent.
Ils définissent le sens de variation d'une suite de la même façon (habituelle, c'est à dire simplement quantifiée).
Ils utilisent les notations habituelles : (u_n) et f respectivement pour les suites et fonctions ; n et x pour les variables respectives.

Par ailleurs, les manuels font des choix différents sur de nombreux points.
Seul le « Math'x » a un discours sur la modélisation.

La notation indicielle fait l'objet de davantage de tâches de type algébrique dans le manuel « Sésamath » que dans les deux autres manuels.

Les manuels « Math'x » et « Sésamath » proposent des tâches nombreuses et variées sur la représentation graphique d'une suite par l'ensemble de points de coordonnées $(n; u_n)$. Ils démarrent leur premier chapitre avec une « activité » semblable, mettant en scène une situation discrète et deux représentations graphiques dont l'une est « continue » et l'autre « discrète » et parmi lesquelles il est demandé de choisir.
Des représentations graphiques de ce type sont à construire (sur tableur dans le « Math'x », « à la main » dans le « Sésamath ») ; le « Math'x » exploite des représentations graphiques de suites arithmétiques.
Ces manuels exploitent ce type de représentation graphique dans le second chapitre, pour illustrer les notions de sens de variation et de limite et émettre des conjectures à leur propos. Pour sa part, le manuel « Transmath » utilise ce type de représentation graphique uniquement pour illustrer les notions de sens de variation et de limite, pas pour émettre des conjectures.

En pratique, dans les trois manuels, la représentation graphique par points isolés de coordonnées $(n; u_n)$ est réservée aux suites définies par leur forme explicite ; celle en escalier bien entendu forme récurrente.
Cela figure explicitement dans le manuel « Sésamath » :


MÉTHODE 6 Lire graphiquement la limite d'une suite

- Si la suite est définie de façon explicite, on observe si les ordonnées semblent se rapprocher d'une valeur quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.
- Si la suite est définie par récurrence, on regarde en abscisse si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus d'une valeur quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

Manuel « Sésamath » de Première S, page 139

Les représentations graphiques « en escalier » sont utilisées par les trois manuels pour conjecturer le sens de variation et la limite d'une suite. Seul le « Sésamath » mobilise ces représentations dès son premier chapitre essentiellement dans des tâches de lecture de termes de suites.

Les notations $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ sont présentes dans les trois manuels qui en font cependant un usage différent.
Le manuel « Transmath » fait de leur mobilisation un fil conducteur sur les deux chapitres ; il propose quatre fois plus d'exercices que les deux autres manuels à leur sujet. La propriété « Si $u_n = f(n)$ et f est croissante alors (u_n) est croissante » est amenée par des exercices, elle est énoncée et démontrée dans l'exposition connaissances - elle est énoncée mais non démontrée dans le « Sésamath », non énoncée mais démontrée en exercice dans le « Math'x ».
Juste après l'énoncé de cette propriété, le « Transmath » met en garde les élèves sur le fait que si $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est croissante, alors (u_n) n'est pas nécessairement croissante et exhibe un contre-exemple.
Le « Math'x » fait de cette mise en garde un exercice dans la catégorie « logique », après un autre exercice de cette catégorie qui pose la question de savoir si la réciproque de la propriété « Si $u_n = f(n)$ et f est croissante alors (u_n) est croissante » est vraie ou fausse. Le « Math'x » est d'ailleurs le seul manuel à envisager cette réciproque.

La propriété « Si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ » figure explicitement en note dans l'exposition de connaissances du « Math'x » mais pas dans les autres manuels.
Elle est utilisée 12 fois dans les exercices du « Math'x », 21 fois dans le « Transmath », 2 fois dans le « Sésamath ».

Un travail spécifique sur $\mathbb{N}$ est présent dans les trois manuels à l'occasion de la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n$ et dans une moindre mesure de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Les signes sont dans la plupart du temps constants et se démontrent par implication. Le « Sésamath » ne propose aucune tâche avec un changement de signe ; le « Math'x » y consacre un exercice d'une difficulté importante (qui a été supprimé dans la nouvelle édition de 2015) ; le « Transmath » propose 5 exercices variés de difficulté moyenne.

À part dans le cas où la suite est définie explicitement par une expression comportant des racines carrées, la détermination du sens de variation des suites du type $u_n = f(n)$ par celle du sens de variation de f n'offre pas une grande économie par rapport à la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Tableau récapitulatif de l'analyse de manuels de Première S – Thème des suites

Légende : déf : définition ft : fonction act : activité EDC : exposition de connaissances Rep graph : représentation graphique

Manuel	Math'x 2011	Transmath 2011	Sésamath en 2018
Modéliser par une suite / une fonction	Dans 2 ex	∅	∅
Déf : suite = fonction particulière	Oui	Oui + idée de liste infinie aussi dans EDC	Oui
Notation : indicielle / fonctionnelle	Notation fonctionnelle dans déf + un ex Reste indicielle	Uniquement indicielle	Uniquement indicielle
Travail notation indicielle	Un ex avec forme explicite, un ex avec forme récurrente	2 ex avec forme explicite, 2 ex avec forme récurrente	2 ex avec forme explicite, 3 ex 16 avec forme récurrente
Formulation par récurrence	« *Permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant* » Csq : « *nécessite le calcul pas à pas de tous les termes précédents* »	« *Permet de calculer un terme à partir du précédent* » Csq : « *il faut calculer tous les termes qui le précèdent* »	« *… une méthode qui permet le calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n* » Csq : « *Il faut calculer de proche en proche tous les termes à partir du premier* »
Représentation graphique par points de coordonnées $(n; u_n)$	*Dans 1er chapitre :* Par opposition à courbe ft : act 1 Sur tableur : 1 ex corrigé Rep graph suites arithmétique : EDC + 1 ex lectures graphiques *Dans 2e chapitre :* Illustration sens de variation en act, en EDC, 2 ex Illustration limite en act, en EDC, en TP pour critiquer 3 modèles	*Dans 1er chapitre* : ∅ *Dans 2e chapitre :* Illustration de sens de variation et limite dans EDC Aucun ex	*Dans 1er chapitre :* Par opposition à courbe ft : débat 1 A la main : act, 4 ex. *Dans 2e chapitre :* Illustration dans EDC sens de variations et limites Conjecture de limites : 2 ex Conjecture sens de variation : 1 ex
Représentation graphique « en escalier »	*Dans 1er chapitre :* ∅ *Dans 2e chapitre :* introduit en act ; 1 ex lecture graph de la récurrence, 3 ex rep graph à faire Tous pour conjecturer sens de variation ou limites	Dans 1er chapitre : introduit en TP *Dans 2e chapitre* : act sur GeoGebra + 12 ex rep graph à faire Tous pour conjecturer sens de variation ou limite	*Dans 1er chapitre* : introduit dans méthode + ex d'application de EDC Lectures graphiques de termes : 7 ex ; 1 ex rep graph à faire *Dans 2e chapitre :* 5 ex Tous pour conjecturer sens de variation ou limite
Définition sens de variation	Classique dans EDC + méthode en page droite	Classique dans EDC + méthode en fin de EDC	Classique dans EDC + méthode en page droite
$u_n = f(n)$	*Dans 1er chapitre :* ∅ *Dans 2e chapitre :* pour chercher sens de variation : 5 ex ; dont 1 ex logique sur réciproque 2 ex formule explicitée	*Dans 1er chapitre :* 4 ex « *trouver la fonction f* » + 1 ex ft donnée Tous pour calculer des termes *Dans 2e chapitre :* 4 ex pour préparer la propriété sur sens de variation ; 1 § de l'EDC pour énoncer et démontrer la propriété ; 7 ex d'application 17 ex formule explicitée	*Dans 1er chapitre :* ∅ *Dans 2e chapitre :* pour chercher sens de variation : méthode après l'EDC (propriété énoncée pas démontrée) ; 5 ex 3 ex formule explicitée
$u_{n+1} = f(u_n)$	*Dans 1er chapitre :* ∅ *Dans 2e chapitre :* Implicite dans toute rep graph en escalier Explicite dans act 5 et 1 ex 71 p 174 (rep graph) ; 1 ex logique : si f croissante alors (u_n) croissante vrai ou faux ? 4 ex formule explicitée	*Dans 1er chapitre :* Explicite dans TP + 2 ex (trouver la fonction f puis calculer termes) + 1 ex (f donnée puis calculer termes *Dans 2e chapitre :* mise en garde avec contre ex pour sens de variation dans EDC + 1 ex 9 ex formule explicitée	*Dans 1er chapitre :* explicite dans méthode dans EDC + 2 ex pour rep en escalier Implicite ailleurs 3 ex formule explicitée
(u_n) croissante $\Rightarrow$ pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$	Énoncé en « note » dans EDC sens de variation ; 12 ex	Pas énoncé. 21 ex	Pas énoncé. 2 ex
Suite u / fonction f Variable n / x	Oui	Oui + rappel sens de variation de la fonction $\sqrt{u}$	Oui
Travail algébrique spécifique dans $\mathbb{N}$	Révision et ex sur exposants entiers ; Signes de $u_{n+1} - u_n$ constants sauf : 1 ex signe de $u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$ eq du 2nd degré à racines irrationnelles dont une positive	Révision et ex sur exposants entiers ; Signes de $u_{n+1} - u_n$ constants sauf : Signe de $u_{n+1} - u_n = 2n - 8$ en parallèle avec signe de $f'(x) = 2x - 9$ + Signe de $u_{n+1} - u_n = 2n - 9$ + Signe de $f'(x) = 6(x-9)(x-1)$ + Signe de $u_{n+1} - u_n = 2^n - 40$	Signes de $u_{n+1} - u_n$ constants sauf : Signe de $u_{n+1} - u_n = 2n - 7$

c) Tâches relevant du discret / du continu en analyse au lycée : sujets de Baccalauréat série S

i. Méthodologie ; analyse *a priori* de trois exercices de Baccalauréat

Nous avons cherché les énoncés de Baccalauréat de la série S récents (des années 2015 et 2016) qui portent sur une tâche relevant du discret ou du continu ou qui mobilisent des méthodes relevant du discret et du continu. Nous en avons repéré trois.
Notre objectif est de les analyser finement afin d'identifier les méthodes qu'un élève de Terminale S ayant suivi le programme officiel de 2012 peut mettre en œuvre et de remplir un tableau à double entrée du type :

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		

Par « Méthode qui relève du discret », nous entendons : le raisonnement par récurrence, le dénombrement, la mobilisation de la définition de la monotonie d'une suite habituelle, « simplement quantifiée », de propriétés sur les suites ou de méthodes propres aux suites. Par exemple, nous y rangeons la propriété de la limite monotone pour les suites, bien que cette propriété caractérise le continu dans le cas d'un corps totalement ordonnée.
De même, par « Méthode qui relève du continu », nous entendons : la mobilisation de la propriété « si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ » qui relève de la définition de la monotonie d'une fonction qui est « doublement quantifiée », de propriétés sur les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, du calcul différentiel et intégral.

Nous voulons aussi questionner :

- Les raisons pour lesquelles l'énoncé, le cas échéant, guide vers une résolution de la tâche par une méthode de relevant d'un « monde » (discret ou continu) plutôt une méthode qui relève de l'autre « monde » ;
- Les éventuelles difficultés soulevées par les énoncés ;
- Les notations, le vocabulaire qui sont utilisés lorsque la tâche relève d'un monde ou de l'autre.

Les deux premiers sujets analysés comportent une modélisation discrète suivie d'une modélisation continue.

(a) Premier exercice de Baccalauréat : Bac S Pondichéry – avril 2016 – exercice 5

Voici la première partie de l'énoncé :

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°C$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°C$.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0{,}85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

L'exercice affiche pour but d'étudier la stérilisation d'une boîte de conserve. La température de la boîte, en degrés Celsius, en fonction du temps, dont l'unité est la minute, est modélisée en première partie par une suite puis en deuxième partie par une fonction. Ces parties sont respectivement dénommées « modélisation discrète » et « modélisation continue ». On ne peut être plus explicite, cependant bien que les adjectifs discret et continu figurent dans le programme officiel pour qualifier des modélisations, dans le préambule aux contenus, capacités et commentaires de la partie « analyse » du programme, ce que cela évoque pour un élève de Terminale S dépend certainement du discours de ses enseignants de mathématiques au lycée.

La partie A

Le nombre de minutes écoulées est nommé n. La température en degré Celsius au bout de n minutes est le terme général de la suite, nommé T_n. Celui-ci est défini par récurrence, via un algorithme qui a pour but explicite de calculer puis afficher la valeur de T_n lorsque n est entré.
Les notations sont donc habituelles pour une modélisation discrète : la variable est n, la mesure de la grandeur étudiée est le terme général d'une suite.

La première question demande de déterminer la température de la boîte au bout de 3 minutes, ce que l'élève doit traduire en décontextualisant par : faire fonctionner l'algorithme lorsque la valeur de n entrée est 3.
La question se termine par « arrondir à l'unité ». L'élève peut donc comprendre qu'il doit arrondir chaque valeur de la variable algorithmique T intermédiaire calculée ou bien arrondir uniquement la dernière valeur de T qui est égale à T_3. Dans cet exercice, que les températures intermédiaires soient arrondies à l'unité ou pas, le résultat est le même.

La question 2 demande de démontrer l'expression de T_n en fonction de n qui est donnée.
L'élève doit introduire des étapes : expliciter la relation de récurrence contenue dans l'algorithme et mise en œuvre dans la question précédente. Puis démontrer par récurrence la relation donnée.
Il n'y a pas de méthode provenant du continu pour répondre à cette question.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Démontrer une égalité comportant une indéterminée appartenant à $\mathbb{N}$	
Méthode relevant du discret	Par récurrence	
Méthode relevant du continu		

La troisième question, « *Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?* » est posée en langue naturelle dans le contexte de la stérilisation de la boîte. Elle doit être d'abord mathématisée en : « chercher n tel que $T_n > 85$ ».
L'élève peut résoudre l'inéquation $100 - 75 \times 0{,}85^n > 85$, en utilisant la fonction logarithme népérien (qui fait partie du monde du continu). Il trouve alors $n > -\frac{ln5}{ln0{,}85}$. Or $-\frac{ln5}{ln0{,}85} \approx 9{,}9$. Il probable que l'élève conclue que la stérilisation débute au bout de 10 minutes plutôt que 9,9 minutes (ou tout autre arrondi de $-\frac{ln5}{ln0{,}85}$ à $10^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$) : 9,9 est proche de 10 et dans la partie A, le temps écoulé en minutes, nommé n, est un entier naturel.
L'élève peut aussi générer un tableau de valeurs de la suite (T_n) sur sa calculatrice.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Trouver le plus petit entier $n\epsilon$ $\mathbb{N}$ vérifiant une inégalité.	
Méthode relevant du discret	Par génération d'un tableau de valeurs d'une suite sur la calculatrice.	
Méthode relevant du continu	Par résolution d'une inéquation utilisant la fonction ln.	

La partie B
Tout d'abord, en voici l'énoncé :

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

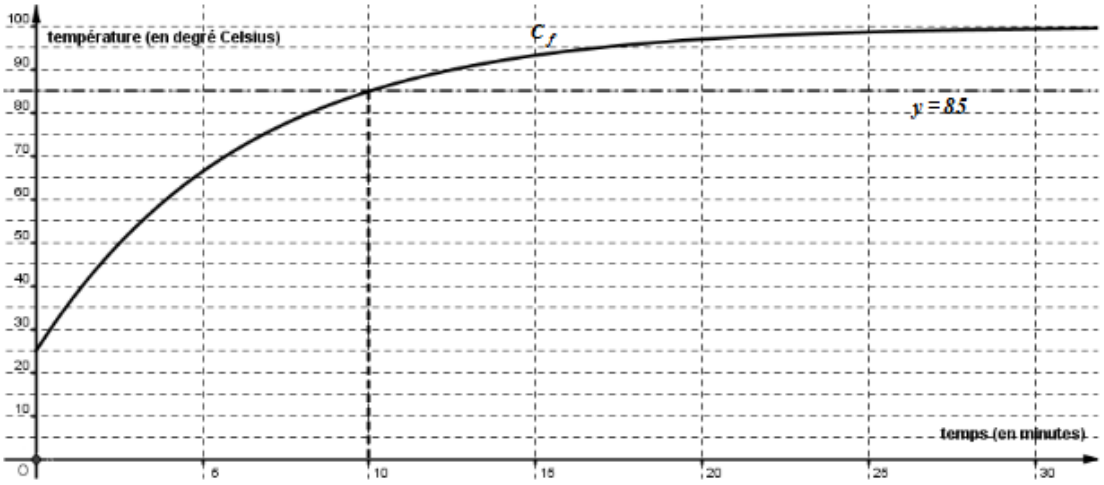
$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $A(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative C_f de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine $A(\theta)$ est supérieure à 80.



a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe page 10/10, que l'on a $A(25) > 80$.

b. Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$.

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La modélisation est continue, les notations changent : la variable est nommée t. L'énoncé la décrit comme un « instant », exprimé en minutes. Il se peut que le mot « instant » soit utilisé ici pour suggérer que la grandeur temps est considérée dans cette partie comme continue (le temps s'écoule en un flux continu d'instants au même titre que la droite est un continu formé de points).
Il manque l'information selon laquelle $t = 0$ correspond au début de la stérilisation. L'auteur aurait pu définir t comme la mesure de la grandeur « durée » et aurait été ainsi plus cohérent avec la modélisation discrète ; son choix est plus proche des habitudes en sciences physiques.
La température, toujours mesurée en degrés Celsius, est notée $f(t)$, notation fonctionnelle habituelle pour les élèves.

La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 100 - 75e^{-\frac{ln5}{10}t}$. Remarquons que $e^{-\frac{ln5}{10}t} = e^{ln\frac{1}{5}\times\frac{t}{10}} = \sqrt[10]{\frac{1}{5}}^{t}$.

Or $\sqrt[10]{\frac{1}{5}} \approx 0{,}85$. La fonction choisie est donc une approximation de la fonction $x \mapsto 100 - 75 \times 0{,}85^x$, le prolongement continu le plus naturel (par la forme et les propriétés algébriques) de la suite arithmético géométrique (T_n) dont le terme général est défini par $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
Les fonctions exponentielles de bases différentes de e ne figurent cependant pas au programme officiel de Terminale S. L'utilisation de cette fonction est donc exclue dans une épreuve de Baccalauréat.

La question 1.a. étudie le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$. Deux méthodes sont disponibles aux élèves.
La méthode la plus habituelle consiste à dériver f et chercher le signe de f'.
Une autre méthode consiste à procéder par composition de fonctions de références. En effet, le programme de Première S comporte le sens de variation de fonctions du type $u + k$ $(k \in \mathbb{R})$ et λu $(\lambda \in \mathbb{R})$; par ailleurs, la propriété concernant le sens de variation de e^u en fonction de celui de u peut être énoncée par l'enseignant de Terminale (selon les habitudes du programme officiel et des enseignants, u désigne ici une fonction).

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
		Trouver le sens de variation d'une fonction
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par dérivation. Par composition de fonctions de référence.

La question 1.b. est la justification d'une implication entre deux inégalités sur $[0;+\infty[$. Ces inégalités mobilisent des constantes entières et les fonctions exp et ln qui sont du domaine du continu.
L'implication peut se démontrer par un jeu sur les inégalités : si $t \geq 10$ alors $-\frac{ln5}{10}t \leq -ln5$ donc $f(t) \geq 100 - 75e^{-ln5}$ donc $f(t) \geq 85$.
Une autre méthode consiste à utiliser la croissance de la fonction f déjà démontrée à la question précédente (dans ce cas, les questions s'enchaînent) et remarquer que l'image de 10 par f vaut 85.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
		Prouver une inégalité dont l'indéterminée est réelle.
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par des implications qui mobilisent les fonctions ln et exp. Par utilisation de la monotonie d'une fonction.

La question 2. traite d'aires situées entre deux courbes représentatives de fonctions. Les aires font partie du monde du continu, les fonctions aussi.
La question 2.a. se résout en comptant le nombre de rectangles entiers en pointillés inclus dans la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction f, la droite d'équation $y = 85$ et les droites d'équations $t = 10$ et $t = \theta$.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
		Majorer ou minorer une aire
Méthode relevant du discret		En comptant le nombre de rectangles unité qui encadrent la surface considérée.
Méthode relevant du continu		

La question 2.b.se résout par un calcul intégral.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
		Trouver la valeur exacte d'une aire
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par le calcul intégral.

La question 2.c., qui est contextualisée, est quelque peu ouverte. Elle requiert que l'élève la décontextualise et la traduise par « $\mathcal{A}(20)$ est-il supérieur à 80 ? ». Il s'agit alors d'une application numérique de la question précédente.

Le rôle de la modélisation discrète, de la modélisation continue

La présence de la modélisation continue se justifie dans le contexte de la stérilisation par la question 2 de la partie B : un calcul intégral permet de déterminer si le temps de stérilisation est atteint ou pas. Par contre, la question 1b. de cette partie pouvait être traitée dans le discret, par la recherche du signe de $f(n+1) - f(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: la monotonie de la suite de terme général $f(n)$ permet de conclure.

Les questions de modélisation

La formulation des énoncés des deux parties se fait dans les termes « *la température est donnée par…* ». Les dernières questions de chaque partie, qui reviennent au contexte de stérilisation, sont énoncées en affirmations sur les temps de début et de fin de stérilisation et non en prédictions du modèle sur ces temps.
Les mesures de la grandeur température en fonction du temps se « plieraient » aux expressions algébriques de l'énoncé… qui différent d'une modélisation à une autre.

La question concernant le début de la stérilisation aurait pu constituer un lien entre les deux modélisations.
En effet, la dernière question de la partie A permet d'affirmer que, selon le modèle discret, la stérilisation démarre au bout de 10 minutes.
La question 1.b. de la partie B permet, en contextualisant le résultat, d'affirmer que selon le modèle continu proposé, si le temps (arrondi à l'unité) est supérieur à 10 minutes, alors la stérilisation est en cours. La réciproque est vraie et la condition nécessaire et suffisante permet d'affirmer que la stérilisation démarre au bout de 10 minutes selon ce modèle aussi.

Les notations, le vocabulaire

	Notation pour le temps	Vocabulaire pour le temps	Notation pour la température	Vocabulaire pour la température
Modélisation discrète	n	« *au bout de n minutes* »	T_n	« *température en degré Celsius* »
Modélisation continue	t	« *instant t* »	$f(t)$	« *température en degré Celsius* »

(b) Deuxième exercice de Baccalauréat : Bac S Asie – juin 2016 – exercice 3

Voici le préambule de l'énoncé :

> Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
> La société met en place le dispositif industriel suivant.
> Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
> L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
> ***Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

L'exercice affiche pour but d'étudier la production de bactéries d'une société. La population de bactéries, évaluée par sa masse en fonction du temps exprimé en jours, est modélisée en première partie par une suite puis en deuxième partie par une fonction. Ces parties sont respectivement dénommées « *premier modèle – avec une suite* » et « *second modèle – avec une fonction* ». Les adjectifs « discret » et « continu » sont ici absents, remplacés par le type d'objet mathématique utilisé pour modéliser le phénomène.
Nous nous intéressons aux deux premières parties, la troisième, parfaitement indépendante des modèles mathématiques des deux parties précédentes, pose une question de statistique inférentielle.

La partie A

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

1. **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
   On précisera en particulier ce que représente u_n.
   b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
   Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que ..... faire u prend la valeur ..... n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher .....

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,000$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

La suite qui modélise l'évolution de la population de bactéries est donnée sous forme récurrente.
La question 1.a. demande d'expliquer ce en quoi elle modélise la situation. C'est une façon pour le concepteur du sujet de s'assurer que les élèves s'approprient le modèle. Ceux-ci doivent reconnaitre que $u_0 = 1000$ est la masse initiale en grammes puisque le préambule explique qu'on introduit initialement 1kg de bactéries. Puis expliquer ce en quoi $u_n$est la masse, en grammes, de bactéries au bout de n jours – en particulier, son augmentation de 20% par jour se traduit par le terme $1{,}2u_n$.
Les notations sont donc habituelles pour une modélisation discrète : la variable est notée n, la mesure de la grandeur étudiée est le terme général d'une suite notée (u_n).

La question 1.b. requiert de générer un tableau de valeurs à la calculatrice de la suite définie par récurrence. A charge pour l'élève de convertir 30 kg en grammes et de mathématiser la question par : « chercher le plus petit entier n tel que $u_n > 30000$ ».

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Trouver le plus petit entier $n\epsilon\ \mathbb{N}$ vérifiant une inégalité.	
Méthode relevant du discret	Par génération d'un tableau de valeurs d'une suite sur la calculatrice	
Méthode relevant du continu		

L'algorithme à compléter en question 1.c. est classique en Terminale S. Les variables algorithmiques u et n portent le nom de ce qu'elles permettent de calculer.

La question 2.a. demande de démontrer par récurrence une inégalité.

Remarquons que l'inégalité aurait pu être démontrée en tant que conséquence de la croissance de la suite (u_n) et de la valeur de son premier terme $u_0 = 1000$.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Démontrer une inégalité comportant une indéterminée appartenant à $\mathbb{N}$	
Méthode relevant du discret	Par récurrence	
Méthode relevant du continu		

Pour résoudre la question 2.b., « *Démontrer que la suite* (u_n) *est croissante* », l'élève dispose de deux méthodes : chercher le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou, sachant que le terme général u_n est supérieur à 1000 donc strictement positif, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Dans les deux cas, l'élève a besoin de faire intervenir l'inégalité prouvée précédemment, les questions s'enchainent.

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Démontrer la monotonie d'une suite	
Méthode relevant du discret	Par la recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs ; Par la comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1	
Méthode relevant du continu		

La question 3 introduit une suite auxiliaire (v_n) et enchaine des questions classiques : montrer que (v_n) est géométrique, exprimer v_n en fonction de n, trouver la limite de (u_n) .

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Déterminer la limite d'une suite	
Méthode relevant du discret	Par la connaissance des limites de suites géométriques Par l'application de propriétés d'opérations sur les limites	
Méthode relevant du continu		

La partie B

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1+49\,e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. **a.** Calculer $f(0)$.
   b. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction f.
   d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
   En déduire la réponse au problème.

La modélisation par la suite de la partie A est disqualifiée par une observation pratique. Une explication de cette disqualification aurait pu être demandée ou pour le moins explicitée.
La deuxième modélisation, qui est continue, ne constitue donc pas un prolongement continu de la première.
Les notations changent : la variable est nommée t. L'énoncé la décrit comme un « temps », exprimé en jours. Il manque l'information selon laquelle $t = 0$ correspond au début de la production.
La masse, mesurée cette fois en kg, est notée $f(t)$, notation fonctionnelle habituelle pour les élèves.

La question 1.a. est immédiate.
La 1.b. est la justification d'une implication entre deux inégalités. Elle se résout par un jeu sur les inégalités : la fonction exponentielle étant strictement positive, pour tout réel positif t, $e^{-0,2t} > 0$. Il suit que $f(t) < 50$.

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
		Prouver une inégalité dont l'indéterminée est réelle.
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par des implications qui mettent en jeu les fonctions ln et exp.

La question 1.c. est l'étude du sens de variation de la fonction f.
La méthode la plus habituelle consiste à dériver f et chercher le signe de f'.
Une autre méthode consiste à procéder par composition de fonctions de références. En effet, le programme de Première S comporte le sens de variation de fonctions du type $u + k$ $(k \in \mathbb{R})$ et λu $(\lambda \in \mathbb{R})$; par ailleurs, la propriété concernant le sens de variation de e^u en fonction de celui de u peut être énoncée par l'enseignant de Terminale. (Selon les habitudes du programme officiel et des enseignants, u désigne ici une fonction).

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
		Trouver le sens de variation d'une fonction
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par dérivation. Par composition de fonctions de référence.

Le calcul de limite de la question 1.d. requiert les propriétés d'opérations et composition de limites.

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
		Déterminer une limite d'une fonction
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par la connaissance des limites de fonctions de référence. Par l'application de propriétés d'opérations et composition de limites.

La question 2. Demande d'« *Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte* ». (C'est nous qui soulignons). Une interprétation des résultats qui précèdent permet de vérifier la pertinence du modèle puisque la masse initiale de bactéries, la majoration de la mesure de cette masse, la croissance de la population de bactéries sont des données expérimentales.
Cependant, ce n'est pas ce qu'induit la question posée. Voici pour exemple le corrigé proposé sur le site internet de l'APMEP[41] :

2. On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.
- $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg ;
- $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;
- f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

Ces « interprétations » donnent l'impression que la réalité serait conforme au modèle.
La question posée comme suit : « Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au modèle » pourrait sans doute induire une réponse plus adéquate.

La question 3 consiste explicitement en une utilisation prédictive du modèle. La mathématisation de la question posée, qui est de déterminer « *au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg* », est donnée sous forme de la résolution de l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
Le domaine sur lequel l'inéquation doit être résolue n'est pas donné. Implicitement, il est le même que l'ensemble de définition de la fonction f, soit $[0;+\infty[$. La résolution fait intervenir les fonctions ln et exponentielle. On trouve que l'ensemble des solutions est $\left]-\frac{1}{0{,}2}ln\frac{2}{147};+\infty\right[$. Or $-\frac{1}{0{,}2}ln\frac{2}{147} \approx 21{,}5$. Les élèves peuvent répondre « au bout de 22 jours ». Il n'est cependant pas exclu qu'ils répondent « au bout d'environ 21 jours et demi ».
Le nombre de jours étant *a priori* entier, les élèves peuvent aussi décider de résoudre l'inéquation dans $\mathbb{N}$, comme dans le cas d'une modélisation par une suite, en générant un tableau de valeurs de la fonction f avec un pas de 1 pour la variable. Un argument de croissance de f est alors nécessaire pour donner l'ensemble des solutions de l'inéquation.

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Trouver le plus petit entier $n\epsilon\ \mathbb{N}$ vérifiant une inégalité.	Résoudre une inéquation d'inconnue réelle
Méthode relevant du discret	Par génération d'un tableau de valeurs d'une fonction avec un pas de 1 sur la calculatrice	
Méthode relevant du continu	Par résolution d'une inéquation utilisant la monotonie de la fonction ln.	Par des équivalences qui mettent en jeu la monotonie des fonctions ln ou exp.

[41] http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Asie_Juin_2016.pdf

Le rôle de la modélisation discrète, de la modélisation continue

La présence d'un nouveau modèle en deuxième partie est clairement justifiée par le fait que le premier modèle ne donne pas des valeurs conformes à la réalité sur le long terme.

Le deuxième modèle est continu, ce qui permet de faire mobiliser par les élèves des méthodes différentes de celles de la première partie. En particulier, la monotonie de la suite dans la partie A est étudiée avec des méthodes propres au discret et le sens de variation de la fonction dans la partie B est étudié par dérivation ou composition de fonctions de référence.

Ceci dit, une étude de la suite $(f(n))$ pouvait suffire pour répondre à la question posée à la fin de la partie B. Le sens de variation de cette suite peut être déterminé par comparaison du quotient $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ avec 1.

Il n'est fait aucun usage de ce que la fonction soit définie sur un ensemble continu.

Les questions de modélisation

La pertinence du premier modèle est clairement un enjeu dès la première question de la partie A. C'est toujours sa pertinence qui justifie l'introduction d'un nouveau modèle en partie B, quoique cela ne soit pas explicite dans l'énoncé.

De ce point de vue, la question 2 de la partie B aurait pu être posée dans le même esprit : vérifier la pertinence du modèle continu proposé. Au contraire, l'énoncé induit plutôt d'utiliser le modèle de façon prédictive.

Une question en fin de partie B aurait pu porter sur le fait que le deuxième modèle est plus adapté.

La question concernant le nombre de jours au bout duquel la masse de bactéries dépassera 30 kg est posée dans les deux parties et aurait pu constituer un lien entre les deux modélisations. Les réponses sont proches : 23 jours pour la modélisation discrète et 22 jours pour la modélisation continue.

Les notations, le vocabulaire

	Notation pour le temps	Vocabulaire pour le temps	Notation pour la masse de bactéries	Vocabulaire pour la masse de bactéries
Modélisation discrète	n	« *au bout de n jours* »	u_n	« *la masse exprimée en kg* »
Modélisation continue	t	« *temps t* »	$f(t)$	« *la masse exprimée en kg* »

(c) Troisième exercice de Baccalauréat : Bac S Centres étrangers – juin 2015 – exercice 3

Ce sujet comporte une suite définie par récurrence faisant intervenir une fonction, dans un contexte uniquement intra-mathématique.

En voici l'énoncé des trois premières questions, qui entrent dans notre problématique :

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbf{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.
On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(e^x - 1\right)\left(2e^x + 1\right)$.
b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$.
b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question **1.** permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Une suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel non nul et par la relation de récurrence $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$, pour tout entier naturel n. La forme factorisée de u_{n+1} en fonction de u_n est donnée dans l'énoncé sous forme de remarque.

Une fonction auxiliaire est introduite dès la question 1. Il s'agit de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$. Elle vérifie donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ – ce n'est pas dit dans l'énoncé. Cette relation intervient à la question 1.c.
Les questions 1.a. et 1.b. ont pour but de déterminer les variations de la fonction g par la recherche du signe de sa dérivée.
Les variations de la fonction g sont sollicitées à la question suivante : elles permettent de déduire la positivité de g et par conséquent la croissance de la suite (u_n).

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Démontrer la monotonie d'une suite	
Méthode relevant du discret	Par la recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs.	
Méthode relevant du continu	Par la recherche du signe de g lorsque $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.	

Dans la question 2., le premier terme de (u_n) est négatif ou nul.
Le mode de raisonnement, par récurrence, de la question 2.a. est imposé par l'énoncé. Il s'agit de démontrer que la suite est à termes négatifs. L'hérédité de la propriété est démontrée par le fait que si $u_n \leq 0$, alors $e^{u_n} \leq 1$. La forme factorisée de u_{n+1}en fonction de u_n donnée plus haut dans l'énoncé, permet de conclure.
Cette question mobilise une connaissance sur les propriétés algébriques de la fonction exponentielle, du monde du continu, utilisée dans le contexte d'une suite.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Démontrer une égalité ou une inégalité comportant une indéterminée appartenant à $\mathbb{N}$	
Méthode relevant du discret	Par récurrence	
Méthode relevant du continu	Par utilisation de la monotonie d'une fonction.	

La question suivante est une application de la propriété des suites croissantes majorées, que les enseignants travaillent à répétition avec les élèves. Cependant, les élèves ont une adaptation à faire, du type de questions qui s'enchainent, afin de conclure à la convergence de (u_n).

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Démontrer la convergence d'une suite	
Méthode relevant du discret	Par utilisation de la propriété des suites croissantes majorées	
Méthode relevant du continu		

L'objet de la question 2.c. est l'étude de la limite de la suite dans le cas où son premier terme est nul.
Une méthode consiste à remarquer que la suite étant négative, sa limite est négative. Mais étant croissante de premier terme nul, la suite est positive donc sa limite est positive ou nulle. La limite est donc nulle.
Remarquons que l'implication : « la suite est croissante de premier terme nul donc elle est positive », bien que parfaitement intuitive, est en fait une conséquence de ce que la définition de la croissance d'une suite – pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ - est équivalente à la définition de la croissance d'une fonction, doublement quantifiée - pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq n \Rightarrow u_p \geq u_n$.

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée connaissant son sens de variation	
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu	Par utilisation de la « définition doublement quantifiée » de la monotonie d'une suite.	

Une autre méthode consiste à montrer que la suite (u_n) étant croissante, négative et de premier terme égal à 0, elle est la suite constante nulle. La démonstration peut se faire par récurrence. Ou bien en prouvant que la suite est positive comme cela est fait ci-dessus.

Dans la question 3., le premier terme a de la suite est strictement positif. L'énoncé indique : « *la suite* (u_n) *étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel* n, $u_n \geq a$. » Il s'agit comme ci-dessus d'une utilisation de la définition de la monotonie d'une fonction appliquée à la croissance de (u_n).
La question 3.a. est une conséquence de la croissance de g sur $[0; +\infty[$: pour tout entier naturel n, $u_n \geq a > 0$ donc $g(u_n) \geq g(a)$. En utilisant à nouveau la remarque de la question 1.c. ($u_{n+1} - u_n = g(u_n)$), on obtient $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ qui est l'inégalité à démontrer. Les questions s'enchainent donc, et leur distance dans l'énoncé constitue une difficulté.
La démonstration par récurrence de la question 3.b. est convoquée par l'énoncé. Elle nécessite le résultat de la question précédente.
La stricte croissance de g sur $[0 ; +\infty[$démontrée en question 1.b. permet de déduire la stricte positivité de g en tout réel strictement positif, afin de répondre à la question 3.c. : elle permet d'affirmer que $g(a) > 0$. Et

donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+ng(a))=+\infty$. Par un théorème de comparaison, en utilisant la question précédente, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$.

Commentaires

Ce sujet mobilise à plusieurs reprises des propriétés de la fonction g pour en déduire des propriétés sur la suite (u_n) : en question 1.c) la positivité de g implique la croissance de (u_n) ; en question 3.a) la croissance de g permet de déduire l'inégalité $u_{n+1}-u_n\geq g(a)$; en question 3.c) la positivité de g permet de trouver la limite de (u_n).

Par ailleurs, la « définition doublement quantifiée » de la monotonie d'une suite, qui relève de la définition de la monotonie d'une fonction, est mobilisée deux fois dans l'énoncé.

Une source potentielle de difficulté de ce sujet est que de nombreuses questions s'enchainent et font intervenir des réponses qui n'émanent pas seulement de la question précédente.

ii. Sujets de Baccalauréat depuis 2008

Dans un deuxième temps, nous élargissons la recherche aux sujets de Baccalauréat de la série S en remontant jusqu'à l'année 2008. Sur la base des analyses fines effectuées supra, nous poursuivons le croisement tâche/méthode, le repérage des notations utilisées (pour lesquelles nous observons en plus les notations utilisées dans les manuels de Terminales ES et L dans l'introduction aux fonctions exponentielles – voir partie III E), des difficultés potentielles, notamment liées aux questions de modélisation.

Les énoncés repérés sont les suivants, nous les décrivons en quelques mots :

- Bac S Pondichéry d'avril 2008 : exercice 4 (deux modélisations, une discrète et une continue). Cet exercice est repris et quelque peu reformulé dans l'exercice 111 page192 du manuel « Math'x » de Terminale S de 2012, édition Didier ;
- Bac S Nouvelle Calédonie de novembre 2008 : exercice 3 ;
- Bac S Antilles Guyane de juin 2010 : exercice 4 (suite $u_n=g(n)$; la fonction g permet de déterminer le sens de variation et la limite de la suite) ;
- Bac S Centres étrangers de juin 2015 : exercice 3 (suite définie par récurrence faisant intervenir une fonction) ;
- Bac S France métropolitaine de juin 2016 : exercice 3 (suite définie par récurrence faisant intervenir une fonction) ;
- Bac S Asie de juin 2016 : exercice 3 (deux modélisations, une discrète et une continue) ;
- Bac S Pondichéry d'avril 2016 : exercice 5 (deux modélisations, une discrète et une continue) ;
- Bac S Centres étrangers de juin 2017 : exercice 3 (trois modélisations, deux continues et une discrète).

Le programme officiel de Terminale que nous avons analysé est celui de 2012, les premières épreuves de Baccalauréat qui a suivi étaient donc en 2013. Nous avons cependant cherché des énoncés antérieurs dont les contenus restent compatibles avec le programme de 2012 (à une exception près, reprise et légèrement modifiée dans le manuel « Math'x » de 2012).

Croisement tâches/méthodes

La majorité des tâches revient à prouver des égalités ou des inégalités :

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Démontrer une égalité comportant une indéterminée appartenant à $\mathbb{N}$	Prouver une égalité, résoudre une équation dont l'indéterminée est réelle
Méthode relevant du discret	Par récurrence *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017*	
Méthode relevant du continu	Par résolution algébrique	Par des implications ou des équivalences qui mettent en jeu les fonctions ln ou exp.

		Bac S Pondichéry avril 2016 *Bac S Asie 2016* *Bac S France métropolitaine juin 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017*

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Prouver une inégalité comportant une indéterminée appartenant à $\mathbb{N}$	Prouver une inégalité, résoudre une inéquation dont l'indéterminée est réelle
Méthode relevant du discret	Par récurrence *Bac S Asie 2016* *Bac S Centres étrangers juin 2015* *Bac S Pondichéry 2008*	
Méthode relevant du continu	Par utilisation de la monotonie d'une fonction. *Bac S Centres étrangers juin 2015* *Bac S Pondichéry 2008* Par résolution algébrique	Par des implications ou des équivalences qui mettent en jeu la monotonie des fonctions ln ou exp. *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S Asie 2016* *Bac S France métropolitaine juin 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017* Par utilisation de la monotonie d'une fonction autre que de référence *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S France métropolitaine juin 2016*

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Démontrer qu'une suite est majorée (ou minorée)	Démontrer qu'une fonction est majorée (ou minorée)
Méthode relevant du discret	Par récurrence *Bac S Nouvelle Calédonie novembre 2008* *Bac S la Réunion juin 2010* *Bac S Centres étranger juin 2015* *Bac S France métropolitaine juin 2016*	
Méthode relevant du continu	Par utilisation de la « définition doublement quantifiée » de la monotonie d'une suite. *Bac S Centres étranger juin 2015* *Bac S Asie juin 2016* Par utilisation de la monotonie d'une fonction *Bac S Nouvelle Calédonie novembre 2008* *Bac S la Réunion juin 2010*	Par étude des variations de la fonction *Bac S Pondichéry 2008*

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Trouver le plus petit entier $n\epsilon\ \mathbb{N}$ vérifiant une inégalité.	*Pas d'équivalent*
Méthode relevant du discret	Par génération d'un tableau de valeurs d'une suite (ou d'une fonction avec un pas de 1) sur la calculatrice *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S Asie juin 2016* *Bac S France métropolitaine juin 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017*	
Méthode relevant du continu	Par résolution d'une inéquation utilisant la monotonie de la fonction ln. *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S Asie juin 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017*	

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Pas d'équivalent	Trouver la valeur exacte d'une aire dans le cadre graphique
Méthode relevant du discret		
Méthode relevant du continu		Par le calcul intégral. *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017*

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Pas d'équivalent	Majorer ou minorer une aire dans le cadre graphique
Méthode relevant du discret		En comptant le nombre de rectangles unité qui encadrent la surface considérée. *Bac S Pondichéry avril 2016*
Méthode relevant du continu		

D'autres tâches visent à prouver une monotonie :

	Tâche qui relève du discret	Tâche qui relève du continu
	Démontrer la monotonie d'une suite	Trouver le sens de variation d'une fonction
Méthode relevant du discret	Par la recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs *Bac S la Réunion juin 2010* *Bac S Asie 2016* *Bac S France métropolitaine juin 2016* Par la comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1 *Bac S Centres étrangers juin 2015*	

	Bac S Asie 2016	
Méthode relevant du continu	Par la recherche du sens de variation de f lorsque $u_n = f(n)$ *Bac S Antilles Guyane juin 2010* Par la comparaison de $f(x)$ et x lorsque $u_{n+1} = f(u_n)$ *Bac S Nouvelle Calédonie novembre 2008* Par la recherche du signe de f lorsque $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$. *Bac S la Réunion juin 2010* *Bac S Centres étrangers juin 2015*	Par dérivation. *Bac S Pondichéry 2008* *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S Asie 2016* *Bac S France métropolitaine juin 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017* Par composition de fonctions de référence. *Bac S Pondichéry avril 2016* *Bac S Asie 2016*

D'autres tâches visent à prouve la convergence d'une suite, à chercher des limites de suites ou de fonctions :

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Démontrer la convergence d'une suite	*Pas d'équivalent en terminale*
Méthode relevant du discret	Par utilisation du théorème sur les suites croissantes majorées Bac S Centres étrangers juin 2015 *Bac S Pondichéry juin 2008* *Bac S Nouvelle Calédonie novembre 2008*	
Méthode relevant du continu		

	Tâche qui relève du discret	**Tâche qui relève du continu**
	Déterminer la limite d'une suite	Déterminer une limite d'une fonction
Méthode relevant du discret	Par la connaissance des limites de suites géométriques *Bac S Asie 2016* *Bac S centres étrangers juin 2017* Par l'application de propriétés d'opérations et comparaisons sur les limites de suites *Bac S Asie 2016* *Bac S Centres étrangers 2015* *Bac S centres étrangers juin 2017*	
Méthode relevant du continu	Par la propriété : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *Bac S Antilles Guyane juin 2010*	Par la connaissance des limites de fonctions de référence. Par l'application de propriétés d'opérations et composition de limites. *Bac S Asie juin 2016*

Conclusion sur le croisement tâches/méthodes

Les trois quarts des tâches données au Baccalauréat S comportent des tâches pour lesquelles les méthodes de résolution relèvent du même monde que celui de la tâche.

Parmi celles pour lesquelles ce n'est pas le cas, une seule tâche sur les 61 relève du continu tout en mobilisant une méthode relevant du discret : la majoration ou minoration d'une aire par comptage de rectangles unité qui encadrent la surface correspondante.
Les autres tâches (donc environ le quart) relèvent du discret en utilisant une méthode du continu :

- Sept sujets de Baccalauréat comportent une tâche dans laquelle une inégalité dans $\mathbb{N}$ est à prouver et mobilisant la monotonie d'une fonction de référence, généralement ln ou exp ;
- Cinq sujets mobilisent une fonction auxiliaire pour démontrer la monotonie ou chercher la limite d'une suite. Détaillons ces sujets :
    - Un seul mobilise la recherche du sens de variation d'une fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ lorsque $u_n = f(n)$; ceci est étonnant compte tenu de la présence importante de cette méthode dans les manuels ;
    - Un seul mobilise la comparaison de $f(x)$ et x lorsque $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$;
    - Deux mobilisent la recherche du signe d'une fonction f lorsque $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$;
    - La propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est mobilisée dans un sujet pour déduire la limite de la suite $(f(n))$ à partir de celle de la fonction f en $+\infty$. Cette propriété ne figure pas dans les attendus des deux derniers programmes officiels, elle est peut-être supposée être « intuitive ».
- Deux sujets mobilisent la « définition doublement quantifiée » de la monotonie d'une suite afin d'en déduire la comparaison d'un terme u_{n_0} avec les termes suivants.

Modélisations discrètes et continues : les notations, le vocabulaire

Nous avons relevé quatre exercices de Baccalauréat série S dans lesquels un phénomène est étudié par deux ou trois modélisations dont l'une est discrète et les autres continues. Ces phénomènes sont tous en fonction du temps.
Examinons les notations, le vocabulaire utilisés ainsi que la façon dont la grandeur étudiée est décrite.
Aux quatre exercices de Baccalauréat, nous ajoutons les deux « activités » d'introduction aux fonctions exponentielles des manuels de Terminales L et ES de 2012 que nous analysons dans la partie III E : elles comportent aussi une modélisation discrète et une continue d'un phénomène qui est là aussi en fonction du temps.

Bac S Pondichéry d'avril 2008 exercice 4 :

	Notation pour le temps	**Vocabulaire pour le temps**	**Notation pour la mesure de la grandeur étudiée**	**Description de la grandeur étudiée**
Modélisation discrète	n	« *l'année* n »	u_n	« *nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un écran plat* »
Modélisation continue	x	« *l'année* x »	$g(x)$	idem

En voici les deux extraits qui correspondent :

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10-y).$$

Il est intéressant de noter que cet exercice a été repris dans le manuel « Math'x » de Terminale S de 2012. L'auteur y a remanié l'énoncé de la partie B puisque les équations différentielles ne figurent plus au programme officiel de 2012 ; il a aussi reformulé la description de la variable temps dans la modélisation continue de la partie B par : $g(x)$ est « *le nombre, en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat à l'instant x exprimé en années* ». Soulignons l'emploi du mot « *instant* », certainement ajouté pour marquer le passage à une modélisation dans laquelle le temps est considéré comme continu. Nous aussi estimons que la formulation « *l'année x* » de l'énoncé initial induit une perception discrète du temps en nombre entier d'années, malgré le changement de notation de la variable - de n à x.

Bac S Pondichéry d'avril 2016 :

	Notation pour le temps	**Vocabulaire pour le temps**	**Notation pour la mesure de la grandeur étudiée**	**Description de la grandeur étudiée**
Modélisation discrète	n	« *au bout de n minutes* »	T_n	« *température en degré Celsius* »
Modélisation continue	t	« *instant t* »	$f(t)$	idem

Bac S Asie de juin 2016 :

	Notation pour le temps	**Vocabulaire pour le temps**	**Notation pour la mesure de la grandeur étudiée**	**Description de la grandeur étudiée**
Modélisation discrète	n	A la charge de l'élève	u_n	A la charge de l'élève
Modélisation continue	t	« *t représente le temps exprimé en jours* »	$f(t)$	« *masse exprimée en kg* »

Bac S Centres étrangers de juin 2017 :

	Notation pour le temps	**Vocabulaire pour le temps**	**Notation pour la mesure de la grandeur étudiée**	**Vocabulaire pour le phénomène étudié**
Modélisation discrète	n	« *après la nième injection* »	u_n	« *concentration plasmatique* » - absence d'unité
Modélisation continue	t	« *au bout de t heures*»	$f(t)$	« *concentration plasmatique en microgramme par litre* »

Introduction aux fonctions exponentielles, manuel « Hyperbole » Terminales ES et L de 2012, édition Nathan : Un extrait du début de l'énoncé de l' « activité » est : « *On se propose d'observer l'évolution de ce bien immobilier au fil du temps* » :

	Notation pour le temps	Vocabulaire pour le temps	Notation pour la mesure de la grandeur étudiée	Description de la grandeur étudiée
Modélisation discrète	n		$u_n = v(n)$	« *valeur du bien en centaine de milliers d'unité monétaire* »
Modélisation continue	t	« *instant t (en années)* »	$v(t)$	idem

Introduction aux fonctions exponentielles, manuel « Déclic » Terminale ES de 2012, édition Hachette :
L' « activité » se propose d'« *Étudier à tout instant une population* » :

	Notation pour le temps	Vocabulaire pour le temps	Notation pour la mesure de la grandeur étudiée	Description de la grandeur étudiée
Modélisation discrète	n	« n *est le nombre d'heures* »	$P(n)$	« *population au bout de* n *heures* »
Modélisation continue	x	« *au bout de* x *heures* »	$P(x)$	« *population au bout de* x *heures* »

iii. Conclusion

Selon les énoncés, le temps est mesuré en minutes, en heures, en jours ou en années, en mesures entières lorsque la modélisation est discrète, en mesures réelles si la modélisation est continue. Un exercice fait exception, dans la modélisation discrète duquel le temps est mesuré en nombre d'intervalles entre deux injections.
Lorsque la modélisation est discrète, la variable est toujours nommée n et la grandeur étudiée a pour mesure le terme d'une suite en notation indicielle dans les énoncés de Baccalauréat (la notation fonctionnelle est conservée dans les « activités » introductives des fonctions exponentielles en Terminale ES, elle disparait ensuite, dans les exercices de manuels et de Baccalauréat).
Lorsque la modélisation est continue, la variable est nommée x ou t et la grandeur étudiée a pour mesure l'expression d'une fonction en x ou en t. Elle est le plus souvent décrite par le mot « instant », par opposition avec le vocabulaire utilisé pour décrire la variable si elle est discrète (qui est souvent « un nombre de… »).

Sur les huit exercices de Baccalauréat que nous avons repérés, quatre relèvent de la modélisation d'un phénomène en fonction du temps.

Supra, nous avons analysé en détail un exercice du Baccalauréat donné en Asie en juin 2016. Le modèle continu proposé remplace le modèle discret étudié dans la première partie, qui est disqualifié car il donne des résultats contraires à l'observation du phénomène. Cependant un second modèle discret aurait suffi pour résoudre le problème posé et le modèle continu peut sembler davantage un prétexte à « faire de l'analyse » avec des outils liés aux propriétés des fonctions qu'à une nécessité.
Nous avons noté une absence de lien entre les modèles discrets et continus proposés dans trois énoncés (Bac S Pondichéry avril 2008 ; Bac S Pondichéry avril 2016 ; Bac S Asie juin 2016). Ces modèles semblent alors des occasions de « faire de l'analyse » avec les différents outils liés aux propriétés des suites et des fonctions du programme de Terminale S.

Dans les mêmes épreuves, l'énoncé semble induire que la réalité se conformerait au modèle. De plus, les mesures de la grandeur étudiée sont différentes d'un modèle à l'autre… La réalité serait double ! Nous en avons vu des exemples dans les analyses supra.

L'énoncé du Baccalauréat Centres étrangers de juin 2017 est tout autre :
Les deux premières parties traitent chacune d'une modélisation continue d'un mode d'administration d'un médicament – par une injection intraveineuse et par une ingestion. La troisième partie traite d'une

« *administration répétée par voie intra veineuse* », la modélisation de la concentration du médicament dans le sang par une suite semble alors naturelle :

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20\mu g.L^{-1}$.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit $20\mu g.L^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

Dans le préambule de la partie C, deux liens avec le premier modèle sont explicités : le temps entre deux injections est celui de la demi vie du médicament calculé en partie A ; la concentration initiale du médicament est la même que dans le premier modèle (ce qui est cohérent puisque les deux modes d'injection provoquent la même concentration plasmatique tant que la seconde injection n'a pas débuté).
De plus, il est explicite que les deux fonctions et la suite constituent chacune un modèle mathématique du phénomène étudié.
Serait-ce le signe que les concepteurs de sujets commencent à prendre davantage en compte les aspects de modélisation ?

2. Du côté des élèves

Nous avons réalisé des entretiens avec trois élèves de Première S en juin 2014 et cinq élèves de Première S en juin 2015.
En janvier 2015, nous avons eu un second entretien avec l'un des trois premiers élèves (alors qu'il était en Terminale S) ainsi qu'avec un autre élève de Terminale S.
Les élèves viennent à l'entretien avec les questions qu'ils se posent sur les suites et des exercices qu'ils aimeraient faire ou refaire ; de notre côté, nous préparons des exercices pour le cas où l'élève n'aurait pas suffisamment amené de matière à travailler.
Les extraits de récit des entretiens seront encadrés.

En tant qu'enseignante, nous avons aussi noté en détails la totalité de notre séquence sur les suites en classe de Première S au cours de l'année 2014- 2015 : tâches en classe et à la maison, déroulement, réactions des élèves. Lorsque nous y ferons référence, E. désignera l'enseignante et les données brutes seront encadrées.
Il convient de souligner que nous enseignions ce cours pour la troisième année consécutive dans le même établissement, ce qui amoindrit quelque peu le côté subjectif de nos appréciations non quantifiées.

Nous disposons aussi de données extraites de devoirs surveillés en Première S de 2014-2015 et de 2015-2016 : copies et relevés statistiques sur une trentaine d'élèves. Ces devoirs sont conçus par une équipe de cinq enseignants pour que les cinq classes de Première S de l'établissement composent en même temps sur le même énoncé.

Pour les entretiens, nous avons choisi des élèves qui avaient eu des difficultés en devoir surveillé sur les suites, bien qu'ils soient travailleurs et réussissent moyennement voire bien en mathématiques par ailleurs. Les extraits de copies proviennent aussi d'élèves de ce type.

Enfin, nous avons donné la tâche suivante à nos élèves de Première S de 2014-2015 et de 2015-2016 : « *Si on sait qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$ », que peut-on dire sur le sens de variation de f ?* »

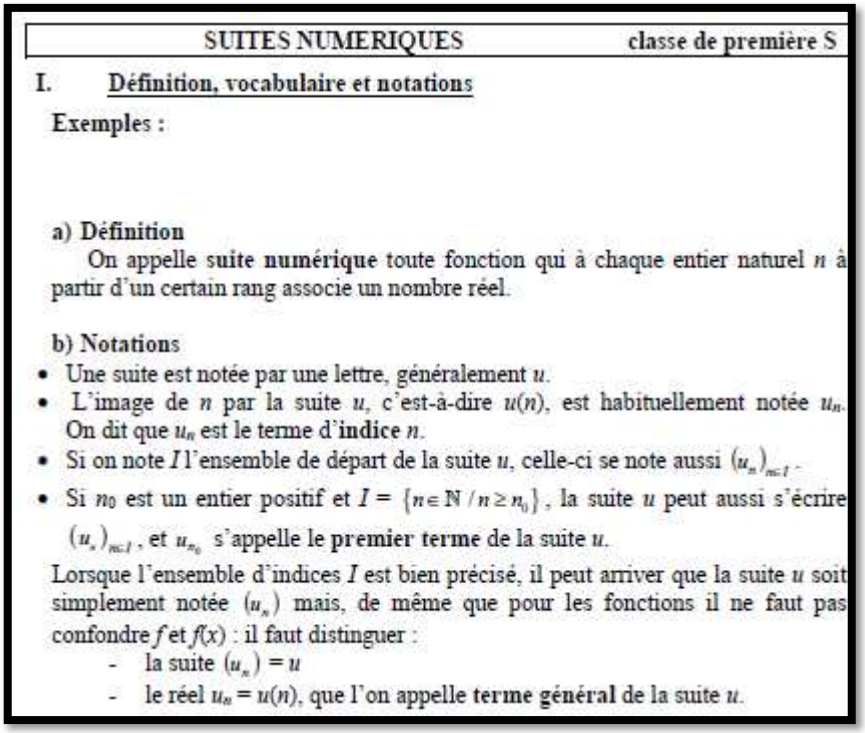
Nous organisons les données de ces différentes provenances selon un plan orienté par nos analyses de programmes et de manuels.

a) Aspects liés aux entiers naturels : la notation indicée ; les relations de récurrence ; le travail algébrique dans $\mathbb{N}$

i. La notation indicée

Notre séquence (extraits)

Lors de la séance d'introduction aux suites numériques en Première S, E. demande à chaque élève de dire un nombre à l'oral, dans l'ordre dans lequel ils étaient assis, avec l'idée que l'énumération puisse continuer (théoriquement) à l'infini. L'objectif de E. est de ne pas entrer dans ce thème par les deux modes de génération qui prédominent dans leur cursus (formes explicite et récurrente) ; que l'aspect « liste infinie de nombres » coexiste avec l'aspect de correspondance.
Les indices apparaissent en tant que rang d'énonciation puis en tant que nombre de départ dans une relation fonctionnelle.
La première partie de l'exposition de connaissances ci-dessous est ensuite distribuée :



SUITES NUMERIQUES — classe de première S

I. Définition, vocabulaire et notations

Exemples :

a) Définition

On appelle **suite numérique** toute fonction qui à chaque entier naturel n à partir d'un certain rang associe un nombre réel.

b) Notations

- Une suite est notée par une lettre, généralement u.
- L'image de n par la suite u, c'est-à-dire $u(n)$, est habituellement notée u_n. On dit que u_n est le terme d'**indice** n.
- Si on note I l'ensemble de départ de la suite u, celle-ci se note aussi $(u_n)_{n\in I}$.
- Si n_0 est un entier positif et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$, la suite u peut aussi s'écrire $(u_n)_{n\geq n_0}$, et u_{n_0} s'appelle le **premier terme** de la suite u.

Lorsque l'ensemble d'indices I est bien précisé, il peut arriver que la suite u soit simplement notée (u_n) mais, de même que pour les fonctions il ne faut pas confondre f et $f(x)$: il faut distinguer :

- la suite $(u_n) = u$
- le réel $u_n = u(n)$, que l'on appelle **terme général** de la suite u.

Les exemples à mettre dans l'espace prévu à cet effet sont trouvés par les élèves. Ils pensent aux relevés de température, heure par heure ou jour par jour, à la suite des nombres entiers…

C'est E. qui fait, par oral, le lien avec les fonctions.
Dans le texte de l'exposition de connaissances, les notations indicielle et fonctionnelle cohabitent ; E. souligne, à l'oral, les points communs et les différences entre suite et fonction.
Les trois séances suivantes sont consacrées à la génération de termes de suites selon les deux modes de génération classiques, « à la main », sur tableur et via un algorithme.

E. donne en 4e séance, un exercice en classe dans lequel l'expression du terme général d'une suite en fonction de n est connu et il est demandé d'exprimer u_{2n+1} en fonction de n. Les élèves ont des difficultés à comprendre qu'il s'agit d'une substitution de n par $2n+1$. Un exercice semblable (quoiqu'un peu plus simple du point de vue algébrique) de leur manuel comportant quatre tâches identiques est ensuite à faire à la maison : le terme général d'une suite est donné en fonction de n, il est demandé d'exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n. E. demande de surcroît aux élèves les expressions de $u_n + 1$ et de $u_n - 1$ en fonction de n.
Le rajout des deux dernières expressions à l'énoncé d'origine se révèle utile car elles font l'objet de nombreuses questions de la part des élèves lors de la correction en classe de l'exercice. E. s'aide de la notation fonctionnelle pour les explications.
À l'oral, en dehors de moments comme celui qui vient d'être décrit, E. dit « u indice n » ou « u n » pour désigner u_n ; certains élèves disent cependant « u de n », ce que E. laisse faire.
Le premier devoir surveillé sur les suites a lieu la séance suivante ; il est réussi dans l'ensemble. Les erreurs les plus répandues sont des indices placés sur la ligne principale au lieu d'être placés comme il se doit « en bas à droite ».

Il semble qu'à la difficulté due au caractère nouveau de la notation indicielle, se rajoute :

- Le fait que cette notation suppose une attention particulière pour écrire les indices convenablement ;
- Qu'elle est porteuse de deux sens – le rang dans la liste, l'image d'un entier par une fonction particulière ;
- Que le second des deux sens est associé jusque-là à une autre notation (fonctionnelle, parenthésée) ;
- Que les tâches de substitution du type « calculer $f(ax+b)$ en fonction de x connaissant l'expression de $f(x)$ en fonction de x » qui étaient travaillées auparavant en classe de Seconde ont disparu des mathématiques enseignées.

Copies d'élèves

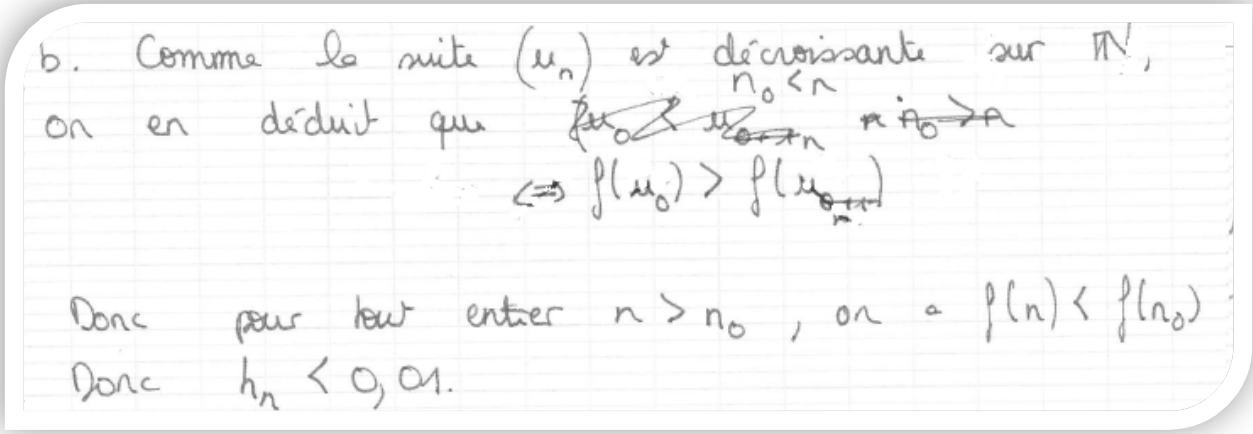
La notation indicielle est source de confusions multiples. Dans l'extrait de devoir surveillé de Première S ci-dessous donné en mai 2014, la suite (h_n) est géométrique. Le devoir couvre la totalité du thème des suites en Première S.

2. Etudier le sens de variation de (h_n).

3. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $h_{n_0} < 0{,}01$.

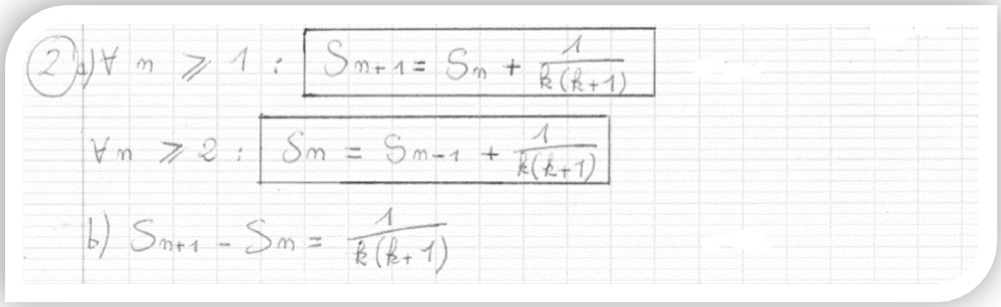
b. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur à n_0, on a $h_n < 0{,}01$.

L'extrait de copie qui suit est la réponse à la question 3. b. d'un élève rigoureux qui réussit bien en mathématiques par ailleurs.



L'élève traite la question en substituant la notation h_n par celle, plus habituelle, de u_n ; puis, peut-être parce qu'il est question de sens de variation, par $f(n)$, tout en confondant u_n et n.
La notation doublement indicée h_{n_0} est peut-être une difficulté supplémentaire, en cause dans cette dernière confusion.

Lors de l'introduction de la notation des séries, les confusions entre indices sont courantes. En voici un exemple dans une copie de devoir surveillé de Première S. A la question 2. du dernier exercice du devoir, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Il est demandé d'écrire S_{n+1} en fonction de S_n puis S_n en fonction de S_{n-1}. En 2. b., la question est de déterminer le sens de variation de (S_n).
La question 2. comporte de multiples difficultés pour un élèves de Première S : la notation $\sum$, sa signification et les rôles respectifs de la variable k et de la variable n ; la compréhension de ce qui est « ajouté d'un terme de la suite au suivant » donc de la relation de récurrence en jeu ; le fait que « ce qui est ajouté » comporte à la fois n et son suivant $n+1$.
Si l'énoncé avait été donné sous la forme $S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, il aurait été plus simple.



En ce qui concerne la notation indicée, ce que nous relevons ici est que l'élève écrit que $S_{n+1} - S_n$ est fonction de k et non de n. L'élève relèverait-il l'incohérence de cette égalité si la notation fonctionnelle $S(n+1) - S(n)$ était utilisée ?

Entretiens

Malgré le travail fait sur les indices pendant l'année 2014-2015, les entretiens avec les élèves en fin d'année scolaire montrent que la confusion entre u_{n+1} et $u_n + 1$ demeure chez certains.

Nous avons aussi observé lors de nos entretiens avec les élèves, concernant la notation indicée, que lorsque l'élève effectue un travail sur le terme général u_n, il a parfois des difficultés à en déduire une propriété numérique sur un terme particulier.
Un changement de point de vue, du général au particulier, est sollicité, ainsi qu'un passage du cadre algébrique au cadre numérique. Certes, tous deux seraient présents dans une tâche du même type dans le thème des fonctions ; la notation indicée pourrait cependant amplifier cette difficulté.

ii. Le travail dans $\mathbb{N}$

Notre séquence

Une fois les différentes méthodes de recherche du sens de variation abordées, E. demande aux élèves de résoudre en classe, dans $\mathbb{N}$, différentes inéquations :
Inéquation 1 : $2n + 3 > 0$; la majorité des élèves donne un intervalle de $\mathbb{R}$ en réponse. E. reformule la question en langue naturelle plusieurs fois pour obtenir la réponse correcte.
Inéquation 2 : $2n - 3 > 0$; la plupart des élèves donnent un intervalle de $\mathbb{R}$ en réponse. Une fois le premier exercice corrigé, la difficulté tient plus à l'écriture de l'ensemble des solutions qu'à une difficulté de compréhension de la tâche.
Inéquation 3 : $2n^2 - 3n < 0$; la plupart des élèves met n en facteur, fait un tableau de signes. Les autres font une recherche de signe du trinôme par calcul du discriminant. Le passage par la langue naturelle se révèle à nouveau utile pour l'écriture de l'ensemble des solutions.
Inéquation 4 : $2n^2 - 3n + 1 < 0$; certains calculent le discriminant et d'autres trouvent une racine évidente, 1, factorisent, et trouvent la deuxième racine, $\frac{1}{2}$, qui n'est pas entière. Les élèves se posent des questions sur la façon de rédiger : les racines sont-elles x_1 et x_2 (comme d'habitude) ou n_1 et n_2 ? E. leur conseille de rédiger la résolution dans $\mathbb{R}$ puis de conclure dans $\mathbb{N}$. Le fait de reformuler la question en langue naturelle aide à nouveau les élèves à conclure.

En l'absence de groupe témoin, il est difficile d'évaluer précisément l'effet de ce travail spécifique sur la réussite des élèves en résolution d'inéquations dans $\mathbb{N}$.
Les reformulations de la tâche en langue naturelle semblent être essentielles pour que les élèves adaptent la recherche de solutions dans $\mathbb{R}$, algorithmisée à ce niveau d'enseignement, à une recherche de solutions dans $\mathbb{N}$; puis ils ont besoin d'aide pour pouvoir rédiger en langage symbolique la recherche et la solution.

Devoirs surveillés

Analysons les résultats au devoir surveillé du 5 février 2015 qui a suivi, dont voici le premier exercice :

Exercice 1 (*sur 4 points*)

Etudier le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{0,3^n}{n}$

Il est important de souligner que la dérivation n'est pas encore été étudiée. Seules les méthodes de recherche de signe de la différence ou de comparaison du quotient de deux termes consécutifs avec 1 sont disponibles pour les élèves.

C'est un type de tâche routinisé. Reste cependant la difficulté qui peut persister, d'écrire u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de n. Les difficultés sont ensuite d'ordre algébrique (mise au même dénominateur pour la première suite, calcul avec des exposants pour la seconde).

Les recherches de signes sont simples lorsque les expressions sont sous forme de quotients dont le dénominateur est factorisé : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$; $v_{n+1} - v_n = 0,3^n \frac{-0,7n-1}{n(n+1)}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,3n}{n+1}$ puisque les facteurs sont du 1er degré et positifs sur $\mathbb{N}$.

Si l'élève développe, la recherche reste simple s'il utilise le fait qu'il s'agit de sommes de nombres positifs. Elle est plus difficile sinon, dans le cas où l'élève cherche les racines du trinôme afin de déterminer son signe.

Cet exercice est réussi par une majorité des élèves (55%) qui a obtenu entre 3 et 4 points sur 4. 42% des élèves ont des difficultés en calcul algébrique (non liées à la résolution dans $\mathbb{N}$) qui expliquent une grande partie des moins bonnes notes à cet exercice.

4 élèves (13% de l'effectif) ont développé le dénominateur de $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$; ils ont ensuite cherché son signe par une des deux méthodes récemment mobilisées en classe et explicitées plus haut. Parmi les 4 élèves, 3 font partie de ceux qui accèdent à une pensée fine et complexe en mathématiques. Le travail dans $\mathbb{N}$ effectué en classe les aurait-il davantage « marqués » que d'autres élèves ? Un effet de contrat didactique (ce qui est travaillé en classe « tombe au prochain contrôle ») aurait-il davantage joué avec eux ?

Copie

Dans un contexte mathématique différent, les élèves de la même classe de Première S ont un devoir surveillé deux mois plus tard, qui comporte une tâche de recherche de seuil. L'exercice porte sur les probabilités discrètes. Voici un extrait de l'énoncé, dans lequel n est un nombre de boules blanches dans une urne et X_n est une variable aléatoire :

1) Montrer que $E(X_n) = \dfrac{70-5n}{n+9}$.

2) Déterminer n pour que le jeu soit équitable.

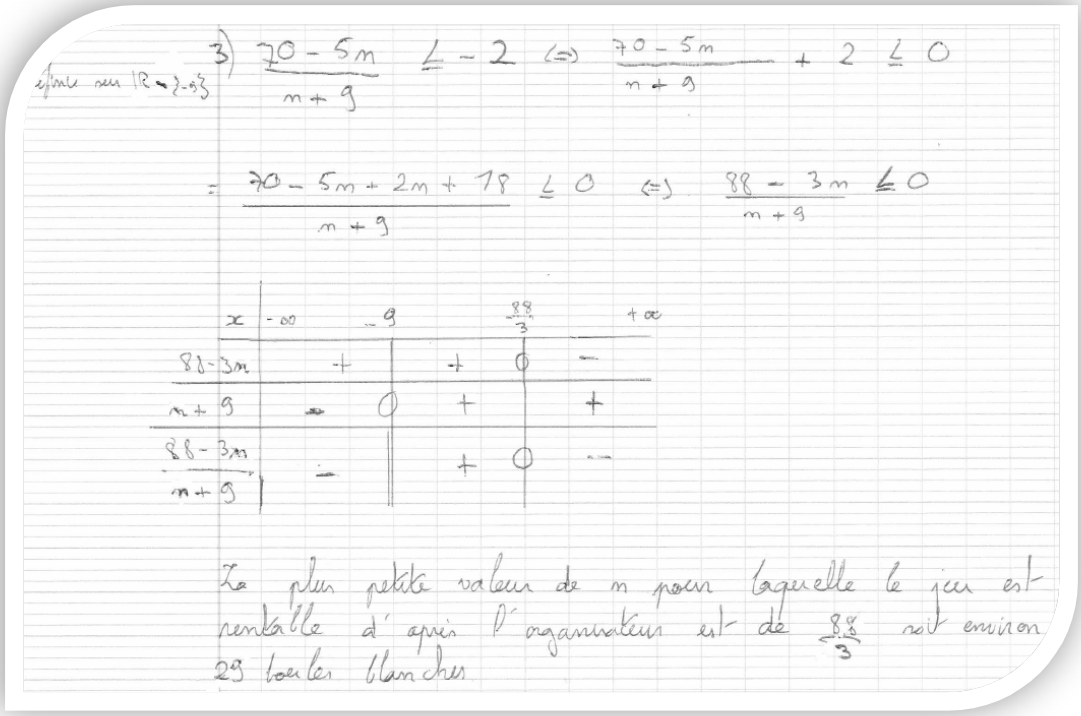
3) L'organisateur estime que le jeu n'est rentable pour lui que si $E(X_n) \leq -2$.

Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle le jeu est rentable.

Nous nous intéressons à la question 3. Elle peut être résolue par génération d'un tableau de valeurs à la calculatrice puisque n est un entier naturel ; ou par la résolution d'une inéquation dans $\mathbb{N}$.

Cette question est la moins réussie des trois. Les élèves mobilisent peu la génération d'un tableau de valeurs, ils tentent plus volontiers la résolution de l'équation qui leur pose des difficultés de calcul algébrique.

Voici un extrait de copie :



L'élève procède algébriquement de façon correcte. Il établit un tableau de signes dans lequel l'inconnue est renommée localement x. La résolution est visiblement faite dans $\mathbb{R}$, la conclusion aussi. Bien que le contexte soit discret, que la lettre n soit utilisée dans l'énoncé, qu'un travail spécifique sur les inéquations dans $\mathbb{N}$ ait été fait deux mois auparavant, l'élève traite la totalité de la question dans l'ensemble des réels.
Cela pose la question de la transférabilité des apprentissages d'un thème à un autre.

iii. Relation de récurrence

Devoir surveillé

Nous avons vu que dans le devoir surveillé du 5 février 2015 de la classe dont nous avons observé la totalité de la séquence, le premier exercice de recherche de sens de variation d'une suite, dans lequel deux suites sont définies de façon explicite, est globalement réussi par les élèves. Dans l'exercice suivant, le sens de variation d'une suite définie par récurrence est demandé :

Exercice 2 (*sur 2 points*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.
A partir de quel rang la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Préciser alors son sens de variation.

La différence $u_{n+1} - u_n$ est du 1er degré en n ; sa racine 5,5 est décimale, il s'agit donc de l'interpréter correctement : la suite est croissante à partir de $n = 6$; certains risquent de répondre que la suite est croissante à partir de $n = 5$.
La formulation de la question laisse à désirer : si le premier terme est u_0 est-ce que u_6 est le terme de rang 6 ou de rang 7 ? Elle pourrait engendrer un certain flou dans la réponse.
Les professeurs ont décidé de donner 0,5 points à la question si l'élève a fait une bonne conjecture – la calculatrice était autorisée. La programmation sur calculatrice suppose d'exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, ce qui comme nous l'avons vu constitue une tâche valorisable.

Finalement, seuls deux élèves ont écrit une conjecture sur leur copie.
Cet exercice est le moins réussi de ce devoir : sa moyenne est de 0,8 sur 2 et sa médiane de 0,5 sur 2.

- 3 élèves écrivent des réponses confuses ou incompréhensibles ;

- 2 élèves raisonnent sur les premiers termes uniquement ;
- 3 élèves font un raisonnement « qui boucle » ;
- 3 élèves décalent la réponse de un rang ;
- 4 élèves ne répondent pas ;
- 6 élèves ont presque parfaitement répondu, soit environ un élève sur cinq.

La tâche a pourtant été travaillée en amont une dizaine de fois, conjointement à des recherches de monotonie de suites définies de façon explicite (donc pas de façon isolée).

Un élève sur 10 écrit un raisonnement que nous avons décrit par le fait qu'il « boucle » : l'élève écrit que $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n - 11 - [u_{n-1} + 2(n-1) - 11]$, en appliquant la relation de récurrence deux fois, une fois pour exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (et n), une deuxième fois pour exprimer u_n en fonction de u_{n-1} (et n).
Ce type d'erreur est commun, un manuel en fait même le thème d'un de ses exercices[42]. Nous l'avons observé dans le dernier exercice de ce même devoir surveillé, dans deux des entretiens d'élèves (l'un en fin de première S, l'autre en fin de Terminale S).

29% des 30 élèves écrivent correctement $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n ; c'est peu compte tenu de ce que l'introduction de cette étape aurait dû être routinisée à ce stade, et qu'elle est simple d'un point de vue algébrique.
Rappelons que la définition par récurrence ne l'a pourtant pas été pour des tâches de recherche des premiers termes d'une suite dans le devoir surveillé précédent ; pourquoi constitue-t-elle un obstacle important pour cette tâche ?
Pour passer de l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n à celle de $u_{n+1} - u_n$, l'élève a besoin de passer d'un point de vue de génération d'un terme à partir du précédent (dynamique) à un point de vue plus statique d'expression de la différence entre deux termes en fonction de n. Ce changement de point de vue pourrait-il expliquer (au moins en partie) cette difficulté ?
Par ailleurs, la reconnaissance du fait que la suite est définie par récurrence n'est pas immédiate puisque u_{n+1} est donné en fonction de u_n et de n.

Entretien

A ce propos, examinons un échange au cours d'un entretien d'un élève en cours de Terminale.
Voici un extrait de l'exercice travaillé par l'élève :

La suite (u_n) est définie par u_0=2 et $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$
La suite (v_n) est définie par v_0=2 et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$
1. a) Montrer que pour tout entier positif *n*, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$
   b) On pose pour tout entier positif *n* : $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que pour tout entier positif n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

:

L'élève résout la question 2. Ci-après un extrait du récit :

L'élève écrit $u_{n+1} - u_n$, s'arrête, hésite. Puis il écrit $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2u_{n+1} + v_{n+1}}{3} - \frac{2u_n + v_n}{3}$.
[…][43]
L'élève hésite… « *(w_n) a un premier terme positif. Mais ça ne me donne pas le sens de variation de u ou de v !* ». Il poursuit : « *(w_n) est décroissante donc* $\frac{5}{12}(v_n - u_n) > 0$ »… « *car pour que (w_n) soit décroissante, il faut que* $v_n - u_n$ *soit positif* » - il pointe l'expression $w_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.
Je lui fais remarquer que son raisonnement pourrait être soutenu mais qu'il est… « *tiré par les cheveux* » dit l'élève en m'interrompant.

[42] Manuel « Hyperbole » de Première S, 2011, éditions Nathan page 140.
[43] Une partie est coupée pour être relatée infra, dans la partie d. qui concerne la monotonie.

Je lui dis que w_n est positif pour une raison beaucoup plus simple. Il la trouve et écrit « *on sait que (w_n) est positive car* $8\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$ ».

Je lui fais remarquer que pour « voir » que (w_n) est positive car $8\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$, il a besoin de regarder la suite (w_n) de façon statique, alors qu'il restait bloqué à penser « mouvement », « suite décroissante », « relation d'un rang au suivant ».

L'élève s'exclame : « *oui c'est vrai, c'est comme quand dans les suites arithmético-géométriques après avoir montré que (v_n) est géométrique je devais passer par exemple de* $v_n = u_n - 4$ *à* $u_n = v_n + 4$ *!* »

En voici une courte analyse :

L'élève commence un raisonnement « qui boucle » puis se reprend.

[…]

Pour chercher le signe de w_n, les raisonnements qu'il tente font intervenir des relations de récurrence. Jusqu'à ce que nous lui fassions remarquer qu'il y a « *une raison beaucoup plus simple* ».

Nous tâchons de lui faire sentir ce en quoi les points de vue des relations explicites et par récurrence diffèrent. L'élève semble s'en approprier pour le transférer à une technique classique dans laquelle il a repéré un jeu entre définitions explicite et récurrente : montrer via une relation de récurrence qu'une suite auxiliaire (v_n) d'une suite (u_n) arithmético-géométrique est géométrique, pour déterminer la définition explicite de v_n, puis mobiliser l'expression de v_n en fonction de u_n afin de déterminer la définition explicite de u_n.

b) Suite et fonction

Bien qu'il soit difficile de le quantifier, d'après les observations faites au long de notre séquence en Première S ainsi que les résultats aux devoirs surveillés, l'utilisation du tableur et de l'algorithmique pour générer les termes d'une suite définie de façon explicite ou par récurrence, conjointement avec les calculs faits « à la main », semble faciliter l'appropriation par les élèves des deux modes de génération de suites.

Par ailleurs, nous observons que la représentation graphique « en escalier » de suites définies par une « fonction qui génère » est effectivement difficile pour les élèves. Nous en avions analysé les raisons possibles en partie III. C. 1. a.

Les copies d'élèves de Première S révèlent de nombreuses confusions entre suite et fonction (sous-entendu : fonction continue et dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$) que nous décrivons ci-après.

i. Les suites numériques seraient des fonctions (continues et dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$)

Copies et un entretien

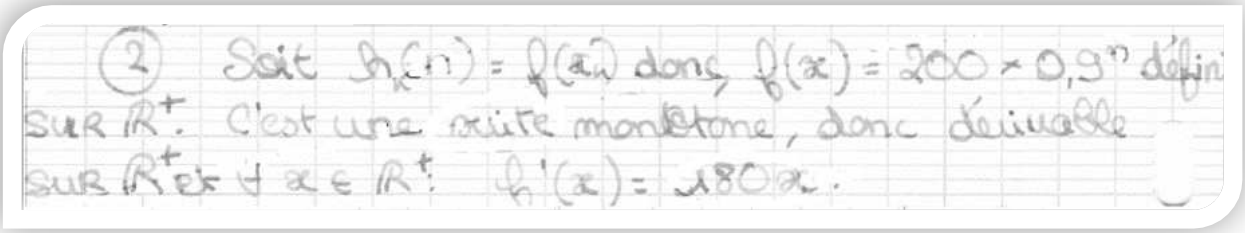
Nous avons examiné plus haut la réponse d'un élève à la question 3 de l'exercice suivant, donné en devoir surveillé en classe de Première S en mai 2014 (rappelons que la suite (h_n) est géométrique ; à l'issue de la question 1, les élèves ont établi que pour tout entier naturel n, $h_n = 200 \times 0{,}9^n$).

2. Etudier le sens de variation de (h_n).

3. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $h_{n_0} < 0{,}01$.

b. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur à n_0, on a $h_n < 0{,}01$.

Voici ce que répond un autre élève à la question 2 :



L'élève tente de répondre à la question en mobilisant la propriété : « si f est croissante et, pour tout entier n, $u_n = f(n)$ alors (u_n) est croissante ».
Il a pris soin de spécifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$… mais c'est aussi une suite, qui est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Sans surprise, les fonctions exponentielles n'étant pas au programme officiel, l'expression de la fonction dérivée est fausse.

Nous avons eu un entretien avec cet élève un mois plus tard. Voici un extrait de son récit :

L'élève s'étonne de ce que l'écriture $h(n) = f(x)$ ne soit pas correcte. Il ne voit pas le problème « *puisque le but est d'utiliser la dérivée* ». Nous lui faisons remarquer que la suite est définie sur $\mathbb{N}$ et lui posons la question de l'existence d'une dérivée pour une fonction définie sur $\mathbb{N}$. L'élève ne voit toujours pas de problème puisqu' « *on imagine la courbe lorsqu'on place les points à coordonnées entières, la courbe a des tangentes donc il y a une dérivée* ».
Nous lui rappelons, dans le cadre graphique, l'approche de la dérivée qui a été faite en classe.
Une fois cet obstacle passé, l'élève dit qu'il sait qu'il y a un problème à écrire « $f(n) = 200 \times 0,9^n$ donc $f(x) = 200 \times 0,9^x$ » mais ne peut pas dire pourquoi. Nous lui soumettons un contre-exemple graphique. L'élève propose d'écrire « *Soit* $h(n) = f(n)$ *avec* $f(x)$*=…* ». Nous la questionnons sur la signification du mot « soit ». L'élève écrit finalement « *Soit* $f(x)$ *avec* $h(n) = f(n)$ *».*

L'élève ne voit donc aucun inconvénient à dériver une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Le cadre graphique sert de support à son raisonnement. L'élève lie l'existence d'une dérivée à celle d'une tangente à la courbe. Celle-ci est la courbe « lisse », « régulière et continue », la courbe « harmonieuse » que les élèves tracent en reliant quelques points (dont les abscisses sont le plus souvent entières), ou dont ils voient un tracé sur leur calculatrice ou sur l'ordinateur depuis la classe de Troisième.

Dans l'écriture « $f(n) = 200 \times 0,9^n$ donc $f(x) = 200 \times 0,9^x$ », le « donc » est logiquement faux, mais il correspond à une chronologie correcte dans le raisonnement de l'élève qui pourrait être « $f(n) = 200 \times 0,9^n$ donc j'introduis la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 200 \times 0,9^x$ ». La définition de la fonction f s'impose par sa forme algébrique. Concrètement, dans la réalisation de la tâche, le fait qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$et vérifiant $f(n) = h(n)$ ne soit pas *a priori* unique a pour conséquence concrète des subtilités de rédaction qui sont difficiles à comprendre pour les élèves.

Nous allons voir un exemple dans lequel, finalement, que ce soit n, x, ou u_n, la forme algébrique semble suffire à définir une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Voici un extrait du devoir surveillé, toujours en Première S :

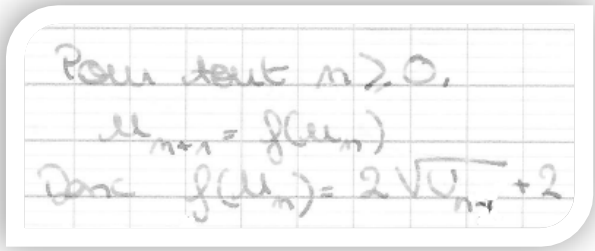
1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$.

a. Présenter les détails des calculs permettant de donner la valeur exacte de u_3.

b. Définir la fonction f telle que pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Puis un extrait de copie comportant l'intégralité de la réponse de l'élève à la question 1. b. :



L'élève aurait pu écrire $u_n = 2\sqrt{u_{n-1}} + 2$; cela aurait été correct mais ne définit pas une fonction f. Par contre, la forme algébrique $2\sqrt{x} + 2$ est reconnaissable dans sa réponse.
Sa représentation graphique « en escalier » des quatre premiers termes de la suite, qui était demandée à la question suivante, était correcte.

Notre séquence

Nous sommes un mois après la fin de la séquence sur les suites. Les élèves ont donc eu plusieurs occasions d'être confrontés au fait que les suites ne sont pas des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Cet extrait se situe après que le nombre dérivé ait été introduit ; les élèves avaient l'exercice suivant à faire à la maison :

63 **Coût marginal**

Le coût de fabrication de n unités par semaine d'un certain produit par une entreprise est $f(n)$, où f est une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
En économie, on appelle **coût marginal** le supplément de dépense qu'une entreprise doit consentir pour fabriquer une unité supplémentaire d'un produit.

1. Exprimer le coût marginal à la n^e unité.

2. Justifier que les économistes l'évaluent par $f'(n)$.

Manuel Math'x, Première S de 2011, éditions Didier, page 93

L'énoncé peut prêter à confusion : le nombre d'unités produites par semaine est un entier positif, il est majoré puisque l'entreprise n'a pas une capacité de production illimitée. La fonction coût est donc *a priori* définie sur une partie bornée de $\mathbb{N}$, elle n'est pas dérivable ; les coûts de production pourraient, devraient, être connus de l'entreprise, les images sont donc *a priori* connues.
Bien entendu, le coût en fonction du nombre d'unités produites par semaine peut être modélisé par une fonction dérivable, sur un intervalle borné de l'ensemble des réels positifs (plutôt que sur $\mathbb{R}$).
Lors de la séquence sur les suites, les élèves ont eu des difficultés à rédiger la recherche de monotonie d'une suite via « la fonction associée », en particulier à comprendre pourquoi on y exprime f en fonction du réel x

et pas en fonction de l'entier n. Or ici, il est question de $f(n)$à la première question, de $f'(n)$ à la seconde question, puisque la fonction f est mobilisée *in fine* aux points entiers naturels.
Il y a donc de multiples raisons pour lesquelles cet énoncé peut gêner les élèves, essentiellement :

- La fonction f apparait tout à la fois comme une fonction définie sur $\mathbb{N}$ dont les valeurs des images sont déterminées par la réalité, et une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont les valeurs sont définies d'une façon inconnue ;
- Les notations qui dans le contexte de recherche de sens de variation (qui fait appel à la perspective globale sur un intervalle) sont incorrectes, sont ici mobilisées de façon correcte. Un changement de perspective, du global (continu) au ponctuel (donc discret) est en jeu.

Voici le récit de la correction en classe entière :

Je questionne ce choix de notations de l'exercice : pourquoi n, pourquoi pas x ?
Réponse assez rapide des élèves : car il n'y a pas de moitié d'unités fabriqués, n est un entier positif.
Je questionne : Alors f est une suite ou une fonction ?
Réponse des élèves : une suite.
Je fais un dessin au tableau avec les unités par centaines en abscisse et le coût en ordonnée. Je place un point par unité en abscisse, cela fait un nuage de points où j'explique qu'il peut y avoir au plus 100 points entre deux points placés ; j'en mets quelques-uns.
Je demande, en reprenant les termes de l'énoncé : Pourrait-on dire « Le coût de fabrication de n unités par semaine d'un certain produit par une entreprise est f(n), où f est une suite dérivable sur N » ?
Silence pendant 30 secondes, un élève dit que non, car pour avoir une dérivée il faut une courbe.
Je lui fais préciser ce qu'elle entend par courbe et elle dit une courbe continue.
Je rebondis sur la nécessité d'une « courbe continue » en rappelant la façon dont nous avions fait tendre un point M vers un point A avec GeoGebra, pour trouver le nombre dérivé.
Je demande ce que c'est que cette fonction coût, comment elle est définie. Les élèves paraphrasent l'énoncé. Pour eux, son existence ne pose pas de problème. (Puisque les économistes en parlent ?)
La question 1. ne pose pas de problème (globalement sur la classe).
Pour la question 2, un élève dit que f(n+1)-f(n) est f(a+h)-f(a). Il explique que a est n, h est 1 et qu'on peut rajouter la division par 1 donc par h.
Je fais remarquer que h est constant ici, comment peut-on le faire tendre vers 0 ? Pas de réponse.
Je finis par demander si h est petit. Un certain nombre d'élèves disent que cela dépend.
Je dis que 1 est petit pour une production importante. Donc pour une petite production, l'évaluation du cout marginal par f '(n) n'aurait pas de sens.
Je souligne le fait que la fonction est choisie pour modéliser le réel ; qu'il s'agit d'approximer le réel ; la dérivation est un outil qui existe sur des fonctions continues mais pas sur des suites ; les économistes peuvent ainsi aisément calculer des approximations de coûts marginaux.
Réaction des élèves, visiblement mécontents : mais alors ce ne sont plus des math !

Nous avions introduit rapidement le registre graphique dans le but de faire rapidement le lien entre la première question et la deuxième. En effet, le nombre dérivé avait été introduit dans le cadre graphique dans un passé proche.
La « forme » algébrique $f(n+1)-f(n)$ qui exprime le coût marginal à la n^{e} unité à la première question est reconnu par au moins un élève de la classe comme étant $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $a=n$ et $h=1$.
Les élèves n'ont pas adhéré aux explications sur la modélisation du réel. Pour eux, les math sont une discipline dans laquelle les résultats sont exacts et univoques.
De plus, ils avaient peut-être besoin de davantage de temps (et de tâches à effectuer) pour comprendre que $f'(n)$ est le nombre dérivé de f en n (et que ce n'est pas l'expression générale de la fonction dérivée).
S'ils ne comprenaient pas cela, si de plus ils ne comprenaient pas que $f(n)$ est l'image de n par une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et non l'expression de la fonction f, ils pouvaient être mécontents de ce qu'ils pouvaient percevoir comme des imprécisions, voire des incohérences !

ii. Les fonctions réelles définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ seraient des suites numériques

Nous avons donné la tâche suivante à des élèves de Première S : « *Si on sait qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$ », que peut-on dire sur le sens de variation de f ?* »

Les réponses à cette tâche permettent de mesurer ce en quoi une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est perçue en tant que telle ou comme une suite. Pour celui qui répond, le nombre réel x décrit-il effectivement un ensemble continu ou bien l'ensemble des entiers, voire des entiers positifs ? La fonction prend-elle effectivement des valeurs pour tous les réels compris entre deux entiers consécutifs ?
Dans l'affirmative, ces valeurs sont-elles celles de « la » fonction représentée par les points à abscisses entières reliés de façon « harmonieuse » (qui est supposée aller de soi dans certains manuels) [44] ?

Analyse *a priori* du point de vue mathématique

Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$, f peut être strictement croissante, mais ne l'est pas nécessairement.
La tâche est résolue en exhibant un contre-exemple :

- Dans le cadre algébrique. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|\sin(2\pi x) + 2|$ vérifie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = (x+1)|\sin[2\pi(x+1)])| = f(x) + |\sin(2\pi x) + 2|$ Donc $f(x+1) > f(x)$.
- Dans le cadre graphique. Le tracé d'un contre-exemple n'est cependant pas aisé à construire pour un non expert.

Déroulement

La tâche est complexe, c'est pourquoi nous l'avons donnée à résoudre par groupes de deux ou trois élèves, pendant 50 minutes.
Les élèves disposent de leur calculatrice, en plus de leur papier et leur crayon.
Nous avons mis en place ce dispositif deux années consécutives en juin 2015 et juin 2016 dans une classe d'une trentaine d'élèves de Première S, en fin d'année scolaire.
La progression décidée par l'équipe des enseignant était telle que l'étude des suites comme celle des fonctions était terminée depuis plus d'un mois pendant lequel des thèmes en géométrie et en probabilités étaient abordés.

Analyse *a priori* du point de vue de la résolution de la tâche par les groupes d'élèves en classe de Première S

La reconnaissance de la « forme algébrique » empruntée à la définition de la croissance d'une suite peut bien sûr induire les élèves en erreur qui répondront que la fonction est strictement croissante.
Nous faisons l'hypothèse que certains groupes arriveront, dans le temps imparti, à imaginer dans le cadre graphique qu'entre deux entiers ou du moins deux réels distants de 1, la fonction peut prendre des valeurs qu'ils peuvent faire varier à leur guise.
Dans d'autres groupes, la connaissance de ce qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas une suite, qu'elle fait partie d'un autre « monde » dans lequel la définition de la monotonie est différente, pourrait ne pas être disponible.

La tâche requière des prises d'initiatives, d'autant plus que la question est ouverte.
Les élèves peuvent chercher des fonctions dans le cadre algébrique en testant des expressions, ou dans le cadre graphique. En l'absence de fonctions trigonométriques dans le cursus des élèves, un contre-exemple dans le cadre algébrique est exclu à ce niveau.
La réponse n'est pas simple à formuler puisque f peut être croissante, ou pas.

Il est probable que les élèves pensent à des « x » entiers, compte tenu de l'usage prépondérant des entiers au collège et au lycée. En pensant « x » entier, il est assez simple d'imaginer une représentation graphique de fonction dont la restriction à $\mathbb{Z}$ est strictement croissante mais qui ne l'est pas sur $\mathbb{R}$, sans toutefois vérifier la condition « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$ ». La réponse est alors que f n'est pas nécessairement croissante (c'est la réponse correcte attendue).

[44] Nous faisons référence à la partie III. A. de ce travail.

Il est beaucoup plus délicat de construire un contre-exemple graphique qui tienne compte de l'ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel la quantification porte.

Les résultats

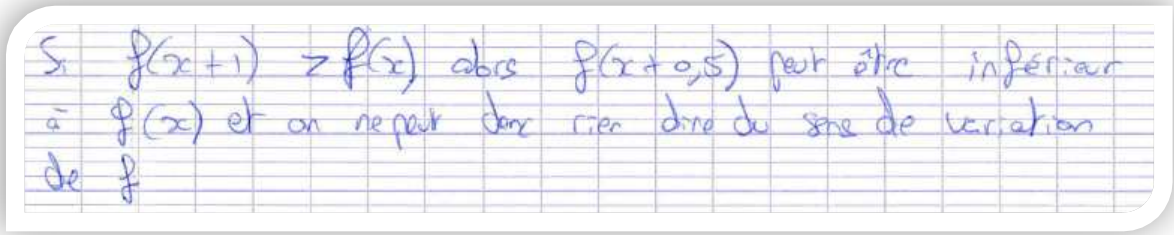
Les élèves testent :	**Juin 2015**	**Juin 2016**	**Cumul**
Avec graphe sans expression	86 %	33 %	59 %
Avec graphe et expression	0 %	27 %	14 %
Avec expression sans graphe	0 %	7 %	3 %
Sans graphe ni expression	21 %	31 %	28 %
Avec graphe de points isolés	7 %	7 %	7 %

Les élèves répondent :	**Juin 2015**	**Juin 2016**	**Cumul**
La suite est croissante	7 %	7 %	7 %
La fonction est croissante	29 %	40 %	34 %
Pas de conclusion (bien que recherche de contre-ex)	14 %	33 %	24 %
« On ne peut pas savoir » / « f pas toujours croissante »	50 %	20 %	34 %

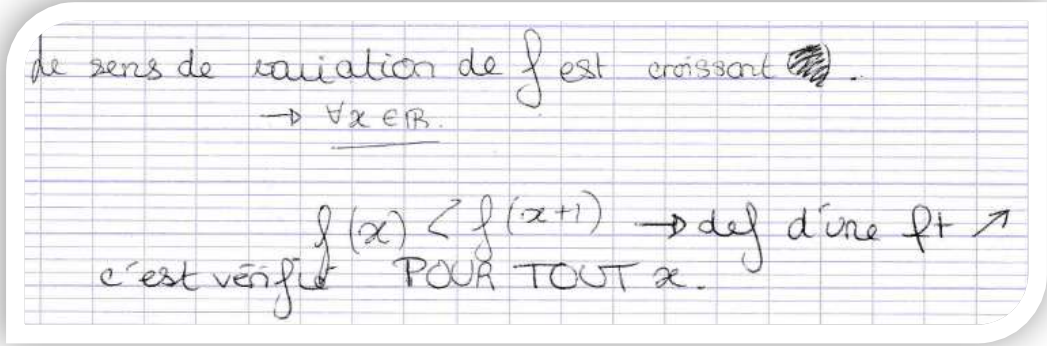
Dans tous les groupes, les élèves pensent dans un premier temps que f est croissante.
Puis les trois quarts se posent des questions et testent des expressions algébriques, des représentations graphiques, ou les deux.
Finalement, au total, environ un tiers répond que la fonction est croissante, un autre tiers que l' « on ne peut pas savoir », 7 % que la suite est croissante, un quart cherche sans conclure.

La définition sert d'argument

Le quart des groupes qui répondent sans graphe ni expression algébrique invoquent la définition formelle de la croissance.
L'un d'eux conclut convenablement :



Les autres groupes concluent que « la fonction est croissante » (3/4 de ces groupes), ou que « la suite est croissante » (1/4 de ces groupes) : ils reconnaissent la « forme algébrique » de la définition correcte dans le discret qui les « ferme » à un changement de point de vue qui inclurait le continu des réels.

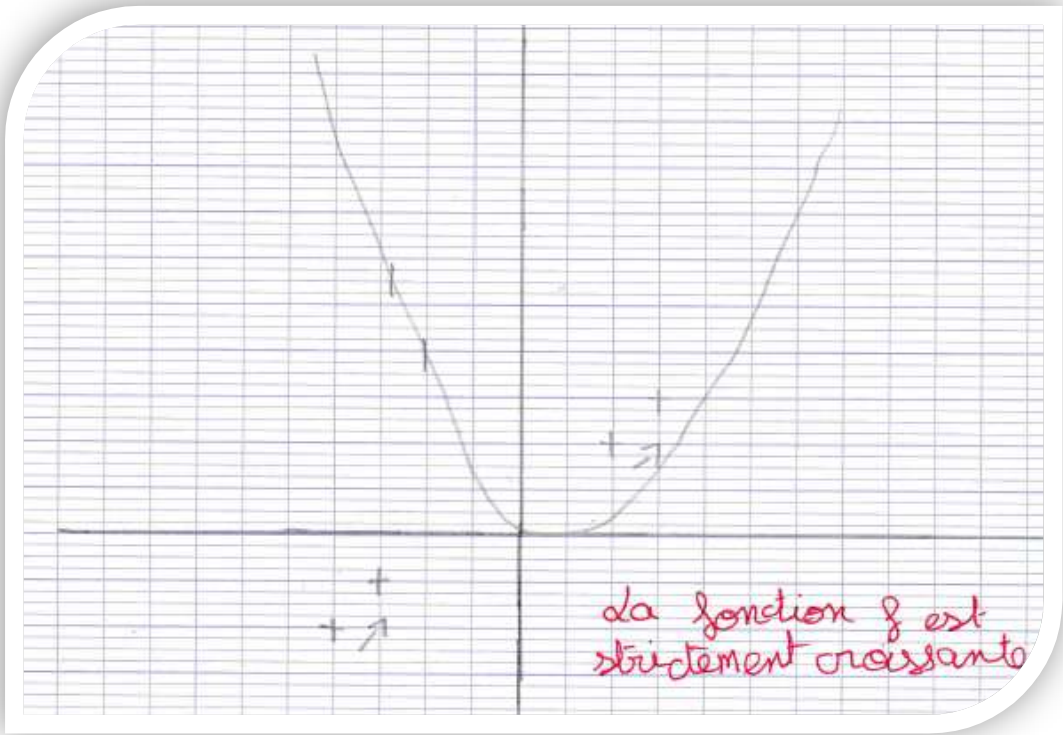


Les fonctions seraient des suites

7 % des groupes répondent « la suite est croissante » et 7 % des groupes produisent un graphique de points isolés et concluent « la fonction est croissante ». Donc pour 14 % des groupes, l'énoncé est compris en termes de suites. Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ seraient donc des suites.

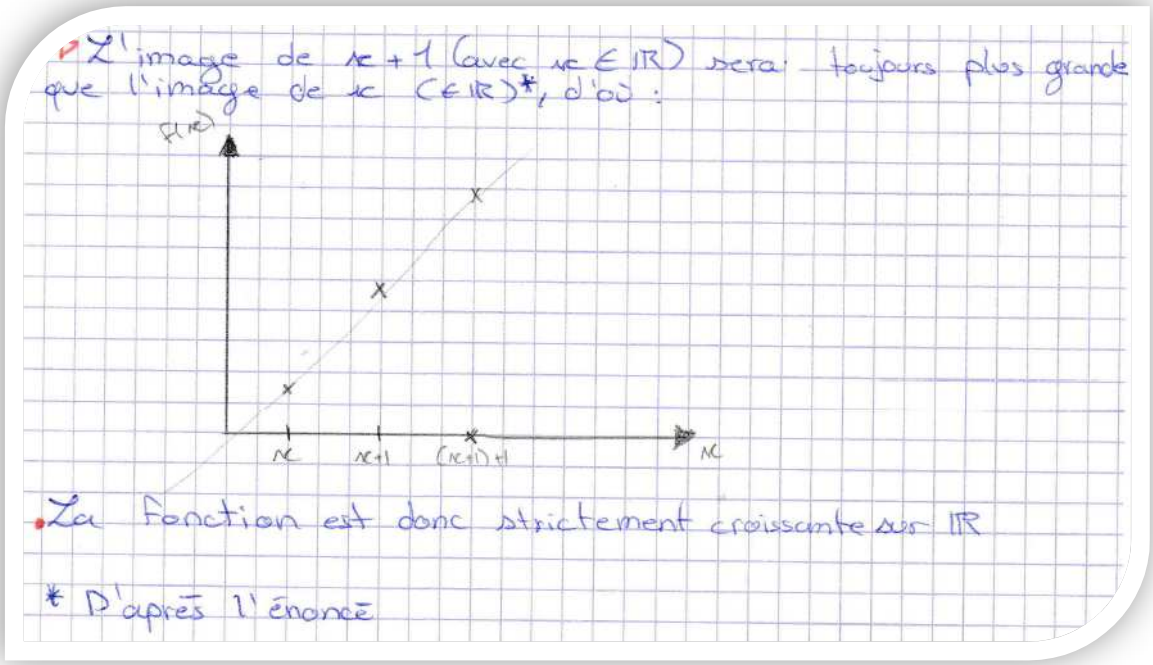
Les fonctions sont déterminées par leurs valeurs prises sur un ensemble inclus dans $\{x_0 + n, n \in \mathbb{N}\}$:

Un quart des élèves répond que la fonction est croissante en raisonnant numériquement ou graphiquement sur des éléments d'un ensemble $\{x_0 + n, n \in \mathbb{N}\}$. Ceux qui raisonnent numériquement choisissent un x_0 entier. Ceux qui raisonnent dans le cadre graphique placent des points sur des sommets de carreaux ; ils ne les relient pas nécessairement.



Sur l'exemple ci-dessus, les élèves ont tracé dans un premier temps une parabole. Puis quatre points qui ne sont pas reliés ; une flèche indique qu'ils ont pris en compte la condition $f(x+1) > f(x)$ pour les deux couples de points. Ils n'imaginent pas qu'entre les deux valeurs distantes de 1, la fonction puisse ne pas être monotone.

D'autres groupes relient les points par des segments ou alignent les points :



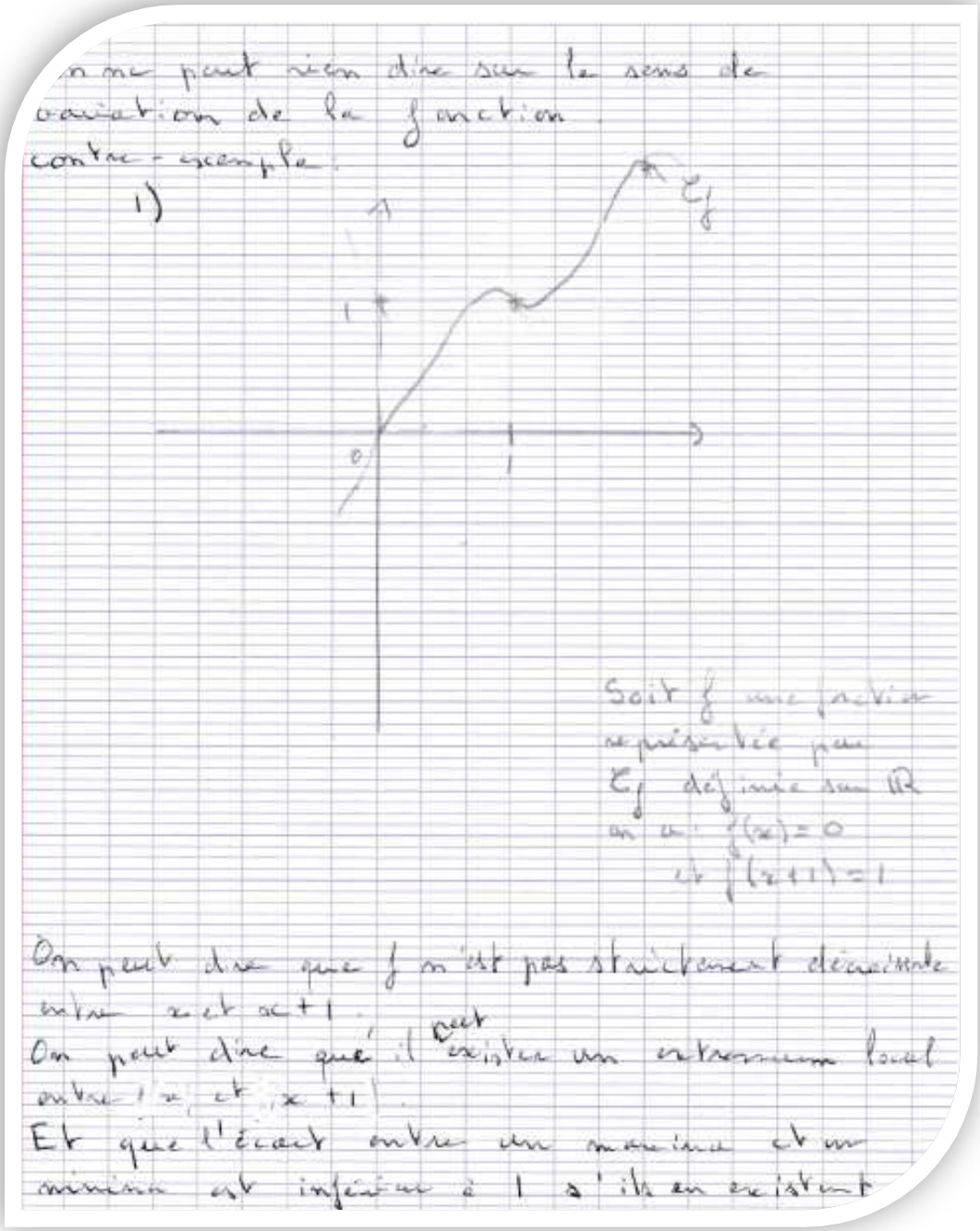
Ces valeurs distantes de 1 sont-elles perçues comme des valeurs consécutives ?
Ou bien l'habitude voire l'injonction selon laquelle, pour tracer la courbe d'une fonction, on relie les points « harmonieusement »[45] bride-t-elle l'imagination des élèves ?

Les réponses correctes et les recherches de contre exemples non aboutis – les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) ne sont pas des suites !

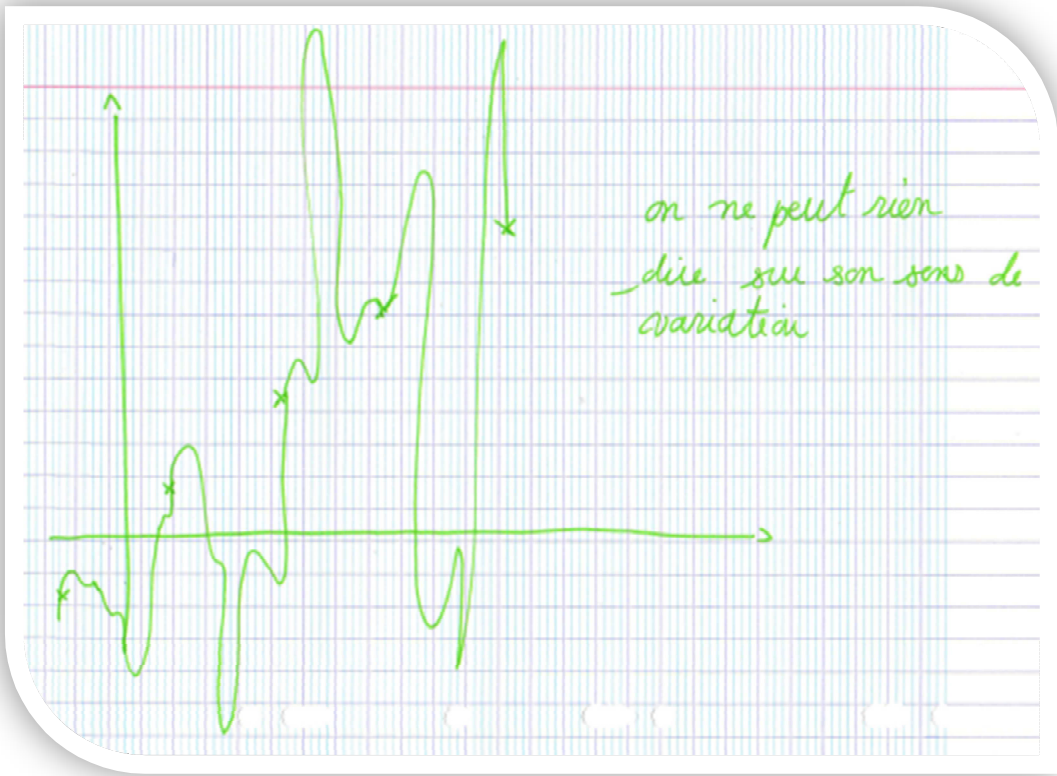
Le cumul du taux de réponses correctes et de celui de recherches de fonction qui constitue un contre-exemple mais qui n'aboutissent pas, est globalement de 58 % sur les deux années. Les élèves de ces groupes perçoivent bien les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme des objets différents des suites.

Le taux de réponses correctes, du type « on ne peut pas savoir » ou « la fonction n'est pas toujours croissante », passe de 50 % en juin 2015 à 20 % en juin 2016.
À programme officiel constant, progression annuelle constante, établissement scolaire constant, la seule variable que nous identifions est que nous avons effectué, avec les élèves en 2014-1015, un travail incluant davantage de méta sur les suites et en particulier leur sens de variation.
Par contre, le taux de contre-exemple graphique correct sur un intervalle de longueur supérieure à 2 est stable : environ $\frac{1}{6}$ des groupes. Notons que dessiner un contre-exemple n'est pas facile, d'où une certaine tolérance dans notre appréciation.
Voici un des contre exemples les plus précis :

[45] Nous faisons à nouveau référence à la partie III. A. de ce travail.



Les contre-exemples qui ne sont pas corrects ne prennent en compte la condition $f(x+1) > f(x)$ que sur un ensemble x d'abscisses appartenant à $\{x_0 + n, n \in \mathbb{N}\}$; x_0 est entier, sauf dans un groupe.
En voici un exemple :



Ces élèves perçoivent bien le continu de l'ensemble de définition de f. Pas de celui de la quantification.

c) Notations discret / continu

Nous avons vu qu'environ un groupe d'élève sur 7 répond en Première S, à la question : « *Si on sait qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$ », que peut-on dire sur le sens de variation de f ?* », en termes de suites. L'énoncé de la question comporte pourtant les symboles x, f et $\mathbb{R}$ qui véhiculent le continu, par définition pour $\mathbb{R}$, par habitude au lycée pour x et f.

Nous avons vu dans les extraits de copies, des exemples où les notations n et x désignent la même variable et n'embarquent pas nécessairement sa nature (entière ou réelle). Les élèves mettent volontiers x en première ligne de tableaux de signes dans lesquels les expressions sont fonction de n.

Nous avons vu aussi des extraits dans lesquels la suite u (ou h) et une fonction f sont les mêmes objets.

Devoir surveillé

Voici un autre extrait de l'exercice 3 donné en devoir surveillé en Première S le 5 février 2015 :

Exercice 3 (*sur 8 points*)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - \dfrac{1}{n+2}$.

1. Calculer les valeurs exactes des trois premiers termes.

2. a. Définir une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

b. Etudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$

c. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Faisons une analyse *a priori* des deux premières questions.

La question 1 est une tâche simple et isolée puisque la suite est définie de façon explicite.
Dans la question 2. a. le besoin de donner un ensemble de définition à une fonction risque de ne pas être perçu par les élèves. Les élèves auront probablement des réponses du type « $f(n) = 5 - \frac{1}{n+2}$ » ou bien « $f(x) = 5 - \frac{1}{x+2}$ ».
Notons qu'une réponse possible, théoriquement, est $f = u$ puisque les suites sont des fonctions particulières.
Le devoir surveillé est donné avant que la dérivation ne soit connue des élèves. Les élèves peuvent traiter la question 2. b. par deux méthodes :

- Soit par inégalités successives. Cette méthode démarre habituellement par : « soit a et b deux réels de $[0; +\infty[$ tels que $a < b$… » et aboutit à une comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$. (Elle était largement travaillée dans le cadre du programme officiel de 2nde précédent, en vigueur de 2001 à 2009) ;
- Soit par mobilisation de propriétés du sens de variation sur un intervalle de fonctions composées de type $\lambda u, u + k, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$, connaissant la monotonie de u sur ce même intervalle, dans le registre de la langue naturelle ou des tableaux. Dans cette classe, c'est le registre des tableaux de variations qui a été privilégié lors du travail sur ces propriétés. Ce choix fait par l'équipe des enseignants, par souci d'efficacité et parce que ce registre reconnu comme un bon support de sens.

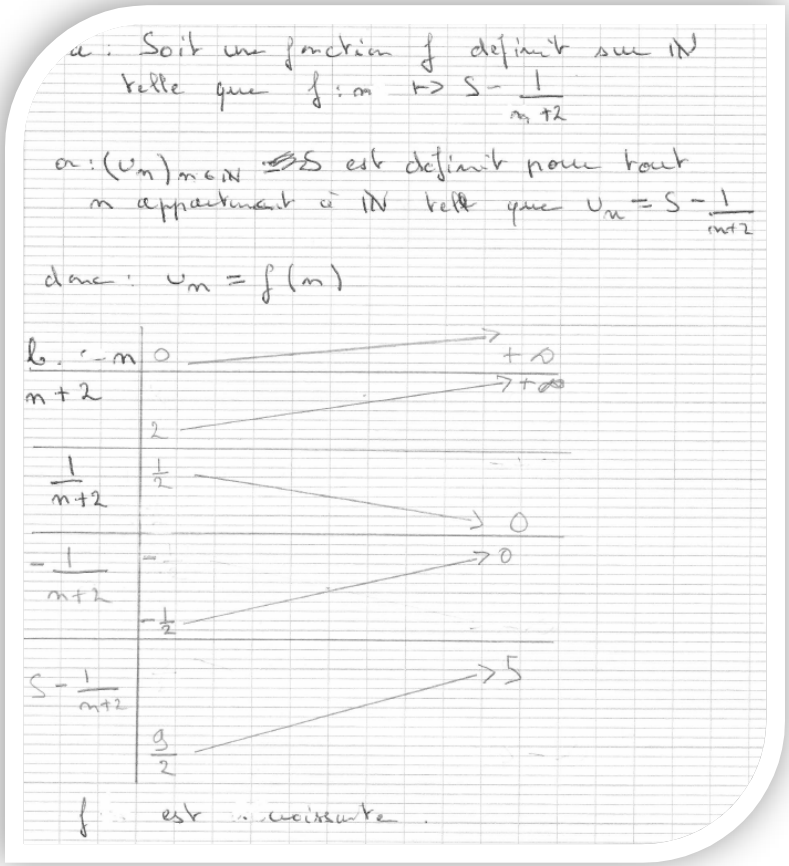
Avec la 1ère méthode, le fait que a et b soient réels ou entiers n'entraine aucune différence. Les élèves risquent de ne pas le spécifier, auquel cas il n'y a pas moyen de savoir s'ils raisonnent sur des entiers ou pas.
Avec la 2ème méthode : en pratique, le registre des tableaux de variations n'est utilisé que lorsque la fonction est définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles. En Terminale, nous avons vu dans la partie III. B. 1. b. qu'il est explicité dans le programme officiel de 2011 que : « *On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.* » Si l'élève persiste à utiliser la variable n, avec le sous-entendu que la variable est entière, le tableau de variations n'a alors plus de sens.
En classe de Première, en l'absence de la convention selon laquelle les flèches du tableau de variation traduisent la continuité de la fonction en plus de sa monotonie, rien ne s'oppose à mobiliser un tableau de variation pour des suites – à part pour des raisons d'usage.

Pour répondre à la question 2. c., les élèves peuvent utiliser la croissance de f soit par utilisation de la propriété énoncée dans l'exposition de connaissances – c'est la méthode attendue - soit en la redémontrant. S'ils ne voient pas que les questions s'enchainent, ils peuvent chercher le signe de $u_{n+1} - u_n$.

A posteriori :
39% des élèves ne font pas la question 4. b.
39% des élèves écrivent une expression définissant f sans spécifier son ensemble de définition.
35% des élèves écrivent $f(n) = 5 - \frac{1}{n+2}$ dont :

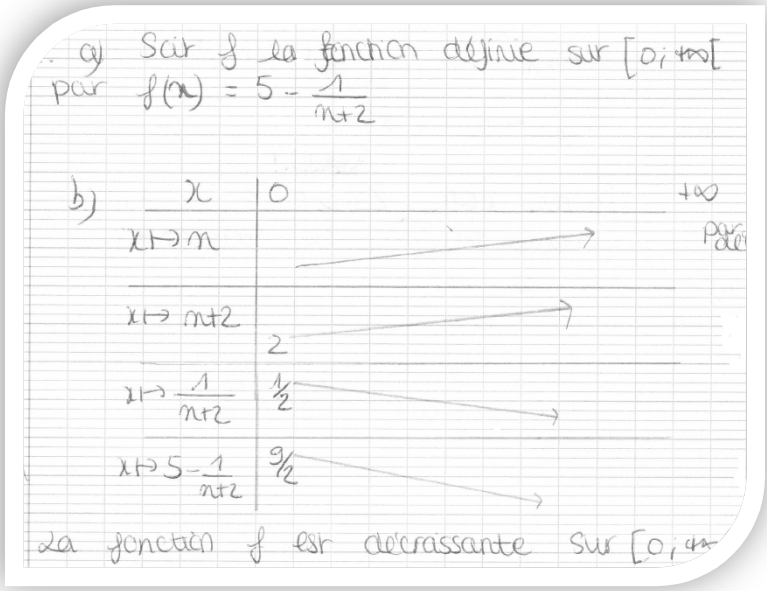
- Les deux tiers ne font nulle part intervenir de variable nommée x ; en particulier, les tableaux de variation sont établis avec des « n » ;
- La moitié donne pour ensemble de définition de f l'ensemble $\mathbb{N}$;
- Le tiers mélange dans la rédaction de la réponse l'utilisation des lettres « n » et « x ».

Voici un exemple de copie dans laquelle u et f sont le même objet : une suite correctement définie sur $\mathbb{N}$. La variable est n du début à la fin de la réponse ; le tableau de variation est mobilisé en tant que registre de représentation de la monotonie :



Nous estimons que l'élève a parfaitement répondu à la question : les mots « fonction », « sens de variation » ont un sens identique, que l'ensemble de définition soit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Par contre, l'élève ne perçoit pas l'implicite de l'énoncé selon lequel f désigne une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Voici une autre copie dans laquelle f est définie sur $[0;+\infty[$; les variables n et x cohabitent. La variable de départ est x et son image est exprimée en fonction de n. Remarquons que de surcroît, l'élève écrit ses « n » et ses « x » de façon assez semblable.



De cette analyse, nous pouvons conclure que les implicites : « n désigne un entier, x désigne un réel » et « f désigne une fonction définie sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$, alors que u désigne une

suite » ne sont pas opérationnels chez les élèves, même après leur mobilisation pendant un mois. Ceci est confirmé lors de la correction en classe du devoir surveillé, pendant laquelle les élèves proposent à nouveau de définir f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(n) = 5 - \frac{1}{n+2}$.
Les propriétés du sens de variation des fonctions $\lambda u, u + k, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$ connaissant la monotonie de la fonction u sur un intervalle ont été énoncées dans cette classe, avec ces mêmes notations, trois mois auparavant ; ces propriétés sont mobilisées dans cet exercice afin de déterminer le sens de variation d'une suite u. L'introduction d'une « fonction qui définit » f définie sur $\mathbb{R}^+$peut paraitre d'autant plus artificielle aux les élèves qu'elle n'est justifiée que par le fait que ne figurent dans le texte de l'exposition de connaissances :

- Ni un énoncé explicite sur la monotonie des suites $\lambda u, u + k, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$ selon le sens de variation de u ;
- Ni un énoncé de l'équivalence des deux définitions du sens de variation dans le cas des suites.

L'utilisation de la même lettre u pour désigner une fonction définie sur un intervalle et une suite pourrait contribuer à entretenir chez les élèves l'idée qu'une suite u ou une fonction u définie sur $\mathbb{R}^+$ sont un même objet mathématique.

Cette analyse permet de conclure aussi que les flèches des tableaux de variations ne sont pas connectées naturellement à un objet continu (malgré le « geste continu » associé). Elles ne semblent être qu'une représentation de monotonie pour les élèves – c'est ainsi qu'elles ont été introduites en Seconde.
Pour certains élèves, les différences entre suite et fonction n'étant pas conceptualisées, la question de la pertinence du tableau de variation pour représenter le sens de variation d'une suite ne se pose pas.

d) Monotonie

Notre séquence

Dans la séquence que nous avons menée en Première S, le sens de variation d'une suite est introduit après avoir corrigé en classe un exercice sur la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$. Une des questions de cet exercice est d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \geq 1$, ce qui parait être un terrain propice à l'émergence de la définition de la croissance d'une suite. Voici le récit de ce moment (c'est la première fois que la notion de sens de variation d'une suite est abordée) :

E. demande aux élèves ce qu'on peut dire sur le sens de variation de cette suite.
Les élèves sont rapidement d'accord pour dire qu'elle est croissante.
E. demande comment on va définir la croissance d'une suite. Plusieurs élèves essayent immédiatement d'adapter la définition qu'ils connaissent pour les fonctions. Le fait que la définition de la croissance d'une fonction était utilisée dans le dernier devoir maison a pu la rendre davantage mobilisable.
E. demande comment l'utiliser dans le cas de l'exercice. Comme ils n'ont pas d'idée, E. dit qu'il y a un moyen plus simple de définir le sens de variation dans le cas d'une suite. L'idée de rajout d'un nombre positif pour passer d'un terme à son suivant émerge.
Reste à la formaliser en u_{n+1} comparé à u_n, puis en signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Nous pouvons voir que l'émergence de la définition de la croissance d'une suite n'a eu besoin que d'une « petite » aide : la définition cherchée est plus simple que dans le cas d'une fonction.
Nous allons voir que les difficultés concernant la monotonie d'une suite ne tiennent effectivement pas à la définition de celle-ci.

i. Difficultés liées à $u_{n+1} - u_n$

Notre séquence

Un exercice donné en classe après avoir vu les trois méthodes de recherche du sens de variation d'une suite est donné ci-dessous. Rappelons que les élèves n'ont pas à leur disposition le calcul différentiel.

Exercice : étudier le sens de variation des suites définies par :

a) $u_n = 2n^2 - 8n - 5$ pour tout entier naturel n

b) $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$

c) $u_n = -5 \times 7^n + 100$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La question b) concerne à nouveau la série harmonique.
La question c) demande des compétences en calcul algébrique.
C'est finalement la question a) qui pose le plus de difficultés. La plupart des élèves la traitent par la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 4n - 6 = 2(n-1)(n+3)$. On a donc $u_1 = u_2$ et pour tout $n \geq 2, u_{n+1} > u_n$. Les élèves se demandent à partir de quel indice la suite est croissante : 1, 2, 3 ? Ils ont des difficultés à interpréter le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Pour la séance suivante, les élèves ont à faire l'exercice n°29 de leur manuel :

29 Soit $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.
1. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
b. La suite est-elle monotone ?

2. a. Résoudre l'inéquation $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$ dans $\mathbb{N}$.
b. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n \geqslant 3}$?
3. a. Déterminer un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 10^{50}$.
b. Justifier que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^{50}$.

Manuel Math'x, Première S de 2011, éditions Didier, page 168

Le travail de la semaine précédente les a préparés à la résolution de l'inéquation de la question 2. a. Supra (dans la partie III C 1 b), nous avons repéré cet exercice comme étant le seul parmi ceux de trois manuels à proposer une recherche de signe de la différence de deux termes consécutifs qui fait intervenir du second degré. Ici, $u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$ et le trinôme du second degré en n a deux racines irrationnelles.
Finalement, l'erreur la plus répandue dans la classe est de confondre u_n et $n^2 - 2n - 1$ - à moins que la confusion soit entre signe et sens de variation d'une suite. En effet, les élèves ont cherché les variations de la suite de terme général $n^2 - 2n - 1$ au lieu de chercher son signe.
La signification de $u_{n+1} - u_n$ et le rôle de ce que cette différence joue dans une recherche de sens de variation ne sont pas clairs pour les élèves ; sa mobilisation est source de difficulté en dehors de tâches simples et isolées.

ii. Réponse par la généralisation du comportement des premiers termes

Une erreur classique d'élèves est d'inférer du comportement des premiers termes d'une suite le comportement global de celle-ci.

Entretiens

Lors d'un entretien avec un élève en fin de Première S, celui-ci fait un exercice dans lequel le sens de variation de la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 2n^2 - n$ et $u_1 = 2$ est à chercher.

L'élève commence un raisonnement « qui boucle ».
Puis il se demande si on ne peut tout simplement pas conclure en voyant que $u_2 > u_1$.
Pour lui, si on montre que $u_1 > 0$, et $2n^2 - n > 0$, alors on a montré que la suite est croissante. Il voit bien que s'il montre que $2n^2 - n > 0$ alors c'est démontré, mais :

- Il pense que le signe du 1er terme est déterminant,
- Il a aussi du mal à articuler le signe de $2n^2 - n$ en termes de signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Nous avons un entretien avec le même élève, sept mois plus tard alors que l'élève est en Terminale S. Nous en avons donné un extrait supra (dans la partie III C a iii) sur les relations de récurrence et que nous avons coupé. L'élève résout la question 2. qui demande de chercher le sens de variation de la suite (u_n). Il vient de tenter un raisonnement « qui boucle ».

Il s'arrête, il barre.
L'élève dit : « *Alors je peux faire* $u_1 - u_0$ ». Je lui demande pourquoi. Son argument est que « *ça marche pour les suites arithmétiques* ». Je lui réponds que oui, mais on ne sait pas si (u_n) est arithmétique ou pas.

L'élève propose de chercher le signe de la différence des deux premiers termes de la suite, parce que cette méthode est correcte pour les suites arithmétiques.

Pour cet élève lorsqu'il est en classe de Première, on pourrait inférer le sens de variation d'une suite à partir de la comparaison des premiers termes ; lorsqu'il est en Terminale il sait que ceci est vérifié par les suites arithmétiques. Deux généralisations se superposent : celle du comportement des premiers termes aux autres termes ; celle d'une propriété des suites arithmétiques aux autre suites.

iii. La confusion entre signe et croissance d'une suite

Nous avons vu ci-dessus un exemple dans lequel les élèves d'une classe ont massivement confondu signe et sens de variation de $u_{n+1} - u_n$.

Nous avons aussi fait ce constat dans trois des entretiens sur les cinq effectués.

iv. La présence de choix

Les méthodes classiques pour chercher le sens de variation d'une suite sont au nombre de trois :

- Recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs,
- Comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1,
- Détermination du sens de variation d'une « fonction qui définit ».

A cela, il faut ajouter les cas particuliers des suites arithmétiques et géométriques dont le sens de variation est déterminé par la raison – et le premier terme dans le cas des suites géométriques.
Enfin, lorsqu'une suite est définie par récurrence, il est courant de guider les élèves, via une suite auxiliaire qui leur est donnée, vers une détermination du terme général en fonction de n qui à son tour permet la détermination du sens de variation de la suite.

Entretiens

Au cours d'un entretien avec un élève de Terminale S, c'est ce qu'essaye de faire l'élève par lui-même. Rappelons l'énoncé :

La suite (u_n) est définie par u_0=2 et $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$
La suite (v_n) est définie par v_0=2 et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$
1. a) Montrer que pour tout entier positif *n*, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$
   b) On pose pour tout entier positif *n* : $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que pour tout entier positif n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Pour résoudre la question 2., l'élève a déjà cherché le signe de (w_n), tenté un raisonnement « qui boucle », proposé de chercher le signe de $u_1 - u_0$. Voici l'extrait qui nous intéresse ici :

Nous revenons à la question : montrer que (u_n) est croissante.
L'élève essaye d'utiliser $v_n - u_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$. Il réfléchit.
J'interviens : « *Qu'est-ce que tu as à ta disposition ?* »
L'élève : « *Les deux relations de récurrence* » (il veut parler des relations qui définissent (u_n) et (v_n).)
Je poursuis : « *Qu'est-ce que tu as comme moyen de répondre ?* »
L'élève : « *Chercher la formule explicite* ».
Je demande : « *Tu as de quoi la chercher ici ?* »
L'élève essaye $v_n - u_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$, puis $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$ et se rend compte qu'il a juste décalé d'un rang la définition de (w_n). Il aimerait trouver u_n et v_n en fonction de n.
Je lui demande s'il a autre chose.
L'élève : « *Si la suite est supérieure à une suite qui est croissante alors… ah non !* »
Je lui en donne un contre-exemple dans le cadre graphique.
L'élève : « *Bon alors* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $u_{n+1} - u_n$… »
Je l'interromps pour lui faire remarquer qu'il n'a pas essayé $u_{n+1} - u_n$.
L'élève fait le calcul jusqu'à $\frac{-u_n+v_n}{3}$. Il hésite, écrit $-\frac{w_n}{3}$. Il se souvient qu'il a déjà cherché le signe de w_n et termine. Il fait de même avec la suite (v_n).

L'élève finit par utiliser la méthode de recherche du signe de la différence après avec essayé plusieurs autres méthodes. La présence de nombreux choix dans la recherche du sens de variation d'une suite, en plus de la possible cohabitation de définitions explicites et par récurrence, complexifie certainement la tâche pour les élèves.

A ces choix de méthodes de recherche du sens de variation s'ajoute un plus grand choix dans les méthodes de recherche du signe d'une expressions algébrique dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, lors d'un entretien, un élève a besoin de montrer que $2n^2 - 2n > 0$ pour $n \geq 1$.

- Il pense d'abord à la propriété « *la fonction carré est positive* »,
- Puis à « *la fonction carré est croissante* ».
- Puis à utiliser $n^2 > n$ et donc $n^2 - n > 0$.
- Lorsque nous lui disons que c'est une inéquation, il arrive à $n(2n-1) > 0$.
- Il dit « soit $n = 0$ soit $n = \frac{1}{2}$ » et hésite sur le signe du trinôme : signe de x ? de a ? (Trouver le signe du trinôme avec des « n » est une grosse difficulté, nous l'avons identifiée plus haut).
- Ensuite il se rend compte qu'il aurait été plus simple de montrer que $2n^2 > n$.

Résumons : l'élève a tenté d'utiliser des propriétés sur la fonction carré, a utilisé une méthode de recherche de signe dans $\mathbb{R}$ et se rend compte qu'il aurait pu utiliser le fait que $n \geq 1$.

v. Propriété « si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n0}$ » (ou la version pour suites décroissantes) :

Rappelons que cette propriété n'est pas énoncée dans le programme officiel ; parmi les trois manuels consultés en partie III C 1 b, nous ne l'avons repérée que dans l'un d'eux, en tant que « note » dans l'exposition de connaissances.

Devoir surveillé et copies

Dans un devoir surveillé de Première S de mai 2014, une question fait appel à cette propriété. Les élèves ne l'avaient pas énoncée dans leur exposition de connaissances, mais l'avaient mobilisée à plusieurs reprises dans des exercices, argumentée par la monotonie de la suite.
Dans la question 2. de l'exercice, les élèves avaient montré que la suite (h_n) est décroissante.

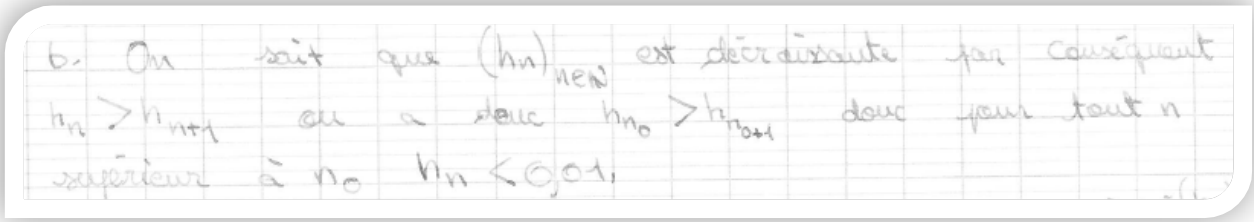
3. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $h_{n_0} < 0,01$.

b. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur à n_0, on a $h_n < 0,01$.

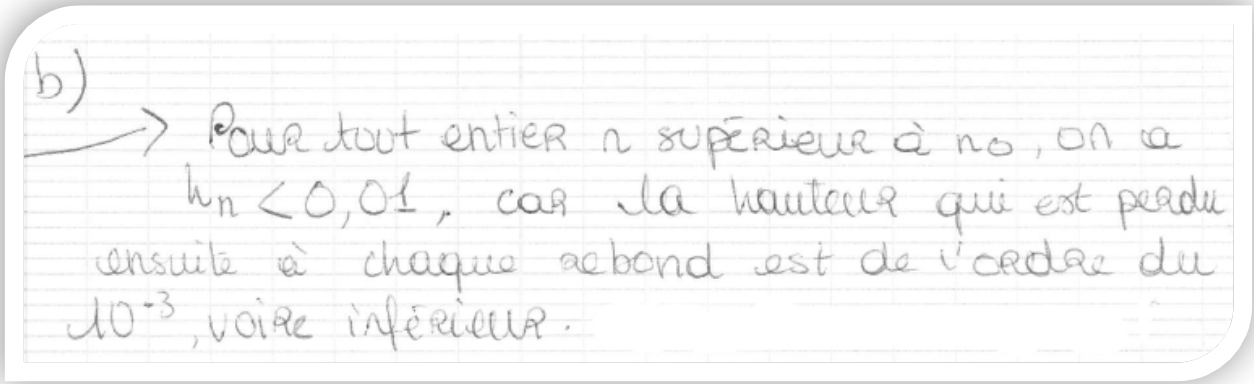
Si la majorité des élèves a justifié la question 3. b. par la décroissance de (h_n), cette question en a tout de même visiblement gêné un sur cinq. Nous en avons présenté un exemple dans la partie sur la notation indicée supra. En voici quelques autres.

Ces élèves restent cantonnés aux indices n_0 et $n_0 + 1$:





Cet élève évite une justification malaisée intra mathématique et utilise un argument lié à la situation concrète :



e) Conclusion sur les élèves

Les copies et les entretiens avec les élèves nous renvoient une image complémentaire des difficultés identifiées dans nos analyses précédentes. Entre autres :

- Des difficultés liées aux indices : leur signification, leur écriture à la main, leur manipulation algébrique.
- Les recherches de signes dans $\mathbb{N}$ mériteraient effectivement un travail spécifique de façon à les différentier des recherches de signes dans $\mathbb{R}$.
- Les relations de récurrence génèrent chez les élèves des raisonnements « qui bouclent ».

- La cohabitation des formes récurrentes et des formes explicites amène davantage de choix dans la résolution des tâches d'une part, de changements de point de vue d'autre part - les formes récurrentes véhiculent un point de vue « dynamique » et les formes explicites un point de vue « statique ».

- Un certain nombre d'élèves assimile les suites à des fonctions définies sur $[0; +\infty[$.
  Une raison que nous avons identifiée se situe dans le cadre graphique : une expérience de pensée suffit à imaginer que les points isolés peuvent être reliés par une courbe « harmonieuse » ; cette courbe admet des tangentes et définit une fonction qui est donc dérivable.
  Une autre raison se situe dans le cadre algébrique : que l'ensemble de définition en soit discret ou continu, la « forme » algébrique définirait l'objet.
  Ainsi, la recherche du sens de variation d'une suite par le biais de celui de « la fonction associée » donne lieu à des rédactions confuses chez de nombreux élèves. Ces élèves ont du mal à conceptualiser le va et vient entre les mondes du discret et du continu décrit dans la partie III C 1 a.

  Vandebrouck (2011) décrit le résultat d'une étude de la CI2U sur des étudiants de Licence 1 de mathématiques concernant les limites. Les étudiants réussissent assez bien dès lors que les tâches relèvent de techniques algébriques. Par contre, la suite de terme général $u_n = sin(2\pi n)$ n'aurait pas de limite d'après 1/6e des étudiants. En effet, la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, donc la suite n'en aurait pas non plus : ces étudiants traitent la suite comme une fonction. Pour eux comme pour certains élèves de lycée, la « forme » algébrique suffirait-elle à définir l'objet ?
  Les élèves de lycée et ceux de Licence 1 procèdent alors de la même façon : ils ramènent la recherche d'une propriété de la suite à celle d'une propriété qui leur parait équivalente de « la fonction associée ». Sur cette fonction, on peut mobiliser des techniques et des propriétés qui se transfèreraient ensuite à la suite. Si c'est le cas pour certaines propriétés, ça ne l'est pas pour d'autres[46] !

- Nous avons pu observer la confusion inverse : toute fonction (définie sur $\mathbb{R}$) serait une suite. Pour 1 groupe d'élèves sur 7 ayant effectué la tâche : « *Si on sait qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$ », que peut-on dire sur le sens de variation de f ?* », la fonction f est une suite ? Cependant 58% d'entre eux, après réflexion, élaborent une réponse une réponse à l'aide de fonctions continues.

  Les suites et les fonctions semblent, pour une partie non négligeable d'élèves, être des objets interchangeables selon les définitions, propriétés et méthodes mobilisées, objets définis par un ensemble dénombrable de points ou une « forme » algébrique démunie d'ensemble de définition.

- Concernant les notations : lorsque u désigne une suite, les élèves de lycée n'utilisent pas les notations $u'(n)$ou $\int u$; l'utilisation de la lettre f (ou g) est pour eux un signal de mobilisation de techniques de calcul différentiel et intégral : est-ce une question d'habitude ou le signe qu'ils savent que ces techniques appartiennent au monde du continu ?
  En dehors du calcul différentiel, d'après nos analyses, les élèves de Première S font peu de cas des normes implicites selon lesquelles n désigne un entier alors que x désigne un réel ; u dédigne une suite alors que f désigne une fonction (définie sur une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$).
  L'implicite sur la lettre u est quelque peu brouillé par l'énoncé des propriétés du sens de variation sur un intervalle de fonctions composées de type $\lambda u, u + k, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$ connaissant la monotonie de u sur ce même intervalle. Ces propriétés figurent sous cette forme au programme officiel de Première S dans le thème des fonctions, qui précède celui des suites. Les trois manuels que nous avons analysés les reprennent sous la même forme, dans des chapitres sur les fonctions qui précèdent les chapitres sur les suites.
- Concernant le registre du tableau de variation : nous avions remarqué que les mots « fonction » et « sens de variation » sont partagés dans le thème des suites et celui des fonctions. Les élèves n'hésitent pas à mobiliser le registre des tableaux pour décrire le sens de variations des suites.

[46] Voir partie III C 1 a.

- La recherche de la monotonie d'une suite tient une place importante dans les tâches de Première et de Terminale.
  La méthode de la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n$ est largement sollicitée. Cependant, les élèves ont des difficultés à comprendre la signification de $u_{n+1} - u_n$ et à interpréter son signe :
    - Le passage de « comparer a et b » et « chercher le signe de $a - b$ » implique un changement de point de vue ;
    - Les élèves confondent volontiers signe et sens de variation, dans le thème des suites et celui des fonctions.

  À ceci viennent s'ajouter des difficultés en calcul algébrique, particulièrement sur les puissances et les mises au même dénominateur, et l'absence de travail de substitutions avec une notation nouvelle, la notation indicée.

  Certains élèves gardent la tendance d'inférer du comportement des premiers termes d'une suite le comportement global de celle-ci. Les exercices dans lesquels les élèves doivent « deviner » la définition d'une suite à partir de ses premiers termes devraient être énoncés avec précaution !

- D'après nos analyses, la propriété « si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ » mériterait d'être énoncée. Le fait de la considérer comme « allant de soi » est une gêne pour certains élèves qui tentent (en vain) de la démontrer en devoir surveillé.

Un élève de Première S exprime en entretien que *« les math sont difficiles cette année car il y a toujours des nouvelles façons d'appliquer le cours pendant les contrôles. Et avec les suites c'est encore plus difficile* ».
L'élève n'est pas conscient de toutes les raisons pour lesquelles « c'est difficile » avec les suites. Il est cependant conscient que les tâches sur les suites comportent davantage d'adaptations – précisons : choix, questions qui s'enchainent, prises d'initiatives, changements de point de vue.
Le discours méta de l'enseignant peut jouer un rôle positif, nous l'avons vu. L'enseignant peut aussi conseiller les élèves à ne pas focaliser leur travail à la maison sur des points précis de techniques qui relèvent de tâches simples et isolées ou comportant de simples reconnaissances.

Ce qui semble aider les élèves

La remarque de la nécessité de changer de point vue - du point de vue dynamique lié à la récurrence à celui, statique, lié à la relation explicite - semble avoir un profond écho chez deux élèves de Terminale S. L'un d'eux exprime à la fin de l'entretien, avec ses propres mots, que les explications « méta » l'avaient aidé.

L'utilisation du tableur et de l'algorithmique pour générer les termes d'une suite définie de façon explicite ou par récurrence, conjointement à la génération de termes par la calculatrice en mode « suite » et aux calculs faits « à la main », semble faciliter l'appropriation par les élèves des deux modes de génération de suites. Nous avons partiellement analysé, dans la partie III. C. 1. a., ce qui pourrait l'expliquer : un jeu d'outils numériques qui provoque potentiellement une activité riche et variée en matérialisant les indices, les termes et les actions de génération de ces termes de façons différentes et complémentaires.

Nous avons noté moins d'erreurs de notations de la part des élèves ($f(n)$, $f'(n)$, mélanges entre n et x au sein de la même tâche…) l'année où nous avons noté en tant qu'enseignante notre séquence sur les suites. Nous avions introduit davantage de méta dans cette séquence (par exemple le va et vient entre suite et fonction dans la recherche de monotonie d'une suite et la non unicité de la fonction), davantage de proximités ascendantes (par exemple nous avons fait émerger la définition du sens de variation d'une suite dans le groupe classe à partir des connaissances des élèves sur les fonctions et l'intuition qu'ils peuvent avoir sur le comportement d'une suite).

3. Du côté des enseignants

a) Les futurs enseignants (étudiants en Master MEEF 1)

La dernière question du questionnaire rempli par les étudiants en Master MEEF[47] première année comporte deux sous-questions :

> 6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ?
> Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ».

La deuxième sous-question est proche de celle qui a été donnée aux élèves de Première S. Le but de la question 6 est celui que nous avons décrit alors[48].
Elle est cependant formulée de façon plus ouverte, puisqu'elle ne porte pas explicitement sur le sens de variation de f. Compte tenu du bagage en mathématiques plus important des étudiants en MEEF 1, il nous a semblé :

- Qu'ils auraient, plus rapidement, davantage d'idées que les élèves ;
- Que l'ouverture de la question nous donnerait davantage d'informations sur les conceptions des étudiants sur les notions de suite et de fonction.

i. Sous-question a) : « Que peut-on dire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie « pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$ » ?

Analyse a priori de la tâche
La « forme » algébrique $f(x+1) = f(x)$ est, bien entendu, proche de la « forme » $u_{n+1} = u_n$. Les étudiants risquent donc de répondre de façon erronée que la fonction f est constante.
Cependant, la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et les notations f et x sont congruentes avec les habitudes de travail sur les fonctions réelles d'une variable réelle. Les étudiants peuvent répondre qu'il se peut que la fonction soit constante, ou pas, ou plus simplement que la fonction n'est pas nécessairement croissante.
De plus, la « forme » algébrique est aussi proche de la « forme » $f(x+T) = f(x)$, qui est celle qui exprime la périodicité de période T. Les étudiants peuvent répondre que la fonction est périodique de période 1.

Les résultats

	Mars 2016	Septembre 2016	Cumul
f est 1-périodique	50 %	46 %	47 %
f est $\frac{1}{n}$ périodique	0 %	2 %	1 %
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = f(x)$	4 %	0 %	1 %
f est constante	17 %	35 %	29 %
$f$est constante ou discontinue	0 %	2 %	1 %
Il manque la continuité	4 %	0 %	1 %
f n'est pas injective	4 %	7 %	6 %
Rep graph : droite	4 %	0 %	1 %
Pas de réponse	17 %	7 %	10 %

Le taux d'étudiants qui répondent que la fonction est périodique de période 1 est relativement stable entre les deux promotions, de 47 % sur les deux.
Un étudiant de mars 2016 a répondu que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = f(x)$ et un autre que la fonction f n'est pas injective.
Donc au total, environ 50 % des étudiant donnent une réponse correcte.

[47] Voir partie III A 3 a pour une présentation de la passation de ce questionnaire, qui figure en annexe 8.
[48] Voir partie III C 2 b ii.

Le taux d'étudiants qui ne donnent pas de réponse est largement supérieur en mars 2016 (17 %) qu'en septembre 2017 (7 %) ; conjointement, le taux de ceux qui répondent que la fonction est constante en mars 2016 est nettement inférieur (17 %) qu'en septembre 2016 (35 %).
Nous espérons y voir un effet positif de l'année de formation des étudiants en Master MEEF 1 : davantage d'étudiants n'écrivent pas la réponse incorrecte qui vient le plus rapidement à l'esprit, ne trouvent rien d'autre à répondre et préfèrent s'abstenir. Nous ne pouvons pas l'affirmer, compte tenu du nombre important d'étudiants absents en mars 2016, qui auraient pu être les moins performants.
Néanmoins, environ un étudiant sur cinq en fin d'année de formation répond qu'une telle fonction est constante (non pas qu'elle pourrait l'être) ; nous avons compté parmi eux les deux étudiants qui répondent que « f est stationnaire », mobilisant ainsi le vocabulaire spécifique aux suites.

ii. Sous-question b) : « Que peut-on dire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie « pour tout réel x, $f(x+1) > f(x)$ » ?

Analyse *a priori*

L'analyse mathématique de cette question a été faite, ainsi que l'analyse *a priori* pour des élèves de Première S (dans la partie III C 2 b ii).
Les étudiants n'ayant que 15 minutes pour répondre au questionnaire en entier, nous nous attendons à ce qu'ils produisent une réponse succincte.

Les résultats

	Mars 2016	Septembre 2016	Cumul
f n'est pas forcément croissante avec exemple	4 %	4 %	4 %
f n'est pas forcément croissante sans exemple	0 %	7 %	4 %
f est « globalement croissante »	0 %	4 %	3 %
f est pseudo périodique	0 %	2 %	1 %
Discussion non conclue	4 %	2 %	3 %
Il manque la continuité	8 %	0 %	3 %
f n'est pas constante	0 %	2 %	1 %
f est strictement croissante	29 %	39 %	36 %
f ne converge pas	0 %	2 %	1 %
f tend vers $+\infty$	0 %	2 %	1 %
Pas de réponse	17 %	7 %	10 %

Résultats de la question 6. b)

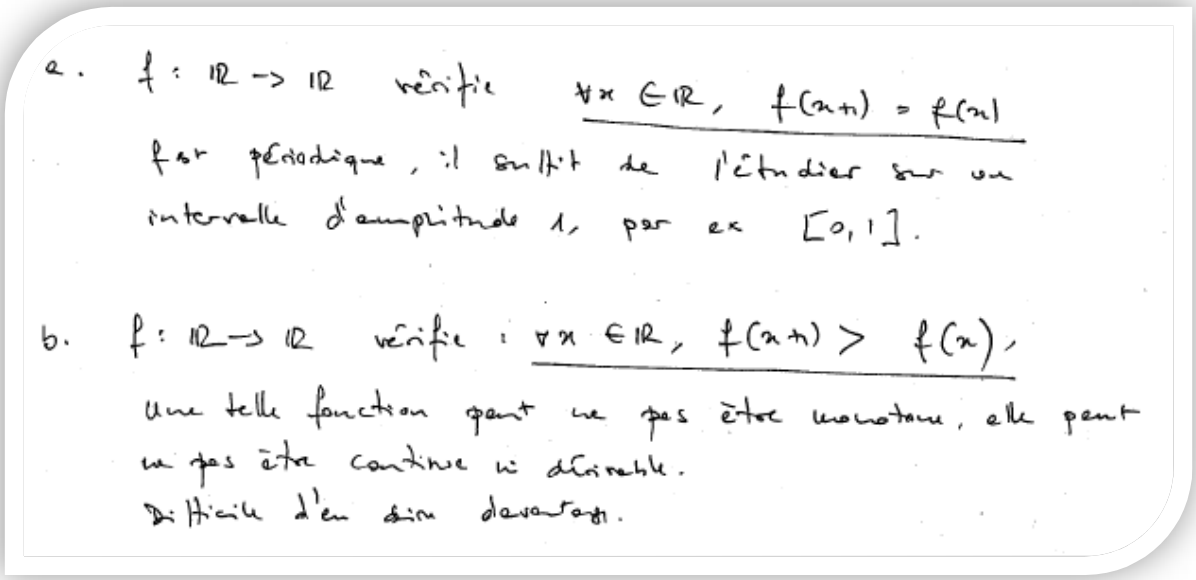
	Mars 2016	Septembre 2016	Cumul
Deux réponses correctes	4 %	13 %	10 %
$f(x+1) = f(x)$: f est constante et $f(x+1) > f(x)$: f est croissante	13 %	30 %	24 %
Pas de réponse aux deux	17 %	4 %	9 %

Résultats croisés des questions 6. a) et b)

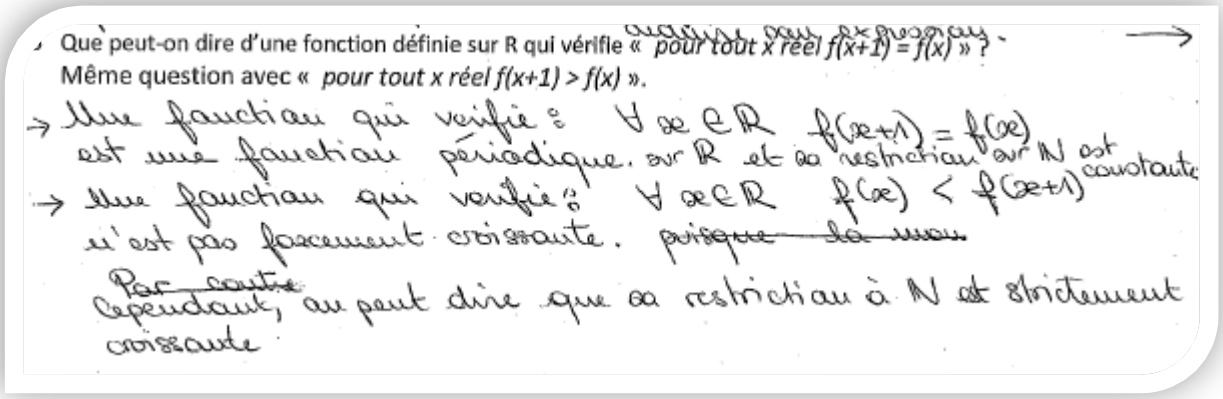
Les réponses correctes

Le taux d'étudiants qui répondent explicitement ou implicitement que la fonction n'est pas forcément croissante, tout en en produisant un exemple, est stable : 4 %. Tous les exemples de fonction non croissante sont un graphique de fonction continue.
7 % des étudiants de septembre 2016 répondent de même, sans production d'exemple, ce qu'aucun n'avait fait en mars 2016.
Un étudiant de septembre 2016 répond que la fonction n'est pas constante.
Au total, sur les deux promotions, 10 % des étudiants donnent une réponse correcte à la sous-question b). Ces étudiants ont tous répondu correctement aussi à la sous-question a).

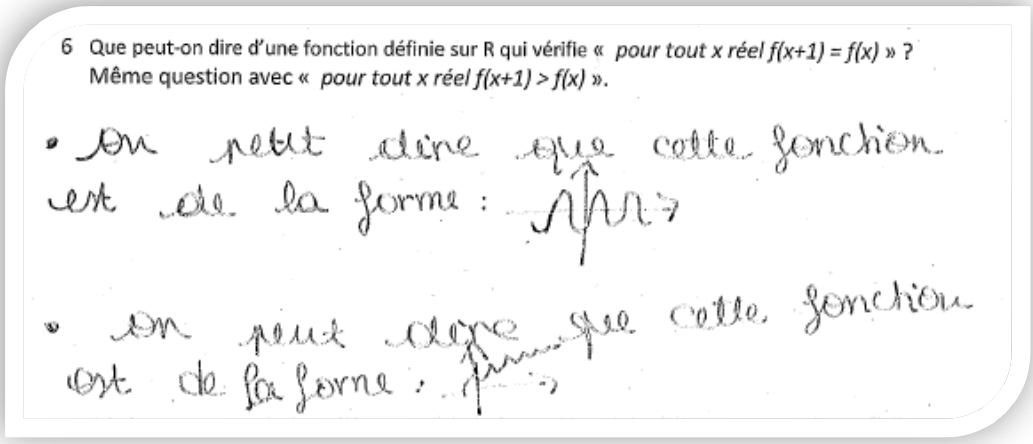
En voici trois exemples. Dans le premier, les réponses sont exprimées dans le registre de la langue naturelle, tout en restant dans le contexte des fonctions :



Le deuxième, toujours dans le même registre, distingue avec soin la fonction f de sa restriction à $\mathbb{N}$ (qui est une suite) :



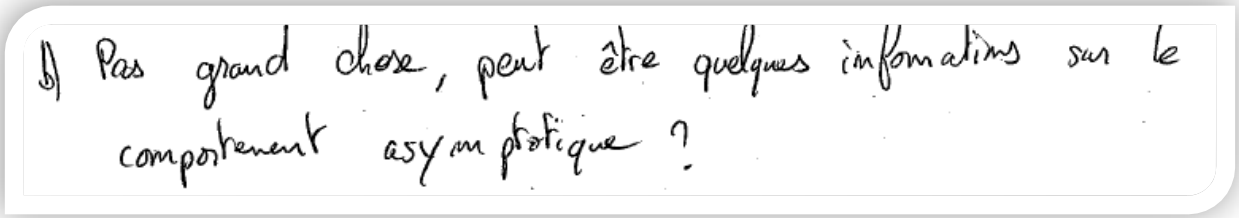
La réponse du troisième utilise le graphique en tant registre pour exprimer « la forme » de la fonction. D'une part, l'étudiant confond la fonction et sa représentation graphique. D'autre part, il bien restrictif de parler de « la forme » (« une forme » serait plus correct). L'étudiant montre cependant qu'il distingue convenablement le cas où la variable est entière de celui où elle décrit $\mathbb{R}$.



L'absence de réponse

Le taux d'étudiants qui ne répondent pas à cette question est le même que pour la sous-question a). Ce sont presque exclusivement les mêmes étudiants.

Par ailleurs, environ 3 % des étudiants entament une discussion qui n'aboutit pas à une affirmation correcte. En voici un exemple :



Les réponses du type « la fonction est strictement croissante »

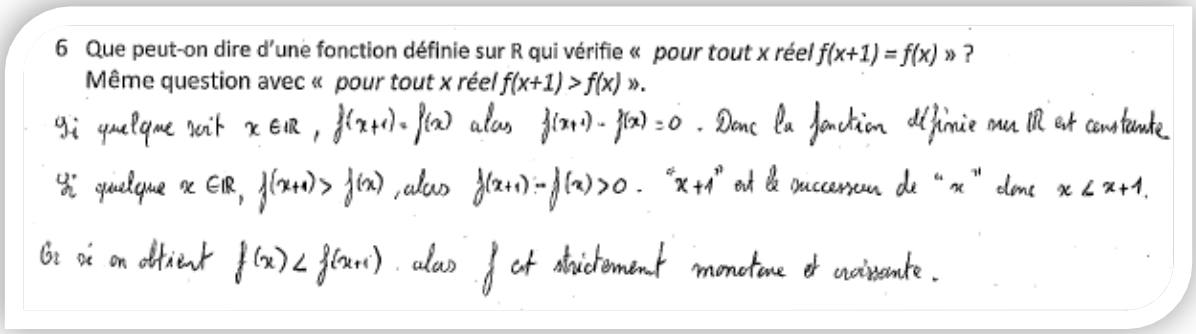
Le taux le plus important est de loin celui des étudiants qui répondent que la fonction est strictement croissante. Il est de 36 % sur les deux promotions. Détaillons, par promotion :

- Il est de 29 % en mars 2016, soit 12 % de plus que le taux de réponse « f est constante » à la sous-question précédente.
- La différence entre les deux sous-questions n'est pas significative en septembre 2016, le taux de ceux qui répondent que la fonction est croissante est de 39 % en septembre 2016.

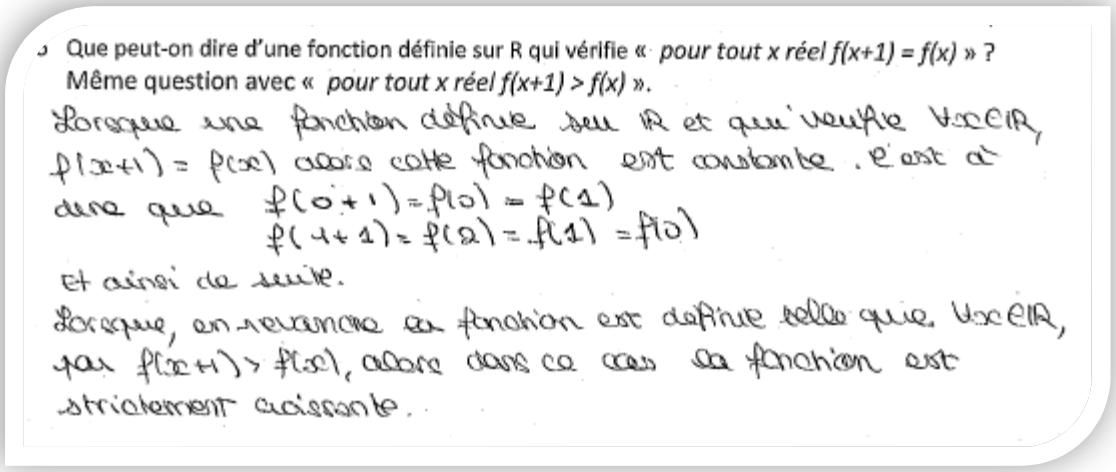
Ils sont 13 % en mars 2016 à répondre que la fonction est constante à la sous-question a) puis qu'elle est strictement croissante à la sous question b) ; et 30 % à faire de même en septembre 2016. La formation de ces étudiants aurait-elle davantage d'effet sur la première sous-question que la seconde ? La seconde serait-elle nettement plus difficile pour les étudiants ?

Chez certains, les références au discret sont explicites. Rien ne semble distinguer une suite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Nous en donnons deux exemples ci-dessous.

Voici un exemple dans lequel l'étudiant écrit que « "$x+1$" *est le successeur de* "x" » pour justifier la croissante de f :

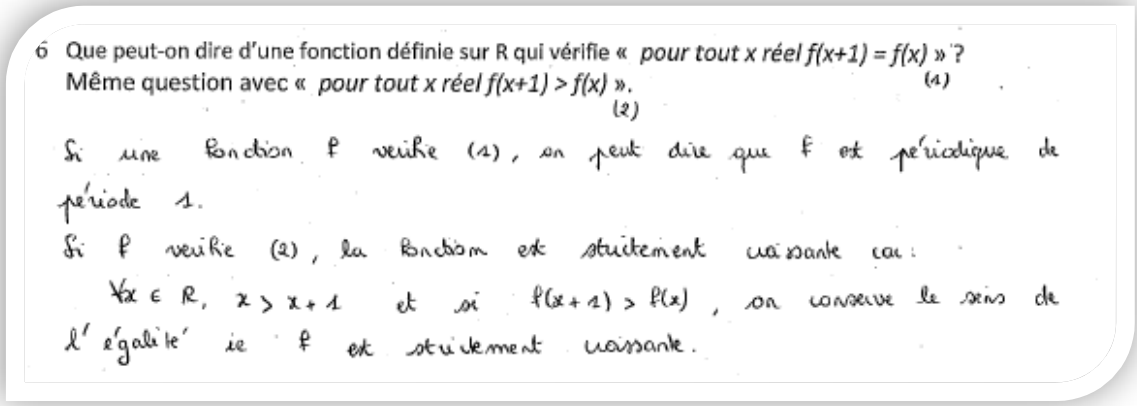


L'exemple qui suit fait lui aussi référence au discret : l'étudiant donne à x les valeurs 0 puis 1 ; il suggère que l'énumération qu'il a commencée peut se poursuivre par un : « *Et ainsi de suite* ».


6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ?
Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ».

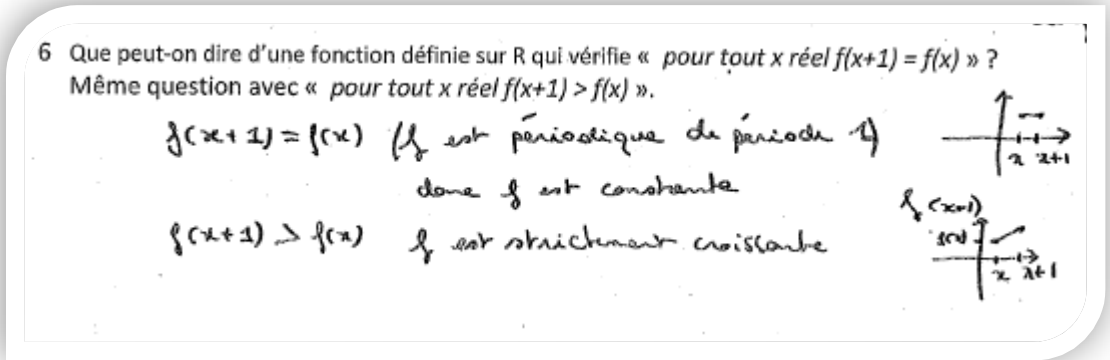
Lorsque une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ alors cette fonction est constante. C'est à dire que $f(0+1) = f(0) = f(1)$
$f(1+1) = f(2) = f(1) = f(0)$
Et ainsi de suite.
Lorsque, en revanche la fonction est définie telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, par $f(x+1) > f(x)$, alors dans ce cas la fonction est strictement croissante.

Dans l'exemple qui suit, l'étudiant avait répondu correctement à la sous-question a). Peut-être son erreur à la sous-question b) tient-elle (en partie au moins) à une mauvaise compréhension de la définition doublement quantifiée de la définition de la croissance d'une fonction sur un intervalle de $\mathbb{R}$?


6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ? (1)
Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ». (2)

Si une fonction f vérifie (1), on peut dire que f est périodique de période 1.
Si f vérifie (2), la fonction est strictement croissante car :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x > x+1$ et si $f(x+1) > f(x)$, on conserve le sens de l'égalité ie f est strictement croissante.

Dans la réponse qui suit, l'argument est graphique. Deux points d'abscisses x et $x+1$ sont reliés par un segment. L'étudiant ne semble pas considérer que f est une suite ; il n'imagine cependant pas l'infinité des valeurs que peut prendre x ni d'autre façon de relier ces points que par des segments.


6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ?
Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ».

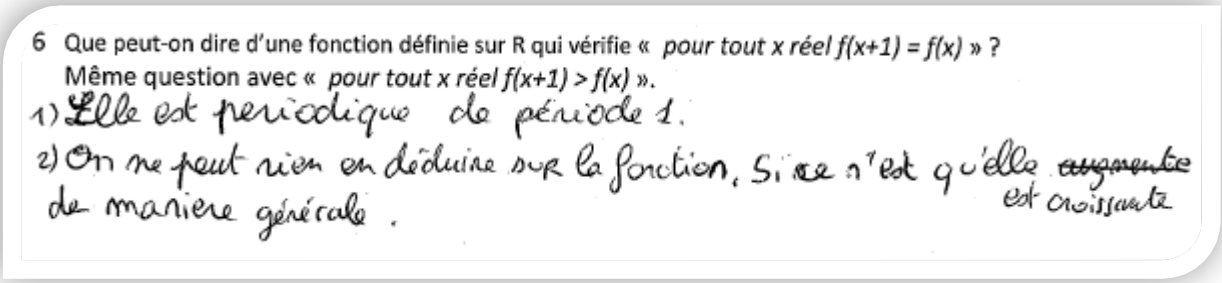
$f(x+1) = f(x)$ (f est périodique de période 1)
donc f est constante
$f(x+1) > f(x)$ f est strictement croissante

Les autres réponses erronées

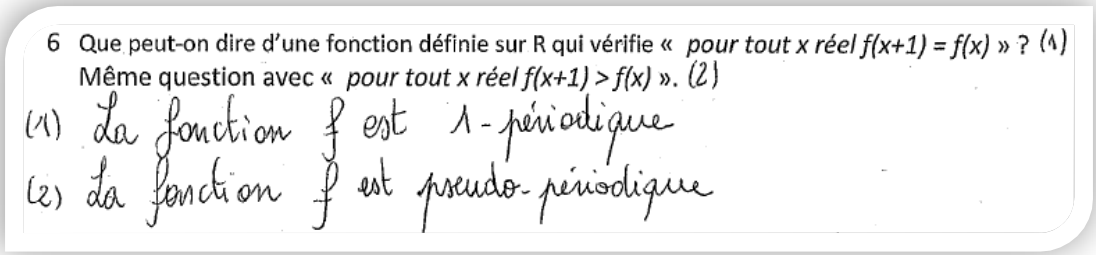
8 % des étudiants répondent qu'il leur manque une hypothèse de continuité pour conclure. Ils perçoivent donc qu'ils ne sont pas en présence d'une suite. Cette réponse provient d'étudiants de mars 2016 ; elle a peut-être

été induite par le titre du questionnaire, qui a été retiré en septembre : *« Discret continu : quelques questions pour initier la séance de travail »*.

En septembre 2016, les réponses erronées sont plus variées.
Deux étudiants évoquent une sorte de « croissance globale ». En voici un exemple :


6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ?
Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ».
1) Elle est periodique de période 1.
2) On ne peut rien en déduire sur la fonction, Si ce n'est qu'elle ~~augmente~~ est croissante de maniere générale.

Un autre étudiant évoque une « pseudo périodicité » qui est peut-être induite par la réponse correcte à la sous-question a) :


6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ? (1)
Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ». (2)
(1) La fonction f est 1-périodique
(2) La fonction f est pseudo-périodique

Deux autres répondent en termes de suites : « f *ne converge pas* » ; « f *tend vers* $+\infty$ ».

b) Enseignants en exercice

Nous avons questionné cinq enseignants de lycée membres d'un groupe IREM dont le thème est l'analyse.
Nous disposons aussi de l'exposition de connaissance sur les suites, partagé par deux enseignants de Première S et d'un échange entre enseignants lors de l'élaboration d'un énoncé de devoir surveillé.
Tous ces enseignants ont plus de 20 ans d'exercice.
Les éléments qui suivent synthétisent les données.

i. Définition des suites et représentation graphique

Avis des enseignants du groupe IREM :
Les enseignants ont observé que si on introduit les suites par quelques premiers termes, en demandant aux élèves de « deviner » la façon dont ils sont générés, les élèves risquent de reproduire ce type de raisonnement pour démontrer des propriétés générales sur la suite. Par exemple, ils constatent la monotonie sur les premiers termes et en concluent la monotonie pour tous les termes.

Les enseignants estiment que l'apport du tableur dans l'apprentissage des deux modes de génération des termes d'une suite est indéniable. Ils préconisent de laisser les élèves seuls avec le tableur afin qu'ils se posent eux-mêmes les questions : que mettre dans la colonne des « n », dans la colonne des « u(n) »…
En algorithmique, ils confirment la difficulté qui provient du nom de la variable, souvent notée u ou U, qui contient indistinctement les valeurs des termes u_n.

Les enseignants ont des avis partagés sur la place à donner à la représentation graphique des suites en Première.

Ils constatent qu'en Troisième et en Seconde, pour tracer les courbes de fonctions, « *on place des points et on relie* » ; donc on passe du discret au continu. En classe de Première, on fait le contraire : « *on a un tracé de courbe de fonction, on en extrait un nuage de points pour les suites* ».
Un enseignant n'aborde en conséquence que très peu en Première la représentation graphique des suites. Un autre enseignant fait remarquer qu'en Terminale, le graphique est mobilisé dans les conjectures de limites, il est donc important que les élèves sachent le mobiliser.

ii. Suite et fonction

Notations

Avis des enseignants du groupe IREM :
Certains enseignants gardent la notation parenthésée fonctionnelle $u(n)$ pendant quelques séances au début de la séquence sur les suites. Cette pratique n'est pas partagée par tous.

Autres enseignants :
Voici ci-dessous un extrait d'énoncé de devoir surveillé donné en Première S :

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

a. Présenter les détails des calculs permettant de donner les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer u_5 arrondi à 10^{-2} près.

c. Définir la fonction f telle que pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

d. Sur le graphique de l'***annexe* 3** est représentée la courbe C représentative de f.
Représenter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite D d'équation $y = x$ et de la courbe C les quatre premiers termes de la suite (u_n) en laissant les traits de construction.

2. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ et la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

a. En utilisant la fonction u définie sur $[0;+\infty[$ par $u(x) = x+1$, déterminer le sens de variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

Dans la première question, une suite (u_n) est définie par récurrence. Par définition, elle peut donc aussi être désignée par la lettre u.
Dans la question 2., u est le nom d'une fonction définie sur $[0;+\infty[$. Cette fonction n'a qu'un lointain rapport avec la suite u.
Les enseignants de l'équipe de Première S avaient des avis partagés sur les notations de la question 2 : certains ont changé l'énoncé pour que u ne désigne pas deux objets mathématiques différents au sein du même exercice ; d'autres pensaient que ces notations ne posent pas de problème puisque « *de toutes façons ça n'a rien à voir* ».
Nous comprenons que les deux objets nommés u font référence à deux « mondes » différents :

- Deux (groupes de) chapitres différents, l'un sur les suites, l'autre sur les fonctions ;
- Deux (groupes d') expositions de connaissances différentes, avec leurs usages en termes de notations ;
- Deux corpus de méthodes de résolution de tâches différents, souvent convoquées par les notations utilisées dans les énoncés.

Si les élèves identifient souvent les implicites des énoncés, liés à l'association de certains mots avec certains symboles, il n'est pas exclu que certains, et particulièrement ceux qui cherchent à comprendre le « pourquoi », en soient gênés.

Ensemble de définition

Avis des enseignants du groupe IREM :

Les enseignants concluent des erreurs des élèves qu'un certain nombre ne considèrent que les nombres entiers. Ils prennent pour exemple :

- $x > 0$ impliquerait $x \geq 1$;
- La racine carrée d'un nombre n'existerait que si ce nombre est entier.

Ces enseignants estiment que pour ces élèves, les ensembles de définition des suites et des fonctions ne sont pas différents.

Vocabulaire

Avis des enseignants du groupe IREM :

Les enseignants ont repéré des confusions, chez les élèves, liées au vocabulaire commun des suites et des fonctions. En voici quelques exemples :

- Ils recherchent la limite d'une suite quand n tend vers 2 ;
- Ils cherchent la monotonie d'une suite sur [2; 3] ;
- Ils disent que la suite est croissante sur … puis décroissante sur … ;
- Ils ne peuvent pas dire qu'une suite n'est ni croissante ni décroissante.

Pour éviter ce type de difficulté, un des enseignants fait le choix de limiter avec les élèves l'abord des rapports entre les suites et les fonctions.

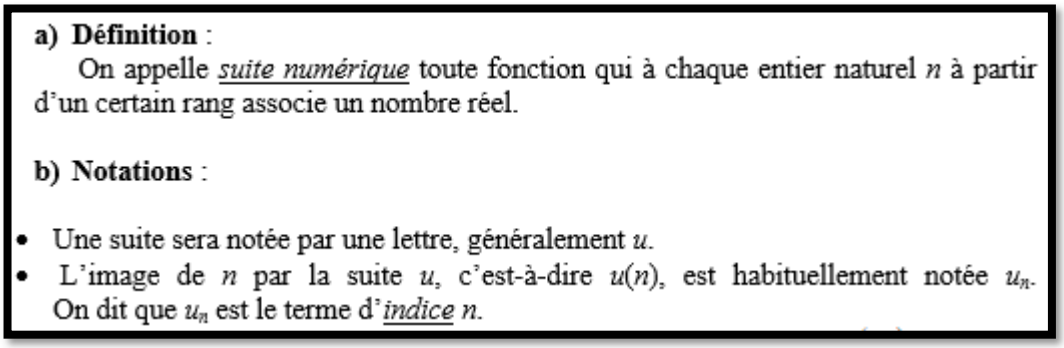
Un autre au contraire, le faire de façon ouverte, quitte à embrouiller les élèves dans un premier temps.

Certains enseignants utilisent le vocabulaire image/antécédent sur les suites, d'autres non. Le mot antécédent est cependant très peu utilisé dans les suites : il est perçu comme étant davantage spécifique aux fonctions.

« Fonction qui définit », « fonction qui génère »

Autres enseignants :

Voici deux extraits de l'exposition de connaissances distribuée par un enseignant de plus de 20 ans d'expérience à ses élèves de Première S :

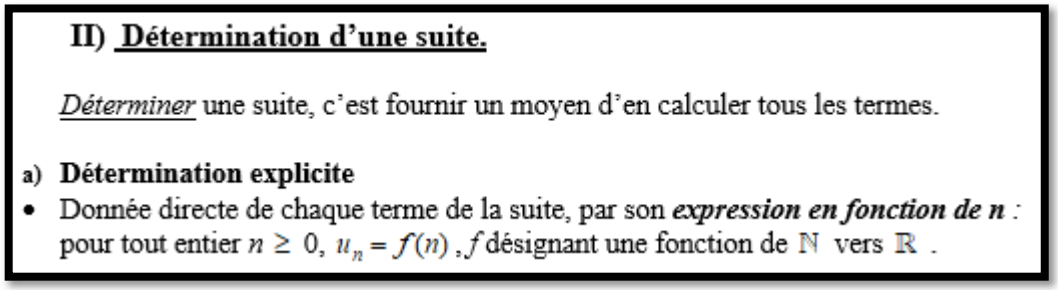


a) Définition :

On appelle *suite numérique* toute fonction qui à chaque entier naturel n à partir d'un certain rang associe un nombre réel.

b) Notations :

- Une suite sera notée par une lettre, généralement u.
- L'image de n par la suite u, c'est-à-dire $u(n)$, est habituellement notée u_n. On dit que u_n est le terme d'*indice* n.



II) Détermination d'une suite.

Déterminer une suite, c'est fournir un moyen d'en calculer tous les termes.

a) Détermination explicite

- Donnée directe de chaque terme de la suite, par son ***expression en fonction de n*** : pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = f(n)$, f désignant une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

La définition d'une suite retenue est celle d'une fonction particulière.

Dans l'explication de la détermination explicite, f et u sont finalement le même objet. L'écriture $f(n)$ n'apporte rien d'autre qu'un raccourci symbolique de « en fonction de n ».

Cette notation est reprise dans le paragraphe sur la représentation graphique d'une suite :

Exemple :

Soit (u_n) la suite, définie pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 4n + 3$.

Si l'on pose $u_n = f(n)$, les termes de la suite sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f.

Ici, f est définie sur ……

L'ensemble de définition attendu est probablement $[0; +\infty[$. La fonction f est implicitement définie par la « forme » algébrique $n^2 - 4n + 3$ dans laquelle la variable décrit $[0; +\infty[$ au lieu de décrire $\mathbb{N}$.
Cet implicite a pour conséquence, dans les énoncés comme les corrigés de devoir surveillés rédigés par les enseignants, la présence répétée de la phrase « déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$ » ; « la fonction f telle que $u_n = f(n)$ est … ».

Voici l'extrait de la même exposition de connaissances qui énonce la définition par récurrence des suites :

« b) Détermination récurrente sur deux termes
- Donnée du premier terme de la suite et d'une *relation de récurrence*, c'est-à-dire d'une fonction g, définissant une ***relation entre deux termes consécutifs*** de la suite sous la forme : Pour tout n, $u_{n+1} = g(u_n)$. »

L'utilisation d'une nouvelle fonction g est-elle opportune ? Elle semble être là aussi utilisée pour symboliser le fait que u_{n+1} est « fonction de » u_n. D'autant que dans certains cas u_{n+1} est défini en fonction de u_n et de n.
Cette fonction « qui génère » est ensuite nommée f lorsqu'elle est mobilisée dans cette exposition de connaissance pour effectuer la représentation graphique « en escalier ».

Avis des enseignants du groupe IREM :
Ils constatent eu aussi de nombreuses confusions chez les élèves entre les deux types de fonctions.
En conséquence, certains restreignent en classe de Première la recherche de monotonie d'une suite à la seule technique de recherche du signe de $u_{n+1} - u_n$; ils n'utilisent pas la monotonie de la « fonction qui définit ».

c) Conclusion sur les enseignants

Un tiers des étudiants en Master MEEF 1, à partir des affirmations « la fonction f vérifie *pour tout réel* x, $f(x+1) = f(x)$ » et «la fonction f vérifie *pour tout réel* x, $f(x+1) > f(x)$ », attribuent à f des propriétés des suites. Parmi eux, quelques-uns mobilisent explicitement à propos de f le vocabulaire des suites ; pour les autres, nous ne sommes pas en mesure de dire s'ils considèrent qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une suite, ou si elle est un (voire le) prolongement continu de cette suite – prolongement qui embarque celui des définitions et propriétés liées à la suite.
Ces étudiants réagissent davantage à la « forme » algébrique qu'ils ne réfléchissent aux notions sous-jacentes. Ils n'envisagent pas le continu de l'ensemble de définition de f et la multiplicité des possibilités qu'il offre.
S'ils suivaient leur formation initiale en 2016, ils étaient en classe de Troisième en 2009. Ils ont donc reçu un enseignement en collège et au lycée dans lequel l'usage des entiers prédomine, y compris sur le thème des fonctions[49]. Au cours de leur cursus de Licence, ils ont étudié de nombreuses notions d'analyse et appris des techniques associées ; cela ne les a visiblement pas préparés à une réflexion sur les définitions et propriétés des suites vs celles des fonctions, ni à la construction de contre-exemples à ce sujet.

Les enseignants du groupe IREM que nous avons consultés soulignent unanimement les multiples difficultés liées à l'introduction des suites en classe de Première et à l'étude de leur sens de variation.
Face à ce constat, les choix des enseignants peuvent être identiques :
- Ils évitent de présenter les suites comme relevant systématiquement d'un mode de génération qui peut être « deviné » sur les premiers termes ;
- Ils font travailler les élèves sur tableur dans des tâches de génération de termes de suites ;
- Idem avec l'algorithmique, quoique la manipulation des variables y soit délicate ;

[49] Voir partie III. A. 1.

- Ils insistent sur la méthode de recherche du sens de variation par celle du signe de la différence de deux termes consécutifs.

Ils sont parfois différents, concernant :

- Le degré de mobilisation de la notion de fonction, des notations et du vocabulaire associés dans le thème des suites ;
- L'importance donnée aux représentations graphiques ;
- L'utilisation de la méthode de recherche du sens de variation d'une suite par la comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1 ; par la recherche du sens de variation de « la fonction associée ».

L'analyse de quelques extraits d'exposition de connaissances et d'énoncé d'enseignants en exercice révèle la présence d'implicites qui semblent simplifier le propos et aiguiller la résolution des tâches vers les énoncés d'exposition de connaissances correspondants. Leur explicitation est cependant laissée à la charge des élèves ; un décodage correct fait par conséquent partie intégrante de la réussite de ceux-ci.

4. Conclusion de la partie III C

L'analyse des notions en jeu dans le dernier programme officiel de la classe de Première de 2011, sur l'introduction des suites, révèle de multiples difficultés potentielles pour les élèves.

Une suite est généralement définie comme une fonction particulière, dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$. Le programme officiel de Seconde de 2009 demande de donner des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$; nous avons vu dans la partie III. A. que les fonctions sont dans les manuels de Seconde, à quelques rares exceptions près, dans le monde du continu ; leurs représentations graphiques sont « lisses » et « harmonieuses ». Dans le dernier arrangement de programme de Seconde, les fonctions modélisent des phénomènes continus et sont définies sur des intervalles (ou des réunions d'intervalles) de $\mathbb{R}$.
Dans ces conditions, quel sens un élève de Première peut-il donner à une fonction définie sur $\mathbb{N}$? En quoi une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et un (« son ») prolongement continu diffèrent-ils pour lui ?
Il est vrai que le vocabulaire sur les suites inclut celui des fonctions, la notation parenthésée subsiste dans les calculatrices pour les suites ; cependant notre analyse montre que les définitions et propriétés ne sont « ni tout à fait les mêmes, ni tout à fait autres ».
La notation indicée propre aux suites est source de difficultés pour les élèves, leur bagage en calcul algébrique ne parait pas suffisant pour la manipuler algébriquement.

De plus, deux modes de génération des suites cohabitent, chacune mobilisant une fonction dont le rôle diffère. Le mode de génération par récurrence véhicule un point de vue dynamique alors que la définition explicite d'une suite véhicule un point de vue statique. Pour chercher le sens de variation d'une suite, plusieurs méthodes peuvent être mobilisées. Les adaptations sont nombreuses dans les résolutions de tâches : en plus des reconnaissances, des questions qui s'enchainent, des choix, il y a des changements de point de vue, de monde (du discret/du continu)

Les notations contiennent des implicites qui peuvent simplifier le discours de l'enseignant et les énoncés, mais ne sont pas toujours univoques : la notation u est utilisée pour les suites après l'avoir été pour les fonctions ; la notation f est utilisée pour désigner une fonction ou comme raccourci pour « en fonction de ».

Les manuels et les enseignants font des choix en partie identiques et en partie différents. Les différences sont essentiellement du point de vue des notations, des méthodes abordées, de la place du cadre graphique.
Le discours des enseignants concernant les rapports entre les objets « suite » et « fonction » ainsi que leurs propriétés est variable : certains passent au maximum sous silence le fait que les suites soient des fonctions particulières, ces deux objets apparaissent comme appartenant à deux mondes aussi disjoints que possible ; d'autres au contraire, quitte à déranger les élèves dans un premier temps, en soulignent les points communs et les différences.

Au Baccalauréat, le monde dans lequel s'inscrivent les méthodes de résolution est convoqué par la présence d'une suite (et des notations u, parfois v, et n pour la variable) versus celle d'une fonction (et des notations f, parfois g, et x ou t pour la variable).
Les fonctions font une incursion dans les suites dans un quart des tâches : les fonctions sont mobilisées pour étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; pour comparer $f(x)$ et x lorsque $u_{n+1} = f(u_n)$; pour chercher la monotonie de (u_n) lorsque $u_n = f(n)$.

Les élèves « ont du mal avec les suites » : les résultats en devoir surveillé le montrent et ils l'expriment verbalement. Les points analysés l'expliquent, au moins partiellement. En particulier, nous avons constaté qu'au moins un élève sur 7 ne dégage pas la notion de suite de celle de fonction.

C'est aussi le cas d'un tiers des étudiants en Master MEEF première année. Nous pensons qu'il s'agit d'un problème d'enseignement : un enseignant n'a-t-il pas besoin d'avoir les moyens de montrer aux élèves, le cas échéant par un contre-exemple, ce en quoi leur raisonnement est erroné ? De répondre aux questions d'élèves curieux qui cherchent à établir des liens entre les différents thèmes mathématiques de leur cursus ?

Les questions sur les modélisations discrètes et continues ne sont abordées que par un des trois manuels : les suites et les fonctions qui modélisent les phénomènes sont généralement des données des énoncés qui ne font pas l'objet de questionnement.
C'est aussi le cas de la plupart des énoncés du Baccalauréat série S dans lesquels deux modélisations (l'une discrète, l'autre continue) sont en jeu. Le plus souvent, les modèles ne sont pas motivés et les liens entre les deux modèles sont absents ; ils apparaissent comme des prétextes pour « faire de l'analyse » avec les outils des suites puis ceux des fonctions. Et les données du réel semblent devoir se conformer à celles du modèle.

Nous analysons ensuite un autre thème qui relève de modélisations discrètes et continues au lycée : le calcul de moyennes en Terminales L, ES et S, qui peut être effectué dans le discret par celui d'une moyenne arithmétique ou dans le continu par celui de la valeur moyenne d'une fonction.

D. Calculs de moyennes en Terminales ES, L et S

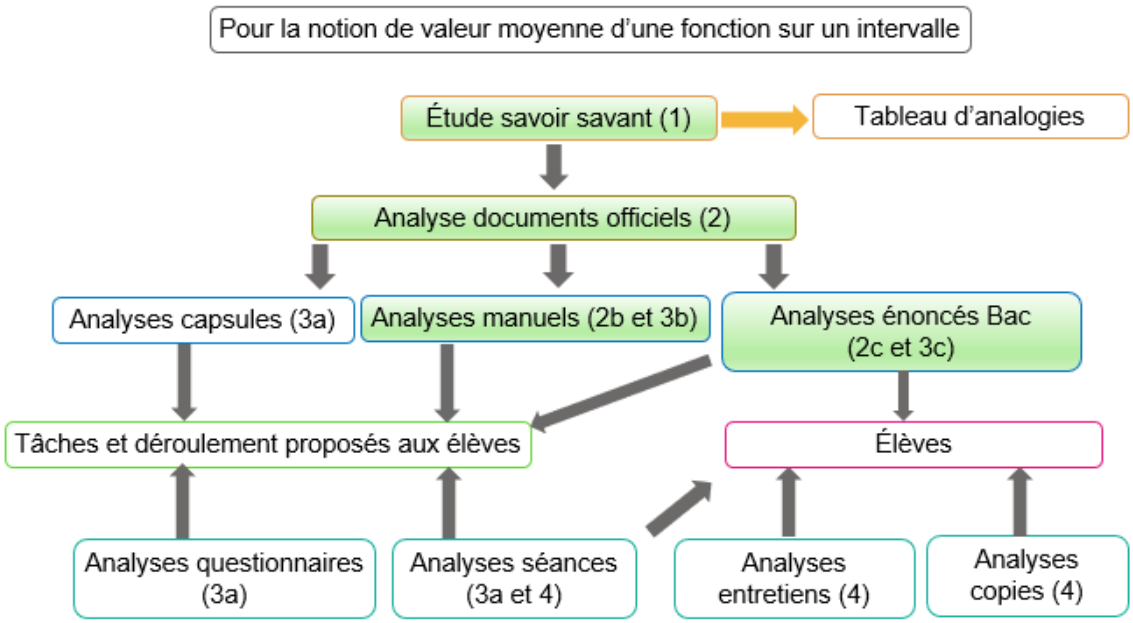


Diagramme récapitulatif de la méthodologie de la partie III D :
Étude de la notion de valeur moyenne en Terminale

1. Dans les mathématiques à enseigner au collège et au lycée général

a) Quelques considérations mathématiques :

Rappelons deux définitions :

- La moyenne arithmétique de n valeurs réelles u_i $(1 \leq i \leq n)$ est égale à : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$.
- La valeur moyenne d'une fonction f continue à valeurs réelles, sur un intervalle $[a;b]$, est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

L'analogie des deux formes, dont l'une relève du monde du discret et l'autre de celui du continu, peut sembler aller de soi : $\frac{1}{n}$ est analogue à $\frac{1}{b-a}$; $\sum$ à $\int$.
Cependant, la forme de $f(x)dx$ est celle d'un produit ce qui n'est pas le cas des u_i ; $b-a$ est une distance entre deux nombres réels alors que n est un cardinal d'ensemble fini.

Supposons que les u_i sont les images par f des n nombres $a_i = a + (i-1)h$ où $h = \frac{b-a}{n}$ et $1 \leq i \leq n$.
Rogalski (2001) souligne que les moyennes arithmétiques $m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ sont des moyennes de la fonction f sur un échantillon de n valeurs de f et énonce que, f étant continue sur $[a;b]$, la suite de terme général m_n converge vers μ lorsque n tend vers $+\infty$.
Le calcul de la valeur moyenne d'une fonction continue, qui est du domaine du calcul intégral, fournit donc un outil d'approximation de moyennes arithmétiques dont le calcul peut s'avérer laborieux.
Remarquons que $m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h \times f(a_i)$. Sous cette dernière forme, l'analogie entre les moyennes calculées dans le discret et dans le continu est claire ; les deux sommes sont des aires, toutes deux divisées par la longueur de l'intervalle $[a;b]$.

Examinons le cas où $\{u_i, 1 \leq i \leq n\}$ et $\{f(x), x \in [a\,;b]\}$ modélisent les mesures d'une grandeur G dans une unité de mesure U ; G varie en fonction d'une grandeur g ; i et x sont des mesures de la grandeur g dans une unité de mesure u.

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ est la moyenne arithmétique des n mesures u_i ; n est un cardinal, il ne mesure pas une grandeur. La moyenne arithmétique s'exprime donc (fort heureusement) dans la même unité de mesure U que les u_i. Et on dit qu'il s'agit de la moyenne de la grandeur G (mesurée en U) par unité de g (mesurée en u).

Vérifions par une analyse dimensionnelle que la moyenne μ s'exprime elle aussi dans la même unité de mesure que les images par f :
$\int_a^b f(x)dx$ mesure une aire, grandeur produit qui s'exprime en $u \times U$; comme $b-a$ s'exprime en u, μ s'exprime bien en U.
Donc la valeur moyenne d'une fonction s'exprime (fort heureusement, aussi) dans la même unité de mesure que les images par la fonction. Cependant, la valeur moyenne d'une fonction est la limite de sommes discrètes de mesures de la grandeur produit gG.
Finalement, on peut dire que μ est la moyenne de G, exprimée en U, sur l'intervalle $[a; b]$.

b) Le programme officiel

Les élèves rencontrent régulièrement la notion de moyenne arithmétique depuis le collège.
La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle figure aux programmes de 2012 des Terminales L, ES et S[50]. Dans les commentaires, il y est demandé d' « *illustrer* » cette notion par des exemples issus d'autres disciplines (en ES, spécifiquement les sciences économiques).

Dans ces trois séries, un des objectifs affichés dans le préambule de la partie analyse du programme officiel est d'outiller les élèves afin qu'ils puissent étudier des modélisations de « *phénomènes discrets ou continus* ». Nous nous intéressons à la façon dont les manuels et les épreuves de Baccalauréat s'emparent de cette injonction dans le cas de la notion de valeur moyenne d'une fonction.

c) Les énoncés d'exercices de manuels et du Baccalauréat

i. Séries ES et L

En séries ES et L, nous avons consulté les manuels des éditions 2012 : des éditeurs Hachette (collection Déclic), Nathan (collections Hyperbole et Transmath), Hatier (collection Odyssée) ; les manuels des éditions 2016 : des éditeurs Didier (collection Math'x), et Hachette (collection Déclic) ; le manuel de l'édition 2017 de l'éditeur Nathan (collection Hyperbole).

La notion de valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ est introduite, dans les expositions de connaissances des manuels consultés, par sa définition mathématique. Elle est illustrée d'un graphique qui montre la courbe d'une fonction positive sur $[a; b]$, l'aire « sous » cette courbe sur $[a; b]$et son égalité avec l'aire du rectangle de base $[a; b]$ et de hauteur μ .
Les manuels qui présentent les expositions de connaissances en page de gauche, illustrées par des exemples en page de droite, utilisent en page droite, dans l'ensemble, des contextes « concrets ». Les exercices de fin de chapitre sont aussi pour la plupart issus de situations concrètes.
Comme nous allons le voir, certaines situations concrètes sont porteuses de difficultés. Elles peuvent aussi être porteuses de construction de sens, comme nous le montre le dernier exercice analysé.

Les manuels « Déclic », Hachette, éditions 2012 et 2016 :
Les manuels « Déclic » des éditions 2012 et 2016 sont les seuls à enrichir leur exposition de connaissances par une remarque concernant l'égalité des unités dans lesquelles s'expriment les images par f et sa valeur moyenne sur un intervalle. L'édition 2012 met aussi en garde le lecteur de ne pas confondre la valeur moyenne d'un bénéfice sur un intervalle et le « *bénéfice moyen pour une quantité x* » (notons que celui-ci s'exprime en bénéfice par unité de la grandeur mesurée par x) :

[50] Bulletin officiel n°8 du 13 octobre 2011

Pour toute quantité x, la valeur moyenne du bénéfice sur $[0\,;x]$ est :

$$F(x)=\frac{1}{x-0}\int_0^x f(q)\,dq=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{-x^3+3x^2-1{,}5x}{x}=-x^2+3x-1{,}5.$$

Attention à ne pas confondre avec le bénéfice moyen pour une quantité x, donné par : $B_M(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{-3x^2+6x-1{,}5}{x}=-3x+6-\frac{1{,}5}{x}$.

Manuel Déclic TES/L, Hachette, édition 2012, page 146

L'édition 2016 propose un exercice corrigé en page de droite, face à l'exposition de connaissances :

34 Après le lancement d'un nouveau téléphone sur le marché, une entreprise modélise ses ventes par la fonction f définie par $f(t)=5te^{-\frac{t}{5}}$ où t représente le temps en jour depuis le début de la commercialisation et $f(t)$ le nombre de millier de téléphones vendus au cours du jour t.

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel a donné le résultat suivant :

```
2 integrer(5*t*exp(-t/5),t)
        5*(-5*t-25)*exp(-t/5)
```



a. Déterminer le nombre moyen de téléphones vendus par jour durant la période des 10 premiers jours de commercialisation.

b. En déduire le nombre total de téléphones vendus durant ces 10 jours.

On arrondira les résultats à l'unité près.

Solution

a. Grâce au logiciel de calcul formel, on sait que la fonction $F : t \mapsto (-25t-125)e^{-\frac{t}{5}}$ est une primitive de f.

Ainsi, le nombre moyen de téléphones vendus pendant les 10 premiers jours est :

$\frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(t)dt = F(10)-F(0) = -375e^{-2}+125 \approx 74{,}249$ milliers de téléphones soit 74 249 téléphones vendus par jour pendant les 10 premiers jours.

b. Le nombre de téléphones vendus en 10 jours est de 742 490.

Remarque **Déterminer la valeur moyenne d'une fonction** continue f sur un intervalle $[a\,;b]$ c'est calculer la valeur de $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

La valeur moyenne d'une fonction est exprimée dans la même unité que la fonction. Ici, il s'agit de milliers de téléphones.

Manuel Déclic TES/L, Hachette, édition 2016, page 129

Le corrigé est agrémenté de la remarque concernant l'égalité des unités de mesure de la fonction et de sa valeur moyenne. La valeur moyenne est certes un nombre moyen de « *téléphones vendus par jour pendant les 10 premiers jours* ». L'unité commune à la fonction f et sa valeur moyenne est le millier de téléphones par jour, contrairement à ce qu'explique la remarque.

L'auteur a omis de diviser le résultat par 10 ; la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[0;10]$ est de 7,425 arrondi à 10^{-3} et le nombre de téléphones vendus par jour pendant les 10 premiers jours, calculé selon cette procédure, est d'environ 7425.

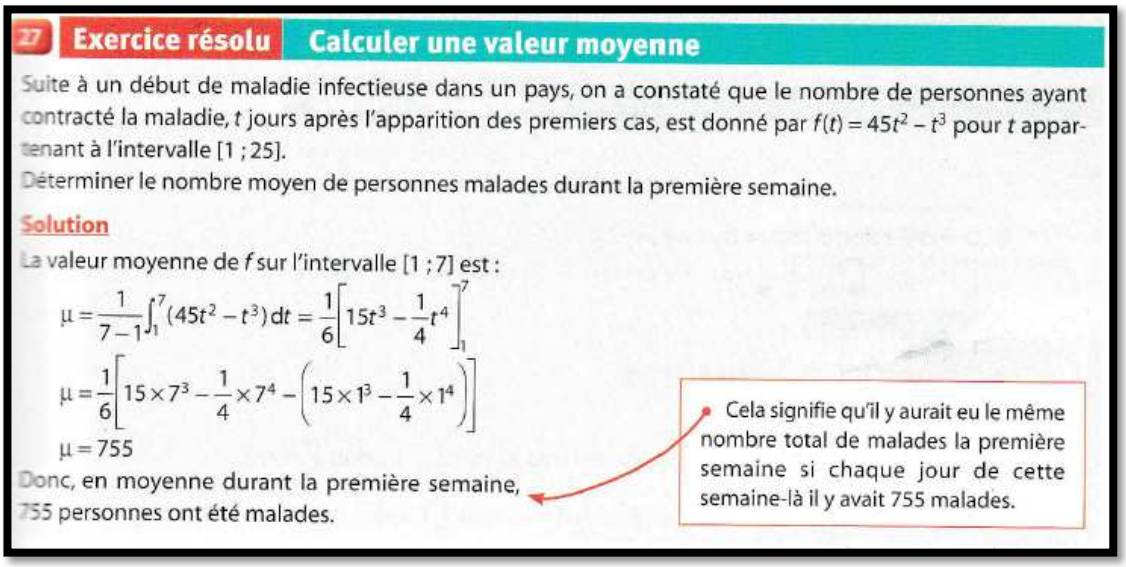
Il aurait été tout aussi pertinent répondre à la question par le calcul de la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[1;11]$, ou sur l'intervalle $[0{,}5;10{,}5]$, eux aussi de longueur 10. Le résultat aurait été respectivement de 7849 et 7696 téléphones vendus par jour.

Et pourquoi pas calculer la valeur moyenne sur l'intervalle $[1;10]$? Sa longueur n'est pas égale à 10, ce qui peut paraitre manquer de cohérence. Le résultat est alors de 8007 téléphones vendus par jour.

Le nombre de jours étant « petit », le calcul de la moyenne discrète $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(i)$ est sans doute le plus pertinent. Le calcul se fait rapidement via un tableur ; il peut aussi faire l'objet de l'écriture d'un algorithme avec les élèves (à implémenter sur leur calculatrice ou sur ordinateur). Le résultat obtenu est de 7716 téléphones vendus par jour.

Les manuels « Hyperbole », Nathan, éditions 2012 et 2017 :

Le manuel « Hyperbole » édition 2012 propose un exercice corrigé en page droite de l'exposition de connaissances :



27 Exercice résolu — Calculer une valeur moyenne

Suite à un début de maladie infectieuse dans un pays, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie, t jours après l'apparition des premiers cas, est donné par $f(t) = 45t^2 - t^3$ pour t appartenant à l'intervalle $[1 ; 25]$.

Déterminer le nombre moyen de personnes malades durant la première semaine.

Solution

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1 ; 7]$ est :

$$\mu = \frac{1}{7-1}\int_1^7 (45t^2 - t^3)\,dt = \frac{1}{6}\left[15t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_1^7$$

$$\mu = \frac{1}{6}\left[15\times 7^3 - \frac{1}{4}\times 7^4 - \left(15\times 1^3 - \frac{1}{4}\times 1^4\right)\right]$$

$$\mu = 755$$

Donc, en moyenne durant la première semaine, 755 personnes ont été malades.

Cela signifie qu'il y aurait eu le même nombre total de malades la première semaine si chaque jour de cette semaine-là il y avait 755 malades.

Manuel Hyperbole TES/L, Nathan, édition 2012, page 145

La phrase écrite en conclusion de l'exercice est correcte ; la remarque en encadré ne l'est pas. L'auteur semble avoir tenté d'illustrer l'égalité des aires « sous la courbe » de f et du rectangle de hauteur μ, dans le contexte de cet exemple « concret ». Celle-ci se traduit par une égalité de mesures d'une grandeur produit dont l'unité est le « malade-jour » (à moins qu'il ne s'agisse de « nouveaux malades – jour », l'énoncé n'est à ce propos pas clair). Il est par ailleurs impossible de connaitre le nombre total de malades car on ne sait rien sur les guérisons de ceux-ci et donc si ce sont les mêmes d'un jour à l'autre.

Une semaine comporte 7 jours. L'auteur de ce manuel choisit cependant de calculer la valeur moyenne sur un intervalle de longueur 6. Il peut paraitre plus cohérent de le faire sur l'intervalle $[1; 8]$, sur l'intervalle $[0; 7]$ ou encore sur $[0{,}5; 7{,}5]$ (résultats respectifs 948, 649 et 790,75)

Comme dans le manuel précédent, le calcul de la valeur moyenne par la moyenne arithmétique des 7 valeurs de $f(t)$ où t est entier, $1 \leq t \leq 7$, est certainement le plus pertinent dans ce cas. Le résultat est de 788 malades.

Examinons l'énoncé d'un exercice qui figure dans les pages d'exercices d'application du chapitre sur le calcul intégral, présent dans les deux éditions du manuel Hyperbole :

94 Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11 ; +\infty[$ par $f(x) = 1\,782e^{-0,024x}$ en billions de barils (millions de millions de barils).



Déterminer le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

Manuel Hyperbole TES/L, Nathan, édition 2012, page 153

Il est écrit que $f(x)$ s'exprime en billions de barils pour tout $x \in [11; +\infty[$. Or il est impossible qu'à tout instant x (et ce quelle que soit l'unité de temps choisie, qui n'est d'ailleurs pas précisée) la production mondiale soit de cet ordre (de plus, qu'est-ce que cela voudrait dire concrètement ?). Par ailleurs, il est difficile de justifier aux élèves que la borne supérieure de l'intervalle de définition soit $+\infty$.
On peut deviner que $f(x)$ est en fait un nombre de billions de barils produit l'année $2000 + x$. x s'exprime donc en années.
Dans cet énoncé, le temps parait appartenir à un intervalle de l'ensemble des réels. Compte tenu de la présence de cet exercice dans le chapitre sur l'intégration, le calcul de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[11; 21]$ est donc le plus susceptible d'être mobilisé par les élèves.
Les élèves peuvent aussi répondre en calculant la moyenne arithmétique : $\frac{1}{11}\sum_{i=11}^{21} f(i)$, soit 1217 à l'unité près.

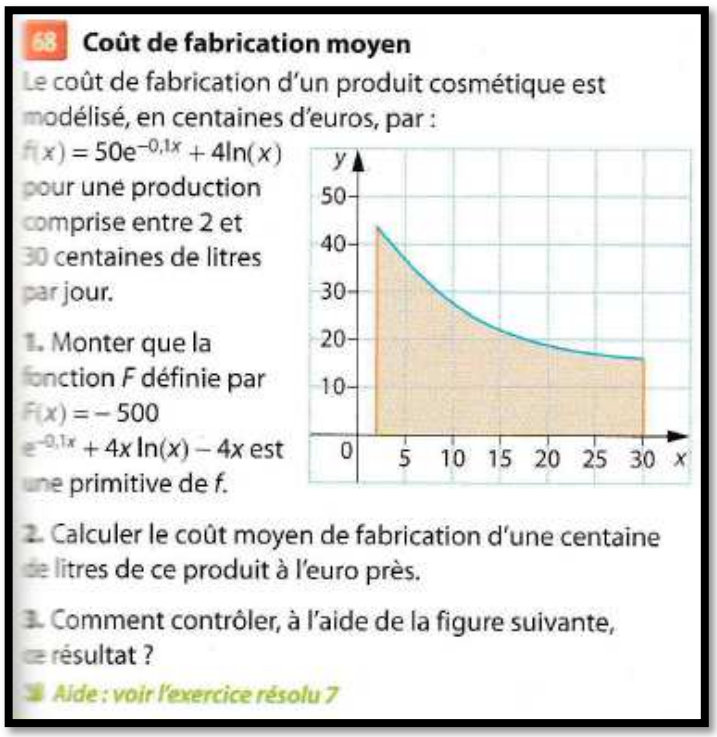
Nous venons de voir ce que $f(x)$ mesure lorsque x est un entier positif. Qu'en est-il lorsque x parcourt un intervalle de $\mathbb{R}$?
Le phénomène étudié peut théoriquement être considéré comme continu, mais concrètement :

- Les productions mondiales de pétrole sont comptabilisées par une unité de temps qu'on imagine difficilement plus petite que le jour.
- En particulier dans le cas de cet exercice, il est question d'un nombre de barils par an. Nous ne voyons pas comment donner une interprétation concrète à $f(x)$ lorsque x n'est pas un entier.

La fonction f prend donc son sens en tant que modélisation continue de ce phénomène discrétisé par sa mesure par année.
La fonction f pourrait être présentée comme suit : « Pour x entier de l'intervalle $[11; 30]$, $f(x)$ est une bonne approximation du nombre de barils (en billions) découverts l'année $2000 + x$ ». Ou encore : « Pour x entier compris entre 11 et 30, $f(x)$ modélise le nombre de barils (en billions) découverts l'année $2000 + x$ ».
Cette formulation pourrait aiguiller davantage d'élèves vers un calcul - dans le discret fini - de moyenne arithmétique, que l'énoncé de départ. Les deux procédures sont cependant correctes ; cela donne l'occasion de constater avec les élèves l'économie de calcul que peuvent permettre, selon les outils dont ils disposent, la modélisation continue et l'utilisation de la notion de valeur moyenne d'une fonction. La confrontation des deux procédures peut être aussi le moment de débattre avec les élèves des raisons pour lesquelles le modèle continu est légitime (ici, le sens de variation de la fonction est le même que celui de la suite).

Une autre question peut être posée par les élèves : pour déterminer le nombre moyen de barils sur la période 2011-2021, pourquoi ne calcule-t-on pas la valeur moyenne de f sur $[11; 22[$ plutôt que celle sur $[11; 21]$? La longueur de l'intervalle serait alors cohérente avec la durée de 11 ans de la période 2011-2021.
Outre que le résultat (1203 arrondi à l'unité) est éloigné de celui donné par la moyenne arithmétique, on peut faire remarquer aux élèves avec un vocabulaire approprié que les valeurs prises par f au voisinage de 22 (à gauche) sont prises en compte dans le calcul de l'intégrale sur $[11; 22[$ alors qu'elles sont *a priori* plus proches de $f(22)$ que de $f(21)$. En plus de sa monotonie, la continuité de f est en jeu !
De ce point de vue, la valeur moyenne de f sur $[10{,}5; 21{,}5]$ présente le double avantage d'être en cohérence avec la durée de 11 ans et de prendre en compte des valeurs de f sur un intervalle de même centre que $[11; 21]$. Elle fournit d'ailleurs une approximation un peu meilleure de la moyenne arithmétique des 11 valeurs que la valeur moyenne sur $[11; 21]$.

Le manuel « Math'x », Didier, édition 2016 :
Voici l'énoncé d'un exercice du chapitre « Intégration » :



68 Coût de fabrication moyen

Le coût de fabrication d'un produit cosmétique est modélisé, en centaines d'euros, par :
$f(x) = 50e^{-0,1x} + 4\ln(x)$ pour une production comprise entre 2 et 30 centaines de litres par jour.

1. Monter que la fonction F définie par $F(x) = -500e^{-0,1x} + 4x\ln(x) - 4x$ est une primitive de f.

2. Calculer le coût moyen de fabrication d'une centaine de litres de ce produit à l'euro près.

3. Comment contrôler, à l'aide de la figure suivante, ce résultat ?

Aide : voir l'exercice résolu 7

Manuel Math'x TES/L, Didier, édition 2016, page 169

Quel sens donner à la question 2 ? L'énoncé de cet exercice permet de calculer :

- Soit le coût moyen de fabrication sur une production de a hL à b hL (où $[a; b] \subset [2; 30]$) ; il s'agit de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ en centaines d'euros ;
- Soit le coût moyen de fabrication d'une centaine de L pour une fabrication totale de x L ($x \in [2; 30]$) ; il s'agit de $\frac{f(x)}{x}$ en centaines d'euros par hL.

La question 2 semble être un mélange des deux. Pour connaître les intentions de l'auteur, nous avons consulté l'exercice corrigé 7 cité en « aide ». Il consiste en deux calculs de bénéfices mensuels moyens, sur 3 mois puis sur six mois, d'une entreprise dont le bénéfice mensuel est modélisé par une fonction continue en fonction du temps. L'auteur visait donc un calcul de valeur moyenne de fonction, par conséquent la première de nos deux propositions ci-dessus, vraisemblablement le coût moyen sur une production de 2 hL à 30 hL.

Le manuel « Transmath », Nathan, édition 2012 :
Un exercice du manuel Transmath de 2012 fait calculer un coût unitaire moyen pour cent unités, par une procédure dans le monde du discret puis une procédure dans le monde du continu.

162 Tarifs dégressifs

Les tarifs d'une entreprise de transport sont fonction de la quantité q transportée. On note $f(q)$ le coût unitaire de la q-ième unité transportée. On se propose d'étudier le coût unitaire moyen de transport pour cent unités transportées.

On suppose que $f(q) = 250 - 0{,}7q$.

1. Combien sera facturé le transport d'une unité ? De deux unités ? De cinq unités ?

2. a) En utilisant la formule donnant la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, démontrez que le montant facturé pour le transport de n unités est :

$$250n - 0{,}7 \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Déduisez-en le coût unitaire moyen de transport pour cent unités transportées. Ce nombre sera noté m_1.

3. a) Calculez $m_2 = \frac{1}{100}\int_0^{100} f(q)\,dq$.

b) À l'aide de la représentation graphique de f, expliquez pourquoi les nombres m_1 et m_2 sont voisins.

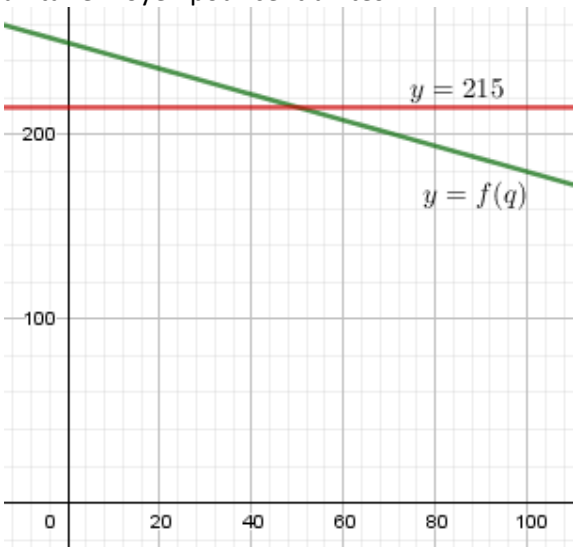
Pouvait- on prévoir quel serait le plus grand des deux ?

Manuel Transmath TES/L, Nathan, édition 2012, page 176

Il est question dans cet énoncé de « *la q-ième unité transportée* » ; il semble donc que ces quantités soient entières donc discrètes. C'est sur cette base que nous analysons cet exercice.

m_1 résulte d'un calcul dans le monde discret qui mobilise un calcul de somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. m_1 est la moyenne arithmétique des 100 valeurs $\{f(n), 1 \leq n \leq 100\}$. Si ce sont des valeurs exactes des coûts unitaires, $m_1 = 214{,}65$ est la valeur exacte du coût unitaire moyen pour cent unités.

m_2 résulte d'un calcul dans le monde du continu qui mobilise un calcul intégral. C'est la valeur moyenne de f sur $[0; 100]$, donc la valeur moyenne de la fonction continue modélisant le coût unitaire de la nième unité, pour des unités allant de 0 à 100. On trouve $m_2 = 215$. La variable « quantité » étant discrète, m_2 est *a priori* une valeur approchée du coût unitaire moyen pour cent unités.



Ainsi que le propose la dernière question, le registre graphique peut aider les élèves à visualiser que :

- La fonction f étant affine et m_1 étant la moyenne arithmétique des 100 valeurs $\{f(n), 1 \leq n \leq 100\}$, on a : $m_1 = f(50{,}5)$.
- Comme la fonction f est affine et que m_2 est la valeur moyenne de f sur $[0; 100]$, $m_2 = f(50)$.

La fonction f étant strictement décroissante, il était prévisible que m_2 soit supérieur à m_1.

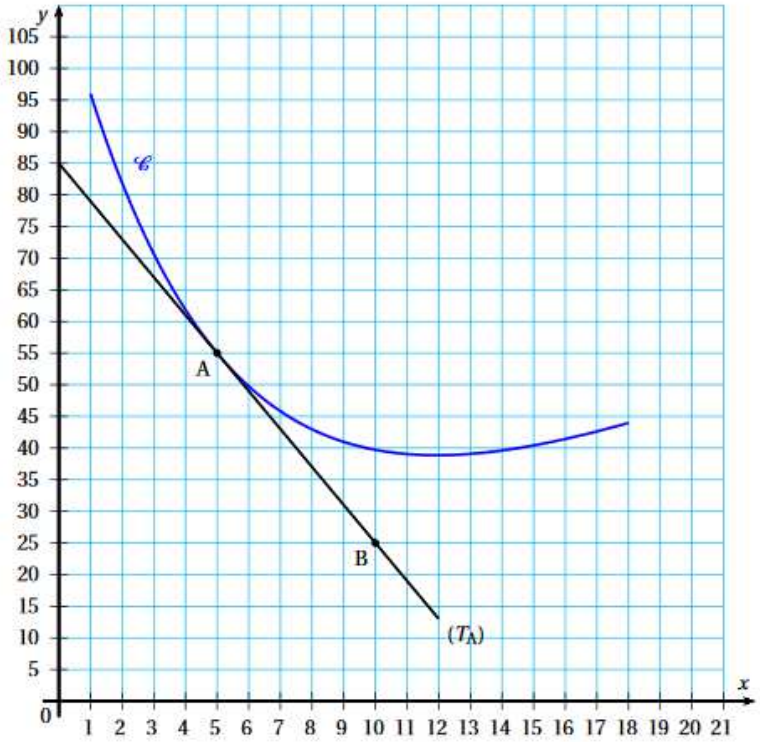
Remarquons que le calcul de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5;\,100{,}5]$ est exactement égale à m_1.

Un exercice tel que celui-ci demande un investissement de temps important avec des élèves de série ES ou L : il mobilise des techniques relevant de suites et d'autres de fonctions. Les deux mondes du discret et du continu se côtoient, ce qui est atypique (les énoncés comportant des modélisations discrètes et continues sont généralement écrits en deux parties distinctes) ; de plus, l'énoncé soulève des questions relatives aux différents types de calculs de moyenne et à la modélisation. Les jeux entre les mondes discret et continu sont multiples.
De ce fait, il permet de montrer aux élèves les choix opérés lors de modélisations ; et l'avantage d'une modélisation continue en termes de facilité des calculs.

Baccalauréat séries ES et L :
Parmi les épreuves de Baccalauréat des séries L et ES des années 2015, 2016 et 2017, nous avons relevé cinq sujets mobilisant la valeur moyenne d'une fonction ; elle y est mobilisée exclusivement dans le cadre de l'étude d'un phénomène concret. Examinons ces énoncés ; nous avons accès aux réponses possibles d'enseignants de lycée par la consultation des corrigés proposées par le site internet de l'APMEP.

Sujet du Liban, mai 2015, exercice 2 :
Voici le début de l'exercice puis ses deux dernières questions :

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 à 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,18]$.
On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point A(5 ; 55). Le point B(10 ; 25) appartient à la tangente (T_A).



On admet que

$f(x) = 2x + 5 + 40\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,18]$

b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\frac{1}{10}I$.

Le phénomène étudié est celui d'une production de parasols. Il est sans aucun doute discret ; l'énoncé indique clairement qu'il est « *modélisé par une fonction* » dérivable (donc continue).
La dernière question demande d'interpréter la valeur moyenne calculée précédemment.
Nous avons consulté la réponse à la question c. proposée par le corrigé de l'APMEP trouvé sur son site internet : « C*'est le cout de production unitaire moyen* ». Il manque à cette réponse : « en euros, pour une production comprise entre 5 et 15 parasols ». De plus, il s'agit d'une valeur approchée de ce coût moyen, la valeur exacte étant égale à la moyenne arithmétique (discrète) des valeurs exactes des 11 coûts de fabrication.
Plus généralement, on peut se demander l'intérêt d'une modélisation continue de ce phénomène discret fini dont le cardinal est petit, puisque les questions « concrètes » qui sont posées sont : le nombre de parasols que l'entreprise doit produire pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal ; le coût de production unitaire moyen pour une production de 5 à 15 parasols.
Pour le coût de fabrication unitaire minimal, l'observation de 18 valeurs suffit et la modélisation continue n'apparait pas utile.
En revanche, la modélisation continue permet au candidat un calcul beaucoup plus rapide du coût de production unitaire moyen pour une production de 5 à 15 parasols. En effet, pour effectuer le calcul dans le monde du discret avec les 11 valeurs des coûts, il faut calculer $n = \sum_{i=5}^{15} i = 110$; puis $\frac{1}{n}\sum_{i=5}^{15} f(i) \approx 41{,}5$. Ce résultat est proche du résultat de la valeur moyenne de f sur $[5; 15]$ qui est égale à environ 42,3.

Sujet d'Amérique du Nord, juin 2015, exercice 4 :
Voici le début de l'énoncé de la partie B puis les questions qui concernent la valeur moyenne :

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ a été tracée ci-dessus.
En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.
En ordonnées, $f(x)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le x-ième jour.

Ainsi, par exemple, le 10-ième jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 18] par $f(x) = 5xe^{-0{,}2x}$.

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire une estimation du nombre moyen de jouets vendus par jour durant la période des 10 premiers jours. On arrondira le résultat à l'unité.

Le nombre de jouets est exprimé en milliers ; compte tenu du nombre de valeurs prises par le nombre d'unités de jouets, la modélisation continue a ici tout son sens. L'énoncé est cohérent du point de vue des unités. Il précise que f modélise les ventes ; que la valeur trouvée par le calcul de la valeur moyenne via le modèle continu est une « *estimation* » du nombre moyen cherché.

La locution « *en déduire* » ne laisse aucun doute sur la procédure attendue, par la valeur moyenne de f sur $[0; 10]$. Le calcul du nombre moyen de jouets vendus pendant les 10 premiers jours pourrait aussi être fait par le calcul de la moyenne arithmétique des 10 valeurs $\{f(n), 1 \leq n \leq 10\}$.
Ce qui est peu explicite dans l'énoncé, c'est que $f(x)$ exprime un nombre de jouets par jour.

Sujet de Nouvelle Calédonie, mars 2016, exercice 4 :
Dans la partie B, un nombre de malades (en milliers) en fonction du temps est modélisé par une fonction f dont l'expression algébrique est donnée. Ainsi, $f(t)$ est le nombre de malades (en milliers) où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie. Voici la question 3 :

> **3.** Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $N = \frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t$.
>
> **a.** Déterminer la valeur exacte de N.
>
> **b.** Quel est le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine?

N n'est-il pas une valeur approchée du nombre moyen de malades sur la période des 60 premiers jours (et non le nombre de malades par jour durant les 60 premiers jours) ?

Le corrigé de l'APMEP reprend malgré tout le libellé de la question :

> **b.** $N \approx 31,268$; cela correspond au nombre moyen de malades en milliers, donc le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine, est de 31 270.

Sujet du Liban, 31 mai 2016, exercice 4 :
Une fonction modélise un bénéfice mensuel en fonction d'un nombre x de toboggans produits, exprimé en centaines de toboggans.

> Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
> Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle [3 ; 13] par la fonction f.
> En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :
>
> 1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
> 2. Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

Le nombre de toboggans produits est compris entre 300 et 1300. Il est explicite que f modélise le phénomène. Le fait que la modélisation soit continue est d'autant mieux fondé que x prend un grand nombre de valeurs (1001 valeurs) dans $[3 ; 13]$.

Sujet d'Amérique du Sud, 24 novembre 2016, exercice 2, partie B :

> Un ballon sonde, lâché à une altitude de 1 km, relève en continu la température atmosphérique jusqu'à 45 km d'altitude.
> On admet que la fonction g définie dans la partie A modélise la température de l'air, exprimée en degrés Celsius, en fonction de l'altitude x du ballon sonde, exprimée en km.
> À l'aide des résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes.
>
> 1. Déterminer l'altitude à partir de laquelle la température devient inférieure à 0 degré Celsius.
> 2. Déterminer la température minimale relevée par la sonde.
> 3. On appelle stratosphère la couche atmosphérique se situant entre 10 km et 45 km d'altitude. Déterminer la température moyenne de la stratosphère. Le résultat sera arrondi au degré.

Les grandeurs en jeu (température et temps) peuvent être « intuitivement » considérées comme continues. Une modélisation continue du phénomène est donc « naturelle ».

Cet exemple de température moyenne de la stratosphère mobilise le continu et la valeur moyenne d'une fonction de façon « naturelle » et ne pose pas de difficulté de formulation. L'intervalle sur lequel calculer la valeur moyenne de la fonction est lui aussi « naturel ».
Cette situation fournit un exemple « concret » qui pourrait être générique de ce que représente la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle et de la cohérence des unités en jeu.

Conclusion de la partie i :
Une minorité des manuels de Terminales ES et L consacre quelques exercices d'application directe du cours au calcul de la valeur moyenne d'une fonction. La valeur moyenne d'une fonction y est davantage mobilisée en tant qu'outil, dans le cadre de l'étude d'un phénomène concret. C'est le cas de la totalité des énoncés de Baccalauréat.
C'est dans les exercices « concrets » que nous avons relevé des énoncés problématiques. Les sources de difficultés sont :

- La formulation des énoncés en langue naturelle : celles des grandeurs modélisées, des unités dans lesquelles elles sont exprimées ;
- Ce que représente « concrètement » une valeur moyenne sur un intervalle, sous ensemble continu de $\mathbb{R}$, surtout si le phénomène modélisé est discret ;
- La confusion entre valeur moyenne sur un intervalle et moyenne pour une valeur donnée ou par unité d'une mesure de grandeur.

Ces difficultés, si elles sont maîtrisées par l'enseignant et si le temps passé avec les élèves le permet, sont aussi l'opportunité, auprès des élèves, d'enrichir le sens des outils qui relèvent des mondes du discret et du continu et d'éclairer la signification des résultats que ces outils permettent d'obtenir.

ii. Série S

Les manuels de Terminale S :
Contrairement aux manuels des séries ES et L, la notion de valeur moyenne d'une fonction est davantage travaillée en série S dans des exercices à caractère intra mathématiques que comme outil dans des problèmes « concrets ». Ainsi, le manuel « Repères », Hachette édition 2012, ne propose que des exercices intra mathématiques.
En-dehors de tels exercices, les manuels « Symbole », Belin édition 2012 et « Hyperboles », Nathan édition 2012, sollicitent la valeur moyenne d'une fonction afin de définir la valeur efficace d'une tension ou d'une intensité.

Le manuel « Indice », édition Bordas de 2012, tente davantage que les autres de présenter la valeur moyenne d'une fonction comme outil qui permet d'étudier des phénomènes concrets. Dès son exposition de connaissances, l'auteur donne deux exemples concrets d'application du calcul de la valeur moyenne d'une fonction.
Avec le texte de l'exposition de connaissance, en page gauche, l'auteur cite l'exemple du calcul de la vitesse moyenne d'un mobile lors d'un mouvement uniformément accéléré. Le contexte de cinématique est dans le monde du continu : la vitesse est fonction du temps ; sa valeur moyenne sur un intervalle $[t_1; t_2]$ permet de calculer la vitesse moyenne du mobile « *entre les instants t_1 et t_2* ». Un exercice d'application qui fait intervenir une vitesse moyenne est proposé dans les exercices de fin de chapitre.
En page droite de l'exposition de connaissances, l'exemple donné se situe dans un contexte concret : un nombre de malades varie en fonction du temps, donné en jours.
Le nombre de jours est compris entre 0 et 6. Le temps peut être considéré comme discret fini (discrétisé en nombre entier de jours, ou d'heures par exemple) ou continu (prenant théoriquement toutes les valeurs de $[0; 6]$).

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

1. Calculer la valeur moyenne sur [0 ; 6] de la fonction f telle que $f(t) = 6t^2 - t^3$.

2. Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est donné par la fonction f précédente.

a. Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur cette période de 6 jours.

b. Construire la représentation graphique de la fonction f et donner une interprétation graphique du nombre moyen de malades sur cette période.

Solution

1. La valeur moyenne de la fonction f sur [0 ; 6] est égale à :

$$\frac{1}{6-0}\int_0^6 (6t^2 - t^3)\,dt.$$

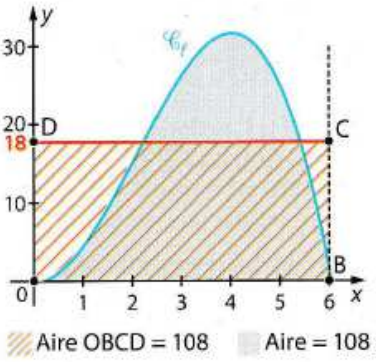
Une primitive de f est la fonction F telle que $F(t) = 2t^3 - \frac{1}{4}t^4$.

$F(6) = 108$ et $F(0) = 0$, donc la valeur moyenne de f sur [0 ; 6] est $\frac{108}{6}$, soit 18.

2. a. Le nombre moyen de malades est égal à la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0 ; 6].

Chaque jour, il y a donc environ, en moyenne, 18 malades.

b. Le nombre moyen est la hauteur du rectangle OBCD qui a la même aire que l'aire sous la courbe.



Manuel Indice TS, Bordas, édition 2012, page 175

La question 1. invite sans aucun doute les élèves à mobiliser la procédure de calcul de moyenne dans le monde du continu pour répondre à la question 2. a.

Le corrigé de cet exercice sert de modèle pour deux exercices d'application qui se situent dans un contexte concret en fin de chapitre, dans lesquels la variable est elle aussi le temps.

Dans les trois exercices, l'auteur interprète la valeur moyenne comme une valeur « *chaque année* », « *chaque heure* » ou « *chaque jour* », selon l'unité de temps de l'énoncé. Pourtant, en cinématique, l'auteur conclue par la vitesse moyenne exprimée en $m.s^{-1}$; il ne propose pas de dire que c'est une vitesse moyenne « *chaque seconde* ».

Lorsque l'unité de temps est l'année, le jour, l'heure, la variable serait-elle davantage perçue comme discrète alors que si l'unité de la variable est la seconde, elle est perçue comme continue ? L'auteur sentirait-il le besoin, dans un contexte lié au temps mais qui ne relève pas de la cinématique, d'exprimer qu'une moyenne est « par » unité de quelque chose ? Notons que cette tentation est reflétée dans le sujet de Baccalauréat, série ES, de mars 2016 en Nouvelle Calédonie analysé supra.

Bac S des années 2015, 2016, 2017 :

Les énoncés du Baccalauréat S qui font intervenir le calcul intégral concernent pour la plupart des calculs d'aires.

Dans les énoncés des années 2015, 2016 et 2017, nous avons uniquement repéré un exercice faisant intervenir la notion de valeur moyenne. Il s'agit de l'épreuve de Polynésie, en juin 2017. Un calcul de vitesse moyenne y est demandé. Comme nous l'avons souligné supra, dans un contexte de cinématique, les grandeurs en jeu sont « *intuitivement* » continues, les énoncés ne posent pas de difficulté.

2. Du côté des élèves

Voici un énoncé d'exercice donné en évaluation en classe à une classe de Terminale ES suite à l'étude du chapitre sur l'intégration :

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $f(x) = -x + 5 + 40e^{0,04x+1}$
On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1. Soit F la fonction définie sur [0 ; 20] par : $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + 1000e^{0,04x+1}$

Montrer que F est une primitive de f dans l'intervalle [0 ; 20].

2. Calculer la valeur exacte de $I = \int_5^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

3. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [5 ; 10]. (On donnera la valeur arrondie au centième.)

PARTIE B

En 2013, un styliste a décidé de développer son entreprise en ouvrant des boutiques de vêtements, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial.

Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existants en $2013 + x$.

1. Calculer $f(5)$ et interpréter le résultat.

2. Pour étudier son dossier de prêt, son banquier désire estimer le nombre moyen de magasins existants pour la période 2018 – 2023. Que vaut-il d'après ce modèle ?

3. Chaque magasin ouvert a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2 500 euros.
Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques pour la période 2018-2023.

Nous nous intéressons particulièrement à la question 2 de la partie B. Dans cette question, le but est d'utiliser la fonction f qui modélise le nombre de magasins en fonction de l'année afin d'estimer le nombre moyen de magasins sur la période 2018-2023.
Comme dans l'exercice du manuel « Hyperbole » de Terminales ES et L, dans lequel une fonction modélise la production de pétrole en fonction de l'année, on voit difficilement comment donner une interprétation concrète à $f(x)$ lorsque x n'est pas entier.
La modélisation continue présente à ce stade cependant un intérêt : la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[5; 10]$ a été calculée en partie A ; le calcul d'une valeur approchée de la moyenne, demandé en partie B, est alors déjà effectué dans le monde du continu, alors que celui de la moyenne arithmétique des six valeurs $\{f(n), 5 \leq n \leq 10\}$ demande davantage de travail.
L'outil attendu de calcul de ce nombre moyen par le concepteur du sujet est donc la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.
Un autre argument en faveur du choix par les élèves de l'utilisation de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle pour répondre à la question est que cette évaluation clôt le chapitre sur l'intégration.
Cependant, les élèves ne repèrent pas toujours les questions qui peuvent s'enchaîner. *A priori*, un certain nombre d'entre eux pourraient traiter la partie B indépendamment de la partie A, dans le monde du discret. La moyenne arithmétique des 6 valeurs $\{f(n), 5 \leq n \leq 10\}$, arrondie à l'unité, est d'ailleurs la même (145) que la valeur moyenne de f sur $[5; 10]$ arrondie à l'unité.

A posteriori :
Sur 30 élèves, un seul élève a effectué (correctement) le calcul de la moyenne arithmétique.

Deux élèves ont effectué la moyenne arithmétique de la première et de la dernière valeur ($f(5)$ et $f(10)$). Dans ce cas, la valeur arrondie à l'unité est d'ailleurs égale à la moyenne arithmétique des 6 valeurs.
La majorité des élèves a utilisé le résultat de la partie A, ou refait le calcul de la valeur moyenne.

Un cas mérite de s'y arrêter. Il concerne la dernière question, celle du calcul du chiffre d'affaires annuel moyen pour la période 2018-2023. Un élève (de très bon niveau et qui a répondu correctement à la question précédente) a divisé le produit $2500 \times 300 \times 145$ par 5. Il a divisé par 5 en pensant qu'il manquait le caractère « par an » de la moyenne – l'élève aurait-il fait une analyse dimensionnelle ?
En effet, la valeur moyenne trouvée précédemment est une moyenne de magasins sur un intervalle de temps. Cependant, le « par an » est présent dans les « 300 jours d'ouverture par an » des magasins.

3. Conclusion de la partie III D

Les difficultés concernant les moyennes calculées dans le monde du continu par la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle apparaissent essentiellement lors de l'étude de phénomènes discrets. C'est pourquoi leurs incidences sont nombreuses en séries ES et L, et quasi-absentes en série S.

Lorsque le phénomène est discret et prend un « petit » nombre de valeurs, remplacer un calcul de moyenne arithmétique (monde du discret) par un calcul de valeur moyenne (monde du continu) parait artificiel. Les auteurs de manuels et de sujets de Baccalauréat créent cependant des énoncés et des exercices résolus qui guident les élèves vers la mobilisation de cette procédure.
Il nous semble que cette pratique est liée :

- Aux programmes officiels du lycée qui indiquent que les fonctions doivent être des outils de modélisation de phénomènes concrets ;
- Au fait que les phénomènes économiques et sociaux sont généralement discrets ;
- Au fait que, pour cibler le travail sur les objectifs d'enseignement « locaux » (ici le calcul intégral), les nombres convoqués dans les énoncés sont souvent de « petits » entiers ;
- Aussi à un contrat didactique avec les élèves du type : « on attend de vous que vous appliquiez ce qu'on a appris à faire cette année ».

La valeur moyenne d'une fonction peut malgré tout apparaitre comme un outil puissant qui fournit sous certaines conditions une bonne approximation de la moyenne calculée dans le discret avec une économie de calcul indiscutable (lorsqu'une recherche de primitive est suffisamment simple). Cependant, compte-tenu des puissants moyens de calcul dont les élèves disposent aujourd'hui et de la part grandissante de l'algorithmique et de la programmation au lycée, sans oublier le tableur, les calculs de moyenne par sommation finie ont tout à fait leur place aussi.

Nous faisons l'hypothèse que c'est dans un travail incluant les calculs de différents types de moyenne, dans le discret et le continu, pour l'étude d'un même phénomène, que les deux notions de moyenne (moyenne arithmétique, valeur moyenne d'une fonction) peuvent prendre tout leur sens.

Lorsqu'une fonction modélise un phénomène discret, le choix de l'intervalle sur lequel la valeur moyenne de la fonction est calculée est variable d'un auteur (de manuel, d'énoncé de Bac) à l'autre ; ce choix nous semble arbitraire et peut paraitre ainsi aux élèves.
Plus précisément, certains auteurs remplacent le calcul de la moyenne arithmétique des $f(i)$ (où i décrit l'ensemble des $b-a+1$ entiers compris entre les entiers a et b) par la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ (de longueur $b-a$) ; d'autres par la valeur moyenne de de f sur $[a-1;b]$ (de longueur $b-a+1$).
Nous avons discuté l'opportunité de remplacer cette moyenne arithmétique par la valeur moyenne de f sur $[a-0{,}5;b+0{,}5]$ (de longueur $b-a+1$), en particulier lorsque $b-a$ est « petit ». Bien sûr, c'est calculer une moyenne d'un phénomène dont les mesures sont entières à l'aide d'une valeur moyenne sur un intervalle dont les bornes ne sont pas entières. Cela peut surprendre, voire gêner les élèves au premier abord mais a l'avantage de rendre plus explicite encore la non congruence entre les mondes discret (du phénomène) et continu (de sa modélisation par une fonction). L'exploitation du modèle ne peut que prendre davantage de sens elle aussi.

E. L'introduction aux fonctions exponentielles en Terminales ES et L

1. Dans les mathématiques à enseigner

a) Le programme officiel

En Terminales ES et L, selon les termes du programme officiel en vigueur à la rentrée 2012, les fonctions exponentielles doivent être « *présentées comme un prolongement continu des suites géométriques* ». La seule précision du programme à ce propos est : « *On admet que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et transforment les sommes en produit* »[51].
Toujours selon ce programme, la fonction exponentielle doit être définie comme l'unique fonction exponentielle dont la dérivée en 0 est égale à 1. Il est expliqué qu'un logiciel permet d'observer « *qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0* ». Pour finir, le nombre *e* est défini comme l'image de 1 par cette fonction.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions exponentielles		
Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$. Relation fonctionnelle.	• Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q.	Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur **R** et transforment les sommes en produits.
Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.	• Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.	On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction.
Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.	• Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ $(k > 0)$, qui sont utilisés dans des domaines variés. La notion générale de composée est hors programme.

Extrait du Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011, page 4

Notons que le préambule de la partie « analyse » de ce programme officiel, après avoir précisé que l'objectif de cette partie du programme est de résoudre des problèmes par la modélisation de phénomènes discrets ou continus, stipule page 3 que : « *On consolide l'ensemble des fonctions mobilisables, enrichi des fonctions exponentielles et de la fonction logarithme népérien. Les fonctions exponentielles sont l'occasion d'évoquer le passage d'une situation discrète à une situation continue* ». La dernière partie de la phrase peut certainement être reformulée par : « le passage d'une modélisation discrète à une modélisation continue ». Ainsi, le rôle attendu de la modélisation dans les tâches qui font intervenir les fonctions exponentielles est fortement souligné, que ce soit pour l'introduction de ces nouvelles fonctions (dans lesquelles elles sont de nouveau objets mathématiques) ou la résolution de problèmes (dans lesquels elles sont des outils du monde du continu, permettant de modéliser des phénomènes, qu'ils soient discrets ou continus).

i. Vous avez dit prolongement ?

Le mot « prolongement » est proche du mot « prolongation ». Les élèves de Terminale ES, qui ne l'ont *a priori* pas encore rencontré dans leur cursus en mathématiques, risquent donc de le comprendre dans un sens plus

[51] Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011

proche d'« aller plus loin » que le sens visé d' « extension ». Vis-à-vis des élèves, sa signification mérite de leur être explicitée.

Finalement, en quoi les fonctions exponentielles seraient-elles un « prolongement continu des suites géométriques » ?
Après un rapide détour historique, nous aborderons cette question d'un point de vue mathématique et ferons un tour d'horizon de ce qui se prolonge (ou pas) dans le cadre d'un enseignement des fonctions exponentielles à partir des suites géométriques en Terminale ES ou L.

Prolongement de la notation exponentielle - du point de vue historique, à celui des élèves d'aujourd'hui :
D'après Michel Serfati (2005), cette notation est apparue au XVIIe siècle. Après que Descartes ait créé la notation d'exposant a^3, Newton l'a immédiatement reprise pour la généraliser à a^p où p est « le signe d'un donné indéterminé ». Newton, dans une lettre à Leibniz, définit le nombre $a^{\frac{m}{n}}$ où m et n désignent des entiers. Puis Leibniz étendit l'exponentielle à a^x où x désigne un nombre « indéterminé », implicitement, avec le langage d'aujourd'hui, un réel positif. D'après Serfati, « *cependant à aucun moment il n'évoque une procédure de cette « forme » : c'est une « forme » sans signification.* » La « forme » a^x, bien que non définie par Leibniz, embarquait avec elle les propriétés algébriques connues pour des exposants entiers positifs. Elle permit dès lors la manipulation de « formes » plus complexes, comme $a^{(2x)+y}$.
Toujours selon Serfati (2005), malgré l'absence de définition de cette « forme », son utilité l'a imposée à tel point que Leibniz pensait que l'exponentielle expliquerait tout. Serfati explique volontiers que, dans l'histoire des mathématiques, certaines notations passent de l'acceptable à l'utile, puis deviennent nécessaires et finalement naturelles.
C'est Euler qui donna à la « forme » a^x, quelques dizaines d'années plus tard, une définition.

Serfati définit à la fin de son ouvrage précité le « principe de prolongement » par : « *Tout objet, toute formule mathématique, apparemment en soi, peut le cas échéant être regardé comme une instance seulement d'un objet ou d'un canon plus vaste qui le recouvre et le prolonge sur le plan signifiant, cependant que sa forme symbolique est inchangée* ».
Ce principe permet de décrire l'émergence historique de l'exponentielle de base réelle positive à exposant réel : la « forme » symbolique de l'exponentiation permit de prolonger les propriétés algébriques des exposants entiers naturels aux exposants « indéterminés », précédent de plusieurs décennies toute définition des exponentielles à exposants non entiers.

Historiquement, le registre de représentation symbolique dans lequel s'inscrit la notation exponentielle, au sein du cadre algébrique, permet de passer de a^p avec a réel fixé et p entier naturel fixé à a^p avec a réel fixé et p réel indéterminé. Ce registre embarque les propriétés algébriques de l'exponentielle. On peut faire l'hypothèse qu'il pourrait en être de même pour les élèves.
Dans le contexte de l'enseignement au lycée, comme le reflète le programme dont l'extrait figure ci-dessus, les habitudes sont les suivantes : la lettre q désigne la base strictement positive d'une suite géométrique ; le terme général de cette suite est donc noté q^n ; la fonction $x \mapsto q^x$ est son prolongement continu dans $\mathbb{R}$.
Notons que l'implicite que x désigne une variable réelle et n désigne une variable entière pourrait ne pas en être un pour les élèves de lycée, ce qui faciliterait ce prolongement symbolique.

Remarquons qu'à l'époque de Leibniz, l'exposant est une indéterminée ; la question de la « forme » prédomine ! Par opposition, dans la partie du programme officiel de 2012 qui nous préoccupe, l'exposant est une variable : les fonctions exponentielles font partie des outils dont la partie « analyse » du programme officiel a l'ambition de doter les élèves, dans le but de « *traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets* »[52].
Or le prolongement de la « forme » a^n induit le passage d'une multiplication itérée à une toute autre opération, comme le souligne le groupe AHA[53] : *« souvent les fonctions exponentielles sont définies par a^x. Or, certains élèves ne perçoivent dans cette expression qu'un produit, même lorsque x n'est plus entier naturel. »*

[52] Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011, page 3.

[53] Groupe AHA (1999), page 130.

Les auteurs poursuivent par : *« D'autres se demandent pourquoi on ne définit pas* $a^{-n} = -a^n$ *ou* $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^n}$. *D'autre encore ne voient pas quel sens donner à* $3^{\sqrt{2}}$. » Le prolongement de la « forme » exponentielle est donc source de difficulté pour les élèves, dès que l'exposant n'est pas un entier positif.

Deux définitions mathématiques de q^x par prolongement de q^n :

Du point de vue de la théorie mathématique, on peut définir q^x où x est réel à partir de q^n de différentes façons. Dans tous les cas, on définit dans un premier temps q^x pour x entier négatif et pour x nombre rationnel. Nous ne reviendrons pas sur ces définitions qui sont courantes.
Examinons les notions mathématiques mises en œuvre dans deux approches et les points de vue qu'elles véhiculent :

- Si x est réel, on définit q^x comme limite des q^{x_n} où (x_n) est une suite de rationnels qui converge vers x.
  Ce procédé permet de définir q^x pour chaque réel x en adoptant un point de vue local.
  Dans ce cas, la propriété de transformation des sommes en produits se déduit de la définition de q^x par un passage à la limite de cette même propriété vérifiée sur l'ensemble des rationnels. Demailly (2010) propose un parcours mathématique de ce type, abordable avec un bagage en analyse limité. Il y déduit les limites, la continuité et la dérivabilité des fonctions exponentielles par des jeux de majorations et minorations.

- On définit q^x sur $\mathbb{R}$ par le théorème et définition suivant :

> Soit q un réel strictement positif.
>
> Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui prolonge à $\mathbb{R}$ la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui satisfait aux conditions suivantes :
>
> - f est continue sur $\mathbb{R}$;
> - Pour tous réels x et y réels, $f(x+y) = f(x)\times f(y)$.
>
> Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base q.
>
> On note, pour tout réel x, $f(x) = q^x$.

  Dans cette deuxième approche, la fonction $x \longmapsto q^x$ est définie comme une fonction qui est continue et qui vérifie la propriété de transformation des sommes en produits. On peut montrer dans un premier temps que, sur $\mathbb{Q}$, elle coïncide nécessairement avec l'exponentielle de base q. Un passage à la limite qui utilise sa propriété de continuité permet de la construire sur $\mathbb{R}$. Ainsi le réel q^x où x est un réel est construit par une approche locale. Cependant, l'énoncé de ce théorème et définition offre un point de vue global de la fonction exponentielle de base q.
  Remarquons que la condition de continuité sur $\mathbb{R}$ peut être remplacée par une condition de continuité (ou de dérivabilité) en un point ou bien entendu par une condition de dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

Ces deux approches s'appuient sur la définition des puissances à exposants positifs entiers. La définition de l'ensemble des nombres réels en tant qu'ensemble des limites de suites de nombres rationnels est nécessaire dans les deux cas. Celle de continuité d'une fonction l'est uniquement dans le deuxième cas.

Compte tenu de l'intitulé du programme officiel et l'injonction de procéder par prolongement des suites géométriques, la deuxième façon semble opportune pour un cours de Terminale ES ou L, à condition d'admettre le théorème : les élèves n'ont à leur disposition aucune définition rigoureuse des nombres réels, de la notion de limite et de celle de continuité d'une fonction. De ces objets et notions mathématiques, ils disposent cependant de quelques « définitions en acte » et/ou de représentations mentales ou gestuelles dans le cadre graphique.
Par ailleurs, pour des élèves de Terminale ES ou L, il est certainement préférable d'énoncer le théorème et définition avec une condition à caractère global de continuité ou de dérivabilité sur $\mathbb{R}$, plutôt qu'une condition à caractère local de continuité ou de dérivabilité en un seul point : il est difficile conceptuellement de

comprendre qu'une propriété locale en un point puisse avoir pour conséquence la même propriété globalement sur $\mathbb{R}$.

Quant à elle, la première façon fait certainement appel à des notions trop théoriques pour des élèves de la série ES ou L qui ne disposent d'aucune connaissance (définitions ou théorèmes), même en acte, concernant l'approximation d'un réel par une suite de rationnels. Leurs connaissances concernant les nombres irrationnels (donc la différence entre les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$) sont pauvres : d'une part, rappelons que l'étude des ensembles de nombres n'est plus un objectif du programme de seconde ; d'autre part les objectifs des programmes des filières ES et L ne permettent pas d'approfondir ce sujet.

Remarquons qu'admettre « *que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et transforment les sommes en produit* », tel qu'indiqué dans le programme de 2012, est cependant contradictoire avec la seconde façon d'introduire les fonctions exponentielles décrite ci-dessus : ce sont l'existence et l'unicité d'un tel prolongement qui sont alors admis.

Prolongement de la monotonie

La propriété de monotonie des fonctions exponentielles se déduit de l'une ou de l'autre définition de q^x énoncée préalablement ; la fonction $x \longmapsto q^x$ a le même sens de variation que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés de monotonie des suites géométriques s'étendent donc aux fonctions exponentielles.

Prolongement du vocabulaire

Le prolongement de q^n à q^x embarque celui du vocabulaire associé aux exponentielles : les mots « base », « exposant », « puissance » sont utilisés de la même manière que l'exposant soit entier ou non. Notons une exception : on peut dire « exponentielle de x » pour e^x, ce vocabulaire est absent dans le cas où seuls les exposants entiers positifs sont connus des élèves.
Le vocabulaire associé à la monotonie des suites est lui aussi conservé : croissance, décroissance.

Prolongement du point de vue graphique

En reliant les points de la représentation graphique de $x \longmapsto q^x$ définie sur $\mathbb{Z}$, on obtient une courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Nous avons constaté dans la partie III A que la question de l'unicité d'une courbe « harmonieuse » qui relie les points est peu abordée dans les manuels de Seconde et que les enseignants de cette classe ont des opinions divergentes quant à l'importance de ce sujet. Pour de nombreux élèves, « ce » prolongement, doit sembler aller de soi.

Cette façon de relier les points peut être qualifiée de « continue » dans son sens intuitif de « sans lever le crayon ». Nous avons vu dans la partie III B que c'est d'ailleurs la définition informelle de la continuité d'une fonction adoptée par les manuels en Terminale dans le cadre du programme de 2012.

Implicitement, le non expert trace de cette façon la représentation graphique d'une fonction monotone sur $\mathbb{R}$ (le crayon ne fait que « monter » ou « descendre », comme semblent l'imposer les points représentant la suite) et dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour l'absence de points anguleux).

Qu'en est-il de la calculatrice, des tableurs, des traceurs ?

Selon les modèles de calculatrice, la touche qui permet l'opération d'exponentiation est « ^ » ou « x^y ». Rien ne différentie son utilisation, que l'exposant soit un entier positif ou un réel quelconque. Le fait qu'elle renvoie un résultat, quel que soit l'exposant réel x, pour une base strictement positive q, peut pour l'utilisateur non expert sembler suffire à montrer l'existence de q^x, ou tout du moins à lui masquer la question de son existence.
De plus, les calculatrices graphiques fournissent une courbe de la fonction $x \longmapsto q^x$ qui peut sembler être « la courbe qui va de soi » dont il était question ci-dessus.

La commande qui permet d'obtenir l'exponentiation sur un tableur est « ^ ». De même que sur la calculatrice, rien ne différentie son utilisation entre un exposant entier et un exposant réel non entier.

Les traceurs fournissent eux aussi des courbes représentatives de fonctions exponentielles. Moins usités par les élèves, surtout de filière ES ou L, ils constituent un outil simple et rapide à la disposition des enseignants pour montrer à leurs élèves « le » prolongement de la représentation graphique d'une suite géométrique à la fonction exponentielle de même base.

Les outils numériques et particulièrement l'outil personnel des élèves qu'est leur calculatrice graphique semblent donc apporter le prolongement des suites géométriques aux fonctions exponentielles « clef en main » : les élèves disposent d'un moyen de calculer des valeurs approchées et d'un moyen de représenter graphiquement les fonctions exponentielles avec des notations et des commandes parfaitement congruentes avec celles concernant les suites. Le besoin de construire les nouveaux objets mathématiques que sont les fonctions exponentielles est donc certainement peu prégnant chez les élèves.
Remarquons que ce n'est pas le cas de la construction de l'ensemble des nombres complexes : la calculatrice retourne un message d'erreur à la commande $\sqrt{-1}$. Un travail de construction de nouveaux objets mathématiques a alors toute sa légitimité aux yeux des élèves.

Ces outils ne sont cependant pas sans poser de problème.
Prenons le cas des calculatrices TI 83 et TI Premium ainsi que la calculatrice Casio Graph 35+ : elles calculent des valeurs approchées d'exponentielles qui ne sont pas définies mathématiquement dans $\mathbb{R}$.

Examinons dans un premier temps les nombres $(-3)^x$ pour les exposants x de la forme $0{,}1p$ lorsque p est un entier : en mode réel, ces calculatrices calculent $(-3)^x$ pour les exposants x de la forme $0{,}1p$ lorsque p est un entier pair. Si p est un multiple de 4, le résultat affiché est la valeur approchée qu'elle renvoie pour 3^x. Si p n'est pas un multiple de 4, le résultat affiché est la valeur approchée qu'elle renvoie pour -3^x. Lorsque p est un entier impair, la calculatrice renvoit un message d'erreur.
Voici le tableau de valeur de $(-3)^x$ pour les exposants x de la forme $0{,}1p$ de l'intervalle [5 ; 6] généré par la TI Premium :

X	Y_1
5	-243
5.1	ERREUR
5.2	302.71
5.3	ERREUR
5.4	-377.1
5.5	ERREUR
5.6	469.76
5.7	ERREUR
5.8	-585.2
5.9	ERREUR
6	729

Il serait possible de définir mathématiquement $(-3)^x$, pour les exposants x de la forme $0{,}1p$ lorsque p est un entier pair, par $\sqrt[10]{(-3)^p} = \sqrt[10]{3^p} = 3^x$. Ce n'est pas le choix de TI et de Casio.

Pour les exposants de la forme $0{,}01p$, lorsque p est un entier multiple de 4, ces calculatrices renvoient une réponse alternativement positive et négative, sinon elles renvoient un message d'erreur.
Il serait pourtant possible de définir mathématiquement $(-3)^x$, pour les exposants x de la forme $0{,}01p$ lorsque p est un entier pair, par $\sqrt[100]{(-3)^p} = \sqrt[100]{3^p} = 3^x$.

Les calculatrices TI 83 et TI Premium ainsi que la calculatrice Casio Graph 35+ possèdent un mode « complexe » qui permet d'effectuer des calculs dans $\mathbb{C}$. Lorsqu'elles affichent un résultat en mode « réel », elles renvoient le même résultat en mode « complexe ».
Dans le cas de l'exponentielle, si elles renvoient un message d'erreur en mode réel, elles renvoient en mode complexe une valeur approchée de l'exponentielle complexe définie de la manière suivante : si a est un nombre complexe non nul de module r et d'argument de mesure principale θ, $\mathrm{Log}a$ est défini par $\mathrm{Log}a = lnr + i\theta$. Cette définition constitue un prolongement à $\mathbb{C}^*$ de la définition du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$[54]. Alors, pour tout nombre complexe z, a^z est défini par le nombre complexe $a^z = e^{z\mathrm{Log}a}$.

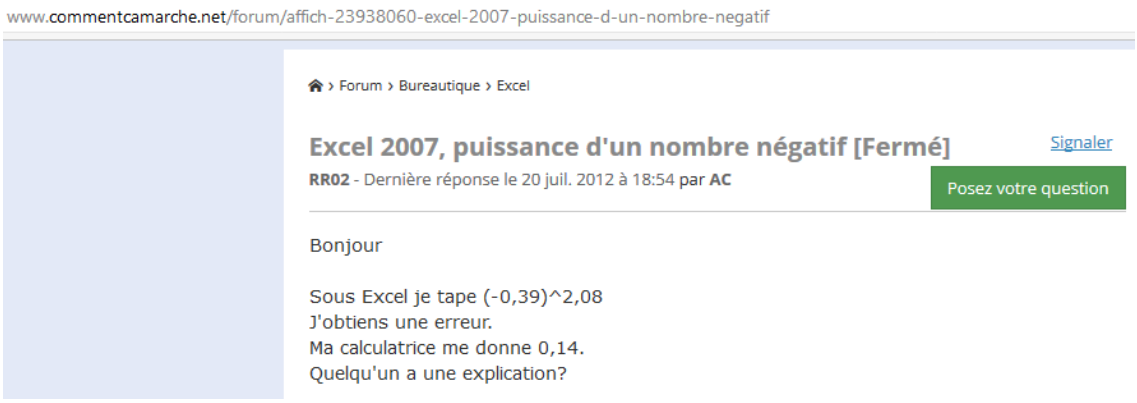
[54] La fonction logarithme ainsi définie n'est pas continue sur $\mathbb{C}^*$. Sa restriction à $\mathbb{C}\backslash]-\infty;0]$ est une fonction holomorphe.

Cette définition constitue un prolongement à $\mathbb{C}$ de celle de a^n où $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ en conservant la propriété de transformer les sommes en produits. En particulier, si a est un réel strictement négatif, et x un nombre réel, $a^x = |a|^x \times e^{i(\pi x)}$.
Par contre, elle ne prolonge pas la définition de a^n par racine dixième, où $a \in \mathbb{R}$ et n est de la forme $0{,}1p$ où p est un entier pair. Ceci tient à ce que la formule de Moivre - pour tout entier naturel n et tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ - ne se prolonge pas aux nombres n décimaux.

Ainsi, avec la définition précédente, $(-3)^{0,2} = 3^{0,2}(cos0{,}2\pi + isin0{,}2\pi) \approx 1{,}008 + 0{,}732i$; la définition par racine dixième donne $(-3)^{0,2} = \sqrt[10]{9} \approx 1{,}2457$; les calculatrices en mode « réel » ou « complexe » renvoient environ -1,2457 pour le calcul de $(-3)^{0,2}$.

Quant au tableur Excel 2013, la commande « =(-3)^0,2 » renvoie la valeur approchée -1,2457, comme les calculatrices citées ci-dessus. Les quelques essais que nous avons effectués montrent que ce logiciel renvoie un message d'erreur dans le calcul de $(-3)^x$ pour les exposants x de la forme $0{,}1p$ lorsque p est un entier autre que 2.

Il serait donc faux de conclure que les outils numériques usuels de la classe de mathématique fournissent un moyen de prolonger sans accident l'exponentiation aux exposants non entiers. La question taraude certains utilisateurs d'internet[55] :


www.commentcamarche.net/forum/affich-23938060-excel-2007-puissance-d-un-nombre-negatif

› Forum › Bureautique › Excel

Excel 2007, puissance d'un nombre négatif [Fermé] Signaler

RR02 - Dernière réponse le 20 juil. 2012 à 18:54 par **AC** Posez votre question

Bonjour

Sous Excel je tape (-0,39)^2,08
J'obtiens une erreur.
Ma calculatrice me donne 0,14.
Quelqu'un a une explication?

Dans une utilisation guidée où les élèves n'effectuent des calculs qu'avec des bases strictement positives, le prolongement se fait sans accident… mais les élèves peuvent être curieux !

ii. La définition de la fonction exponentielle en tant que fonction exponentielle particulière

Le commentaire suivant du programme officiel indique la façon dont la fonction exponentielle doit être introduite : « *On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction*. »

Parmi les logiciels couramment utilisés au lycée, on trouve des logiciels de géométrie dynamique (principalement GeoGebra), des logiciels de calcul formel et des tableurs. Le commentaire cité semble viser un logiciel de géométrie dynamique, vue sa simplicité de mise en œuvre.

Un tel logiciel permet de tracer la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ ($q \in [a; b]$ tel que a et b soient compatibles avec les capacités du logiciel) en faisant varier q via un curseur. Après avoir placé le point d'abscisse 0 de cette courbe, une commande simple permet de tracer la tangente à la courbe en ce point et d'afficher l'équation réduite de cette tangente. L'équation réduite permet à son tour de lire le coefficient

[55] Capture d'écran effectuée le 28 juillet 2017 à l'adresse : http://www.commentcamarche.net/forum/affich-23938060-excel-2007-puissance-d-un-nombre-negatif

directeur de la tangente (ou plus exactement des valeurs approchées de ce coefficient directeur). En faisant varier les valeurs de q, on conjecture que celles du coefficient directeur varient dans $]0;+\infty[$. Le fait que le coefficient directeur varie continument et de façon strictement croissante en fonction de q peut être conjecturé par l'observation de l'évolution de « l'inclinaison » de la tangente. Après avoir admis ces conjectures, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire que le coefficient directeur prend une fois et une seule la valeur 1. Le placement de la tangente de coefficient directeur 1 sur l'écran permet de lire une valeur approchée de la valeur de q correspondante, donc de e.
Les cadres graphique, algébrique et analytique sont ainsi mis en œuvre conjointement.
Le logiciel de géométrie dynamique crée, par des calculs et un affichage procédant bien entendu du discret, une illusion du continu, tant de l'ensemble des valeurs prises par q que de celles prises par le coefficient directeur – illusion qui ici est fort heureuse puisqu'elle illustre le phénomène mathématique visé. Remarquons que, bien que simples à mettre en œuvre pour l'enseignant, les tâches instrumentées peuvent se révéler difficiles pour des élèves de Terminale ES qui ont pour un certain nombre peu de pratique des logiciels de géométrie dynamique.

iii. Conclusion

Le prolongement des suites géométriques à bases strictement positives aux fonctions $x \longmapsto q^x$ définies sur $\mathbb{R}$ avec conservation de la propriété de transformation des sommes en produit ne va pas de soi mathématiquement.
Si un exposé théorique est certainement éloigné des connaissances et des pratiques d'élèves de Terminales ES et L, une simple constatation graphique associée au prolongement de la notation et de la touche « puissance » de la calculatrice parait en être une introduction bien maigre compte tenu de ce qui se joue mathématiquement dans ce passage du discret de $\mathbb{N}$ au continu de $\mathbb{R}$.

Cependant, l'histoire nous montre que les manipulations des « formes » algébriques peuvent précéder des définitions formelles de nouvelles notions. Les propriétés, la notation et l'utilisation des outils numériques se prolongent presque parfaitement ; les outils TICE à la disposition des enseignants et des élèves contiennent à la fois le prolongement de la notation et celui du graphique. Ces outils peuvent par conséquent leur offrir un prolongement du discret au continu « à bas coût », tant du point de vue de la durée de l'introduction des fonctions exponentielles en classe que du point de vue des questions conceptuelles soulevées.

Quels pourraient être les besoins des élèves de Terminales ES et L, relativement à la construction des fonctions exponentielles ?
On peut penser qu'ils pourraient retenir qu'il se passe quelque chose qui ne va pas de soi mathématiquement dans ce passage de q^n à q^x ; que remplacer n par x ne dit pas grand-chose sur ce qu'est effectivement q^xpour x réel.
Pour leurs besoins plus immédiats de réussite aux évaluations classiques de Terminale que, d'une part, q^net q^x coïncident sur $\mathbb{Z}$ tout en retenant l'allure des représentations graphiques des suites géométriques et des fonctions exponentielles de base strictement positive – connaitre l'allure de ces représentations graphiques est la seule capacité attendue qui figure dans le programme officiel concernant les fonctions exponentielles ; très certainement aussi que la propriété de transformation de sommes en produits est conservée.
Enfin, selon la tendance des programmes officiels et des examens nationaux, la modélisation devrait être de plus en plus au cœur des tâches dévolues aux élèves de lycée. Les phénomènes étudiés en filière ES peuvent relever du discret comme du continu, ils peuvent être modélisés dans le discret par des suites comme dans le continu par des fonctions. Introduire les fonctions exponentielles par la modélisation d'un phénomène continu modélisé en premier lieu par une suite géométrique peut être une excellente occasion de donner du sens aux tâches de modélisation tout en montrant (au moins partiellement) aux élèves pour quoi et comment on « remplit » du discret pour arriver à du continu.

Nous allons explorer les approches d'introduction des fonctions exponentielles proposées par quatre manuels.

b) Étude de l'introduction aux fonctions exponentielle dans quatre manuels de Terminales ES et L

Le programme officiel laisse une marge de manœuvre importante aux concepteurs de manuels et aux enseignants dans ce que ce programme dénomme la « présentation » des fonctions exponentielles. On peut se demander ce qui, du point de vue de la réussite des élèves que ce soit au Baccalauréat ou dans leurs études supérieures, ou du point de vue de leur formation en tant qu'individu et citoyen, peut être utile voire important de leur enseigner lors de l'introduction de ces fonctions : quelles tâches leur proposer, quel contenu dans l'exposition des connaissances ?

Nous nous intéresserons dans cette partie à la façon dont les concepteurs de manuels ont répondu à ces questions.

Nous analyserons quatre manuels édités en 2012 lors de la parution des « nouveaux » programmes de Terminale. Nous les avons choisis pour la diversité des introductions aux fonctions exponentielles qu'ils offrent ainsi que la proximité de ces introductions avec les choix de nos collègues de Terminales ES et L.

Problématique :
Voici les questions qui guident le travail d'analyse, manuel par manuel :

De quelle façon le manuel amène-t-il le continu dans le discret ?

Sur quelles propriétés de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{D}$, de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$ (du moins en acte), les introductions des manuels s'appuient-elles implicitement, explicitement ?
Quels jeux de cadre sont utilisés ? De quelle façon ?
Quels outils numériques sont utilisés ? De quelle façon ?
Y aurait-il des manques qui auraient pour conséquence que les élèves ne puissent pas comprendre le « jeu auquel on joue » d'une part, pour qu'ils puissent appliquer correctement ce qui est introduit d'autre part ?

Quel est le mode de prolongement envisagé – extension, construction au moins partielle ? Qu'est-ce qu'il permet de prolonger en termes de propriétés ? Quelle transparence, quelle opacité des réponses à ces questions ?

A quoi le prolongement proposé peut-il servir ? Est-ce que les élèves peuvent s'approprier la question de la cohérence des notations « puissance » ? Les élèves sont-ils incités à se poser la question de l'utilisation du même vocabulaire dans le cas discret et dans le cas continu ?

La définition adoptée par le manuel est-elle correcte mathématiquement, cohérente avec le mode de prolongement envisagé ?

Méthodologie :
Analyse de tâches des exercices et activités en amont de « l'exposé de connaissances » proposé (détaillée pour l'introduction aux fonctions exponentielles ; moins détaillée pour l'introduction à la fonction exponentielle de base e) ; analyse de « l'exposé de connaissances ». Avec une attention particulière pour les changements de cadre, les propriétés (éventuellement en acte) de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$ mobilisées.

Les analyses détaillées des manuels sont mises en annexe (annexes 9 à 12).
Les quatre manuels sont, dans l'ordre dans lequel ils figurent en annexe : « Hyperbole » édition Nathan ; « Odyssée » édition Hatier ; « Déclic » édition Hachette et « Transmath » édition Nathan.

Des « activités « réponse à un problème » :
Dans trois des manuels sur les quatre, l' « activité » d'introduction aux fonctions exponentielles tente de « répondre à un problème ».

Dans les manuels « Hyperbole » et « Déclic », le problème est de modéliser un phénomène évolutif en fonction du temps afin de pouvoir déterminer son évolution « au fil du temps » pour l'un, « à tout instant » pour l'autre. « Au fils du temps » fait appel à une intuition du continu proche de celle de la corde au niveau macroscopique à laquelle nous avons fait référence dans la première partie de ce travail. « A tout instant » fait appel au continu constitué de points : remarquons la similarité entre l'expression « à tout instant » et l'expression « pour tout réel ».

En tout état de cause, la variable temps est *a priori* continue, du moins en mathématiques et en physique classique. Par ailleurs, elle est représentée par la droite réelle, continue par construction. Que les élèves en aient une conception discrète ou continue, sa propriété de divisibilité à l'infini est largement admise ; or nous avons constaté que cette propriété est un précurseur du continu.

Une unité de temps et une origine du temps étant choisies, le phénomène peut être modélisé par une fonction (implicitement d'une variable réelle), dont on ne connait pas d'expression algébrique.
Le phénomène est à variation relative constante, c'est implicite dans un manuel, explicite dans l'autre ; la variation relative entre deux unités de temps est connue. Il est donc possible de modéliser l'évolution à tout instant entier positif par une suite géométrique dont on connait la raison et le premier terme – dont on peut par conséquent connaitre l'expression du terme général.

La suite est alors étendue à une fonction afin de répondre au problème :
- Dans le manuel « Hyperbole », des images de la fonction à des instants entiers négatifs puis fractionnaires aux dénominateurs de plus en plus grands sont calculées, par l'intermédiaire de coefficients multiplicateurs, grâce à la propriété de variation relative constante. Les points correspondants sont représentés graphiquement via le tableur qui génère des valeurs décimales approchées de la variable et des images ; l'énoncé donne l'expression de la fonction et sollicite finalement la calculatrice afin d'y « entrer » la fonction et d'afficher son graphe.
- Le manuel « Déclic », inversement, donne d'emblée l'expression de la fonction à « entrer » dans la calculatrice. Puis il demande de calculer des valeurs à des instants entiers négatifs et fractionnaires ; et de vérifier sur un exemple que la variation relative entre deux instants (décimaux) distants d'une unité de temps est la même.

Les valeurs entières négatives et fractionnaires de la variable sont privilégiées pour leur facilité d'interprétation en tant qu'instant. La divisibilité à l'infini du temps permet de poser naturellement la question de l'évolution du phénomène à des instants fractionnaires (davantage que décimaux non entiers).

Intéressons-nous maintenant à la grandeur étudiée. Il s'agit de la valeur d'un bien pour une situation et de l'effectif d'une population pour l'autre.
Or le nombre d'individus est un entier ; un prix prend ses valeurs dans un ensemble de nombres décimaux à au plus n décimales (n étant fixé), ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$, donc lui aussi discret. Dans les deux cas, le phénomène étudié est donc discret.

Par conséquent la fonction qui au temps (qui décrit un intervalle de $\mathbb{R}$) associe la mesure de la grandeur étudiée ne peut pas être une fonction continue.

Intéressons-nous au point de vue intuitif puisque, en Terminale au lycée général à ce jour, la continuité d'une fonction est « définie » de façon intuitive. L'analyse de manuels nous a montré que l'intuition retenue est celle du tracé de la courbe de la fonction sans lever le crayon. Pour donner un sens au fait de relier les points dans un contexte d'évolution d'une population ou d'un prix, il faudrait que l'effectif de cette population ou le prix prenne toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Même avec une conception de $\mathbb{R}$ lacunaire, ne comprenant par exemple que les entiers et les décimaux ayant « peu de chiffres après la virgule », un élève de Terminale est capable de comprendre que cela n'est pas possible.

Sans doute faut-il prendre le soin de spécifier aux élèves (avec un vocabulaire adapté) que la situation de croissance de population (ou d'évolution d'un prix) qui leur est soumise est discrète et qu'elle est *modélisée* par un objet mathématique qui relève du continu ?

Le manuel « Odyssée » choisit une situation intra mathématique. Le problème (qui n'est pas formulé dans l'énoncé) est de voir ce qui se passe en étendant la propriété vérifiée par les suites géométriques : l'image du terme de rang n $(n > 0)$ est la moyenne géométrique des images des termes de rangs $n-1$ et $n+1$. Un processus dichotomique permet de prolonger la suite à un ensemble de valeurs rationnelles - dense dans $\mathbb{R}$, ce qui n'est bien évidemment pas dit. Les résultats de la quatrième itération du processus sont donnés par une copie d'écran de tableur et le nuage de points correspondant. La variable prend à cette étape des valeurs de la forme $\frac{k}{2^4}$ $(k \in \mathbb{Z})$ qui sont affichées sous forme de valeurs approchées décimales. Le nuage de points apparait suffisamment dense à cette étape pour que le concepteur dise qu'on admet l'existence d'une fonction qui réponde au problème.

En dehors du fait qu'il est plus motivant pour les élèves d'aborder une notion si elle répond à un problème, une « activité » de ce type permet de répondre en partie à une question que beaucoup d'élèves se posent : « A quoi ça sert ? ».
Du point de vue du passage du discret au continu, ces « activités », par le biais de répondre au problème qu'elles posent, mobilisent des valeurs de la variable qui sont non entières. Elles ne peuvent qu'enrichir la perception qu'ont les élèves de « ce qu'il y a entre deux entiers ».
Pour celles des manuels « Hyperbole » et « Odyssée », une expérience de pensée permettrait d'imaginer ces valeurs se densifier à l'infini, par divisibilité à l'infini (du temps, de $\mathbb{R}$). Bien qu'il soit impossible à ce niveau d'enseignement de conceptualiser qu'un passage à la limite permette de « boucher tous les trous », le continu de l'ensemble pris par la variable est malgré tout approché dans son aspect « sans saut ».

Est-ce que cela peut manquer aux élèves de n'approcher le continu que dans son aspect de divisibilité à l'infini ?
Numériquement, aujourd'hui, les entiers et les décimaux prédominent dans les tâches qui leur sont données, avec la présence discrète de quelques rationnels non décimaux (trois des « activités » d'introduction en sont des exemples) et de rares irrationnels (π et e) - qui sont mobilisés numériquement par des valeurs approchées décimales. La généralisation de l'usage de la calculatrice est probablement partie prenante de cette évolution. Les irrationnels en tant qu'ensemble sont donc éloignés de ce que la plupart des élèves de Terminale ES ou L peuvent concevoir.
En outre, les « trous que laisse $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ » ne se voient pas ; les tâches des élèves ne soulèvent pas de difficultés à ce sujet.
Nous ne voyons donc pas de raison de penser qu'à ce niveau d'enseignement, le fait de percevoir « le dense » comme du « quasi continu » puisse constituer un manque.

Y a-t-il construction de la nouvelle fonction ?
L' « activité » du manuel « Déclic » procède par prolongement du domaine de définition de la « forme » $P(n) = 3 \times 8^n, n \in \mathbb{N},$ à la « forme » $P(x) = 3 \times 8^x, x \in \mathbb{R}$. La calculatrice peut contribuer à faire apparaitre ce prolongement légitime aux élèves.
Celle du manuel « Transmath » procède par prolongement de l'ensemble des points de coordonnées $(n; q^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ à ceux d'une courbe « continue et régulière ».
Les deux manuels adoptent dans l'exposé de connaissance une définition contestable de la fonction $x \mapsto q^x$ (q>0) : le prolongement de la suite géométrique de terme général q^n pour l'une ; celle dont la courbe est obtenue en reliant les points de coordonnées $(n; q^n), n \in \mathbb{Z}$ pour l'autre. (C'est nous qui soulignons).

Ces deux manuels adoptent une démarche de prolongement qui pourrait sembler aller de soi pour des élèves, dans le cadre algébrique pour l'une et le cadre graphique pour l'autre. Aucune construction du sens de l'expression q^x n'est faite, ne serait-ce que sur un exemple numérique d'un exposant non entier.
Le flou de ce discours risque d'amplifier la perception de certains élèves : « Il n'y a rien à comprendre, c'est des math ».

Les « activités » des manuels « Hyperbole » et « Odyssée » proposent une construction, partielle bien sûr, de fonctions exponentielles.
Elles représentent un investissement de temps en classe qui est conséquent et soulèvent des difficultés pour les élèves d'ordre conceptuel, ainsi que de calcul algébrique. Les outils numériques que sont le tableur et la calculatrice peuvent aussi bien enrichir les tâches que les appauvrir ou les compliquer à l'excès. S'il veut que son « activité » soit une réussite auprès des élèves, l'enseignant doit y investir un temps de préparation non négligeable.

Finalement, cet investissement est-il « rentable », est-ce que dévoiler aux élèves le mode de construction proposé peut les aider, et à quoi ?
Nous avons vu plus haut qu'un tel mode de construction permet d'envisager un grand nombre de valeurs non entières de la variable. Dans un contexte institutionnel qui met l'accent sur la modélisation de phénomènes (discret et) continus, il nous semble important d'envisager la variable au plus près de $\mathbb{R}$ que les élèves des filières ES et L peuvent le concevoir : dans son aspect dense dans $\mathbb{R}$.
Un tel mode de construction peut aider les élèves à voir que passer d'une modélisation discrète à une modélisation continue ne va pas de soi. Les énoncés des problèmes qu'ils auront à résoudre ne peuvent qu'avoir alors plus de sens pour eux.
D'un point de vue intra mathématique, un tel mode de construction peut aider à donner un sens à une nouvelle fonction, pour qu'elle ne soit pas, pour les élèves, juste une « forme », ancienne, à mobiliser sur un ensemble de valeurs étendu, ce qui peut leur paraitre normal « puisque ce sont des mathématiques ». Il permet aussi un énoncé de définition mathématiquement rigoureux, en termes d'existence et d'unicité, qui épouse de façon cohérente la démarche de construction de l' « activité » d'introduction - c'est ce qu'a fait le manuel « Hyperbole ».

La cohérence des notations et du vocabulaire :
Les manuels ne disent rien sur le prolongement de l'utilisation du vocabulaire.

Les manuels « Déclic » et « Transmath », rappelons-le, introduisent les fonctions exponentielles par prolongement de la « forme » pour l'un, de la représentation graphique pour l'autre ; la « forme » q^x serait « définie » par ce prolongement. Ensuite, ils énoncent la relation fonctionnelle en tant propriété de la fonction ainsi « définie ».
Pour les élèves, cela doit sembler magique que tout « marche » si bien en mathématiques ! Magique, ou normal : nos observations en classe de Première S permettent de vérifier que « x désigne une valeur réelle » et « n désigne une valeur entière » ne sont pas nécessairement des implicites pour les élèves de lycée, ce qui peut faciliter ce prolongement purement symbolique auprès des élèves
Le manuel « Transmath » prend un grand soin pour souligner et démontrer le fait que les autres propriétés algébriques rencontrées par les élèves pour les exposants entiers sont vérifiées aussi pour les exposants réels. C'est le seul des quatre manuels à établir clairement le lien entre l'ancien et le nouveau du point de vue des connaissances des élèves concernant les propriétés algébriques.
Le manuel « Odyssée » tente une justification de la relation fonctionnelle à partir de la propriété qui est à la base du processus dichotomique. Nos analyses montrent que cette justification présente des embuches. Le manuel donne des éléments de démonstration plus ou moins corrects pour les autres propriétés algébriques.

Le manuel « Hyperbole » fait calculer par le biais de coefficients multiplicateurs des images de valeurs non entières de la variable par la fonction qui modélise la situation. Puis il utilise ces résultats pour que les élèves puissent constater que la fonction vérifie la relation fonctionnelle. Ce ne sont que des exemples, mais l'enseignant peut s'en emparer pour, en les généralisant, motiver l'usage de la notation exponentielle.
Il démontre brièvement les autres propriétés algébriques.

La « forme » q^x n'est pas juste un heureux hasard : dans ses débuts, au XVIIe siècle, bien que n'ayant pas encore été définie mathématiquement, elle contenait la propriété de transformer des sommes en produits. Aujourd'hui, dans un cours de mathématiques dans lequel les fonctions exponentielles sont (partiellement) construites, la « forme » exponentielle est choisie parce que ces fonctions vérifient la relation fonctionnelle. Et non l'inverse. Une démarche du type de celle du manuel « Hyperbole » nous semble donc appropriée.

Le rôle des outils numériques :
Mis à part le manuel « Transmath », les autres manuels font un large usage des outils du numériques.
Le tableur joue un rôle important dans le cadre graphique, dans les « activités » d'introduction des manuels « Hyperbole » et « Odyssée », en permettant de visualiser le nuage de points qui se densifie à mesure que le processus de division (du temps pour l'un, d'intervalles de $\mathbb{R}$ pour l'autre) avance.

Nous avons vu que cet usage du tableur doit se faire avec précautions :

- Les élèves doivent avoir suffisamment de pratique du tableur pour pouvoir générer les tableaux de calcul demandés ;
- Le tableur propose des types de graphiques variés pour des données qui sont par nature discrètes avec cet outil. Même si les élèves sont conscients qu'ils représentent graphiquement des points isolés et choisissent un graphique du type « nuage de points » plutôt que « courbe », le tableur leur propose des « nuages de points avec courbe lissée » et des « nuages de points avec lignes droites ». Ces graphiques ressemblent à tel point à la représentation graphique de la fonction exponentielle visée par l' « activité » que leur utilisation risque fort d'enlever l'intérêt de la suite du travail.

La calculatrice aussi risque de saper les efforts de construction des fonctions exponentielles de ces deux manuels, en ce qu'elles génèrent aussi bien les calculs numériques, les tableaux de valeurs, que les courbes des fonctions exponentielles.

Nous avons pu constater aussi au cours de l'analyse de l' « activité » du manuel « Hyperbole » que l'interface entre les deux outils pouvait être une source de difficulté supplémentaire.

La définition des fonctions exponentielles :
On peut deviner que la définition mathématique de q^x qui sous-tend la conception des « activités », définitions et propriétés concernant les fonctions exponentielles du manuel « Odyssée » est du type : « Si x est réel, on définit q^x comme limite des q^{x_n} où (x_n) est une suite de rationnels qui converge vers x » - il s'agit de la première des deux approches décrite dans la partie de ce travail concernant le programme officiel de Terminale ES et L. L' « activité » proposée est en cohérence avec ce choix. Par contre, nous avons vu que ce choix génère des maladresses dans la définition et les propriétés énoncés.

Le choix du concepteur du manuel « Hyperbole » s'est clairement porté sur la deuxième approche. La cohérence entre « activité » d'introduction, définition et propriétés et grande.

Dans les deux autres manuels, les définitions sont mathématiquement erronées. L'une repose sur la « forme » algébrique de l'exponentielle (une notation y tient lieu de définition) ; l'autre sur l'évidence supposée de l'unicité du prolongement d'un nuage de points à abscisses entières en une courbe « continue et régulière », courbe qui définirait une fonction exponentielle.

Les « activités » d'introduction à la fonction exponentielle :
Nous avons pu constater que les « activités » d'introduction à la fonction exponentielle (de base *e*) sont semblables dans les quatre manuels.
Nous nous intéressons particulièrement à la façon dont l'existence et l'unicité de cette fonction sont introduits, éventuellement via le théorème des valeurs intermédiaires.

Le manuel « Hyperbole » ne pose pas la question de l'existence et l'unicité de cette fonction.
Le manuel « Transmath » fait conjecturer l'existence et l'unicité de cette fonction. La conjecture est implicitement admise.
Dans ces deux manuels, le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas convoqué. (Rappelons que dans le manuel « Hyperbole », il est étudié dans le chapitre qui suit).

Le manuel « Odyssée » demande un tableau de variations du coefficient directeur de la tangente au point d'abscisses 0 en fonction de q. Le théorème de valeurs intermédiaires est explicitement convoqué par l'énoncé.
Le manuel « Déclic » fait conjecturer le sens de variations du coefficient directeur de la tangente au point d'abscisses 0 (en omettant de marquer « en fonction de q »), pas la continuité. La conjecture est admise sans le dire puis une justification de l'existence et l'unicité est demandée.

La continuité du coefficient directeur de la tangente au point d'abscisses 0 en fonction de q n'est donc prise en compte que dans un des manuels, par le biais d'un tableau de variations – rappelons que selon le programme officiel de Terminale, les flèches des tableaux de variations contiennent la continuité de la fonction en plus de sa monotonie.

Le rôle de l'enseignant :
L'analyse des quatre manuels a pu souligner les difficultés que pose l'introduction des fonctions exponentielles, pour l'enseignant ainsi que pour les élèves.

Les « activités » d'introduction des quatre manuels présentent chacune des avantages, des inconvénients, des manques, des imprécisions, des erreurs parfois. Les définitions qu'ils proposent dans l'exposé de connaissances sont plutôt cohérentes avec les « activités » proposées ; en conséquence elles sont, pour trois d'entre les quatre, incomplètes ou erronées.

Citons quelques points relevés dans les manuels :

- Les implicites, voire les non-dits sont nombreux : lorsqu'il y a une généralisation d'exemples, une conjecture admise, une extension par la « forme » ou par la courbe voire par la calculatrice, l'enseignant est le seul qui puisse expliciter le non-dit, expliquer les points difficiles aux élèves, combler les manques. Il peut aussi pointer les erreurs, bien sûr.
- En particulier, dans l' « Hyperbole » et l' « Odyssée », l'enseignant peut faire effectuer aux élèves l'expérience de pensée de continuer de diviser la variable à l'infini ;
- Les outils tableur et calculatrice sont source de difficultés que les élèves ne peuvent généralement pas surmonter seul.

Qu'ils utilisent le manuel de leurs élèves, qu'ils s'inspirent d'autres manuels ou d'autres ressources, les enseignants ont un rôle important à jouer pour décrypter avec les élèves les enjeux de l' « activité » d'introduction s'il choisit d'en faire une, et le sens de la (ou des) définition(s) qu'il choisit et que l'élève peut rencontrer dans son manuel, sur internet...

Tableau récapitulatif des approches des fonctions exponentielles par les quatre manuels analysés

Acronymes : AI pour « Activité d'Introduction »
RAP pour « réponse à un problème »
EC pour « exposition des connaissances »

	AI : RAP	**AI : équation fonctionnelle**	**AI : instruments numériques**	**AI : passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$**	**Définition dans l'EC**
Hyperbole	Calcul de la valeur d'un bien immobilier en fonction du temps	Vérifiée sur des exemples numériques	Tableur pour valeurs rationnelles (calculs et graphiques) ; Calculatrice pour courbe	De $\mathbb{N}$ à un sous ensemble de $\mathbb{Q}$ par coefficients multiplicateurs ; à $\mathbb{R}$ par calculatrice	Correcte
Odyssée	Prolongement par dichotomie d'une suite géométrique		Tableur pour valeurs rationnelles (calculs et graphique)	De $\mathbb{N}$ à un sous ensemble de $\mathbb{Q}$ par dichotomie ; à $\mathbb{R}$ par « évidence » visuelle	Unicité implicite ; confusion définition et propriétés ; la « forme » tient lieu de définition
Déclic	Étude d'une population de bactéries en fonction du temps		Calculatrice pour entrer la fonction puis calculs de valeurs approchées	Prolongement par la « forme » algébrique ; Calculatrice pour valeurs numériques	Unicité implicite ; confusion définition et propriétés ; la « forme » tient lieu de définition
Transmath				Prolongement par courbe « continue et régulière »	« Définition graphique »

2. Du côté des enseignants

a) Une séance d'introduction aux fonctions exponentielles en Terminale ES via l'étude du prix d'un bien immobilier.

Nous présentons dans ce qui suit une séance d'introduction aux fonctions exponentielles en Terminale ES qui a eu lieu en décembre 2014. Nous disposons de l'énoncé de l' « activité » et d'un enregistrement vidéo de la séance, qui nous permettent une analyse des tâches et du déroulement. L'enseignant a plus de cinq ans d'ancienneté, il n'est donc pas néophyte.

Il s'agit d'une séance de deux heures qui vise à introduire les fonctions exponentielles via une situation d'évolution de la valeur d'un bien immobilier, visiblement inspirée du manuel « Hyperbole » de Terminale ES, édition 2012. La situation du manuel est analysée dans la partie III de ce travail. Pour rappel, le bien augmente de 21% par an. La détermination des valeurs de ce bien chaque semestre puis chaque mois permet de densifier le « nuage de points » qui représente la valeur du bien en fonction du temps.
Voici l'énoncé tel que l'enseignant l'a conçu :

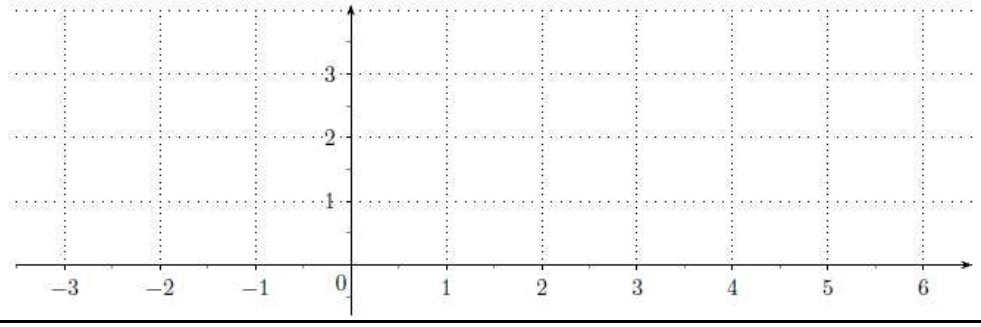
I) Etude d'un marché immobilier

Dans un pays fictif, les prix de l'immobilier progressent, depuis 2008, de 21 % par an.
Un appartement est estimé à 100000 dollars au 1er janvier 2011.
On aimerait observer l'évolution de la valeur de ce bien au fil du temps.

On note $f(t)$ la valeur de cet appartement en centaine de milliers de dollars à l'instant t (en années) en prenant pour $t = 0$ le 1er janvier 2011. On a donc $f(0) = 1$.

1. Combien vaut $f(1)$? Et $f(2)$?
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$? Donner une expression de u_n en fonction de n.
3. (a) On aimerait connaître la valeur de l'appartement au 1er janvier 2010 et 2009 , interpréter ces calculs à l'aide de f. Quelle est cette valeur ?
   (b) A l'aide de votre calculatrice, complétez le tableau ci-dessous et représentez le nuage de points associé.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$										



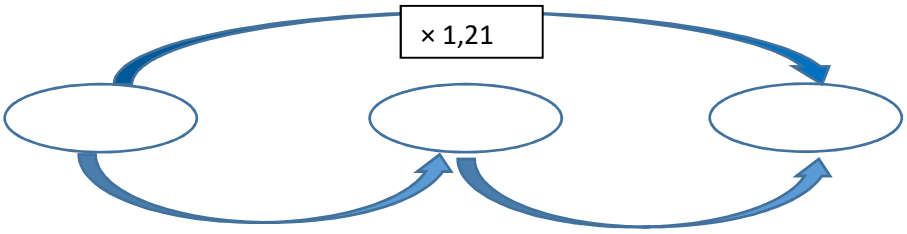
4. Le propriétaire souhaite connaître la valeur de l'appartement début juillet 2011.
   (a) Quel est le taux d'augmentation pour un semestre si le taux d'augmentation annuel est de 21 % ?
   (b) En déduire $f(0,5)$. Calculer alors $f(1,5)$ puis $f(2,5)$ et interpréter ce résultat.
   (c) Vérifier que $f(1,5) = f(1) \times f(0,5)$ et que $f(2,5) = f(1) \times f(1,5)$.
   (d) A l'aide de votre calculatrice, complétez le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous et complètez le nuage de points.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$																			

5. On veut connaître à présent l'évolution de la valeur du bien mois par mois.
   (a) Vérifier que 1,6 % est le taux mensuel approché pour avoir un taux annuel de 21 %.
   (b) En déduire $f\left(\frac{1}{12}\right)$ c'est-à-dire la valeur du bien au 1er février 2011.
   (c) A l'aide d'un algorithme, faites le tableau de valeurs de la fonction f avec le pas de $\frac{1}{12}$ et complètez le nuage de points.
6. (a) Sur notre graphique, nous sommes en train de tracer points par points la courbe représentative d'une fonction. Quelle est cette fonction ?
   On appelle cette fonction la fonction exponnentielle de base 1,21.
   (b) En notant f cette fonction, combien vaut $f(x+y)$ d'après la question 4)c).

Comme le manuel « Hyperbole », cet enseignant utilise d'emblée une notation fonctionnelle ; cependant il nomme $f(t)$ plutôt que $v(t)$ la valeur du bien au temps t. La notation est celle à laquelle les élève sont habitués pour une fonction réelle d'une variable réelle. Implicitement le temps est donc à valeurs dans $\mathbb{R}$; la valeur du bien immobilier est une fonction du temps à valeurs réelles, elle est donc implicitement la mesure d'une grandeur continue - les élèves n'envisagent dans l'ensemble pas de fonction non continue au lycée en série ES.
Cependant, le lien avec les suites est fait (momentanément) dès la deuxième question dans laquelle l'enseignant pose $u_n = f(n)$, demande la nature de la suite (u_n) puis l'expression de u_n en fonction de n.

Les tâches suivantes sont elles aussi très semblables à celles de l'« activité » du manuel.
Comme dans le manuel, le fait que l'évolution du prix de ce bien soit à variation relative constante reste implicite.
L'enseignant anticipe la difficulté des élèves à trouver le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation du prix par semestre, il fait au tableau un diagramme de ce type :



Après qu'un élève propose la racine carrée de 1,21, l'enseignant rappelle aux élèves qu'ils ont déjà rencontré ce type de question par le passé et qu'à cette occasion ils ont utilisé des racines cubiques.
Les racines sixièmes et douzièmes sont ensuite mobilisées par les élèves pour le calcul du coefficient multiplicateur correspondant à une durée d'un mois : ils proposent $\sqrt[6]{1,1}$ et $\sqrt[12]{1,21}$.
Dans cette classe, les racines nièmes sont donc non seulement connues mais aussi mobilisables ; c'est le résultat d'un choix de l'enseignant (fait peut-être avec son collègue de sciences Économiques et Sociales), la notion de racine nième ne figurant pas au programme officiel.

Puis l'enseignant montre immédiatement aux élèves qu'on peut aussi élever le coefficient trouvé (environ égal à 1 + 1,6%) à un exposant entier adéquat pour trouver la valeur du bien au mois par mois. L'enseignant convoque à nouveau la « forme » exponentielle.

Comme dans le manuel, le tableur est utilisé pour calculer et représenter des valeurs de plus en plus nombreuses.
C'est l'enseignant qui est aux commandes.

La tâche de la question 5. c) ne figure pas dans le manuel consiste à écrire un algorithme qui établit un tableau de valeurs de la fonction f avec un pas de $\frac{1}{12}$. Voici le déroulement de sa résolution :
L'enseignant commence à écrire au tableau une boucle tant que. C'est un élève qui propose de nommer N la variable algorithmique qui prend pour valeurs le temps. Ce peut être le fruit de l'habitude puisque les algorithmes rencontrés par les élèves de série ES servent essentiellement à générer des termes d'une suite ou la valeur d'un seuil à partir duquel les termes d'une suite sont supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée. Clairement, l'algorithme est perçu par les élèves comme faisant partie du monde du discret.
L'enseignant utilise cette proposition tout en expliquant d'emblée : « *N c'est notre x à nous* ». Il fait un pont entre le discret représenté par la lettre N et le continu représenté par la lettre x. Notons que l'enseignant aurait pu dire « *N c'est notre t à nous* », ce qui aurait été plus proche des notations de cette « activité ». Pour cet enseignant, sans doute la lettre « t » n'est-elle pas aussi porteuse du sens de variable réelle que la lettre « x ».
En tenant compte des interventions d'élèves, l'enseignant écrit au tableau l'algorithme « à trou » :

```
0 → N
1 → U
Tant que N < 6
        U × 1,016 → U
        Afficher U
        N + … → N
Fin Tant que
```

Les élèves veulent remplir le « trou » par N+1. C'est un automatisme, le suivant de N est N + 1 ; N représente pour eux non seulement une variable algorithmique discrète mais de surcroît entière.
L'un d'eux propose tout de même N + $\frac{1}{12}$.
L'algorithme aurait pu être l'occasion d'expliciter le fait que les valeurs de départ de la fonction ne sont pas exclusivement dans $\mathbb{N}$ et souligner qu'on ne travaille à ce stade plus sur un ensemble discret de valeurs.

Intéressons-nous à la question 6. a) de l'activité, qui ne figure pas dans celle du manuel « Hyperbole » : « *Sur notre graphique, nous sommes en train de tracer points par points la courbe représentative d'une fonction. Quelle est cette fonction ?* ». On peut se demander ce qu'attend l'enseignant : une réponse dans le cadre graphique (le graphe de la fonction) ? dans le cadre algébrique (l'expression de $f(t)$ en fonction de t ? dans le cadre fonctionnel, registre de la langue naturelle (le nom de la fonction) ?
Les élèves répondent par $x \times 1{,}21^x$, rapidement corrigé en $1 \times 1{,}21^x$. La réponse à cette question se situe donc dans le cadre algébrique pour les élèves (et peut-être pour l'enseignant qui ne fait pas de commentaire). La « forme » algébrique retenue par les élèves est celle de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,21, $1 \times 1{,}21^n$, dans laquelle la lettre x se substitue à la lettre n. Cette « forme » suffirait à définir la fonction.

L'enseignant demande alors au groupe classe : « Sabine a marqué 1,2 puissance 1,5 ; est-ce qu'on a le droit de mettre 1,21 puissance 1,5 ? ». La notation exponentielle de base 1,21 était donc déjà utilisée par certains élèves avec des exposants décimaux non entiers, ainsi que la touche correspondante de la calculatrice pour effectuer les calculs de cette « activité », avant cette phase de conclusion.
Les élèves répondent unanimement que oui. L'enseignant poursuit : « on peut le faire. C'est ça qu'on appelle une exponentielle ».

À ce stade, différentes bases d'exponentielles cohabitent : 1,21 ; 1,1 ; 1,016. Cela n'aura visiblement pas perturbé les élèves. L'enseignant aurait pu s'emparer d'égalités du type $1{,}1^3 = 1{,}21^{1{,}5}$ afin d'inférer le prolongement des règles de calcul algébrique sur les exposants, visées par le programme officiel. Il ne le fait pas.

Afin de montrer aux élèves la courbe de cette fonction, qui prolonge le nuage de points déjà visuellement dense, l'enseignant affiche sur le logiciel GeoGebra la courbe de la fonction exponentielle de base 1,21. Le changement de logiciel marque le passage d'un graphe du monde discret, émanant d'un tableau de valeurs en nombre fini généré par un tableur, à un graphe du monde continu, résultant d'une commande sur un grapheur. L'« activité » du manuel, dont les questions s'adressent aux élèves individuellement ou par petits groupe et non au groupe classe, opère ce passage via le grapheur de la calculatrice.

Un court échange entre l'enseignant (M.) et une élève a lieu à ce moment et mérite d'être relaté :

> Une élève : « Est-ce à dire que pour trouver f de 2,5 au lieu de faire une fois 1,1 puissance 5 on fait 1,21 puissance 2,5 ? »
> M. répond : « Oui, on peut mettre des exposants à virgule »… « Il suffit de faire 1,21 puissance x et vous avez toutes les valeurs immédiatement ».
> L'élève : « C'est juste une puissance à un chiffre décimal ? »
> M. : « Mais c'est pas rien ce qu'on vient de faire, on vient de passer des nombres entiers à n'importe quel nombre et ça vous pose pas de problème… 1,21 à la puissance π ça vous pose pas de problème ? ».
> L'élève dit que non. M. répond : « Tant mieux mais ce n'est pas immédiat. »

Dans un premier temps, la question de cette élève a pour conséquence que l'enseignant explicite le fait que les élèves peuvent faire le calcul de la valeur du bien, dorénavant, avec la formule $1 \times q^n$ étendue à des exposants non entiers, à l'aide de la touche « puissance » de la calculatrice.
On perçoit la déception de l'élève qui se demande pourquoi ils ont fait tout ce travail pour ça, pour utiliser une formule et une touche de calculatrice qu'ils connaissent et utilisent depuis longtemps… Elle ne perçoit visiblement pas l'enjeu que constitue le prolongement, qu'elle a pourtant partiellement construit au cours de la séance. On peut douter que la réponse de l'enseignant l'ait finalement convaincue de l'utilité de celle-ci.

Retenons que :
- pour ce type d'élèves, on « remplit » $\mathbb{R}$ par les « nombres à virgule » ; ou peut-être plus exactement par les décimaux à deux, trois ou quatre décimales. Notre pratique d'enseignante confirme ce point.
- les concepteurs de manuels et le professeur ont pour but de construire – en partie du moins - des objets mathématiques. Ce besoin de construction n'est pas ressenti par les élèves pour lesquels la calculatrice suffit à faire foi ; il a donc besoin d'être sollicité par un questionnement approprié.

Existe-t-il une réponse satisfaisante à cette question d'élève, dans ce contexte d'enseignement (à ce niveau d'enseignement, avec cet ensemble de tâches et ce déroulement) ?

La dernière question est traitée sans difficulté par généralisation. L'enseignant souligne que « c'est la prolongation des formules de collège ».

Sur l'ensemble de la séance, l'enseignant délègue aux élèves essentiellement les tâches calculatoires demandant peu d'adaptations et traite les tâches les plus délicates avec le groupe classe. Ceci lui permet d'introduire du « méta » dans son discours lorsqu'il le juge utile. Et permet aux élèves de rester attentifs et investis tout au long de la séance, qui est pourtant très dense.
Cet investissement des élèves peut expliquer la déception exprimée par l'une d'elle, le « méta » du discours de l'enseignant n'a pas suffi à lui faire percevoir l'enjeu de la séance. Retenons qu'une « activité » considérée comme porteuse de sens par un manuel et par un enseignant chevronné ne l'est pas nécessairement par les élèves.

L'exposition de connaissances distribuée aux élèves suite à cette « activité » est la suivante :

Définition 1

Soit q un nombre réel strictement positif.
On appelle **fonction exponentielle de base** q le prolongement continu de la suite géométrique de raison q.

Cette fonction est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto q^x$

Propriété 1

La fonction exponentielle de base q est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2

La fonction exponentielle de base q transforme les sommes en produits.

Pour tous réels x et y, $q^{x+y} = q^x \times q^y$

Ce qui sous-tend la définition donnée par l'enseignant peut être induit par son « activité » d'approche qui mobilise un modèle d'évolution d'un phénomène à variation relative constante : la suite géométrique est prolongée à un ensemble de rationnels via une subdivision du temps. Cette subdivision étant implicitement infinie, la suite peut être prolongée aux rationnels. La continuité sur $\mathbb{R}$ permet de définir le prolongement (unique à partir du prolongement aux rationnels) sur l'ensemble des réels.
L'énoncé de la définition présente l'avantage d'être proche de ce que les élèves ont pu percevoir au moment de l' « activité » d'introduction ; elle n'en est pas moins mathématiquement incorrecte. En effet, il n'existe pas un unique prolongement continu de la suite géométrique de raison q ; l'unicité tient à ce que la variation relative est constante, ou de façon équivalente à ce que le prolongement continu vérifie la relation fonctionnelle (qui n'est donc pas une propriété mais fait partie intégrante de la définition).
De surcroît, une « forme » algébrique ne définit une fonction que lorsque cette forme est définie au préalable, ce qui n'est pas le cas ici.

b) Retours d'expérience d'enseignants

Nous avons questionné une dizaine d'enseignants en Terminale ES sur leur introduction aux fonctions exponentielles.

Certains collègues consultés qui optent pour une introduction basée sur l'évolution d'un phénomène dans le temps à variation relative constante estiment que la durée consacrée à cette introduction est longue, pour un gain hypothétique du côté des apprentissages des élèves.

Ceci expliquerait que la majorité des collègues consultés fait le choix, comme le manuel « Transmath » édition de 2012[56], de présenter le prolongement dans le cadre graphique, comme allant de soi (et donc comme étant le seul prolongement continu et « régulier » de la représentation graphique de la suite). Ils montrent aux élèves au moins deux exemples – l'un pour lequel la base est strictement supérieure à 1 et l'autre pour lequel elle est strictement comprise entre 0 et 1. La notation q^x semble suffire à la définition de la nouvelle fonction. La relation fonctionnelle est une propriété de ce prolongement.
Ils en semblent satisfaits, pour ce niveau d'enseignement, et privilégient dans leur enseignement la résolution d'exercices avec les élèves.

[56] Voir analyse de l'annexe 12.

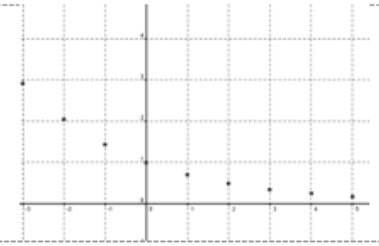
La définition donnée en exposition de connaissances est souvent approximative. Pour exemple, voici la « définition » de l'exposition de connaissances d'un collègue (de plus de 20 ans d'expérience) :

I. Fonctions exponentielles de base q avec $q > 0$

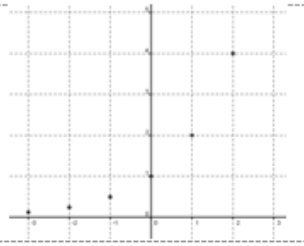
Définition 1: Soit q un réel strictement positif.
La fonction qui, à tout entier naturel n fait correspondre q^n, se prolonge en une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction exponentielle de base** q.
Elle définie sur IR par $f(x) = q^x$, avec $q > 0$

rq : l'existence d'une telle fonction est admise.

Exemple 1 : la suite géométrique (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_n = 0,7^n$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle de base 0,7 définie par $f(x) = 0,7^x$.



Exemple 2 : la suite géométrique (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n = 2^n$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle de base 2 définie par $g(x) = 2^x$.



La relation fonctionnelle apparait dans cette exposition de connaissances comme une propriété, en 5e position, après la propriété de positivité et le sens de variation des fonctions exponentielles.

Deux enseignants consultés font le choix de faire construire à la main, par les élèves, sur papier millimétré, un certain nombre de points de la représentation graphique d'une fonction exponentielle.
Ils utilisent une situation d'évolution de nombre de bactéries qui double pour l'un, augmente de 60% pour l'autre, toutes les heures. La population initiale de bactéries est de 1000, et on compte l'effectif en milliers. Ces choix permettent de simplifier les calculs.
Ceux-ci sont faits sur calculatrice collège afin d'éviter que les élèves aient à leur disposition graphes et tableaux de valeurs des fonctions exponentielles.
Pour résumer, ces enseignants font d'abord construire sur papier millimétré les points à abscisses entières, correspondants aux heures d'un intervalle de temps démarrant à 0. Puis après avoir rejeté avec les élèves un modèle affine, ou affine par morceaux, ils font calculer les coordonnées puis construire des points correspondants aux demi-heures puis aux quarts d'heures, en changeant de couleur à chaque étape.
L'un des deux enseignants fait « remonter le temps » de 4 heures afin de placer des points à abscisses négatives. Pour terminer, il fait tracer la courbe à main levée.
L'autre enseignant laisse les élèves trouver l'ajustement le plus adapté, avec un outil tableur, ce qui permet de « terminer » le prolongement et de le nommer.
Ces collègues rapportent que les élèves sont contents, fiers, d'avoir trouvé et construit eux-mêmes des points de la courbe, puis de tracer à la main cette courbe. La tâche papier-crayon en tant qu'aboutissement des tâches de calcul préliminaires semble être un point important dans la perception des élèves d'avoir construit, en partie du moins, un nouvel objet mathématique.

Un autre enseignant adapte une activité du manuel « Indice » de Terminale ES, édition de 2012. La situation est celle d'une population de bactéries qui évolue au cours du temps (de 50% par heure). Le calcul du nombre de bactéries aux demi-heures est fait par généralisation de $f(n) = \sqrt{f(n-1)f(n+1)}$: pour tout $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$. Ce mode de prolongement des suites géométriques aux rationnels du type $\frac{k}{2^n}$ est aussi décrit dans le manuel « Odyssée », édition de 2012, toutefois sans contexte extra mathématique ; elle est analysée en annexe 10.
L'enseignant place les points sur un graphique créé via le logiciel GeoGebra. Son discours oral, qui inclut la poursuite possible du processus à l'infini, motive l'existence d'un graphe d'une fonction continue qui prolonge le nuage de points. L'enseignant qualifie l'« activité » d'intéressante bien qu'un peu longue, et à faire collectivement car elle est difficile pour les élèves.

Les expériences citées ci-dessus montrent que les choix faits par les enseignants pour introduire les fonctions exponentielles reposent sur des critères multiples :
Pour commencer, les enseignants font le choix d'introduire les fonctions exponentielles via une situation, ou pas.
Le choix d'étudier une situation est en même temps celui de construire avec les élèves (du moins partiellement) les nouvelles fonctions.
Dans le cas où l'enseignant fait le choix d'étudier une situation :

- Cette situation peut être intra mathématique ou extra mathématique. Ils choisissent tous une situation extra mathématique, allant ainsi dans le sens du programme officiel pour lequel l'enseignement de l'analyse dans le cycle terminale du lycée a pour but d'outiller les élèves en vue de la modélisation de phénomènes discrets et continus.
  Elles sont semblables les unes aux autres : un phénomène à variation relative constante évolue en fonction du temps, une subdivision de celui-ci permet de calculer des valeurs en des temps fractionnaires. Une poursuite du processus induit l'existence et l'unicité d'une fonction continue qui prolonge à $\mathbb{R}$ la suite géométrique prolongée à $\mathbb{Q}$.
  Le mode d'évolution du phénomène est rarement explicité.
- Les notations des suites, des fonctions et des variables sont données aux élèves, la notation fonctionnelle est utilisée dès que la variable n'est pas entière.
- Du point de vue du déroulement :
  Les tâches effectivement dévolues aux élèves sont dans l'ensemble restreintes à des tâches de calcul algébrique et instrumenté par la calculatrice, demandant peu d'adaptations ; pour deux enseignants elles incluent des tâches de tracés de graphiques.
  La forme de travail retenue par la plupart des enseignants est un travail en classe entière pour les questions demandant le plus d'adaptations ou s'écartant de la ZPD des élèves. Les aides et les apports de l'enseignant sont alors importants. Les tâches dévolues aux élèves sont effectuées seuls ou avec les élèves voisins.

Les choix sont faits par les enseignants dans un souci d'équilibre entre une durée qu'ils jugent raisonnable et une construction du nouvel objet qu'ils estiment satisfaisante, selon leur contexte d'enseignant.

Les expositions de connaissances des enseignants que nous avons analysées montrent que la définition des fonctions exponentielles qu'ils choisissent pour les élèves peut être critiquable d'un point de vue mathématique. Plusieurs raisons peuvent l'expliquer.

- Les enseignants utilisent des définitions trouvées dans les manuels, elles-mêmes critiquables ;
- Jusqu'à la parution du programme de Terminales ES et L de 2012, la définition par prolongement des suites géométriques leur est étrangère puisqu'ils ont rencontré dans leur parcours d'étudiant puis d'enseignant les définitions de la fonction exponentielle de base e en tant que fonction inverse de la fonction logarithme népérien et en tant que solution de l'équation différentielle $f' = f$. La fonction exponentielle de base e vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, la notation exponentielle est alors adoptée. Les exponentielles de bases quelconques strictement positives sont enfin définies par $a^x = e^{xlna}$.
  Remarquons que ces définitions se situent exclusivement dans le monde du continu ; ce n'est qu'*a posteriori* que l'on peut constater que les fonctions exponentielles constituent un prolongement continu des suites géométriques. Les enseignants sont par conséquent peu exposés aux questions de prolongement du discret au continu.
- Les fonctions exponentielles de bases quelconques, bien qu'abordées dans leur parcours d'étudiant puis d'enseignant, occupent une place négligeable par rapport à celle de la fonction exponentielle de base e.

Ceci expliquerait par la même occasion que les enseignants soient dans l'ensemble peu enclins à prendre le temps d'introduire les fonctions exponentielles par une « activité » à la fois chronophage et posant des difficultés techniques et conceptuelles pour les élèves, mais aussi pour les enseignants.

Une analyse des sujets posés au Baccalauréat ES en 2015, 2016 et 2017 montre qu'aucune fonction exponentielle de base différente de *e* n'a fait l'objet d'une question. Par contre, environ un tiers des exercices proposés par les manuels dans le chapitre sur les fonctions exponentielles concerne des fonctions

exponentielles de bases entières ou décimales. Les tâches y portent essentiellement sur des lectures graphiques et les techniques algébriques. Ils comportent de rares modélisations.

Les choix des enseignants consultés sont davantage guidés par l'épreuve du Bac que par les exercices du manuel. Nous avons vu que la fonction exponentielle de base e occupe une place prépondérante dans leur passé d'étudiant et d'enseignant. De façon cohérente, ils introduisent la fonction exponentielle de base e peu après les fonctions exponentielles de base quelconque. Cela leur permet de passer rapidement à la résolution de tâches concernant la fonction exponentielle de base e. Les exercices donnés aux élèves en contrôle portent presque exclusivement sur cette dernière.

c) Conception d'une séance d'introduction des fonctions exponentielles en Terminale ES

Nous avons été amenée à enseigner les fonctions exponentielles dans une classe de Terminale ES en novembre 2016. C'était la première fois que nous enseignions l'introduction des fonctions exponentielles en Terminale ES en tant que « prolongement continu de suites géométriques ».
Il s'agissait donc de concevoir une « activité » introductive en tenant compte des analyses de programme et de manuels de ainsi que des retours d'expérience d'enseignants en exercice.

Nous allons brièvement analyser les attentes et contraintes propres à l'établissement scolaire, qui interviennent dans la conception de cette séance. Puis nous exposerons point par point les questionnements qui, *in fine*, guident nos choix.

i. Attentes et contraintes

Dans le lycée où a lieu la séance, la progression en mathématiques des classes de Terminale ES et de Terminale L (soit 5 classes en tout) est commune. Les enseignants de ces classes se mettent d'accord en début d'année scolaire sur le séquencement des chapitres et leur répartition dans le temps. Les enseignants restent cependant libres de mener cette progression à leur guise : ils ne partagent les tâches données aux élèves et leurs expositions de connaissance que s'ils le souhaitent.

Les contrôles sont aussi communs, au rythme de toutes les trois semaines environ.
Les enseignants doivent donc mener le programme au « coude à coude », à deux ou trois heures de cours près. La contrainte liée au temps imparti à cette introduction est donc importante.

Pour la plupart, les enseignants de ce lycée introduisent les fonctions exponentielles en montrant aux élèves, dans le cadre graphique, « le » prolongement continu de la représentation graphique d'une suite géométrique de raison $q > 0$ à celle de la fonction exponentielle de base q. Le grapheur du logiciel GeoGebra peut être sollicité par l'enseignant, ou pas.

Dans leur exposition de connaissance, afin de « définir » les fonctions exponentielles, les collègues de ce lycée, en majorité, utilisent parallèlement les cadres graphique et algébrique.
Dans le cadre graphique, deux exemples génériques (au moins), l'un avec raison $q > 1$ et l'autre avec $0 < q < 1$, servent à montrer visuellement le passage de la représentation graphique d'une suite géométrique de raison strictement positive q à celle de la fonction exponentielle de base q. Un graphique où les représentations graphiques de la suite et de la fonction cohabitent est donné aux élèves.
Le cadre algébrique est lui aussi sollicité : la fonction exponentielle de base q, prolongement de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « la fonction $x \longmapsto q^x$, définie sur $\mathbb{R}$ ». Ceci apparait plus ou moins explicitement comme une définition de la nouvelle fonction.
Bien entendu, il y est noté que l'utilisation de la touche « puissance » de la calculatrice est étendue aux exposants qui ne sont pas entiers.
Ce faisant, les élèves passent rapidement à la résolution d'exercices.

La séance d'introduction conçue doit donc rester relativement courte afin de ne pas résulter en un décalage trop important avec les autres classes, dans le temps comme dans les types de tâches finalement abordées avec les élèves à la date du contrôle commun.

ii. Questionnements et alternatives

Sur la continuité :

Parmi les « activités » introductives aux fonctions exponentielles, l'étude de l'évolution d'une population en fonction du temps est largement répandue aussi bien dans les manuels que parmi les enseignants que nous avons consultés et qui introduisent les fonctions exponentielles via une « activité » d'introduction. Celle de l'évolution d'un prix au cours du temps est aussi retenue.

Nous avons analysé en partie I les raisons pour lesquelles le choix de la variable temps est propice à la modélisation d'un phénomène par une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu de ce que l'effectif d'une population – ou d'un prix - prend ses valeurs dans un ensemble discret, nous avons estimé qu'il est, dans ce cas, opportun d'expliciter aux élèves qu'il s'agit de modéliser un phénomène discret par une fonction continue.

Une alternative consiste à étudier l'évolution d'une grandeur *a priori* continue (une longueur, une aire, un temps…) en fonction du temps.

Sur la description de l'évolution exponentielle

Les phénomènes modélisés par une fonction exponentielle peuvent être décrits en langue naturelle de plusieurs manières. En voici quelques exemples :

- « Pour des intervalles de même durée, l'augmentation se fait dans un même rapport ». Cela se traduit mathématiquement par : pour tout réel t, il existe un réel c dépendant de t tel que pour tout réel x , $\frac{f(x+t)}{f(x)} = c(t)$.
- « La variation relative est constante » ou « Le taux d'évolution est constant ». Cela se traduit mathématiquement par : pour tout réel t, il existe un réel k dépendant de t tel que pour tout réel x, $\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)} = k(t)$. Remarquons que $k = c - 1$.

  La formulation en français est courte, mais elle peut prêter à confusion puisque la « constante » dépend de l'intervalle de temps t.

  À moins qu'ils ne la côtoient déjà en sciences économiques, cette description nous parait difficile à appréhender d'un point de vue de technique algébrique pour des élèves de ES.

  De plus, en Sciences Économiques et Sociales, $\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$ porte indifféremment le nom de « variation relative », de « taux d'évolution », de « taux de variation » et de « taux d'accroissement » ; ce qui peut être source de confusion pour les élèves en cours de mathématiques.

La majorité des « activités » de manuel ou d'enseignants n'explicitent pas le mode d'évolution du phénomène. Le contexte semble se charger de le décrire de façon implicite.

Compte tenu du niveau des élèves, des objectifs fixés dans les programmes ou induits par l'épreuve du baccalauréat, quelle description choisir ?

Sur les notations

Qu'elles proviennent de manuels ou de textes utilisés par les enseignants, les « activités » d'introduction des fonctions exponentielles qui reposent sur une situation d'évolution dans le temps d'une grandeur discrète ou continue, modélisée par une suite géométrique, procèdent par subdivisions successives du temps.

Certaines mobilisent le vocabulaire et la notation indicée des suites, la variable choisie étant n. Lorsque la variable prend des valeurs non entières ou négatives, x se substitue à n, la suite est remplacée par une fonction (qui porte le même nom, ou pas). Les notations viennent souligner le passage du discret des suites (discret de $\mathbb{N}$) à un discret « sous ensemble de $\mathbb{Q}$ », qui joue un intermédiaire entre le discret de $\mathbb{N}$ et le continu de $\mathbb{R}$, donc entre suite géométrique et fonction exponentielle d'une variable réelle.

D'autres utilisent dès le départ la notation parenthésée qui est propre aux fonctions, généralement en prenant pour variable t (donc ni n, ni x qui sont *a priori* connotés respectivement suite et fonction).

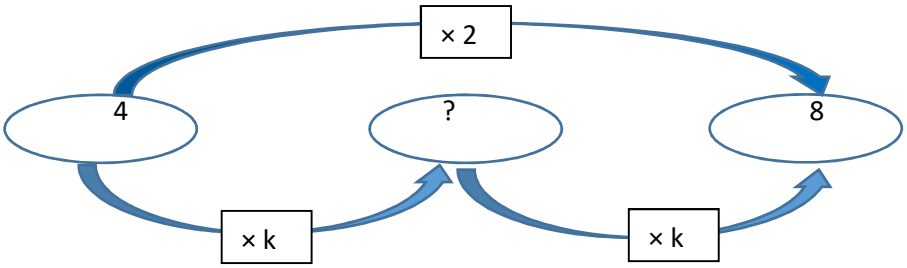
Une troisième voie serait de n'imposer aucune notation aux élèves et de laisser leurs interrogations surgir. Un avantage serait que les élèves questionneraient davantage les notations, et par conséquent davantage de sens pourrait être donné aux notions abordées. Un inconvénient serait le temps pris par ce questionnement.

Un diagramme pour aider les élèves à trouver les ordonnées des points correspondants aux temps fractionnés ? (Dans le cas où la recherche d'un « coefficient multiplicateur » est en jeu)

Nous avons constaté que les « activités » d'introduction requièrent, pour bon nombre d'entre elles, de trouver ce qui est communément nommé avec ces élèves un « coefficient multiplicateur » (par exemple pour passer des valeurs de la mesure de la grandeur étudiée aux heures entières à celles aux demi-heures, ou des valeurs de la mesure de la grandeur aux années entières à celles aux semestres ou aux mois). Cette recherche est une source avérée de difficulté pour les élèves.

Certains enseignants ont déjà revu les « coefficients multiplicateurs » avec leurs élèves auparavant, les rendant davantage disponibles pour la séance d'introduction.

Une aide couramment utilisée est le recours à un diagramme. On en trouve dans des manuels ; certains enseignants qui n'ont pas revu les « coefficients multiplicateurs » avec leurs élèves mettent un diagramme à remplir dans leur fiche de la séance d'introduction à destination des élèves, d'autres le mobilisent eux-mêmes au tableau pendant la séance.



Exemple de diagramme

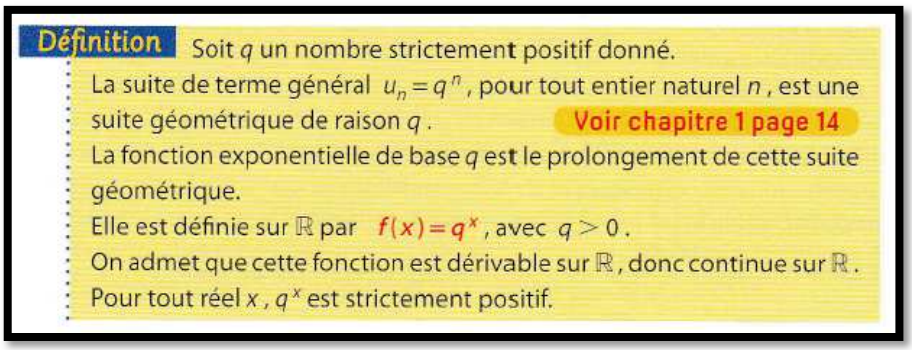
Les enseignants estiment efficace d'utiliser des diagrammes pour chercher des « coefficients multiplicateurs ».

Les variables didactiques sont nombreuses concernant ce diagramme ; les questions suivantes se posent :

- Est-ce que l'enseignant oriente les flèches à l'avance ?
- Pour les flèches qui vont vers la gauche (celles qui correspondent à une remontée dans le temps), mettre à l'avance un signe × de multiplication ; un signe : de division ; ou rien du tout ?
- Est-ce que le « coefficient multiplicateur » est nommé ou pas ?
- Si oui avec quelle notation ? Quelques notations rencontrées dans notre analyse comportent la variable t : CM(t) ; CM_t ; k_t ; d'autre non. Si le coefficient multiplicateur est nommé, il est possible de faire remarquer aux élèves que CM($x+y$)=CM(x)×CM(y). Ce pourrait constituer un précurseur de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle de base q. Cependant, x et y sont ici des durées alors que ce sont des temps dans l'équation fonctionnelle, ce qui pourrait être une source de difficulté.

Comment amener l'équation fonctionnelle et la notation exponentielle avec exposant non nécessairement entier ?

Nous avons déjà vu à plusieurs reprises que la notation exponentielle prolongée aux exposants non entiers peut dans certains cas servir de « définition » aux fonctions exponentielle, dans les exposés de connaissances de manuels ou d'enseignants. C'est par exemple le cas du manuel Déclic, édition 2012.



Définition Soit q un nombre strictement positif donné.
La suite de terme général $u_n = q^n$, pour tout entier naturel n, est une suite géométrique de raison q. Voir chapitre 1 page 14
La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$, avec $q > 0$.
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, q^x est strictement positif.

Manuel « Déclic » de 2012, Terminale ES, édition Hachette, page 72

L'évidence supposée de l'unicité du prolongement « continu et régulier » du nuage de points à abscisses entières peut servir à « définir » les fonctions exponentielles, comme dans le manuel « Transmath », édition 2012, page 75 ou le manuel « Odyssée », édition 2012.



1.1 Définition

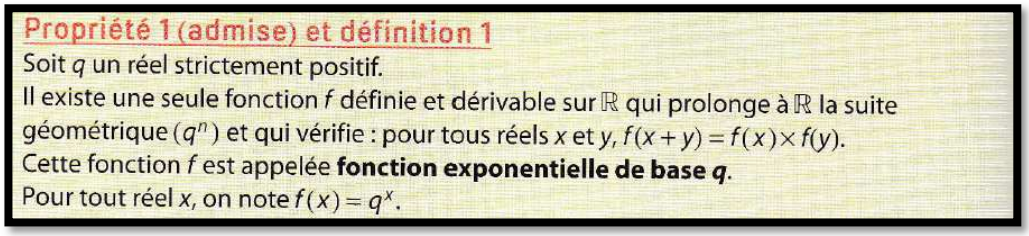
La fonction $x \mapsto q^x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est obtenue en reliant par une ligne continue et régulière les points de coordonnées $(n ; q^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base q**.

Manuel « Transmath » de 2012, édition Nathan, page 100

Dans ces deux cas, qui ne sont pas satisfaisants d'un point de vue mathématique, l'équation fonctionnelle est énoncée comme une propriété admise.

En Terminale ES, si l'introduction aux fonctions exponentielles est faite via l'étude d'une situation par les élèves, cette équation peut être induite par la généralisation de l'équation fonctionnelle vérifiée sur quelques exemples.
Si cette situation correspond à un phénomène « à variation relative constante » ou de façon équivalente est telle que « pour des intervalles de même durée, l'augmentation se fait dans un même rapport », elle peut aussi être démontrée avec les élèves.
Elle peut enfin, plus simplement, être vérifiée sur quelques exemples de valeurs non entières.
Alors, la notation exponentielle est motivée, en ce qu'elle embarque le prolongement des formules que les élèves connaissent sur les exposants entiers aux exposants non entiers. Elle n'est pas un pur jeu sur les « formes » algébriques. Ces jeux symboliques peuvent contribuer à renforcer la conception des mathématiques qu'ont bon nombre d'élèves : les mathématiques consisteraient en « des formules (arbitraires) qu'il faut apprendre à appliquer ».

Nous faisons l'hypothèse que les élèves ont, pour construire leurs connaissances, besoin de cohérence. En cela, l'exposition de connaissances se doit d'être cohérente à la fois avec l'introduction de la notion faite en amont et être mathématiquement correcte.
L'exposition de connaissances du manuel « Math'x », édition 2016, nous paraît aller dans le sens d'une motivation de la « forme » exponentielle tout en étant mathématiquement correcte. Elle énonce l'équation fonctionnelle avant la notation exponentielle, qui peut ainsi apparaitre comme un choix cohérent avec cette équation.



Propriété 1 (admise) et définition 1
Soit q un réel strictement positif.
Il existe une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui prolonge à $\mathbb{R}$ la suite géométrique (q^n) et qui vérifie : pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Cette fonction f est appelée **fonction exponentielle de base q**.
Pour tout réel x, on note $f(x) = q^x$.

Manuel « Math'x » de 2016, Terminale ES, éditions Didier

Proposer aux élèves une tâche d'introduction à partir de ce que retourne la calculatrice lors de l'utilisation de la touche puissance ?

Par exemple, l'introduction à la fonction exponentielle de base 2 pourrait se faire par la question ouverte : « Votre calculatrice calcule une valeur décimale pour $2^{1,5}$, pour $2^{\sqrt{3}}$. Que sont donc ces nombres ? ».

Elle aurait pour avantage de solliciter une notation et une fonctionnalité qui existe sur leur calculatrice (et que certains ont peut-être déjà remarquée voire utilisée). Cela éviterait des réactions d'élèves du type « on a fait tout ça pour rien », dont nous avons vu un exemple ci-dessus. Une telle question est cependant délicate à gérer par l'enseignant, surtout dans le cas d'un exposant irrationnel. La classe peut rester mutique par manque d'idée ; les réponses éventuelles d'élèves sont difficiles à prévoir…

Cette question peut aussi être posée avec un exposant irrationnel à la fin d'une « activité » d'introduction plus classique pour montrer aux élèves que le procédé utilisé dans l' « activité d'introduction » ne permet pas de calculer une exponentielle à exposant irrationnel . Autrement dit, montrer aux élèves que la démarche par coefficients multiplicateur ou celle par moyenne géométrique ne permettent pas de calculer tout nombre q^x, x étant un réel.

On peut cependant se demander si, à ce niveau d'enseignement, ce serait utile aux élèves : le temps qu'une telle question prendrait à être abordée est considérable et elle soulève des questions théoriques qui dépasseraient la plupart des élèves.

iii. Choix faits pour cette séance et documents associés

La contrainte liée à la durée allouable à l'introduction aux fonctions exponentielles (relativement réduite) impose de la faire sur un créneau horaire de deux séances consécutives (qui sont de 50 minutes chacune dans cet établissement).

Le mode de travail des élèves retenu est habituel dans cette classe : les élèves travaillent librement avec leurs voisins lorsque les tâches leurs sont dévolues.

Il s'agit donc de mener l'introduction des fonctions exponentielles dans un contexte d'enseignement « ordinaire » pour cette classe.

La variable temps étant *a priori* un bon support du continu, une situation d'évolution d'un phénomène en fonction du temps est choisie.

Afin de pouvoir considérer des valeurs négatives de la variable temps, le phénomène démarre avant le temps « 0 ».

Le phénomène modélisé est celui de l'évolution d'une surface, qui est une grandeur continue. La fonction qui au temps associe la surface est donc *de facto* continue.

Nous retenons l'idée que les élèves construisent eux-mêmes, à la main, la courbe de la nouvelle fonction. Ils placent dans un premier temps des points à coordonnées entières sur une feuille de papier millimétré ; après avoir effectué différents calculs, ils densifient le nuage de points avant de tracer la courbe à main levée.

Afin que les calculs soient simples, et que les ordonnées des points ne croissent pas trop vite, le choix se porte sur un premier terme égal à 1. La raison de la suite géométrique devra être entre 1,5 et 2 afin que les points puissent être placés avec une précision suffisante sur une feuille de format A4.

Nous faisons l'hypothèse, soutenue par l'expérience de collègues, que le placement, par les élèves, de points sur papier millimétré, puis le tracé à la main d'une courbe, sont générateurs pour le moins d'un enrôlement des élèves dans les tâches de la séance et potentiellement d'apprentissages par le biais des jeux de cadres qui en découlent et dont ils sont acteurs.

Nous faisons aussi l'hypothèse que l'extension de la notation exponentielle aux exposants non entiers a besoin d'être motivée et soulignée vis-à-vis des élèves pour des raisons que nous avons en partie développées dans la partie III E 1 :

- Parce qu'elle ne va pas de soi ;

- Parce que le prolongement de la « forme » a^n induit le passage d'une multiplication itérée à une tout autre opération.
- Parce que l'équation fonctionnelle joue en rôle important dans les exercices classiques en Terminale et au Baccalauréat ES ;
- Parce que nous faisons l'hypothèse qu'il est utile, pour leur réussite en mathématiques comme pour leur culture générale personnelle, de montrer aux élèves que les mathématiques ne sont pas que des propriétés qui « marchent » par une sorte de magie, mais qu'elles sont le fruit d'une réflexion et d'une activité humaines.

Dans ce qui suit, une première page expose l'énoncé tel qu'il est donné aux élèves. C'est la « fiche élèves ».
Puis ce que nous nommons « fiche enseignant » combine une analyse *a priori* des tâches ainsi que le déroulement prévu.
Nous terminons par l'exposition de connaissances retenue.

Terminale ES – Novembre 2016 – fiche élèves

Un nénuphar pousse sur un étang. Tous les mois, la surface qu'il occupe double et plus généralement sa surface augmente d'un même rapport sur un intervalle de temps de même durée (si c'est un intervalle d'un mois alors ce rapport est 2).

On note u_0 sa surface en m² au 1er juin et u_n sa surface en m² n mois plus tard. Le 1er juin, sa surface mesure 1m², on a donc $u_0 = 1$.

d) Calculer la surface occupée par le nénuphar le 1er juillet et le 1er aout.
e) Exprimer u_n en fonction de n.
f) Placer, en noir, les points de coordonnées (n, u_n) pour n allant de 0 à 4 sur la feuille de papier millimétré donnée en annexe. On appellera Z, A, B, C et D les points obtenus dans cet ordre et on prendra 2cm comme unité sur l'axe des abscisses, 1 cm comme unité sur l'axe des ordonnées.
Sans rien rajouter au graphique, répondre aux questions suivantes : est-ce que ça a un sens de relier les points ? Pourquoi ?

g) Peut-on calculer la surface du nénuphar au bout de deux mois et demi. Si oui comment ?
h) Dorénavant, on note $f(x)$ la surface du nénuphar, en m², au bout de x mois. Calculer la surface du nénuphar au bout d'un demi mois, un mois et demi, trois mois et demi et quatre mois et demi, en complétant le tableau de valeurs suivant puis placer en vert les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ correspondants.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$										

i) Quelle est la surface du nénuphar au bout d'un quart de mois ?

j) On donne ci-dessous la feuille de calcul qui a servi, sur le même modèle, à calculer la surface du nénuphar en m², tous les quarts de mois. Les nombres affichés sont des arrondis à 10^{-2}.

n	u(n)		x	f(x)		x	f(x)
0	1,00		0	1,00		0,25	1,19
1	2,00		0,5	1,41		0,75	1,68
2	4,00		1	2,00		1,25	2,38
3	8,00		1,5	2,83		1,75	3,36
4	16,00		2	4,00		2,25	4,76
			2,5	5,66		2,75	6,73
			3	8,00		3,25	9,51
			3,5	11,31		3,75	13,45
			4	16,00		4,25	19,03
			4,5	22,63			

Placer sur le graphique, en bleu, les points dont l'abscisse correspond aux quarts de mois et trois quarts de mois.

k) Remontons le temps. Quelle est la surface à la mi-mai, le 1er mai etc… ? Compléter le tableau suivant et placer, en rouge, les points correspondants sur le graphique.

x	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5	-3
$f(x)$						

Fiche enseignant avec analyse *a priori* en italique

Avant de donner l'énoncé :
L'enseignant pose aux élèves la devinette : « Un nénuphar double sa surface tous les mois. Il a mis 10 mois à couvrir l'étang. En combien de mois avait-il couvert la moitié de l'étang ? »
Une partie des élèves risque de répondre la moitié de 10 mois, soit 5 mois.
Le but de cette devinette est d'éveiller leur curiosité et leur vigilance., de commencer à s'approprier la situation.

Donner la première partie de la feuille. Laisser les élèves chercher.
Les questions a) et b) relèvent de connaissances anciennes : étudiées en Première et revues en début de Terminale. Elles permettent aux élèves de s'approprier la situation en « terrain connu ».
La tâche de représentation graphique à la main de points d'une suite est peu courante en série ES ; les représentations graphiques de suites sont dans l'ensemble soit données aux élèves soit générées sur leur calculatrice ou sur tableur. Bien que la « forme » des coordonnées de points $(n\,;u_n)$ *leur soit donnée, elle est suffisamment différente de celle des points de la représentation graphique d'une courbe (en particulier, il n'y a pas de «* x *» !) pour que certains élèves risquent de se demander ce qui est reporté en abscisse et en ordonnée :* n *?* u_n *?*
Pour les deux dernières questions, ils peuvent se poser la question du sens de relier ou non les points d'un point de vue de la représentation graphique d'une suite (c'est une suite, on ne relie pas les points), du point de vue de la situation (le nénuphar « continue » à croitre entre deux mois), ou d'un point de vue de modélisation (un modèle continu peut être un outil d'étude d'un phénomène qui ne l'est pas).
Le deuxième point de vue peut être développé de deux façons : la variable temps est continue, il n'y a donc pas de « trou » dans la représentation graphique ; la surface croit en fonction du temps de façon continue, il n'y a donc pas de « saut » dans la représentation graphique. C'est la conjonction des deux continuités (supposées, entendons-nous, mais nous n'abordons pas les problèmes de physique ou de biologie sous-jacents), celle du temps et celle du phénomène, qui permet d'affirmer que relier les points est légitime, en dehors de toute question de modélisation.
Le troisième point de vue est à notre connaissance encore peu développé par les enseignants et a peu de chances d'apparaitre dans la classe.
La cohabitation de ces différents points de vue, l'un mathématique, voire d'autorité, et le second contenant une double continuité des points de vue physique et biologique, et le troisième purement de modélisation « outil », est probablement source de difficulté pour les élèves.

Après la question c) : travail en classe entière.
Le graphique est projeté au tableau, afin que tous puissent s'y référer ensemble.
Les questions sont reprises une à une.

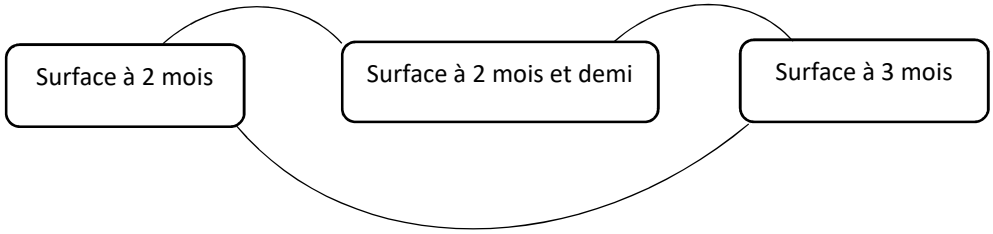
La partie qui encadrée est optionnelle. Le professeur décide de la faire ou pas selon ce qui ressort du travail en classe entière après la question c). Si elle est faite, passer la question d).
L'enseignant demande aux élèves de chercher une courbe sur laquelle les points se trouvent. S'ils manquent d'idées, il leur en propose.
Les points ne sont pas alignés, ce qui écarte les droites donc le modèle affine.
Les élèves devraient penser que le nuage de points se trouve sur une parabole. En effet, les fonctions du second degré sont les seules fonctions qu'ils aient étudiées en dehors des fonctions affines, en classe de Première. De plus, la forme du nuage de points pourrait à première vue s'apparenter à des points d'une parabole. Ces élèves de ES ne sont pas entraînés à chercher l'équation d'une parabole connaissant quelques-uns de ses points. Avec l'enseignant aux commandes de GeoGebra ou un élève qui pratique ce logiciel avec suffisamment d'aisance, ils peuvent partir de l'équation $y = x^2$*, la modifier en* $y = x^2 + 1$ *qui permet d'obtenir une courbe qui passe par les deux premiers points.*
Il est naturel de demander ensuite aux élèves de vérifier la validité de cette équation pour les autres points. Cette expression ne convient pas pour les trois derniers points (il y a une différence égale à 1).
Tout ce questionnement peut être fait avec le traceur de courbes de GeoGebra *qui permet des allers-retours rapides entre cadres algébrique et graphique.*

Le modèle affine par morceaux peut être proposé par les élèves ; sinon l'enseignant peut le faire. Cela permet d'amener la suite de l'« activité ». Si le modèle affine par morceaux était correct, l'image de 0,5 serait 1,5. Le coefficient multiplicateur correspondant à une durée d'un demi mois serait 1,5 et pourrait alors être appliqué au demi mois suivant. La surface au bout d'un mois serait de 1,5² m² soit 2,25 m². Ce qui est erroné. Le modèle affine par morceaux est ainsi écarté.
À ce stade, le mot « courbe » a été prononcé, peut-être aussi le mot « fonction » qui lui est associé. Les variables x et y sont apparues avec la recherche d'une équation de courbe. Donc la question de la modélisation de ce phénomène d'évolution par des outils du continu est posée implicitement. La question de la « bonne » courbe reste cependant ouverte.
Points positifs de cette partie :
- Elle introduit assez rapidement l'idée de modélisation d'un phénomène décrit dans le discret (au mois par mois) par un objet du continu. En effet, le vocabulaire et les notations des équations de courbes ainsi que les courbes elles-mêmes (qui sont toutes, à ce niveau d'enseignement des courbes représentatives de fonctions continues), embarquent le continu ;
- Elle permet une transition naturelle avec les questions suivantes.
Points négatifs de cette partie :
- Elle prend du temps sur la séance alors qu'elle n'est pas nécessaire ;
- Elle introduit une courbe « continue » dans le paysage avant même que le nuage de points se soit un tant soit peu densifié.

Demander aux élèves de calculer la surface à deux mois et demi. Laisser chercher les élèves.

Travail en classe entière : reprise des propositions des élèves pour le calcul de la surface du nénuphar au bout de deux mois et demi.
Les propositions possibles :

- *Une lecture graphique. À écarter puisqu'on cherche un mode de calcul.*
- *Calcul de la moyenne de la taille à 2 mois et de la taille à 3 mois. On peut placer au tableau le point correspondant, faire constater l'alignement avec les points d'abscisses 2 et 3. L'alignement peut déjà avoir été écarté. Sinon, l'enseignant peut faire remarquer que les points que les élèves ont placés auparavant ne sont jamais alignés trois à trois. Ou faire calculer le coefficient multiplicateur correspondant, l'appliquer à la surface à 2 mois et demi, constater qu'on ne trouve pas celle à 3 mois.*
- *Augmentation de 50% entre 2 mois et 2 mois et demi. On peut procéder de la même façon que précédemment. On peut de surcroît vérifier par le calcul que deux augmentations de 50% après 2 mois ne donnent pas la surface à 3 mois ou plus généralement ne donnent pas le double.*
- *Cette dernière vérification devrait faire émerger l'idée de calcul du coefficient multiplicateur positif k tel que $k^2 = 2$, bien qu'aucune révision n'ait été faite à ce sujet.*
  Si aucun élève n'en a l'idée, proposer un diagramme du type suivant, à compléter avec des flèches et des coefficients multiplicateurs :



Les élèves peuvent résoudre l'équation $k^2 = 2$ (ou $x^2 = 2$ selon leur habitude à résoudre des équations en x) ; ils devraient alors conclure par $k = \sqrt{2}$, soit par oubli de la solution négative, soit par son élimination à cause du contexte étudié. Ils peuvent aussi procéder par essais et erreurs. Les valeurs du coefficient multiplicateur mises par les élèves sur les deux « petites » flèches pourront donc être exactes ou approchées.

L'enseignant demande aux élèves comment noter cette surface à l'aide de la suite u. C'est l'occasion d'exclure la notation indicielle des suites puisque 2,5 n'est pas entier. La notation fonctionnelle devrait émerger du groupe.

Distribuer la deuxième partie de la feuille.
Laisser les élèves chercher les questions e) et f).

Travail en classe entière après la question sur la taille du nénuphar au bout d'un quart de mois :
La procédure inspirée du diagramme fléché devrait avoir été réutilisée par certains élèves.
Cependant, il peut rester des réponses du type $\sqrt{2}:2$, ou encore 1,414:2, ou encore 0,14 :2. Ces réponses devraient être écartées par d'autres élèves en reprenant l'argumentaire précédent.
La valeur exacte du coefficient recherché, $\sqrt{\sqrt{2}}$, risque de ne pas apparaitre dans la classe à cause de la difficulté de son écriture. Les élèves pourraient en donner une valeur approchée (troncature au 100e 1,18 ou arrondi au 100e 1,19 ; troncature ou arrondi au 1000e : 1,189 ou 1,187 selon la valeur utilisée pour $\sqrt{2}$).
L'enseignant peut leur demander tout de même la valeur exacte, afin de motiver par la suite la notation exponentielle qui pourra séduire par sa simplicité.

Donner la troisième partie de la feuille. Laisser les élèves travailler.

Travail en classe entière après la question sur « la remontée dans le temps » :
La procédure inspirée du diagramme fléché devrait avoir été réutilisée par certains élèves.
Elle aura incité les élèves à diviser, de proche en proche, les résultats par $\sqrt{2}$ ou une de ses valeurs approchées.
Il est moins vraisemblable que la multiplication par l'inverse de $\sqrt{2}$ soit utilisée.

La densification progressive (et potentiellement infinie) du nuage de points peut être alors soulignée par l'enseignant. Ce qui incite les élèves à dessiner une courbe à la main. L'enseignant peut expliquer que si la fonction qu'elle représente est continue (et dérivable) sur $\mathbb{R}$, cette courbe (et cette fonction) est unique.

L'enseignant peut demander oralement s'il y a un moment où le nénuphar a une surface de 10 m². Et si oui, lequel. *Les élèves ne peuvent fournir qu'une réponse via une lecture graphique.*
C'est le moment de souligner qu'on a modélisé un phénomène *a priori* naturellement continu par une fonction continue pour laquelle on ne disposait que de données discrètes.

L'enseignant demande oralement aux élèves comment exprimer $f(x)$ en fonction de x.
Il se peut que les élèves pensent (ou aient déjà pensé auparavant) à 2^x par analogie à $u_n = 2^n$ trouvé en question b). Dans ce cas, rappeler la façon dont on calcule les puissances à la calculatrice et leur demander de vérifier à l'aide de valeurs déjà calculées que le prolongement de la notation est compatible avec l'utilisation de la calculatrice.
Sinon, l'enseignant peut leur proposer de prolonger la notation exponentielle, après avoir prolongé la représentation graphique.
Dans tous les cas, il nous parait important de faire remarquer que la notation n'est judicieuse que si la relation $2^n \times 2^p = 2^{n+p}$ où n et p sont entiers est encore vérifiée lorsque les exposants ne sont pas entiers. C'est-à-dire que si $f(x) \times f(t) = f(x+t)$ pour tous réels x et t. Le choix de la lettre t plutôt que la lettre y utilisée habituellement dans cette équation permet d'éviter une confusion possible pour les élèves à un moment où de nouvelles notions et notations sont introduites : la lettre y est pour eux le symbole d'une image par une fonction ou d'une ordonnée de point.
De plus, la lettre t se prête bien à la démonstration proposée ci-après.
L'enseignant peur leur faire vérifier l'équation fonctionnelle sur quelques exemples tirés des tableaux de valeurs.
Puis leur faire écrire $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle. Ils peuvent s'aider des tableaux de valeurs. S'ils ne le font pas eux-mêmes, le professeur peut leur faire remarquer que par conséquent $(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$. Propriété à rapprocher de celle qu'ils ont vue en classe de quatrième : $(2^n)^p = 2^{np}$ où les exposants sont entiers.

L'équation fonctionnelle peut être démontrée s'il reste un peu de temps :
Les élèves ont utilisé à plusieurs reprises le fait que la surface du nénuphar augmente d'un même rapport sur un intervalle de temps de même durée.

Par généralisation de : pour tout réel x, $\frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$; $\frac{f(x+0,5)}{f(x)} = \sqrt{2}$; $\frac{f(x+0,25)}{f(x)} = \sqrt{\sqrt{2}}$,

on peut écrire : pour tous réels x et t , $\frac{f(x+t)}{f(x)} = c(t)$ où $c(t)$ est indépendant de x mais dépend de t.
En particulier, en prenant $x = 0$, on obtient $\frac{f(0+t)}{f(0)} = c(t)$ et comme $f(0) = 1$, on obtient $f(t) = c(t)$.
Donc $f(x + t) = f(x)f(t)$. C'est la relation fonctionnelle.

Une variante, peut-être plus proche des connaissances des élèves, pour lesquels la formule de récurrence $u_{n+1} = 2u_n$ est mobilisable :
Par généralisation de : pour tout réel x, $f(x + 1) = 2f(x)$; $f(x + 0,5) = \sqrt{2}f(x)$, $f(x + 0,25) = \sqrt{\sqrt{2}}f(x)$,
on peut écrire : pour tous réels x et t , $f(x + t) = c(t)f(x)$ où $c(t)$ est indépendant de x mais dépendant de t.
En particulier, en prenant $x = 0$, on obtient $f(0 + t) = c(t)f(0)$ et comme $f(0) = 1$, on obtient $f(t) = c(t)$.
Donc $f(x + t) = f(x)f(t)$. C'est la relation fonctionnelle.

L'exposition de connaissances retenue

La définition des fonctions exponentielles retenue dans l'exposition des connaissances est à la fois cohérente avec l' « activité » d'introduction et mathématiquement correcte.
Elle combine les cadres algébrique et graphique.

a. Du discret au continu

Théorème (admis) et définition :

Soit q un réel strictement positif.

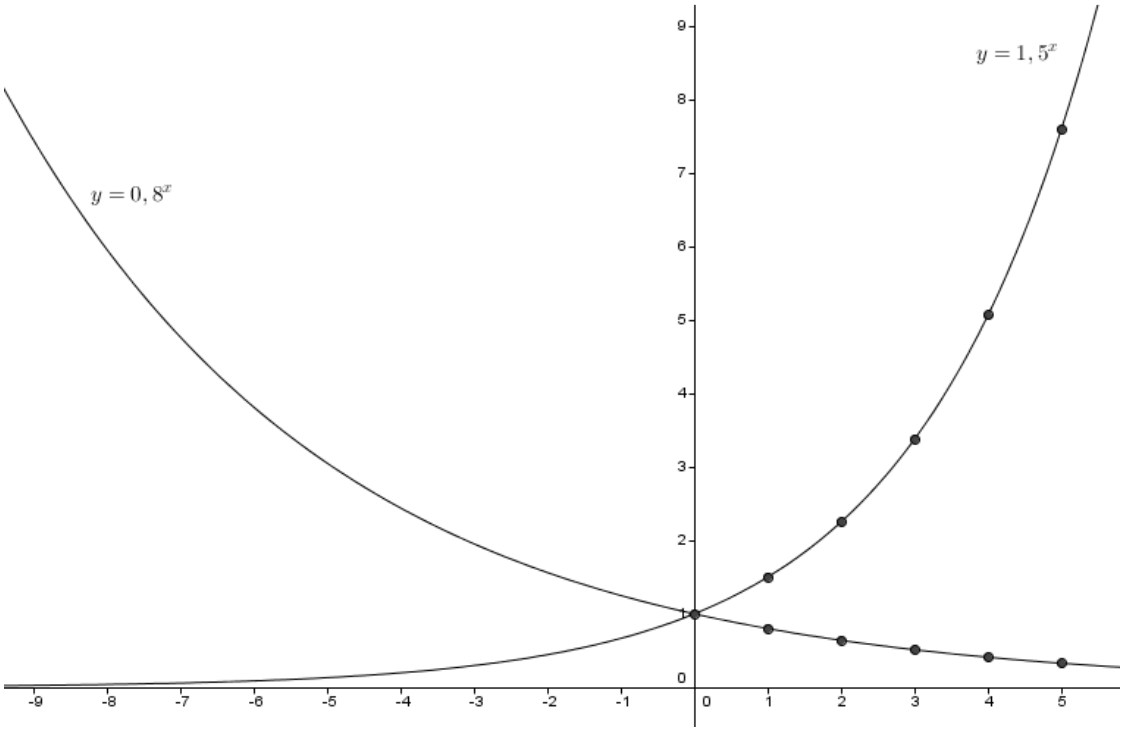
La suite de terme général q^n est une suite géométrique de raison q.

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui prolonge à $\mathbb{R}$ la suite géométrique (q^n) et qui satisfait aux conditions suivantes :
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
- Pour tous réels x et y réels , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. Cette relation porte le nom de « relation fonctionnelle ». En langage courant, on dit que « f transforme les sommes en produits ».

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base q**.

On note, pour tout réel x, $f(x) = q^x$.

Graphiquement : la suite de terme général q^n, représentée par un nuage de points, est prolongée par la fonction exponentielle de base q dont la courbe représentative passe par les points du nuage, de façon « continue et régulière ».



A la calculatrice : on utilise la même touche que pour les exposants entiers : ^ .

b. Conséquences de la définition

Propriétés :

Soit q un réel strictement positif.

$q^0 = 1$; $q^1 = q$.

Pour tous réels x et y réels , $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

Pour tous réels x et y réels , $q^x \neq 0$; $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$; $\dfrac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$.

Pour tout x réel, $q^x > 0$ $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$. En particulier, $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$;

Pour tout x réel et tout entier relatif n, $\left(q^x\right)^n = q^{n \times x} = \left(q^n\right)^x$. (Propriété admise)

Par ailleurs, pour tout réel x, $1^x = 1$.

3. Du côté des élèves

La séance d'introduction aux fonctions exponentielles dont nous avons décrit le processus de conception dans la partie précédente a été effectuée en Terminale ES, en novembre 2016.
Nous analyserons dans un premier temps la trace écrite des élèves ainsi que le déroulement en classe.
Puis dans un deuxième temps un questionnaire donné à ces mêmes élèves cinq semaines plus tard.

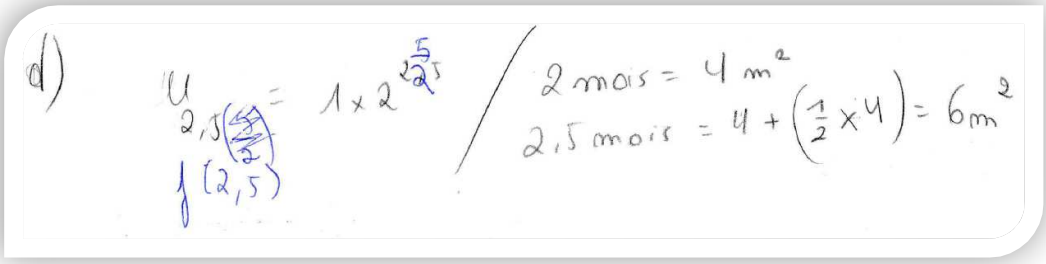
a) L' « activité » d'introduction de novembre 2016

i. Le prolongement de la « forme » exponentielle

Après avoir acté en classe entière que relier les points avait un sens, du point de vue de la modélisation de la croissance du nénuphar, les élèves cherchent à calculer sa surface à deux mois et demi. Rappelons que l'énoncé décrit cette croissance de la façon suivante : « sa surface augmente d'un même rapport sur un intervalle de temps de même durée ». La question que nous nous posons dans le cadre de cette partie est : les élèves vont-ils prolonger la « forme » $u_n = 1 \times 2^n$, justifiée auparavant pour tout entier naturel n, en l'appliquant à la valeur numérique 2,5 ? Dans l'affirmative, quel sens vont-ils donner à $2^{2,5}$?

Oralement, les recherches vont bon train ; cependant seulement 8 élèves sur 32 écrivent finalement une réponse sur leur feuille, les autres n'osent pas, ou ne pensent pas avoir suffisamment d'idée.
Deux des huit élèves écrivent un calcul du type $4 + \frac{1}{2} \times 4$; ils sont plus nombreux à discuter cette expression (ou une expression équivalente) dans la classe. L'enseignante prend quelques minutes en classe entière pour montrer que ce calcul ne correspond pas à l'hypothèse « sa surface augmente d'un même rapport sur un intervalle de temps de même durée ». En particulier, multiplier 4 par 1,5 puis à nouveau par 1,5 ne donne pas 8.

Qu'en est-il du prolongement de la « forme » $u_n = 1 \times 2^n$? Examinons les traces écrites des élèves, puis le déroulement des minutes qui suivent l'épisode décrit ci-dessus.
Sur les huit élèves qui ont écrit une réponse, deux laissent une recherche de formule algébrique qui s'avère fausse et qu'ils barrent ; l'un d'eux finit par écrire : $u_{2,5} = 1 \times 2^{2,5}$. Ils sont 5 sur 8 à écrire cette égalité, que le nombre 2,5 soit écrit dans le registre décimal ou fractionnaire.
Dans la trace écrite des élèves, le prolongement de la « forme » algébrique peut cohabiter avec une réponse par un mode de calcul connu des élèves. Dans l'exemple qui suit, l'écriture en bleu est la correction prise par l'élève ; le calcul relevant d'une procédure connue de l'élève est celui décrit ci-dessus.



Cet élève n'a pas cherché à calculer l'expression $1 \times 2^{2,5}$ à la calculatrice, ce qui lui aurait permis de comparer les deux expressions qu'il a écrites. 3 des 5 élèves qui ont écrit un prolongement de la « forme » algébrique $u_n = 1 \times 2^n$ en ont cherché une valeur approchée à la calculatrice.

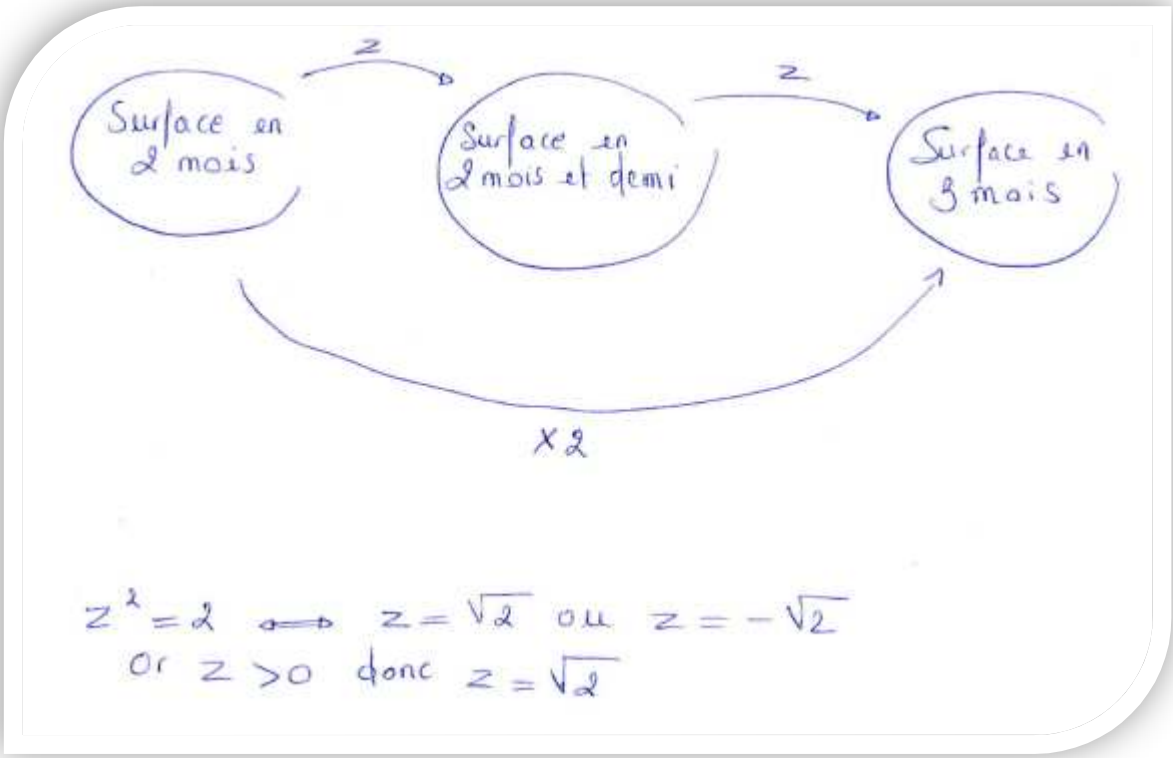
Pendant le cours, un de ces élèves explique oralement : « *On a la définition explicite de la suite. On sait que « u » n égale deux exposant n. Du coup on remplace n par 2,5* ». Cet élève propose « *2 exposant 5 demi* ».
L'enseignante fait remarquer : « *Tu sais ça pour tout n appartenant à N. Toi, tu prends la liberté de remplacer n par 2,5. Mais ça veut dire quoi 2 exposant 2,5 ?* »

L'élève répond « 2 exposant 2 plus 2 exposant un demi ». L'enseignante écrit sous la dictée de l'élève $2^{2,5} = 2^2 + 2^{0,5}$. L'élève corrige oralement le + en ×. L'enseignante demande ce qu'est *« 2 exposant un demi »* et fait remarquer que l'élève est en train d'appliquer les règles sur les exposants qu'il connait par ailleurs.
Un autre élève vient prêter main forte à son camarade pour dire ce qu'est $2^{0,5}$: il a trouvé sur sa calculatrice. L'enseignante lui demande ce qu'a fait la calculatrice et ajoute : « *Si elle fait le calcul c'est que les humains qui ont fabriqué la calculatrice ont donné un sens à ça* »… « *Vous vous pouvez le calculer en réfléchissant à ce qu'on a dit* ».

Devant l'absence d'idées dans la classe, l'enseignante fait le diagramme au tableau avec les trois flèches, rajoute ×2 à la « grande flèche ». Et demande ce qu'on met au deux petites.

Première réponse d'élève : « *fois* $\frac{1}{2}$ ». Il sous-entend qu'on met le même opérateur aux deux « petites flèches », c'est probablement un fait acquis après les calculs précédents. Un autre élève remarque que la surface décroitrait avec ce coefficient multiplicateur. L'enseignante fait calculer tout de même le produit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ en espérant que les élèves percevront qu'il s'agit du carré de $\frac{1}{2}$.
Une deuxième suggestion d'élève est 1,5. L'enseignante fait remarquer que c'est un coefficient déjà écarté auparavant mais invite à calculer 1,5×1,5 tout en rajoutant oralement : « *1,5 au carré* ».

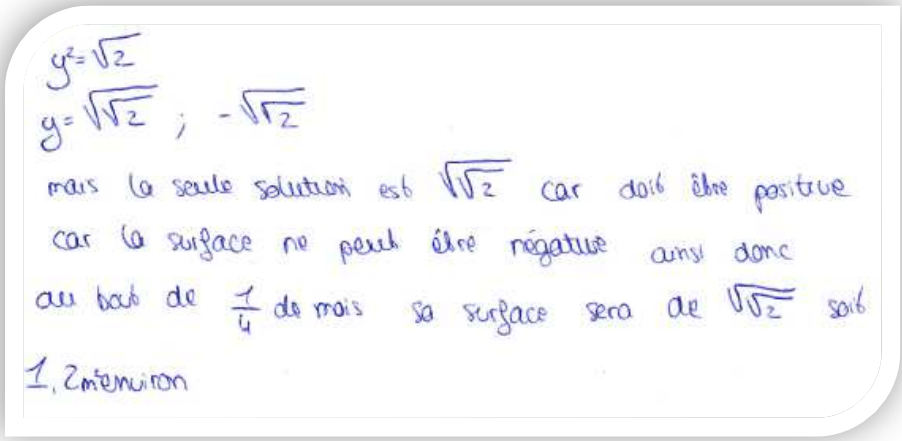
Elle recommence « *Je cherche un nombre tel que si je le multiplie par lui-même une fois, deux fois, je trouve 2 ». Un élève dit « une équation* ».
L'enseignante fait choisir un nom pour l'inconnue, écarte x car on l'utilise peu après. Une fois l'équation posée, certains disent « $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ ». Les élèves excluent la solution négative. En voilà la trace écrite d'un élève :



L'enseignante demande alors : « *Du coup c'est quoi ce 2 exposant 0,5* » ? Dans un premier temps, aucun élève n'a de réponse. Puis l'un d'eux dit : « *racine de 2* ».

Compte tenu de l'absence de trace écrite de la part d'un grand nombre d'élèves, il est difficile de savoir combien d'entre eux ont effectivement opté pour un calcul de la surface à 2,5 mois par prolongement de la « forme » exponentielle. Le prolongement de cette « forme » était cependant fortement présent dans la classe. Oralement, la calculatrice a servi d'argument à certains élèves pour défendre cette écriture ; à l'écrit, 3

des 5 élèves qui avaient mobilisé cette « forme » prolongée à l'exposant 2,5 en ont cherché une valeur approchée à la calculatrice.
Devant une telle « évidence », l'enseignante a pris le parti de questionner la façon dont la calculatrice est programmée.
Lors de la question portant sur le calcul de la surface à un quart de mois, nous avons remarqué en classe un seul élève qui répondait par le calcul à la calculatrice de $2^{0,25}$. L'analyse des traces écrites montre que, sur les 12 élèves qui en ont laissé une, 7 ont écrit $\sqrt{\sqrt{2}}$ ou $1 \times \sqrt{\sqrt{2}}$. Plus de la moitié ont donc réinvesti l'opérateur racine carrée comme permettant de trouver le coefficient multiplicateur correspondant à une durée moitié.
Voici ce qu'un élève a écrit par lui-même :



La procédure de prolongement de la « forme » exponentielle est donc quasi absente pour le calcul de la surface à un-quart de mois ; elle est disqualifiée au profit d'un mode opératoire déjà connu des élèves, la racine carrée.

En classe, l'enseignante réintroduit plus tard dans la séance la question de la « forme » exponentielle, en répétant à l'ensemble des élèves une question qu'un élève lui a posée individuellement : où est le 2,5 dans f(2,5)= $4 \times \sqrt{2}$? L'enseignante sollicite un élève qui avait utilisé la notation $2^{2,5}$ et calculé une valeur approchée à la calculatrice. L'enseignante rappelle que ne sachant pas ce que faisait la calculatrice, on « *est allé voir ce qui se passait vraiment* ». Elle souligne que la calculatrice a donné le même résultat avec les deux modes de calcul. Elle en profite pour expliquer que la notation exponentielle pourra dorénavant être utilisée pour faire les calculs. Puis elle demande au groupe classe ce qu'on va écrire pour f(x) « *de manière générale* ».
Une élève demande alors pourquoi on ne fait pas juste $u_0 \times 2^{\frac{7}{2}}$ (pour calculer f(3,5)).
L'enseignante lui répond que cette écriture est correcte, qu'elle peut être mobilisée par les élèves, tout en tâchant de souligner qu'elle correspond à une opération qui est nouvelle pour eux : *« Ça marche mais c'est quoi ? Que fait la calculatrice ? Elle est programmée pour calculer ce genre de chose… On va mettre ces fonctions-là dans notre herbier de fonctions*. »

La notation étant institutionnalisée, l'enseignante questionne le bien-fondé de la notation exponentielle : elle demande aux élèves quelles formules ils connaissent « *avec 2 exposant quelque chose* ».
Une élève répond $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$. L'enseignante note au tableau en spécifiant qu'ils ont rencontré cette propriété avec des exposants x et y entiers. Puis elle demande de traduire la formule « *avec la fonction f* » ; les élèves trouvent : $f(x) \times f(y) = f(x + y)$.
L'enseignante demande de vérifier cette formule avec des exemples de valeurs non entières de x et de y prises dans les tableaux remplis auparavant.
La majorité des élèves a des difficultés à trouver des exemples. La raison en est que la lettre y les pousse à choisir des valeurs dans la ligne des images.
L'enseignante explique aux élèves d'où vient la confusion. La question est terminée en classe entière.

Un élève fait remarquer que les exemples ne sont pas une preuve. L'enseignante répond par l'affirmative, mais dans le cas d'une croissance du type de celle de ce nénuphar, on peut démontrer le résultat dans sa généralité. Elle ne prendra pas le temps de le faire avec les élèves.

L'enseignante leur demande d'écrire $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\sqrt{2}}$ avec des exposants. La référence aux durées de croissance du nénuphar (un demi mois, un quart de mois) leur permet de répondre. Elle leur fait remarquer que $\sqrt{\sqrt{2}}$ peut aussi s'écrire $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ afin de leur faire faire le parallèle avec la formule vue en collège (qu'ils connaissent visiblement bien).

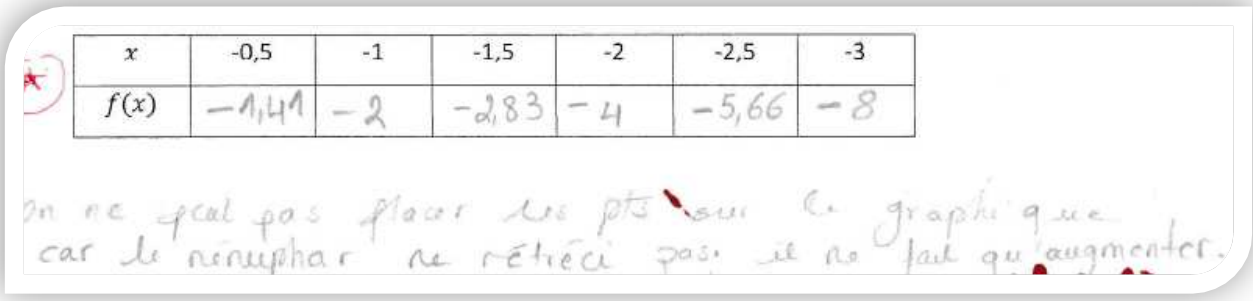
Quelques considérations générales :
La notation indicée des suites ainsi que l'utilisation de la notation exponentielle est élargie aux décimaux par certains élèves, dès la première occasion, puis à chaque nouvelle occasion qui se présente.

Les élèves semblent malgré tout accepter de travailler à ramener le calcul de la surface à un demi mois, puis à un quart de mois, à une opération connue d'eux.
La cohabitation d'un opérateur connu (la racine carrée) et d'une notation ancienne mobilisée avec des valeurs non entières qui semble aller de soi semble cependant les gêner. De ce point de vue, l'un d'eux pose la question de ce qu'ils ont « le droit » d'utiliser en contrôle dès le début de cette cohabitation, puis à nouveau à la fin de cette « activité » : « *Si on fait comme ça, est-ce qu'on aura les points ?* » (Sous-entendu si on utilise la calculatrice avec la notation exponentielle, est-ce que ce sera accepté au contrôle) ?

La vérification de l'équation fonctionnelle sur des exemples semble remplir sa fonction : la notation exponentielle n'est pas un en-soi, du moins pour un certain nombre d'élèves ; l'un d'eux avait même besoin d'entendre la confirmation de ce que l'équation fonctionnelle se démontre.

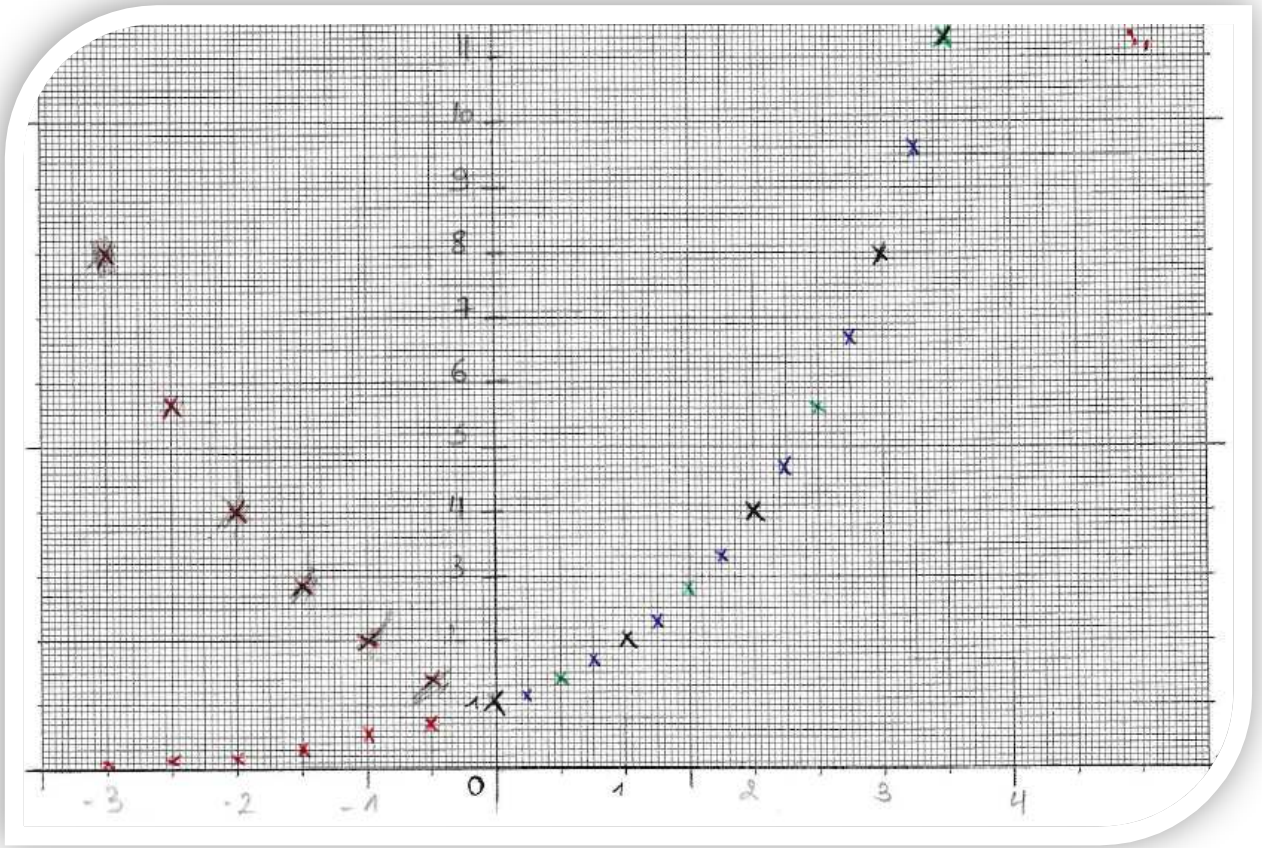
ii. Le prolongement aux négatifs

Le prolongement aux temps négatifs se fait par le biais d'une remontée dans le temps.
Seuls deux élèves ont laissé une trace écrite de recherche avant que ce travail soit effectué en classe entière. Ces deux élèves ont rempli le tableau de valeurs de $f(x)$ avec des valeurs opposées à celles trouvées pour les temps opposés positifs correspondants. L'un d'eux a mis des points sur le graphique ; ils ne correspondent pas aux images notées dans le tableau de valeurs, mais aux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de ceux déjà trouvés. La raison invoquée par l'élève est que « *On ne peut pas placer les points sur le graphique car le nénuphar ne rétrécit pas, il ne fait qu'augmenter* ». L'élève ne s'aperçoit pas que sa façon de placer les points correspond justement à un rétrécissement de la surface dans le temps (les points en rouge correspondent à la correction prise par l'élève). Ce peut être un exemple de la confusion classique chez ces élèves entre signe et sens de variation.



x	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5	-3
$f(x)$	−1,41	−2	−2,83	−4	−5,66	−8

On ne peut pas placer les pts sur le graphique car le nénuphar ne rétréci pas, il ne fait qu'augmenter.



Le groupe classe élimine le graphique « en forme de parabole » car cela voudrait dire que le nénuphar rétrécit. Les valeurs négatives du tableau sont elles aussi éliminées lorsqu'elles sont remises dans le contexte de calcul d'une surface.

Une élève vient remplir le tableau ; elle a compris que le calcul de la surface un demi mois auparavant correspond à une inversion du sens de la flèche sur le diagramme et donc à une division par le coefficient multiplicateur $\sqrt{2}$.

Le prolongement aux exposants négatifs ne pose alors plus de difficulté aux élèves et ils sont en mesure de placer les points correspondants.

iii. Le prolongement du discret au continu

Le prolongement d'un tableau de valeurs discret à la fonction (continue) s'effectue finalement sans question des élèves. Examinons à quels moments il s'est joué.

Le fait qu'il est légitime de relier les points du point de vue de la situation était vu dès la question c) : « Est-ce que ça a un sens de relier les points ? Pourquoi ? » (les points alors placés sont ceux qui ont pour abscisses les entiers de 0 à 4). Le troisième élève interrogé parle déjà de tracer « la courbe ». Cependant, bien que le fait de relier les points soit acté par le groupe classe, il ne fait pas l'unanimité comme en témoignent les questions individuelles des élèves qui suivent la correction de cette question. D'ailleurs, d'après les feuilles relevées, 20 élèves sur les 22 qui ont écrit une réponse ont dans un premier temps répondu « non » ; à peu près la moitié d'entre eux du fait que (u_n) est une suite et non une fonction et l'autre moitié car on ne sait pas ce qui se passe entre deux valeurs consécutives.

La notation $f(x)$ utilisée dès la question d) embarque le fait qu'une fonction f (pour les élèves de Terminale ES c'est automatiquement une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$) est sous-jacente. Rappelons que pour

ces élèves, les nombres réels sont « les nombres à virgule ». Le fait d'écrire 1,5 induit qu'on travaille pour la plupart d'entre eux déjà dans $\mathbb{R}$. Cependant, à cette étape, de nombreux élèves continuent à utiliser la notation indicielle des suites. Se situent-ils dans les suites ou les fonctions (continues) ? Dans un « entre deux » ? Après tout, la notation indicielle n'est pas réservée aux suites !

La question est à ce moment-là plutôt de savoir comment les points sont reliés. Certains élèves font remarquer qu'il est possible de relier les points de telle manière que la fonction ne soit pas croissante ; qu'il y a plusieurs façons de relier les points tout en respectant le fait que la fonction soit croissante. Mais aucun n'envisage une fonction discontinue.

La continuité n'est visiblement pas un enjeu pour ces élèves (de plus, c'est une notion qui n'a pas encore été abordée en cours). Par contre, l'argument de croissance intervient plusieurs fois au cours de ces deux séances : pour justifier que relier les points a un sens (la monotonie pourrait tenir lieu de continuité pour ces élèves ?) et pour justifier l'absurdité de points symétriques de ceux du premier cadrant par rapport à l'axe des ordonnées.

Le discours de l'enseignante amplifie peut-être le « naturel » du prolongement à la fonction sur $\mathbb{R}$:

- L'enseignante parle à plusieurs reprises de fonction et de courbe lors de l'essai de la modélisation par une parabole. La présence d'une courbe (d'une fonction continue) était actée. La question qui restait à débattre était la façon dont les points sont reliés.
- Pour répondre à la question de l'élève sur l'utilisation de $u_0 \times 2^{\frac{7}{2}}$, elle dit « *On va mettre ces fonctions-là dans notre herbier de fonctions* ».
- L'enseignante demande de traduire $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$ « *avec la fonction* ».

Afin de mettre un point final à l'« activité », l'enseignante conclut en introduisant la définition qui est retenue dans l'exposition de connaissances.
Pour cela, elle fait remarquer aux élèves qu'on aurait pu continuer à diviser le temps et rajouter des points au graphique.
À ce moment de l'année, la continuité d'une fonction n'a pas encore été abordée, l'enseignante ne peut y faire référence. Par contre, elle peut faire référence à la dérivation qui fait partie des connaissances anciennes mobilisées récemment. Par conséquent, elle ajoute oralement que si la courbe admet des tangentes partout, c'est-à-dire si elle est bien « régulière », alors il n'y en a qu'une qui prolonge le nuage de points.
Si ces dernières précisions semblent importantes d'un point de la rigueur mathématique du discours de l'enseignant, il est difficile d'en évaluer l'importance sur les apprentissages des élèves. On peut pour le moins faire l'hypothèse qu'elles soulignent aux élèves le fait qu'il se joue dans le prolongement du nuage de point à la courbe « continue » quelque chose qui n'est ni simple ni évident d'un point de vue mathématique.

iv. Conclusion

La notation indicée des suites ainsi que la notation exponentielle sont tous deux mobilisés alors que des valeurs du temps non entières sont considérées.
Les élèves semblent tout de même d'accord pour poursuivre l'étude du phénomène sans recours à la notation exponentielle (qui figure pourtant sur une des touches de leur calculatrice), jusqu'à l'introduction plus formelle de la notation. L'argument qu'il est possible pour eux de calculer avec des opérations connues d'eux à ce stade la valeur de $2^{2,5}$ donnée par la calculatrice semble suffire à les motiver. Il y a finalement une construction du sens de l'exposant de type $\frac{k}{2}$ où k est un entier. Cette construction est partielle bien sûr, mais elle permet d'établir un pont entre les anciennes et les nouvelles connaissances. Elle permet aussi de cantonner le rôle de la calculatrice à ce qu'elle est : un outil de calcul programmé par ses concepteurs (et non un garant d'existence d'objets mathématiques).

Le bon investissement des élèves dans les tâches de cette activité tient d'après nous en partie au rôle qui leur est donné de construire eux-mêmes, à la main et à chaque nouvelle étape dans les calculs, les points correspondants au tableau de valeur. La construction n'est pour eux pas virtuelle, elle est bien dans le réel de

la main et du crayon ; elle fait jouer les cadres numérique, algébrique, analytique et graphique, tout en faisant intervenir des tableaux de valeurs.

L'enseignante avait prévu, si la durée de l'« activité » n'était pas excessive, de faire la démonstration de la relation fonctionnelle. Elle avait aussi prévu de leur demander s'il y avait un moment où le nénuphar a une surface de 10 m², et dans l'affirmative de le déterminer. Cela aurait permis de voir si les élèves s'appropriaient la continuité (de façon intuitive pour cette classe) de la nouvelle fonction.
Cependant il s'était écoulé deux heures, ce qui est long pour ces élèves.
Par ailleurs, une fois les doutes dissipés quant à la légitimité du prolongement de la notation exponentielle à des valeurs non entières, des propriétés qui y sont attachées, de l'utilisation de la calculatrice avec des valeurs non entières, il était temps pour les élèves de passer à des exercices plus « institutionnels ».
Tout se passe comme si, à partir du moment où la notation 2^x était intégrée à ce que les élèves « ont le droit d'utiliser », ils étaient prêts voire impatients de passer à son utilisation.

b) Questionnaire sur les fonctions exponentielles de décembre 2016

Nous avons tenté de préciser ce en quoi les élèves ont bénéficié (ou pas) de cette construction partielle du nouvel objet mathématique qu'est l'exponentielle à exposant réel.

Pour cela, nous avons élaboré un questionnaire à destination des élèves de cette même classe de Terminale ES. Il leur a été proposé le 14 décembre 2016, une semaine après avoir terminé le chapitre sur les fonctions exponentielles. L'« activité » d'introduction aux fonctions exponentielles date alors de 5 semaines. Ces cinq semaines se sont déroulées comme suit : 4 semaines de travail sur les fonctions exponentielles, puis une semaine sur les probabilités conditionnelles.

32 élèves sur les 34 de la classe étaient présents. La durée de passation était d'une demi-heure.

Ce test est de nature différente de ce dont ces élèves ont l'habitude ; son contenu est éloigné des contenus des manuels et des épreuves du baccalauréat.
Tout d'abord dans la forme : il comporte essentiellement des vrai-faux à justifier de façon brève (les élèves répondent sur le polycopié et la place pour répondre est limitée).
Aussi et surtout dans la nature des tâches : celles-ci portent essentiellement sur les fonctions exponentielles de bases strictement positives alors que l'essentiel de leur travail et des questions qui leur ont été posées en contrôle a porté sur la fonction exponentielle de base *e*, pratique guidée par l'épreuve du baccalauréat. En particulier, la dernière question qui demande de tracer une allure de courbe représentative n'est pas un attendu du programme ; on ne la trouve ni dans les épreuves de baccalauréat, ni dans les manuels.

Ce test vise à tenter d'évaluer le sens donné par les élèves à la notation exponentielle d'exposant non entier et dans quelle mesure les fonctions exponentielles de bases strictement positives constituent pour eux un « prolongement » des suites géométriques de même base. Dans ce but, les élèves n'ont pas été prévenus qu'ils seraient testés ce jour-là. Deux contrôles, prévus à l'avance, avaient porté sur les fonctions exponentielles : l'un sur les fonctions exponentielles de bases strictement positives (dont *e*) trois semaines auparavant, l'autre sur la fonction exponentielle de base *e* une semaine auparavant. Interroger les élèves sans les prévenir est inhabituel pour cette classe, d'où une rupture de contrat avec ces élèves qui sont par ailleurs nombreux à avoir un rapport anxieux avec les mathématiques. Ainsi, afin de les motiver à faire de leur mieux sans s'inquiéter des retombées de ce test, nous leur avons dit qu'ils seraient notés, mais que la note ne compterait dans leur moyenne que si elle augmentait celle-ci.

Le questionnaire tel qu'il a été donné aux élèves :

Test sans calcultatrice — TES – décembre 2016

A. Répondre par vrai ou faux et justifier brièvement :

1. $5^{0,25} > 1$ ☐ Vrai ☐ Faux
   Justification :

2. $0,3^{10,9} > 1$ ☐ Vrai ☐ Faux
   Justification :

3. Comme $2^x > 0$ pour tout réel x, alors $2^{-x} < 0$ pour tout réel x ☐ Vrai ☐ Faux
   Justification :

4. La fonction $x \to 0,5^x$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ ☐ Vrai ☐ Faux
   Justification :

5. La fonction $x \to 0,5^x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ ☐ Vrai ☐ Faux
   Justification :

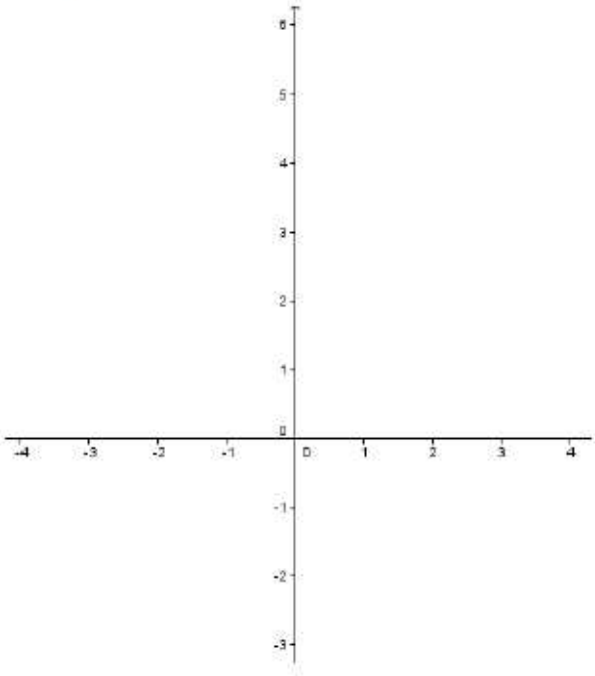
B. Des trois réponses, laquelle est la bonne ? Justifier brièvement.

Sachant que $3^{2,2} \approx 11,2$ a-t-on : ☐ $3^{3,2} \approx 12,2$ ☐ $3^{3,2} \approx 14,2$ ☐ $3^{3,2} \approx 33,6$

Justification :

C. Calculer : $\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ $4^{\frac{1}{2}} =$

D. En vert, donner l'allure de la fonction $x \to 0,25^x$ et en rouge celle de la fonction $x \to e^x$



En annexe 13 figurent, question par question, les analyses *a priori* des tâches et les analyses *a posteriori* des réponses des élèves.

Une chose est frappante, pour toutes les questions de ce test : les procédures mobilisées par les élèves sont d'une grande diversité. Les procédures erronées le sont encore davantage, souvent propres à un seul élève. Serait-ce un signe de ce que les élèves ont été déstabilisés par les questions qui sortaient de leur ordinaire ?

Par ailleurs, peu d'élèves recourent à des exemples ou contre-exemples aux questions qui s'y prêtent (respectivement 9% dans la question A 3 et 6% dans la question A 4). Leur tendance est de rester dans des considérations générales liées à l'algèbre ou l'analyse.

Les réponses des élèves font apparaitre des « théorèmes en acte[57] » erronées.
Un quart des élèves utilise le « théorème en acte » suivant : « un nombre élevé à un grand exposant donne grand nombre » (pour une base positive) dans la question A 2. Cette propriété est un reflet d'un autre « théorème en acte » : « multiplier par un nombre rend le nombre de départ plus grand ». On ne peut la lier à une difficulté qui tiendrait au « prolongement » continu des suites géométriques. Par contre, la décroissance de $x \to 0{,}3^x$ y est perçue par 60% des élèves dans le cadre numérique de cette question, soit de façon formelle, soit par le sens donné à $0{,}3^n$ pour n entier naturel (0,3 multiplié par lui-même n fois). On peut estimer que pour ces élèves, la décroissance de la suite géométrique est étendue à celle de la fonction.

Un autre « théorème en acte » est utilisée par un sixième des élèves dans la question A 1 : « Un nombre élevé à un petit exposant donne un petit nombre » (pour une base positive, petit étant pris dans le sens de positif proche de 0). Dans ce cas, l'exposant est strictement compris entre 0 et 1 et nous avons vu précédemment les raisons pour lesquelles les élèves peuvent, avec un tel exposant, éprouver davantage de difficultés à se référer à leurs connaissances anciennes sur les exposants entiers. Seulement 41% des élèves arrivent à situer $5^{0,25}$ par rapport à 1 pour des raisons au moins partiellement correctes. L'égalité $5^0=1$ n'est peut-être pas mobilisable pour un grand nombre d'entre eux. Remarquons que le « prolongement » de la suite géométrique à la fonction exponentielle de base 5 sur l'intervalle $]0; 1[$ peut être d'autant plus problématique que de nombreux élèves ont tendance à considérer « qu'après 0 il y a 1 », oubliant ainsi de considérer le continu infini des nombres réels compris entre 0 et 1.

Le travail fait sur la positivité des fonctions exponentielles, essentiellement à l'occasion d'exercices faisant intervenir la fonction exponentielle de base *e* (travail algébrique qui se situe dans le monde du continu), ne se transfère pas à la fonction exponentielle de base 2 dans la question A 3.
Dans cette classe, l'introduction aux fonctions exponentielles était basée sur un modèle de croissance du nénuphar, exponentiel de base 2 ; la remontée dans le temps y permettait d'introduire une variable négative et donc un exposant réel négatif. La positivité de la fonction avait alors fait débat. Ce travail ne s'est pas non plus transféré à la résolution de cette question A 3. Certes, il datait de 5 semaines, ce qui est long pour ces élèves.

Analysons ce phénomène de plus près : bien que les élèves utilisent peu un produit à la place d'un calcul exponentiel dans les questions A 1 et A 2, près de la moitié d'entre eux utilise une fausse propriété de règle des signes propre à la multiplication et à la division dans la question A 3 et un tiers d'entre eux dans la question A 5. Notons que les deux premières questions se placent dans le cadre numérique alors que la troisième et la cinquième se placent dans le cadre algébrique. Les élèves réussissent plutôt bien la question C, qui se place dans le cadre numérique, et la multiplication par l'exposant y est pratiquement absente. Les élèves qui ont repéré que l'incrément de 1 sur l'exposant résulte en une multiplication par 3 du résultat dans la question B confondent multiplication et exponentiation dans le cadre algébrique. Y a-t-il une perte de sens de l'opération d'exponentiation dans le cadre algébrique pour ces élèves ? (Que les indéterminées soient réelles, ou pas, puisque rien n'indique que les élèves perçoivent l'ensemble $\mathbb{R}$ comme un continu de nombres, positifs ou négatifs). Les élèves, interrogés *a posteriori* au sujet de cette fausse propriété, répondent par un argument qui relève d'un « esthétisme formel » propre aux mathématiques, bien loin du sens de l'exponentiation : que cela fait une formule qui a l'air « logique » selon eux. En tout état de cause, les questions qui se situent dans le

[57] Vergnaud (2007) définit page 19 un « théorème en acte » par « *une proposition tenue pour vraie dans l'activité* ».

cadre numérique sont mieux réussies que les autres et témoignent davantage du « prolongement » effectif des suites géométriques au continu des fonctions exponentielles. Le jeu sur la langue symbolique qui a permis un développement considérable des mathématiques au XVIIe siècle, dont celui des fonctions exponentielles, fonctionne ici *a contrario*, pour ces élèves.
Cette fausse règle des signes serait donc un « théorème en acte » essentiellement dans le cadre algébrique.

Enfin, le coefficient de corrélation linéaire entre la réussite à ce test et la moyenne trimestrielle des élèves est de 0,3. Elle est donc très faible. Plus particulièrement, certains élèves dont les résultats sont habituellement particulièrement faibles ont révélé une compréhension globale satisfaisante de l'exponentiation à ce test, rare dans cette classe, alors que des élèves de la tête de classe y ont eu un score très faible.
Ceci est révélateur des pratiques d'évaluation en Terminale : les élèves sont évalués sur un certain nombre de types de tâches habituellement données aux épreuves du baccalauréat, qui rendent compte de savoirs faire bien délimités (sur les fonctions, essentiellement des tâches de type « calculus »). Ces savoirs faire ne rendent cependant pas compte d'autres savoirs faire, qu'ils relèvent de tâches de type « calculus », de tâches dans le cadre numérique, ou encore d'ordre plus « méta » telles que celles qui nous intéressent dans cette étude sur le « prolongement » des suites géométriques aux fonctions exponentielles.

Que peut-on inférer de ces résultats quant à la construction des savoirs des élèves lors de l'« activité » d'introduction des fonctions exponentielles faite cinq semaines auparavant ?

- Il semble que des savoirs dans le cadre numérique y aient été construits, mais qu'ils n'ont pas été transférés dans le cadre algébrique.
- Les élèves qui y ont le plus construit de connaissances ne sont pas ceux qui réussissent le mieux aux évaluations traditionnelles ; ce sont ceux qui questionnent davantage le « pourquoi » (par opposition à ceux qui questionnent essentiellement le « comment » et ceux qui se situent davantage dans la restitution mémorisée).

4. Conclusion de la partie III E

Les calculatrices graphiques des élèves véhiculent à la fois le prolongement de la forme algébrique q^n à q^x, ainsi que le prolongement de la suite géométrique à la fonction exponentielle dans le cadre graphique.
Bien que ne mobilisant pas les calculatrices, un des quatre manuels analysés choisit de définir la fonction exponentielle de base q par prolongement de la « forme » algébrique, un autre par prolongement de la représentation graphique de la suite géométrique de raison q. Leurs expositions de connaissances sont cohérentes avec leurs « activités » d'introduction, l'unicité du prolongement n'y est pas questionnée.
De même, ces deux prolongements sont largement utilisés par les enseignants que nous avons interviewés.

Cependant, deux des quatre manuels proposent dans leur introduction aux fonctions exponentielles une approche du continu des nombres réels par divisibilité des intervalles considérés (dans le cadre numérique) tout en densifiant progressivement un nuage de points pour faire apparaitre une « courbe continue » (dans le cadre graphique). Le processus peut être poursuivi, potentiellement à l'infini, par une expérience de pensée ; les énoncés ne le suggèrent pas ; parmi les enseignants que nous avons questionnés, un seul semble l'expliciter à leurs élèves.

Les « activités » d'introduction telles que celles que nous avons exposées dans nos analyses de manuels sont jugées chronophages par les enseignants qui préfèrent faire rapidement des exercices d'application avec les élèves. Le fait est qu'elles sont aussi chronophages en temps de préparation pour les enseignants, compte tenu des difficultés que ces « activités » soulèvent et des écueils qu'ils ont besoin d'y repérer : difficultés liées au calcul numérique, aux questions de modélisations soulevées, à une utilisation des outils numériques pertinente afin qu'ils soient source d'enrichissement et non d'appauvrissement en termes de construction des connaissances.

Notre analyse d'une séance en classe sur l'étude de la valeur d'un bien immobilier montre que les élèves s'impliquent volontiers dans une « activité » d'introduction un peu ardue, mais se sentent lésés lorsqu'ils se rendent compte que la fonction dont ils cherchent des valeurs depuis une heure et demie en utilisant des racines n^{ièmes} de 1,21 n'est autre que « la » fonction $x \longmapsto 1{,}21^x$, qui figure sur leur calculatrice, et que l'enseignant définit lui-même par sa « forme » algébrique.
Pourtant, montrer aux élèves que q^x est construit mathématiquement et que cette notation est le fruit d'un choix lié à la relation fonctionnelle des fonctions exponentielles, que la calculatrice n'est qu'un objet programmé par des humains, que pour résoudre un problème émanant d'un phénomène en fonction du temps discrétisé, on a mobilisé un objet mathématique du continu, tout cela nous semble être un gage de construction de sens pour les élèves, tout en ôtant aux mathématiques leur côté « boite noire », voire « boite magique ».

Nous sommes cependant fondée à nous demander si les enseignants sont conscients de ce que la définition de q^x par sa « forme » algébrique ou par prolongement continu de la représentation graphique de la suite géométrique est incorrecte. Ils ont en effet peu de raison d'avoir été confrontés à des problématiques de prolongement continu dans leurs études à l'université ou dans leurs années d'enseignement.

Sur la base des analyses de manuels, de la séance d'introduction d'un enseignant, des retours d'expérience de collègues, nous avons conçu une séance d'introduction des fonctions exponentielles sur deux heures qui respecte les contraintes liées au fonctionnement de notre établissement.
Les élèves y sont preneurs d'une construction partielle du sens de la notation 2^x pour des valeurs qui ne sont pas des entiers positifs. Cet enrôlement semble en partie lié à la construction à la main, par chaque élève, de points venant compléter quelque peu les points représentant les premiers termes de la suite géométrique. En partie aussi à ce que, rapidement conscients que la calculatrice permet d'effectuer les calculs, les élèves font, par le biais de la mobilisation de la racine carrée, un lien entre leur connaissances anciennes et nouvelles.

Nous avons effectué un test cinq semaines plus tard pour tenter d'évaluer la façon dont les élèves se sont appropriés l'exponentiation prolongée aux nombres réels. Les tâches du test sont par conséquent éloignées de celles des devoirs surveillés habituels.
Ce test montre que des « théorèmes en acte » erronés sont fortement mobilisés par les élèves, particulièrement dans le cadre algébrique. Les élèves semblent répondre à une sorte d'injonction d'esthétisme de la formule algébrique, en dehors de toute considération de sens. La construction de sens de l'exposant non entier est cependant palpable dans le cadre numérique.
Ceux qui ont le plus construit le sens de l'exponentielle sont souvent des élèves qui sont plus enclins à chercher le « pourquoi » de ce qu'ils appliquent (et qui réussissent moins bien dans les évaluations traditionnelles). En revanche, un nombre important d'élèves habituellement performants ont eu les plus grandes difficultés dans ce test ; ceux-là sont travailleurs et s'entrainent à appliquer des règles et des méthodes.

IV. Discret et continu au lycée : les probabilités

De la classe de Troisième, où elles ont été introduites, à la classe de Première, les probabilités sont définies sur un univers fini (donc discret). L'approche fréquentiste basée sur des expérimentations et des simulations cohabite avec l'approche par le modèle d'équiprobabilité, basé entre autres sur des considérations de symétrie.
Les lois à densité (couramment qualifiées de « continues » par les concepteurs de manuels et les enseignants) sont abordées en classes de Terminale. Ainsi, l'étude des variables aléatoires discrètes, abordées en premières, est étendue en Terminale à celle de variables aléatoires à densité. Henry (2003) estime qu'« *il y a là, cependant, un saut conceptuel majeur. Si une loi de probabilités a les propriétés d'une distribution de fréquences relatives à un ensemble fini d'issues, comment ce concept peut-il être étendu à un ensemble continu de valeurs possibles ?* »

Afin de mieux appréhender les caractères discret et continu des probabilités au lycée et les enjeux de l'introduction des lois continues en Terminale, nous allons, dans la partie A, rappeler les définitions et propriétés mathématiques des variables aléatoires discrètes et continues. Nous pourrons ainsi analyser les continuités et les ruptures qui sont présentes au lycée en Terminale dans le domaine des probabilités. Pour ce faire, nous analyserons les programmes officiels relatifs aux probabilités, au collège et au lycée général, en nous appuyant sur quelques extraits des documents ressources édités par Éduscol. L'analyse de l'introduction aux lois de densité dans quatre manuels de Terminale S viendra compléter cette étude relative aux probabilités à enseigner en collège et au lycée général et sur lequel les parties suivantes s'appuient.

La partie B a pour objet de présenter les activités des élèves concernant les lois à densité, observées à travers essentiellement des copies de Baccalauréat.

La partie C portera sur quelques enseignants de niveau Terminale : nous analyserons des capsules de vidéos concernant l'introduction aux lois à densité, hébergées par le site web « You Tube », ainsi qu'une séance d'introduction aux lois à densité qui a eu lieu dans une classe de Terminale S.

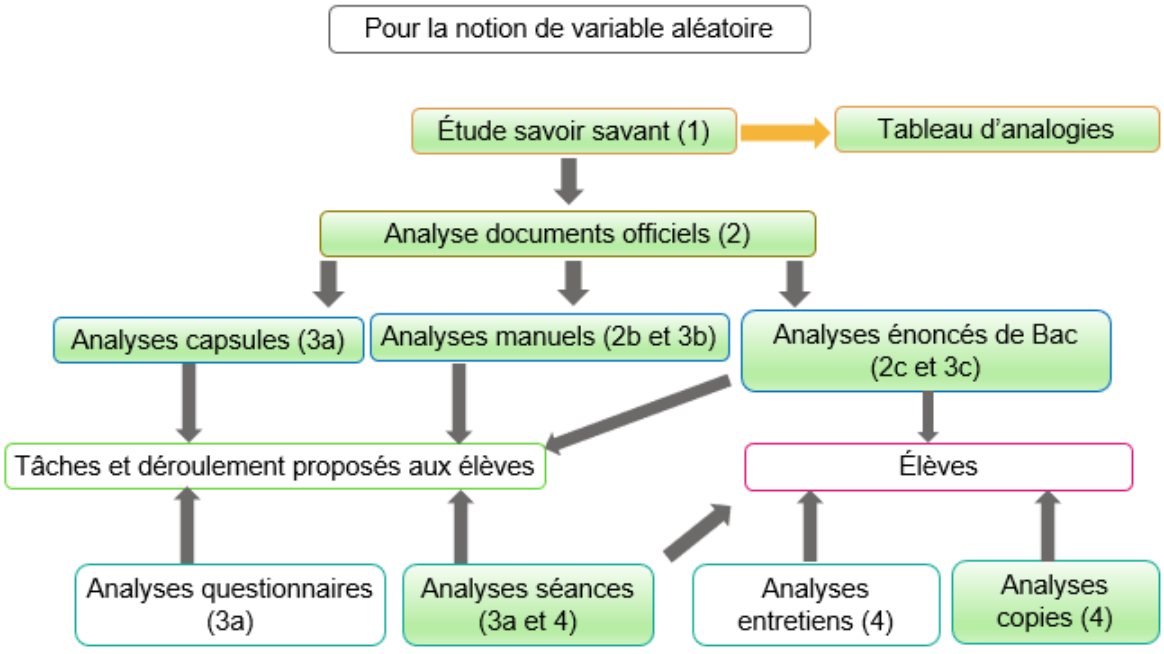


Diagramme récapitulatif de la méthodologie de la partie IV :
Étude de la notion de variable aléatoire en Terminale

A. Le discret et le continu dans les mathématiques à enseigner au collège et au lycée général

1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle discrète, une variable aléatoire réelle continue ?

Nous allons tenter de répondre à ces questions du point de vue des mathématiques « savantes ».
Nous nous bornerons ici à des rappels d'éléments théoriques qui peuvent éclairer les notions de probabilités à enseigner au lycée, notamment ce que les programmes officiels nomment :

- Les « *variables aléatoires discrètes* » en classe de Première ;
- Les « *lois à densités* » en classe de Terminale.

Ainsi, du point de vue du calcul intégral, ils feront appel à l'intégrale de Riemann.
Ces rappels sont largement inspirés de Vivier et al. (2017).

a) Généralités sur les variables aléatoires

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω (l'univers, ou ensemble des événements) et P une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Par définition, une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Considérons une variable aléatoire réelle X.
Alors X vérifie la propriété suivante : pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$ est un élément de $\mathcal{A}$ (autrement dit, c'est un événement). Les probabilistes notent généralement cet ensemble $\{X \in B\}$.

X vérifie cette autre propriété : l'application P_X de l'ensemble $B(\mathbb{R})$des boréliens de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0; 1]$, définie par : pour tout $B \in B(\mathbb{R})$, $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.
P_X se nomme la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Par les passages au complémentaire, à l'intersection et la réunion dénombrable, chacune des familles $\{]-\infty; a], a \in \mathbb{R}\}$ et $\{[a; b], a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ engendre la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, et en particulier l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.
Les probabilistes caractérisent la loi de probabilité de X par sa fonction de répartition dont nous rappelons la définition ci-dessous. Sa loi de probabilité est cependant aussi caractérisée par $\{P(\{X \in [a; b]\}), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

La fonction de répartition F_X de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X^{-1}(]-\infty; x]))$, qu'on note $F_X(x) = P(\{X \in]-\infty; x]\})$.
La fonction de répartition de X dépend de la mesure P_X. Il serait donc plus correct de dire « une » fonction de répartition de X.
Cette fonction possède les propriétés suivantes :

- Elle est croissante au sens large ;
- Elle a des limites à gauche en tout point a de $\mathbb{R}$;
- Elle est continue à droite en tout point a de $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

On peut en déduire que le nombre de points de discontinuité de F_X est fini ou dénombrable. En effet : pour tout entier naturel n, notons A_n l'ensemble des points de discontinuité a de $\mathbb{R}$ pour lesquels le « saut » $F(a) - F(a^-)$ est supérieur à $\frac{1}{n}$. Le nombre d'éléments de $A_n$est inférieur à n. L'ensemble des points de discontinuité est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, qui est au plus dénombrable.

La connaissance de F_X permet de déterminer toutes les probabilités $P(\{X \in J\})$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

En particulier, pour tout réel a, la probabilité de l'événement $X^{-1}(a)$, noté $\{X = a\}$, est égale au « saut » $F(a) - F(a^-)$. Il y a par conséquent un nombre fini ou dénombrable d'événements $\{X = a\}$ de probabilité non nulle.

b) Variables aléatoires discrètes, continues

Pour terminer cet aperçu, donnons les définitions des variables aléatoires discrètes, continues, à densité, ainsi que celle de leur espérance et de leur variance.

Une variable aléatoire discrète X est une variable aléatoire qui prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs. On peut alors noter $X(\Omega) = \{x_i, i \in E\}$ l'ensemble de ces valeurs, où E est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est caractérisée par l'ensemble, discret car fini ou dénombrable : $\{P(\{X = x_i\}), i \in E\}$. Remarquons que, pour que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable, Ω peut être lui-même fini ou dénombrable, ou aussi un ensemble non dénombrable (par exemple un intervalle de $\mathbb{R}$).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète est une fonction constante par morceaux ; le nombre de points de discontinuité de cette fonction est égal au nombre de valeurs prises par la variable aléatoire.

L'espérance de X est définie par la somme finie, ou infinie (lorsqu'elle est convergente) :

$$E(X) = \sum_{i \in E} x_i P(\{X = x_i\})$$

Sa variance est définie par la somme finie, ou infinie (lorsqu'elle est convergente) :

$$V(X) = \sum_{i \in E} (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\})$$

L'espérance et la variance sont donc des moyennes pondérées par les : $\{P(\{X = x_i\}), i \in E\}$.

Lorsque la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est continue, on dit que X est une variable aléatoire continue. D'après ce qui précède, ceci implique que pour tout a de $\mathbb{R}$, $P(\{X = a\}) = 0$.

Distinguons enfin le cas particulier suivant de variable aléatoire continue.

Lorsqu'il existe une fonction positive f Riemann-intégrable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Dans ce cas, F_X est continue donc la variable aléatoire X est continue. La fonction f est appelée densité de la variable aléatoire continue X , ou densité de la loi de probabilité de X. Et on dit que X est une loi à densité.

Alors, pour tous réels a et b, $P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Dans le cas où f est continue, F_X est dérivable de dérivée f.

L'espérance d'une loi à densité X est définie, dès que la fonction $x \mapsto |x|f(x)$ est Riemann-intégrable, par l'intégrale (lorsqu'elle est convergente)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} tP(\{X \in [t; t + dt]\}) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt\,.$$

La première expression de cette intégrale permet de montrer que, dans le cas d'une variable aléatoire à densité, l'expression de l'espérance est un prolongement de son expression dans le cas discret. La somme finie ou dénombrable est remplacée par une intégrale ; la probabilité que X prenne une valeur x_i est remplacée par celle que X appartienne à l'intervalle infinitésimal $[t; t + dt]$.

La variance d'une loi à densité X est définie par l'intégrale (lorsqu'elle est convergente) :

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (t - E(X))^2\, P(\{X \in [t; t + dt]\}) = \int_{\mathbb{R}} (t - E(X))^2 f(t)dt$$

Comme pour l'expression de l'espérance, celle de la variance est un prolongement de son expression dans le cas discret.

c) Les histogrammes

Écartons-nous des notions mathématiques des cours de probabilité du niveau licence. L'histogramme y est peu mobilisé ; il figure cependant dans le programme officiel de classe de Seconde, parmi les outils de représentation des séries statistiques.
L'histogramme est un mode de représentation des fréquences lorsque la variable étudiée prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ (on dit couramment que la variable est « continue »). Selon Roditi (2009), la définition de l'AFNOR d'un histogramme est qu'il représente les fréquences d'une série statistique qui prend une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'histogramme appartient à la fois au monde du discret et à celui du continu : il représente des données en nombre fini (qui forment un ensemble discret) ; ces données mesurent une variable continue, ces mesures (possibles) sont représentées par l'axe des réels.

Dans ce mode de représentation de données, chaque rectangle a une aire égale à la fréquence de la classe correspondante. En conséquence, l'ensemble des « parties supérieures » des rectangles d'un histogramme est la représentation graphique d'une fonction de densité continue par morceaux. L'axe des ordonnées est celui des densités de fréquence : le mot « densité » a ici toute sa signification.

Considérons la situation suivante : un histogramme représente un caractère continu de l'ensemble d'une population.
Définissons l'expérience aléatoire suivante : « on choisit un individu au hasard dans cette population ». Alors le modèle d'équiprobabilité sur l'ensemble des individus peut être légitimement choisi. Notons C la variable aléatoire qui prend pour valeur la mesure du caractère de l'individu choisi au hasard. Ces mesures ont une précision finie et sont en nombre fini.
Dans ce modèle, l'histogramme permet de déterminer les probabilités des événements $\{C \in [x_k; x_{k+1}]\}$ $(0 \leq k \leq n-1)$ où les intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ sont les n classes de l'histogramme. De plus, les probabilités des événements $\{C \in]-\infty; x_0]\}$ et $\{C \in [x_n; +\infty[\}$ sont nulles. Ces probabilités sont toutes égales aux aires des rectangles associés.
Une hypothèse supplémentaire d'équirépartition à l'intérieur des classes permet de calculer les probabilités des événements du type $\{C \in I\}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ces probabilités sont les aires des « parties de l'histogramme » correspondantes.
En d'autres termes, l'histogramme est la représentation graphique d'une densité de probabilité qui modélise la variable aléatoire C ; les probabilités des intervalles sont de façon « naturelle » des aires sous la courbe de la densité (qui est continue par morceaux) et donc des intégrales au sens de Riemann.
De plus, la propriété : pour tout a de $\mathbb{R}$, $P(\{X = a\}) = 0$ découle « naturellement » du modèle puisqu'elle correspond à l'aire d'un rectangle de largeur nulle.

L'histogramme peut donner lieu, par ajustement, à une fonction de densité continue. Cette fonction est alors un modèle continu… d'un modèle continu par morceaux.

d) Conclusion

Les variables aléatoires discrètes et continues s'inscrivent dans l'ensemble plus large des variables aléatoires réelles. Leurs fonctions de répartition permettent de caractériser leur loi de probabilité.
En particulier, le nombre de points de discontinuité d'une fonction de répartition est le nombre de probabilités non nulles du type $P(\{X = a\})$.
Le type de fonction de répartition permet de définir si la variable aléatoire est discrète ou continue :

- La fonction de répartition est constante par morceaux si et seulement si la variable aléatoire est discrète.
- La fonction de répartition est continue si et seulement si la variable aléatoire est continue.

D'un point de vue théorique, concernant la notion de variable aléatoire, les qualificatifs « discret » et « continu » sont donc clairement définis.

L'histogramme est un outil de représentation de données statistiques qui appartient au monde du continu. Il peut jouer un rôle dans l'introduction aux lois à densité au lycée. Il fera l'objet d'une attention particulière dans ce qui suit.

2. Les variables aléatoires à enseigner au lycée

Quelles sont les variables aléatoires à enseigner au lycée ? Présentent-elles des analogies, quelles ruptures et quelles continuités existent entre elles, d'un point de vue mathématique et d'un point de vue didactique ? Comment les manuels étendent-ils des notions relevant de connaissances anciennes dans le monde discret, au monde continu en Terminale ?

Nous cherchons dans cette partie à déterminer :

- Où se situent le discret et le continu dans l'étude des variables aléatoires au lycée ;
- S'il est possible, souhaitable, de s'appuyer sur les variables aléatoires discrètes pour y aborder les variables aléatoires à densité et dans l'affirmative, de quelle façon ;
- S'il est possible, souhaitable, de s'appuyer sur les histogrammes pour aborder les variables aléatoires à densité et dans l'affirmative, de quelle façon ;
- En quoi le passage des variables aléatoires discrètes aux variables aléatoires à densité peut être source de difficultés à ce niveau d'enseignement.

L'étude des aspects mathématiques qui précède nous a permis de cerner les analogies et les ruptures entre les deux types de variables aléatoires du point de vue du savoir « savant ». Sur cette base, nous allons analyser des extraits du programme officiel, des documents ressource édités par « éduscol », des « activités » d'introduction aux lois à densité tirées de manuels de Terminale S (qui comportent dans l'ensemble des « activités » d'introduction plus étayées qu'en série ES). De brèves analyses d'extraits de manuels de Terminale S sont faites dans Vivier et al. (2017) ; nous nous y réfèrerons.

a) Les connaissances anciennes des élèves de Terminale générale

Tout d'abord, les élèves ont déjà rencontré le mot « densité », au moins en géographie, concernant les densités de population.

Les histogrammes figurent au programme de la classe de cinquième de 2008[58]. Il y est précisé que les histogrammes à présenter aux élèves doivent avoir des classes de même amplitude. Le document « Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège » édité par Éduscol en janvier 2007 intitulé « *Organisation et gestion de données au collège* » précise page 6 que « *l'histogramme se lit alors comme un diagramme en bâtons* ».

Dans le programme de la classe de seconde générale[59], l'histogramme figure en tant que représentation graphique d'une série statistique, sans autre indication. Il ne figure pas dans le document « Ressources pour la classe de seconde » intitulé « *Probabilités et statistiques* » édité par Éduscol en juin 2009.
L'histogramme ne figure pas dans les documents officiels concernant les classes de Première et de Terminale générale.
Dans ces conditions, il parait probable qu'une « définition en acte » erronée s'impose aux élèves : l'histogramme serait une sorte de diagramme en bâtons sont les bases sont élargies. Et il est improbable que les enseignants de lycée fassent émerger la notion de densité par le biais des histogrammes.
Les tableurs peuvent amplifier ce phénomène puisqu'ils proposent sous la dénomination d'histogramme des graphiques qui n'en sont pas.

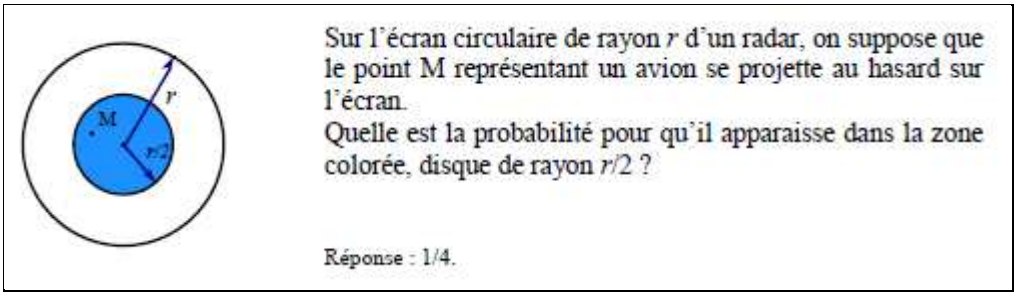
Roditi (2009) a repéré ce problème qu'il nomme le « *problème d'enseignement* » de l'histogramme. Il cite un extrait du manuel de seconde de la collection Terracher, aux éditions Hachette, datant de 1994, qui écrit que « *lorsque les classes ne sont pas de même amplitude, il est parfaitement « imbécile » (sic) de proposer une unité quelconque sur l'axe des « ordonnées »* ». Nous verrons que les manuels de Terminale font usage des histogrammes pour faire « apparaitre » les représentations graphiques de fonctions de densité mais que les inexactitudes sur la grandeur représentée en ordonnée sont nombreuses.

[58] Bulletin Officiel spécial n°6 du 28 aout 2008
[59] Bulletin Officiel spécial n°30 du 23 juillet 2009

Quelles sont les connaissances anciennes des élèves de Terminale Générale concernant les lois de probabilités ?

Les élèves de Terminale Générale ont abordé les probabilités en classe de Troisième. Le programme officiel de Troisième de 2008 qu'ils ont suivi indique que : « *La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.*)[60] ». L'approche fréquentiste est donc privilégiée pour leur introduction. Cependant, le document ressource pour la classe de Troisième de 2008, intitulé « *Probabilités au collège* », développe en premier lieu le calcul de probabilités « *définies à partir de considérations de symétrie ou de comparaison* ». Des exemples de calculs de probabilités liées à des jets de dés ou de pièces de monnaies équilibrés, des tirages de boules dans une urne, de roue de loterie comportant des secteurs de même aire, y sont proposés. Bien que dans ce dernier cas l'aiguille de la roue puisse pointer sur un ensemble continu d'emplacements, c'est tout de même la loi d'équiprobabilité sur un univers fini – l'ensemble des secteurs - qui est mobilisée, comme dans les autres cas.

Le document montre aussi des exemples de calculs de probabilités qu'il qualifie de « *géométriques* ». En voici un :



Extrait du document « Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4 et 3e du collège » intitulé « Probabilités au collège », Éduscol, mars 2008, page 4

Cet exemple mobilise la loi uniforme continue sur le disque qui modélise l'écran du radar : la probabilité calculée est celle du quotient : $\frac{aire\ du\ domaine\ colorée}{aire\ du\ disque}$.
Michel Henry, dans Henry (2003), qualifie cette loi continue de « naturelle ». Pour illustrer cette loi, il y présente l'exemple du problème posé par le jeu de Franc-Carreau : il y propose un modèle discret du problème en « *quadrillant* » le domaine carré qui représente un carreau et chaque petit carré est un événement élémentaire de même probabilité. Dans ce modèle, la probabilité de « Franc Carreau » est un rapport d'aires, ce qui le « *conduit à compléter et généraliser* » son hypothèse d'équiprobabilité au modèle continu.

Ainsi, depuis la classe de Troisième, les élèves mobilisent de façon « naturelle » le modèle d'équiprobabilité sur des univers finis et par conséquent, quoiqu'implicitement, la loi uniforme discrète.
Ils peuvent aussi avoir rencontré des exemples de problèmes dans lesquels les événements sont des surfaces de $\mathbb{R}^2$, problèmes modélisés par la loi uniforme continue dans laquelle la vraisemblance d'un événement est proportionnelle à son aire. Il est aussi possible qu'ils aient rencontré des problèmes dans lesquels les événements sont des intervalles de $\mathbb{R}$, problèmes modélisés par une loi uniforme continue dans laquelle la vraisemblance d'un événement est proportionnelle à sa longueur.

Les objectifs du programme officiel de la classe de Seconde générale, en probabilités, sont de consolider les notions abordées en Troisième et d'aborder la notion d'événement. Les arbres, diagrammes et tableaux apparaissent en tant qu'outils de calculs de probabilités.
Les probabilités y sont aussi décrites comme un terrain propice à la mise en œuvre d'algorithmes de simulations d'expériences aléatoires.

[60] Ibid.

En classe de Première, l'intitulé « *statistiques et probabilités* » du programme officiel contient trois parties : « *statistique descriptive, analyse de données* » ; « *probabilités* » ; « *échantillonnage* »[61].
La deuxième partie concerne les « *variables aléatoires discrètes* », leur loi de probabilité, leur espérance, et pour la série S, leur variance et leur écart-type.
Le programme demande en commentaire de faire *« le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données* » et parmi les capacités attendues, figure : « *Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions* ».

Il n'est pas précisé qu'il s'agit de variables aléatoires réelles, on peut le comprendre par la présence de la notion d'espérance.
Rien n'y est dit sur le nombre de valeurs prises par ces variables aléatoires discrètes. Cependant, la sommation infinie n'est pas étudiée au lycée ; on donc peut comprendre que les variables aléatoires discrètes au programme prennent un nombre fini de valeurs réelles.
Les choix faits par les manuels consultés correspondent d'ailleurs à ce cas particulier.
Les lois de probabilités de ces variables aléatoires sont donc explicitées par la liste finie des $P(X = x_i)$ non nulles. En pratique, ces lois sont souvent présentées sous forme de tableau ; elles peuvent l'être sous forme de diagramme en bâtons, dans le cadre graphique.

Le modèle de répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues, la loi de Bernoulli et la loi binomiale font l'objet de diverses « capacités attendues » du programme officiel. Ainsi, la loi binomiale y prend une large place ; elle est réinvestie dans la partie « *échantillonnage* », en tant qu'outil de prise de décision.

Lorsqu'ils arrivent en Terminale, les élèves ont donc rencontré trois lois discrètes : la loi uniforme, la loi de Bernoulli et la loi binomiale. Ils ont pu rencontrer la loi uniforme continue sur des surfaces simples de $\mathbb{R}^2$ dans un contexte géométrique.
En classes de Terminale L, ES et S, l'intitulé « *probabilités et statistique* » se décline en quatre parties : « *conditionnement* » (auquel est juxtaposé *« indépendance* » en série S) ; « *notion de loi à densité à partir d'exemples* » ; « *intervalle de fluctuation* » ; « *estimation* »[62].

b) L'introduction des lois à densité : le programme officiel

Voici un premier extrait du programme officiel correspondant à la deuxième partie :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Notion de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans $\mathbf{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbf{R}$. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y) ; x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.

Extrait du Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011 – séries ES, L et S

[61] Bulletin Officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010
[62] Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011

Dans cette partie du programme officiel, les manuels et les enseignants utilisent couramment et de façon interchangeable les locutions « à densité » et « continue ». Pour sa part, le programme officiel n'utilise que la locution « à densité ».
Cette partie du programme officiel introduit cependant dans le paysage trois aspects de continuité :

- On considère des lois de probabilités dont l'univers est un intervalle de $\mathbb{R}$ (donc un ensemble continu).
- Les variables aléatoires étudiées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Leurs lois sont des lois à densité, ce sont donc des variables aléatoires continues (c'est-à-dire dont la fonction de répartition est continue ; cependant la notion de fonction de répartition n'est pas au programme, cet aspect est donc invisible pour les élèves).
- De plus, les probabilités sont définies en tant qu'aires sous la courbe de la fonction de densité. En classe de Terminale, ces aires sont calculables par le calcul intégral dès lors que la fonction est continue par morceaux. Bien que ce ne soit pas mentionné dans le programme officiel, les densités abordables à ce niveau sont donc continues par morceaux. C'est bien le cas des densités des lois uniforme, exponentielle et normale qui sont les exemples imposés dans la suite de ce programme.

Dans le cas de la loi exponentielle (étudiée en série S uniquement), le choix fait par les manuels consultés est de définir la fonction de densité sur $[0; +\infty[$.
Ainsi, si l'intervalle sur lequel la fonction de densité est définie est borné (cas de la loi uniforme) ou semi borné (cas de la loi exponentielle), le programme suggère d'étudier la restriction d'une loi à l'intervalle sur lequel la fonction de densité prend ses valeurs non nulles.
Finalement, dans les trois lois étudiées en Terminale, les fonctions de densité sont donc continues sur leur ensemble de définition.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est caractérisée dans ce programme par sa fonction de densité :

- Soit par sa courbe, dans le cadre fonctionnel, registre graphique, comme le suggère l'extrait du programme ci-dessus ;
- Soit par son expression, dans le cadre fonctionnel, registre algébrique, comme il est indiqué dans chaque sous partie du programme sur les lois uniforme, exponentielle (en Terminale S) et normale.

D'après Henry (2003), le « *saut conceptuel majeur* » que constitue l'extension des lois discrètes aux lois à densité tient :

- Au prolongement d'un ensemble fini de valeurs prises par la variable aléatoire à un ensemble numérique continu ;
- À la définition de la probabilité d'un événement : dans le cas discret, celle-ci est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent l'événement. Dans le cas des lois à densité, ces probabilités sont nulles. Dans ces conditions, écrit Henry, « *comment donner un sens probabiliste à la notion de densité ?* ». Rajoutons la question connexe suivante : comment définir la probabilité d'un événement ?

Le statut de l'événement impossible change aussi : dans le cas discret, l'événement impossible est celui de probabilité nulle. Son interprétation dans un contexte concret ne pose pas de difficulté.
Dans le cas des lois à densité, les événements $\{X = a\}$ sont tous de probabilité nulle. Ils ne sont pas pour autant qualifiés d'« impossibles ». Certains cours de probabilités de l'enseignement supérieur les qualifient de « quasi impossibles », d'autres ne les qualifient pas (ou ne tentent pas de les qualifier).
Leur interprétation dans un contexte concret est problématique. Prenons l'exemple d'une durée aléatoire modélisée par une loi à densité X. $P(X = t) = 0$ tiendrait-il au fait qu'il est impossible que la durée soit exactement égale à t ? Mais alors, qu'est-ce qu'une durée exacte ?

Dans le tableau récapitulatif qui suit, nous considérons le cas des variables aléatoires à densité qui sont continues par morceaux, ce qui nous permet de rester, à un niveau théorique, proche des programmes de lycée.
Le tableau met face à face les notions dans les cas discret et continu ; nous avons déjà présenté un tel tableau dans la partie III. C. 1. a. iii., sur le thème des suites et des fonctions.

Variable aléatoire réelle discrète		**Variable aléatoire réelle à densité (cas d'une fonction continue par morceaux)**
X prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs : $X(\Omega) = \{x_i, i \in E\}, E \subset \mathbb{N}$	×	X prend toutes les valeurs d'une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$
Loi de probabilité de X définie par $\{P(\{X = x_i\}), i \in E\}$	⟸ !	*Loi de probabilité de X définie par* $\{P(\{X \in J\}), J \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$
Loi de probabilité de X caractérisée par : sa fonction de répartition	⇔	*Loi de probabilité de X caractérisée par* : sa fonction de répartition
Pas de définition analogue	×	*Loi de probabilité de X caractérisée par* la donnée d'une fonction f continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ telle que $P(\{X \in J\}) = \int_J f(t)dt$
$P(\{X = a\}) = 0$ signifie : $\{X = a\}$ est l'événement impossible Pas de fonction de densité	× ×	Pour tout réel a, $P(\{X = a\}) = 0$ Pour certains réels a : $f(a) > 0$ bien que $P(\{X = a\}) = 0$
Propriété de la loi de probabilité de X : $\sum_{i \in E} P(\{X = x_i\}) = 1$	↔	*Propriété de la loi de probabilité de X :* $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$
Événement : $\bigcup_{i \in F}\{X = x_i\}, F \subset E$ $P\left(\bigcup_{i \in F}\{X = x_i\}\right) = \sum_{i \in F} P(\{X = x_i\})$	⟸ ! ↔ !	*Événement :* $\{X \in B\}$ où B borélien de $\mathbb{R}$ $P(\{X \in B\}) = \int_B f(t)dt$
Représentation graphique : Diagramme en bâtons En ordonnée : probabilité Somme des ordonnées égales à 1	 × × ↔ !	*Représentation graphique :* Courbe d'une fonction continue par morceaux En ordonnée : densité de probabilité Aire sous la courbe égale à 1
Espérance (définition) : $E(X) = \sum_{i \in E} x_i P(\{X = x_i\})$ Lorsque la somme converge	↔	*Espérance (définition) :* $E(X) = \int_{\mathbb{R}} tP(\{X \in [t; t + dt]\}) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt$. Lorsque l'intégrale converge
Variance (définition) : $V(X) = \sum_{i \in E} (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\})$ Lorsque la somme converge	↔	*Variance (définition) :* $V(X) = \int_{\mathbb{R}} (t - E(X))^2 f(t)dt$ Lorsque l'intégrale converge

Légende :

↔	notions, définitions, propriétés ou méthodes analogues
⇔	définitions, propriétés ou méthodes équivalentes
⟸ ou ⇒	implications – la réciproque est fausse si pas de signe d'équivalence
×	notions, définitions, propriétés sans analogue ou avec analogue erroné
!	notions, définitions, propriétés avec analogue mais présentant des ruptures didactiques

c) L'introduction de la loi uniforme : le programme officiel, les manuels

i. Le programme officiel

La première loi à étudier est la loi uniforme ; voici l'extrait du programme officiel correspondant :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi uniforme sur $[a,b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0,1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a,b]$ est introduite à cette occasion par $\mathrm{E}(X)=\int_a^b t f(t)\mathrm{d}t$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Extrait du Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011 – séries ES, L et S

Le programme indique qu'il est possible d'introduire la loi uniforme sur $[0;1]$ par « *l'instruction nombre aléatoire d'un logiciel ou d'une calculatrice* ».
Rappelons que l'instruction « nombre aléatoire » génère des nombres pseudo-aléatoires de l'intervalle $[0;1[$. Ces nombres ayant un nombre fini de décimales (qui dépend de l'artefact), l'ensemble des nombres qui peuvent être simulés est, en fait, fini.
Cette loi uniforme présente l'avantage de faire l'objet de simulations très simples ; sa densité (la fonction constante égale à 1) est cependant un cas particulier qui parait difficilement généralisable.

Le document « Ressources pour la classe terminale et technologique », intitulé *« Probabilités et statistiques »*, édité par Éduscol en février 2012, propose de généraliser cette densité à celle de la loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ de la manière suivante :

Le nouveau programme propose de définir la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ quelconque.
Après avoir défini la loi uniforme sur $[0,1]$ à partir, par exemple, du choix au hasard d'un réel entre 0 et 1, on peut définir la loi uniforme sur $[a,b]$ en remarquant que pour que l'aire sous la courbe soit égale à 1, il faut et il suffit que la valeur de la constante soit $\frac{1}{b-a}$.

Extrait du document « Ressources pour la classe terminale et technologique », intitulé « Probabilités et statistiques », édité par Éduscol en février 2012, page 43

Ce document propose donc de mobiliser la propriété d' « *aire sous la courbe égale à 1* » afin de déterminer « *la valeur de la constante* ». Cela suppose qu'il est acquis :

- Qu'il existe une fonction de densité pour cette loi ;
- Que cette fonction est constante sur l'intervalle $[a;b]$;
- Que l'aire sous sa courbe (sur l'intervalle $[a;b]$) est égale à 1.

Aucun détail n'est donné pour la mise en œuvre de cette proposition.

Il est aussi possible de procéder sans simulation, par analogie avec l'équiprobabilité dans le cas fini, que les élèves de Terminale mobilisent depuis trois ans. Dans le cas fini, les événements $\{X = x_i\}$ sont tous « d'une égale vraisemblance » et la probabilité d'un événement est proportionnelle au nombre d'événements élémentaires le constituant. L'équiprobabilité se traduit dans le cas de la loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ par : « les événements $\{X \in [c;d]\}$ ont « une vraisemblance proportionnelle à la longueur $d-c$ ». »
Par conséquent, si $[c;d] \subset [a;b]$ $P(\{X \in [c;d]\}) = \frac{d-c}{b-a}$.

La propriété $P(\{X = c\}) = 0$ est alors une conséquence du cas $c = d$.

Henry (2003) estime que le modèle d'équiprobabilité dans le cas fini « *découle « naturellement » de symétries admises en hypothèse de travail* ». Les probabilités exprimées en termes de rapports de longueurs partagent ce « naturel » ; Henry regrette en conséquence le choix de l'intervalle [0 ; 1] dont la longueur est 1.

ii. Les manuels

Comment les manuels de Terminale S s'emparent-ils de ces documents officiels ? Introduisent-ils les lois à densité via la loi uniforme ou par un autre exemple ? Quel rôle la simulation (qui génère des valeurs d'un ensemble discret et qui permet des calculs de fréquences) joue-t-elle dans l'introduction de modèles probabilistes dans le continu ?

Nous avons analysé l'approche de quatre manuels édités en 2012 en nous focalisant sur les aspects des lois discrètes et continues mis en lumière dans ce qui précède. Il s'agit des manuels « Hyperbole » édition Nathan, « Indice » édition Bordas, « Math'x » édition Didier et « Repères » édition Hachette.
Les analyses figurent en annexe 14.

Les quatre manuels analysés suivent les préconisations du programme officiel de Terminale en ce qu'ils introduisent les lois à densité par des exemples.
La loi uniforme sur un intervalle sert de premier exemple dans trois d'entre eux, de second exemple dans le manuel « Indice » ; elle est introduite par le biais d'une expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre « au hasard » dans l'intervalle fermé $[0; 1]$ pour trois d'entre eux, dans $[0; 10]$ dans le manuel « Math'x ». Trois propriétés en rupture avec les lois discrètes y sont abordées :

- Pour tout a de $\mathbb{R}$, $P(\{X = a\}) = 0$;
- La loi de probabilité ne peut plus être décrite par la liste des $P(\{X = x_i\})$ – ce n'est explicite que dans le manuel « Hyperbole » ;
- Les évènements qui font l'objet de calculs de probabilités sont les intervalles inclus dans $[0; 1]$ (ou $[0; 10]$.

Dans les « activités » d'introduction, elles sont conjecturées, voire prouvées, pour être généralisées aux autres lois à densité dans l'exposition de connaissances.

Ces exemples se situent d'emblée dans le continu puisque le nombre choisi au hasard l'est dans un intervalle de $\mathbb{R}$. Ils mobilisent cependant dans un premier temps des tirages aléatoires de nombres décimaux à, au plus, n décimales (dont l'ensemble est discret fini), pour mener des raisonnements intra mathématiques, et/ou pour simuler ces tirages sur calculatrice ou ordinateur (via le tableur, la programmation).

La simulation est utilisée dans tous les manuels, conformément au programme officiel. Le nombre de décimales des nombres pseudo aléatoires générés (donc leur caractère discret) est explicite dans deux d'entre eux. L'un des deux (le « Math'x ») le souligne par ces mots : « *Le tirage au hasard d'un réel x dans l'intervalle $[0; 10]$ parait difficile à simuler !* ». Il n'en fait cependant pas usage par la suite.
L'autre (le manuel « Indice ») l'exploite en demandant de déterminer la probabilité que le nombre 0,2154473089 soit obtenu lors d'une simulation. Il « glisse » vers un univers continu (du moins dense dans $\mathbb{R}$) à la question suivante en demandant la valeur de $P\left(\left\{X = \frac{1}{3}\right\}\right)$.

La propriété « pour tout t de $\mathbb{R}$, $P(\{X = t\}) = 0$ » est abordée dans les « activités » d'introduction des quatre manuels. Trois d'entre eux utilisent l'argument de l'infinité des nombres réels de $[a; b]$ pour la conjecturer, ou la prouver (c'est le cas dans le manuel « Math'x »). Le continu des intervalles de $\mathbb{R}$ intervient donc par le biais de leur cardinal : leur nombre d'éléments y est (supérieur à) une infinité dénombrable, dans une étendue finie puisque l'intervalle est borné.
Cette propriété est bien entendu énoncée dans la partie de l'exposition de connaissances des quatre manuels concernant les généralités sur les lois à densité. Les trois manuels qui ne l'avaient pas démontrée auparavant le font alors, par le calcul intégral. Aucun manuel ne tente de l'induire d'expériences aléatoires concrètes dans lesquelles l'événement $\{X = t\}$ serait dit « (quasi)impossible ».

La loi uniforme discrète est mobilisée par les « activités » d'introduction des quatre manuels :

- Pour conjecturer ou prouver la propriété « pour tout t de $\mathbb{R}$, $P(\{X = t\}) = 0$ » (trois manuels sur les quatre). C'est l'équiprobabilité des événements $\{X = t\}$ qui sert d'argument ;
- Pour conjecturer des probabilités du type $P\left(\frac{k}{n} \leq X \leq \frac{k+1}{n}\right)$ (deux manuels sur les quatre). C'est l'équiprobabilité des événements $\{k \leq X \leq k+1\}$ pour le « Math'x » et $\left\{\frac{k}{10} \leq X \leq \frac{k+1}{10}\right\}$ pour le « Repères » qui sert d'argument. Cette équiprobabilité sur un univers fini est une conséquence de la loi uniforme continue sur un intervalle que Henry (2003) et Vivier et al. (2017) qualifient de « naturelle ». Ces conjectures précèdent celle des probabilités du type $P(X \in [a; b])$.

Le manuel « Indice » convoque la loi uniforme continue sur $[0; 1]$ de façon « naturelle » sur des intervalles de longueur $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$.

Les quatre manuels ont recours aux histogrammes de fréquences. Les classes y ont systématiquement la même amplitude (égale à 1 pour deux d'entre eux, égale à 0,1 pour les deux autres). Trois d'entre eux en font une représentation graphique ; leur axe des ordonnées est correctement gradué, deux sont incorrectement libellés et le troisième ne le libelle pas. Les histogrammes incorrectement libellés (« fréquence » pour un manuel et « pourcentage » pour un autre) correspondent pourtant aux manuels qui rappellent explicitement que l'aire de chaque rectangle est la fréquence de la classe qui lui correspond.
Dans ces conditions, il n'est pas étonnant qu'aucun des manuels ne fasse émerger la notion de densité à partir de l'histogramme.
Par contre, trois d'entre eux l'utilisent pour « glisser » du calcul d'une fréquence, égale à l' « aire sous un histogramme », à celui d'une probabilité, égale à l' « aire sous une courbe ».
Le passage du domaine des statistiques à celui des probabilités n'est clair que dans le manuel « Repères » qui souligne le passage du calcul de fréquences au calcul de probabilités par le titre de la partie correspondante : « *Utilisation d'un modèle* » et dans lequel aucun amalgame n'est fait.

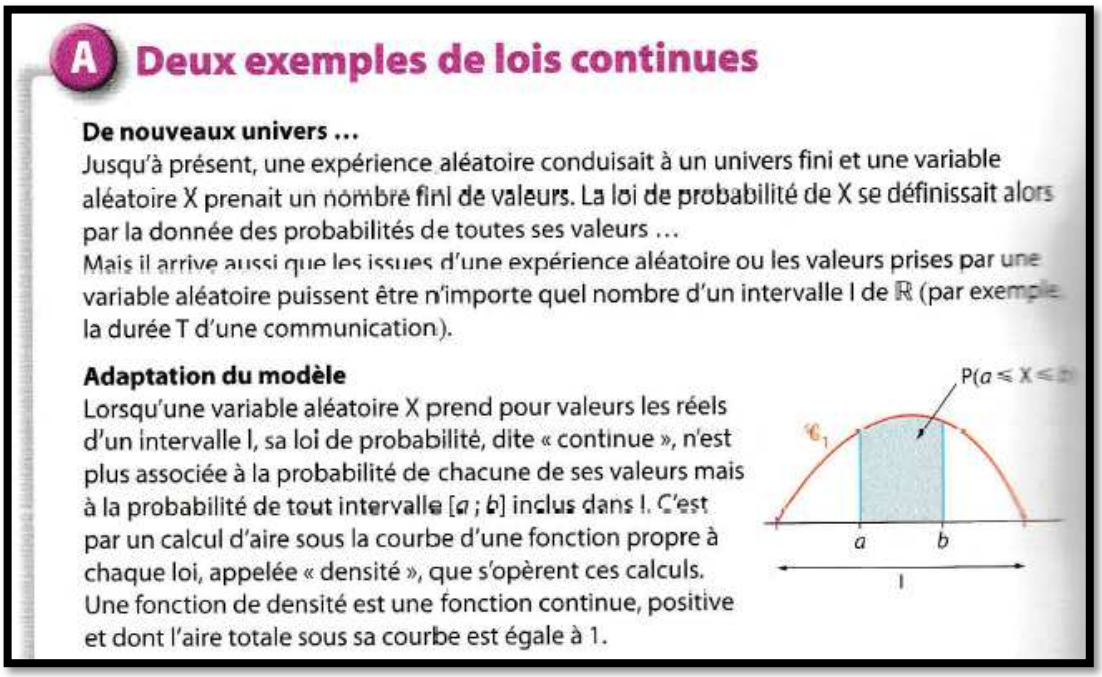
La fonction de densité est introduite dans tous les manuels dans le cadre graphique : une courbe de fonction continue est tracée sur un histogramme ; elle « *lisse* », « *épouse* » l'histogramme ou elle « *apparait* » avec des classes de petites amplitudes. Elle n'est présentée en tant que modèle probabiliste que dans un seul manuel. Dans les trois autres, elle semble aller de soi ; les deux manuels qui introduisent les fonctions de densité dans une activité de type « Réponse à un Problème » font un amalgame entre la variable aléatoire associée au phénomène « réel » et la variable aléatoire qui modélise la situation via la fonction de densité proposée. Le continu s'impose non en tant que type de modèle de la réalité mais comme émanant de la réalité.

Ces approches permettent d'éviter le point de vue de sommation de l'intégrale, conformément au programme officiel. L'intégrale intervient en tant qu'outil de calcul d'aire « sous une courbe de fonction continue ». La difficulté liée à ce que l'on « somme des probabilités nulles » (les $P(\{X = t\}), t \in [a; b]$) et que cette somme n'est pas nulle, n'est ainsi pas abordée.

Une analyse rapide des expositions de connaissances des quatre manuels concernant les généralités sur les lois à densité permet de voir que :
- Contrairement au programme officiel, tous utilisent les dénominations « loi continue » et « variable aléatoire continue » en plus de « loi à densité » et « variable aléatoire à densité » ;
- Deux manuels définissent d'abord une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I puis une variable aléatoire à densité sur I ; le mot « densité » prédomine. Les deux autres définissent en premier une variable aléatoire continue par le fait qu'elle prenne ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (comme le programme officiel le préconise) puis une fonction de densité ; le mot « continu » prédomine ;
- Trois manuels donnent un exemple concret de variable aléatoire à densité ; dans les trois, la grandeur variable est une durée.

Le continu est donc explicitement présent dans ces expositions de connaissances. Le support intra mathématique du continu est la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$; le support concret du continu est le temps sous forme de durée.

Les ruptures constatées en « activité » d'introduction ne figurent que dans l'exposition de connaissances du manuel « Math'x » :



A Deux exemples de lois continues

De nouveaux univers ...

Jusqu'à présent, une expérience aléatoire conduisait à un univers fini et une variable aléatoire X prenait un nombre fini de valeurs. La loi de probabilité de X se définissait alors par la donnée des probabilités de toutes ses valeurs ...

Mais il arrive aussi que les issues d'une expérience aléatoire ou les valeurs prises par une variable aléatoire puissent être n'importe quel nombre d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ (par exemple la durée T d'une communication).

Adaptation du modèle

Lorsqu'une variable aléatoire X prend pour valeurs les réels d'un intervalle I, sa loi de probabilité, dite « continue », n'est plus associée à la probabilité de chacune de ses valeurs mais à la probabilité de tout intervalle $[a\,;b]$ inclus dans I. C'est par un calcul d'aire sous la courbe d'une fonction propre à chaque loi, appelée « densité », que s'opèrent ces calculs.

Une fonction de densité est une fonction continue, positive et dont l'aire totale sous sa courbe est égale à 1.

Extrait du manuel Math'x de Terminale S, Didier, édition de 2012, page 402

Les « activités » d'introduction des quatre manuels, elles, soulèvent toutes des questions liées à ces ruptures, tout en s'appuyant fortement sur la loi uniforme discrète connues des élèves.

Nous avons pu constater qu'elles présentent des imprécisions, des erreurs ou des confusions. Un enseignant a besoin d'être suffisamment formé à la notion de variable aléatoire, dans les cas discret et continu, et aux difficultés que l'introduction aux lois à densité soulève, afin de pouvoir déceler ces points négatifs des manuels ou plus généralement des ressources à sa disposition.

Pour éviter l'écueil de faire paraitre les notions mathématiques ayant trait au continu comme des solutions « magiques » aux problèmes posés, il a besoin aussi d'être à même de répondre aux questionnements inévitables des élèves et de les éclairer par un discours cohérent qui incorpore des aspects « méta », particulièrement concernant le fait que les lois à densité fournissent des modèles de situations aléatoires. Des quatre manuels analysés, le « Math'x » est le seul à introduire du « méta » dans l'exposition de connaissances. Il fournit explicitement un cadre au discret et au continu (imparfait, comment pourrait-il en être autrement à ce niveau d'enseignement ?) : les lois de probabilité discrètes prennent un nombre fini de valeurs alors que les lois à densité prennent pour valeur « *n'importe quelle nombre d'un intervalle I de* $\mathbb{R}$ » .

Tableau récapitulatif des approches des fonctions de densité dans les « activités d'introduction » de quatre manuels de Terminale S

Acronymes ou notations : RAP : Réponse À un Problème AI : Activité d'Introduction $\mathbb{D}_n$: ensemble des décimaux à au plus n décimales

	Loi uniforme	$P(X = a) = 0$	Simulation	Passage de discret à continu	$P(X \in [a;b])$	Histogramme	densité	Lien proba et intégrale	Fonction de densité
Hyperbole	Sur $[0;1]$	Conjecturé Argument : infinité des nombres de $[0;1]$	Sur $[0;1]$ avec tableur ; Nombre de décimales pas dit Conjecture de $P(X \in [a;b])$	D'emblée dans $[0;1]$ Sous-ensembles de $\mathbb{D}_n$ pour conjecture de $P(X = a) = 0$	Conjecturé par simulation de loi uniforme	Classes de même amplitude égale à 1 En ordonnée : pourcentages	Ø	Glissement de fréquences à proba ; d'aire d'histogramme à aire sous une courbe Pas de sommation infinie	RAP Courbe qui « épouse » l'histogramme
Indice	Sur $[0;1]$ Après une AI sur densité de proba	Argument : infinité des nombres de $[0;1]$	Sur $[0;1]$ avec calculatrice ; Nombre de décimales explicité : 10 Conjecture de $P(X \in [0;x])$	RAP : grandeur distance Courbe qui « apparait » via un histogramme dont les classes sont de petite amplitude	« Glissement » de proba – aire d'un histogramme à proba – aire sous une courbe Loi uniforme : conjecture basée sur égale vraisemblance d'intervalles de même longueur	Classes de même amplitude égale à 0,1 En ordonnée : fréquences	Ø	Glissement de fréquences à proba ; d'aire d'histogramme à aire sous une courbe Pas de sommation infinie	RAP Courbe qui « apparait » avec des classes de plus petite amplitude
Math'x	Sur $[0;10]$	Démontré Par l'absurde : $(a10^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ pas majorée	Sur $[0;10]$ avec tableur ; Nombre de décimales explicité : 14 Conjecture : $P(X \in [c;d])$ ne dépend que de $d-c$ Histogramme de fréquences	D'emblée dans $[0;10]$ Calcul des $P(X \in \mathbb{D}_n)$ pour démonstration de $P(X = a) = 0$	Loi uniforme : Ne dépend que de $b-a$ par simulation Puis conjecture basée sur égale vraisemblance d'intervalles de même longueur	Classes de même amplitude égale à 1 En ordonnée : pas indiqué	Ø	Par comparaison des résultats calculés Pas de sommation infinie	Histogramme donne « courbe de tendance » qui « lisse »
Repères	Sur $[0;1]$	Déduit de $P(a \leq X < b) = b-a$ Problème car aussi hypothèse !	Sur $[0;1]$ avec programmation sur XCAS ; Nombre de décimales pas dit Histogramme de fréquences	D'emblée dans $[0;1]$, subdivisé par des intervalles de bornes successives dans $\mathbb{D}_n$ ($n = 1$ puis 2 puis 3)	Loi uniforme : Conjecture basée sur égale vraisemblance d'intervalles de même longueur	Classes de même amplitude égale à 0,1 Pas de représentation	Ø	Glissement de fréquences à proba ; d'aire d'histogramme à aire sous une courbe Pas de sommation infinie	Superposition d'un histogramme et d'une courbe d'une fonction continue : « modèle »

d) Espérance : le programme officiel, les manuels

Le programme prévoit d'introduire le calcul de l'espérance d'une loi à densité à partir de l'exemple de la loi uniforme, via le calcul intégral (voir l'extrait en début de partie c).
Il y est précisé : « *on note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète* ». On peut se demander si cette note est destinée aux élèves ou aux enseignants. En effet, dans ce programme, l'intégrale d'une fonction continue positive y est définie comme « *aire sous la courbe* » ; son aspect de somme infinie est absent. Dans cette optique, il parait difficile de souligner ce prolongement aux élèves (sauf à ce que l'enseignant comble ce manque auprès des élèves).

Le document « Ressources pour la classe terminale et technologique », intitulé « *Probabilités et statistiques* », édité par Éduscol en février 2012, donne l'explication suivante :

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ est donnée par :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

On peut observer que la définition de l'espérance par la formule $E(X) = \int_a^b xf(x)dx$ prolonge celle de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
En effet, le terme $f(x)dx$ peut s'interpréter comme l'aire d'un rectangle de côtés dx et $f(x)$, fournissant en quelque sorte la probabilité que la variable X prenne la valeur x. Dans ces conditions, l'intégrale $\int_a^b xf(x)dx$ correspond à une « somme » de produits $x \times f(x)dx$.

Le point de vue de l'intégrale en tant que « somme » y joue un rôle majeur.

Souligner ce prolongement amène l'idée que l'espérance dans le cas continu peut, comme dans le cas discret, être interprétée comme une moyenne.
Il est possible que les élèves confondent les notions et formules relatives à l'espérance d'une variable aléatoire et à la moyenne d'une fonction sur un intervalle : elles partagent le mot « moyenne » et se calculent par une intégrale.

Parmi les quatre manuels analysés ci-dessus, seul le manuel « Indice » inclut la notion d'espérance à une « activité » d'introduction. L'auteur y procède par comparaison entre la valeur calculée par calcul intégral (la formule est donnée) et la valeur moyenne de 10000 tirages simulés.
Dans son exposition de connaissances, ce manuel indique dans la marge que « *la définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue est à rapprocher de celle d'une variable aléatoire discrète :* $E(X) = \sum_{i \in E} x_i p_i$ ».

Le manuel « Hyperbole », après avoir énoncé la formule qui définit l'espérance d'une variable aléatoire à densité dans son exposition de connaissances, écrit : « *Cette définition prolonge au cas continu la définition donnée de l'espérance d'une variable aléatoire discrète* ».

Ces deux phrases constituent les seules références aux variables aléatoires discrètes de ces deux manuels dans leur exposition de connaissances.

Le manuel « Math'x » écrit dans la marge de son exposition de connaissances sur les lois à densité la « *note* » : « *La formule de l'espérance d'une variable aléatoire discrète :* $E(X) = \sum_{i \in E} x_i P(X = x_i)$ *s'adapte aussi au cas d'une variable aléatoire continue :* $\int_a^b xf(x)dx$. »

L'analogie avec le cas discret est donc soulignée, par une phrase, dans trois des quatre manuels, à l'occasion de la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité quelconque.
Il y est question de « prolongement », d' « adaptation », de « rapprochement »… qui restent à la charge du lecteur, de l'enseignant.

Le manuel « Repères », quant à lui, ne fait référence au cas discret dans son exposition de connaissances que pour « *étendre* » la formule de calcul de probabilités conditionnelles au cas des lois à densité.

e) La loi normale : le programme officiel, les manuels

Le programme officiel demande d'introduire la loi normale par la convergence en loi de la loi binomiale (discrète) centrée réduite vers la loi normale centrée réduite (à densité) :

Commentaires
Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a,b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Extrait du Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011 – série S

Le commentaire du programme officiel est identique dans les séries ES et L, à part le théorème de Moivre-Laplace qui n'est pas énoncé dans le programme de ces dernières.
La démonstration de ce théorème n'étant pas accessible à des élèves de Terminale, elle n'est pas demandée : il s'agit de faire « *observer* » la convergence en jeu dans le cadre graphique.

Comment observe-t-on le passage de représentations graphiques de lois discrètes à celle d'une loi à densité ? Empruntons les notations de l'extrait du programme officiel ci-dessus. Pour plus de clarté, notons dans ce qui suit, $\mu = np$ la moyenne, et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ l'écart type de la variable aléatoire X_n.
Les représentations graphiques des variables aléatoires Z_n (discrètes) sont des diagrammes en bâtons. Pour des grandes valeurs de n, on ne voit pas « apparaitre » la courbe de la loi normale centrée réduite. En effet, le diagramme en bâtons s'aplatit lorsque n croit et la représentation graphique « disparait » visuellement.
C'est pourquoi, afin de visualiser la convergence qui est en jeu, les variables aléatoires Z_n doivent être représentées par des histogrammes. La loi de Z_n est représentée par $n+1$ rectangles de même largeur $\frac{1}{\sigma}$, qui est l'écart entre deux valeurs consécutives de Z_n. Les rectangles sont centrés par exemple aux valeurs prises par Z_n : les $\frac{k-\mu}{\sigma}$ $(k \in [\![0; n]\!])$. Les hauteurs ne sont plus des probabilités mais des densités de probabilités : la hauteur du rectangle représentant $P\left(Z_n = \frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ est égale à $P\left(Z_n = \frac{k-\mu}{\sigma}\right) \times \sigma$.
La représentation de données discrètes selon un mode de représentation graphique de données continues constitue le passage de la variable aléatoire discrète Z_n à une variable aléatoire Z'_n continue dont la densité de probabilité est une fonction en escalier.
L'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel Z'_n prend ses valeurs a pour bornes $-\frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma} = -\sqrt{\frac{np}{1-p}} - \frac{1}{2\sigma}$ et $\frac{n-\mu}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} = \frac{n}{\sigma} - \sqrt{\frac{np}{1-p}} + \frac{1}{2\sigma}$; les largeurs des rectangles sont égales à $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$. Ainsi, la réduction des variables aléatoires X_n a pour conséquences que plus n est grand :

- Plus l'intervalle de « données » représentées est grand dans le sens de l'inclusion ; les bornes de l'intervalle sur lequel Z'_n prend ses valeurs ont pour limite respectivement $-\infty$ et $+\infty$;

- Plus l'intervalle de « données » est subdivisé finement ; la largeur des rectangles a pour limite 0.

Le continu de $\mathbb{R}$ est ainsi approché, ainsi que son étendue.
D'après le théorème de Moivre-Laplace, la suite des variables aléatoires (Z_n) converge en loi vers la loi normale centrée réduite, dont la fonction de densité est continue. Pour n suffisamment grand, l'œil ne distingue plus la différence entre la partie supérieure de l'histogramme qui représente la loi de Z'_n et la courbe de Gauss.

Dans les manuels, la plupart des « activités » d'observation de cette convergence se bornent à indiquer aux élèves les instructions à entrer sur un tableur ou sur GeoGebra. Vivier et al. (2107) note que « *La nécessité de la correction par l'amplitude des intervalles n'est généralement pas justifiée* ». L'histogramme joue à nouveau un rôle clé dans ces « activités » ; ce rôle n'y est cependant pas explicité.

Puis Vivier et al. explique : « *Lors des stages, après discussion, il y a eu le plus souvent consensus entre stagiaires pour dire que le sens de ces activités échapperait à la plupart des élèves et qu'il semblait plus raisonnable que le professeur illustre lui-même cette convergence de la loi binomiale vers la loi normale devant la classe à l'aide du vidéoprojecteur sans rentrer dans le détail de la réalisation de l'animation* ».

Ce qui précède montre que le rôle du professeur dans cette introduction à la loi normale est, là encore, primordial.

D'autant que toutes les « activités » ne sont pas correctes : le manuel « Repères » propose de diviser la fonction de densité de la loi normale centrée réduite par σ, au lieu de multiplier les probabilités $P\left(Z_n = \frac{k-\mu}{\sigma}\right)$par σ. Et comme le fait remarquer Vivier et al. : « *σ dépend de n. Or la limite d'une suite ne peut dépendre de n quand n tend vers l'infini ! Lorsque n tend vers l'infini on observera une courbe et un histogramme s'écrasant sur l'axe des abscisses !* »

Le même manuel illustre l'introduction du chapitre sur la loi normale par la planche de Galton avec le texte suivant : « *La planche de Galton a été imaginée par Sir Francis Galton à la fin du XIXe siècle pour illustrer le théorème de Moivre-Laplace*. » Le site Wikipedia, de façon assez semblable, énonce : « *Une planche de Galton est un dispositif inventé par* Sir Francis Galton *qui illustre la convergence d'une* loi binomiale *vers une* loi normale. »[63]
Or, la planche de Galton illustre la loi des grands nombres dans le cas de la loi binomiale de paramètres n, nombre d'étages de « clous » de la planche, et $p = \frac{1}{2}$. La ressemblance avec la courbe de Gauss tient à ce que, à chaque étage, les probabilités qu'une bille se dirige vers la droite ou vers la gauche sont presque égales, donc proches d'un demi ; ainsi, pour un grand nombre de billes, leur répartition est quasi symétrique.
Pour illustrer la convergence d'une loi binomiale vers une loi normale, il faudrait, en plus d'un très grand nombre de billes, une planche de Galton avec un très grand nombre d'étages.
Cette illustration aurait d'autant plus d'intérêt que le paramètre p diffèrerait d'un-demi (sans être proche de 0 ou de 1) : la distribution d'une loi binomiale de paramètre $p \neq \frac{1}{2}$ n'est pas symétrique alors que la densité d'une loi normale l'est.

[63] https://fr.wikipedia.org/wiki/Planche_de_Galton



Extrait du manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012, page 370

L'intérêt de la loi normale tient à la connaissance des valeurs approchées des intégrales $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (à la calculatrice, au tableur, et autrefois par des tables). Elles permettent d'approcher un terme de la suite $\left(P\left(\frac{\sum X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [a,b]\right)\right)$ par une valeur approchée de sa limite.
Pour les élèves de lycée, il s'agit d'une utilisation de la convergence à l'inverse de leur habitude selon laquelle les termes d'une suite de réels sont généralement calculables (à la calculatrice, au tableur), et sont des valeurs approchées de la limite de la suite. L'outil de calcul est la limite ; ce renversement de point de vue peut aussi nécessiter l'accompagnement des élèves par le professeur.

f) Des lois à densité en Terminale, pour quoi faire ?

C'est une des questions posées par Henry (2003). Celui-ci estime concernant l'introduction de lois continues en Terminale que : « *le point de vue de la modélisation est ici incontournable. Les lois continues sont alors des outils mathématiques permettant, dans les modèles considérés, de calculer des probabilités de certains types d'événements. Ces modèles continus sont choisis et leurs paramètres sont déterminés (hypothèse de modèle) pour coller assez bien à une réalité discrète décrite (hypothèse de travail), cela à partir de considérations heuristiques et d'estimations statistiques.* »
L'auteur ne laisse aucun doute sur son point de vue. D'après lui :

- La réalité est discrète (tout du moins les données qui la mesurent) ;
- La modélisation de phénomènes aléatoires discrets par des lois continues qui « collent » bien à la réalité permet l'utilisation d'outils mathématiques performants dans le calcul de probabilités ;
- Dans l'enseignement des lois à densité en Terminale, le point de vue de la modélisation est donc « *incontournable* ».

Il explique que les modèles continus permettent d'appréhender des classes de phénomènes pour lesquels les modèles discrets ne sont pas performants : ceux-ci « *ne concernent que les situations pas trop vastes, avec équiprobabilité quelque part* ».
Notons qu'en particulier bien qu'un phénomène prenne théoriquement des valeurs en nombre fini ou infini dénombrable (donc discret), il peut être judicieux de le modéliser par une variable aléatoire à densité.

Les exemples de phénomènes réels modélisés par un univers continu qu'il prend dans cet article ont pour univers des possibles le plan (jeu de Franc Carreau, aiguille de Buffon) et le temps (attente d'un événement

fortuit). Henry qualifie de « naturelle » la modélisation continue du jeu de Franc Carreau ; il explique ne pas vouloir s'engager sur la question de la légitimité de la modélisation du temps par $\mathbb{R}^+$ et évoque une habitude.

Il soulève la question de la légitimité de la modélisation de phénomènes à valeurs positives par une loi normale. Il considère « *qu'il n'y a pas de gros inconvénient à proposer un modèle continu sur tout* $\mathbb{R}$*, si la probabilité est surtout concentrée autour de* μ. »
En pratique, la modélisation d'une variable aléatoire par une loi normale est courante. Cela résulte du théorème central limite (TLC) : si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'après Henry (2003), *« même si on ne sait rien sur le comportement des* X_i*, le TLC dit que pour* n *assez grand (en pratique, on a une assez bonne précision dès que* n*>50), on connait approximativement la loi de* $\bar{X}$ *: c'est presque une loi normale* $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. » En particulier, la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ est une bonne approximation de la loi binomiale de paramètres n et p dès que n>50 et p n'est pas trop voisin de 0 ou de 1.

Pour Henry (2003), « *la probabilité n'est pas une grandeur de la réalité, elle fait partie des notions mathématiques qui contribuent à la modélisation de cette réalité* ». Il souligne la différence de ce point de vue avec celui du programme de classe de Première d'avant 2001 « *qui faisait de la probabilité une sorte de limite de fréquence stabilisée. Du coup elle appartenait au même paradigme, celui de la description de la réalité et non de sa modélisation* ».
L'intérêt de l'enseignement des lois à densité en Terminale, d'après lui, tient donc à l'activité de modélisation qui devrait lui être associée. La modélisation de situations aléatoires complexes de la réalité (appréhendables seulement par des données discrètes) justifie l'utilisation d'objets mathématiques abstraits (lois à densité) qui sont performants dans le calcul de probabilités associés à ces situations. Les élèves pourraient ainsi comprendre « *le statut du calcul des probabilités comme un outil mathématique* ».

Quel est le point de vue du programme officiel ?
Dans leurs préambules à la partie « probabilités et statistiques », les programmes officiels des Terminales L, ES et S de 2102 expliquent : « *Afin de traiter les champs de problèmes associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité* ».
Puis, après l'exposition des attendus théoriques concernant les lois à densité au programme, il incite à « illustrer » celles-ci par des exemples : « *On illustre ces notions par des exemples issus des sciences économiques ou des sciences humaines et sociales* » en série ES ; « *On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines* » en série S. De ce point de vue, les lois à densité seraient des objets mathématiques « illustrés » par la réalité.
Les énoncés d'exercices de manuels et de Baccalauréat suivent cette injonction ; les variables aléatoires les plus répandues suivent une loi normale « illustrée » par une expérience aléatoire qui, dans la réalité, prend uniquement des valeurs positives (les mesures d'une grandeur continue comme le poids, la taille, une distance, une durée).

L'introduction des lois à densité, en Terminale, permet et vise essentiellement à étudier des phénomènes aléatoires grâce à des outils du continu, via une modélisation du phénomène. La distinction entre le phénomène et sa modélisation est d'autant plus importante que le modèle fournit des résultats contradictoires avec la réalité (qui nécessitent d'être interprétés pour ce qu'ils sont, des résultats de calculs à l'intérieur d'un modèle probabiliste et qui peuvent dans certains cas questionner la pertinence du modèle). Voici deux cas susceptibles d'être rencontrés en Terminale dans le domaine des probabilités :

- Un phénomène à valeurs positives peut avoir une probabilité non nulle d'être dans un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^-$ (par exemple des erreurs de mesure modélisées par une loi normale) ;
- Un phénomène à durée de vie finie peut avoir une probabilité non nulle d'être dans un intervalle du type $[A; +\infty[$, pour tout réel A (par exemple un phénomène de radioactivité modélisé par une loi exponentielle).

Sans l'exclure, le programme officiel n'incite pas à travailler l'adéquation d'un modèle à la réalité. Le risque est d'induire chez les élèves une idée de préexistence des objets mathématiques à la réalité qui se « conformerait » au modèle mathématique et donc une forme de pensée magique. Nous avons fait un constat identique dans la partie III concernant les modélisations de phénomènes par des suites et des fonctions.

Un document officiel fait une large place à la modélisation probabiliste. Il s'agit du document « Ressource pour le cycle terminal général et technologique » intitulé « *Mesures et incertitudes* », édité par Éduscol en mai 2012. Il est conçu pour les enseignants, de physique (particulièrement de filière STL), et de mathématiques. Dans son introduction, il explique faire suite au document à destination des enseignants en physique-chimie, intitulé « *Nombres, mesure et incertitudes* », édité par Éduscol en mai 2010.
Il y expose la raison d'être de la modélisation de données statistiques par des lois continues et explique qu'il est nécessaire de « *garder présent à l'esprit cette idée de modèle tout au long de ce document* » :

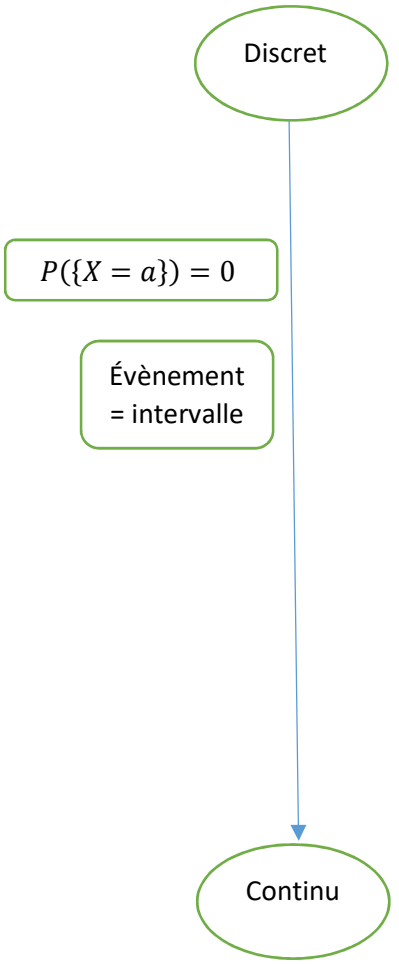
> Vision probabiliste : pourquoi, alors qu'on travaille sur des données statistiques ? Essentiellement parce qu'on est dans une activité de modélisation et que l'on cherche à passer de quelques observations à une caractéristique de l'ensemble de toutes les observations possibles, que des données obtenues on va chercher à induire des connaissances sur des variables aléatoires, qu'à partir d'un nombre fini de données on va estimer une connaissance sur une infinité de possibilités, et en particulier qu'on va donner des renseignements sur des modèles considérés comme continus à partir d'un nombre fini d'observations. Il faut garder présent à l'esprit cette idée de modèle tout au long de ce document.

Extrait du document « Ressource pour le cycle terminal général et technologique » intitulé « Mesures et incertitudes », édité par Éduscol en mai 2012, page 2

Ce document renvoie en annexe les considérations mathématiques qui peuvent être source de difficulté pour le lecteur physicien ou chimiste. Le corps du texte, lui, est ardu pour un enseignant de mathématiques non initié aux problématiques d'erreurs et d'incertitude (problématiques par ailleurs assez éloignées de celles d'un professeur de mathématiques de collège ou de lycée « ordinaire »). Dès lors, nous faisons l'hypothèse que ce document est probablement peu lu par les enseignants de mathématiques du second degré.

En Terminale, les lois à densité pourraient être aussi l'occasion pour les enseignants de faire travailler le domaine de l'analyse ? En effet, le calcul intégral est omniprésent dans les calculs de probabilités utilisant des lois à densité. Il est par exemple possible de demander aux élèves de vérifier qu'une fonction est une fonction de densité, de trouver une fonction de densité vérifiant certaines conditions ; le programme officiel propose (voire exige) la démonstration de quelques propriétés de cours via le calcul intégral. Ce travail est cependant limité car il mobilise rapidement une technicité d'un niveau qui dépasse celui d'un élève de Terminale (par exemple dès qu'il s'agit de la loi normale).

3. Conclusion de la partie IV A



∑ devient ∫
Manque probable : point de vue de l'intégrale en tant que somme infinie.

Lois discrètes plongées dans $\mathbb{R}$ ou prolongées à $\mathbb{R}$.
Intermédiaires qui peuvent être utilisés :
- considérations de symétrie ou de comparaison (loi uniforme) ;
- histogramme, aire d'un histogramme, aire sous une courbe.

Manque probable : maniement des histogrammes ;
histogramme des fréquences → densité de fréquences

Réalité : discrète (du moins dans sa quantification)
Lois continues : outils performants de calcul de probabilités sur des problèmes complexes ou ayant de nombreuses données
Incontournable : notion de modèle

Récapitulatif des enjeux du passage de lois discrètes à lois continues en Terminale

L'introduction de lois continues en Terminale alors que le domaine des probabilités appartient essentiellement au monde du discret jusqu'en Première est source de ruptures pour les élèves. La plus importante est certainement la propriété : $P(\{X = a\}) = 0$ pour tout réel a, et son corollaire : une loi ne peut être décrite par les probabilités d'événements élémentaires $\{X = a\}$; les événements sont alors les intervalles de $\mathbb{R}$.

Un prolongement à partir de lois discrètes est malgré tout possible dans le cas des lois uniformes sur les intervalles de $\mathbb{R}$. En effet, les calculs de probabilités antérieurs à la classe de Terminale reposent sur l'équiprobabilité sur les univers finis. Pour reprendre les mots du document ressource intitulé « Probabilités au collège » de mars 2008, la loi équirépartie résulte de « *considérations de symétrie ou de comparaison* ». Les lois uniformes continues sur les intervalles de $\mathbb{R}$ ou sur des parties de $\mathbb{R}^2$ peuvent être mobilisées au collège comme au lycée, car elles résultent des mêmes considérations. Ce prolongement est d'ailleurs considéré comme « naturel » par différents auteurs (Henry (2003), Vivier et al. (2017)).
De plus, la loi uniforme continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ se prête parfaitement à l'abord des ruptures importantes précitées entre lois discrètes et lois à densité. Par des considérations de comparaison, l'équiprobabilité se traduit dans le cas de la loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ par le fait que les événements sont des intervalles dont la vraisemblance est proportionnelle à la longueur. La propriété $P(\{X = a\}) = 0$ en est alors une conséquence immédiate. La longueur d'un intervalle de $\mathbb{R}$ réduit à un nombre réel n'est pas sans rappeler la notion de point, « qui n'a aucune partie » selon la définition d'Euclide !
La propriété $P(\{X = a\}) = 0$ peut aussi être la conséquence de l'infinité des nombres qui appartiennent à un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Dans tous les cas, cette propriété résulte de la cohérence au sein du modèle probabiliste.

Dans les deux approches de cette propriété (que nous venons de citer), celle-ci découle donc de ce que les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont une étendue finie constitués de points (d'étendue nulle) en nombre infini. On reconnait là une approche du continu qui date de l'antiquité, qui semble cependant suffire pour cette introduction aux lois à densité.

Le programme officiel fait le choix d'aborder les lois à densité par le biais de la loi uniforme sur $[0; 1]$, en utilisant l'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou une calculatrice. Ce choix rend difficile l'utilisation du prolongement « naturel » de l'équirépartition des univers discrets finis aux intervalles de $\mathbb{R}$. De plus la longueur de l'intervalle $[0; 1]$ est un cas particulier qui rend difficile la généralisation à un intervalle de longueur quelconque.

La formule de l'espérance dans le cas de lois à densité constitue un autre prolongement des lois discrètes. Le programme officiel en fait état, et le document « Ressources pour la classe terminale et technologique », intitulé « Probabilités et statistiques », édité par Éduscol en février 2012, propose une interprétation de la formule dans le continu par somme d'aires de rectangles - sans pour autant le décliner en un ensemble de tâches possibles pour des élèves. Ces préconisations sont d'autant plus difficiles à mettre en œuvre que l'intégrale en tant que somme infinie ne figure plus au programme officiel de Terminale.

Quant à eux, les manuels tentent de répondre aux attentes des programmes officiels, de façon plus ou moins judicieuse. Ils abordent dans leurs « activités » les ruptures importantes.
Les prolongements possibles du discret au continu sont présents dans l'ensemble :

- Trois manuels sur quatre s'appuient sur l'équiprobabilité dans le cas discret et l'infinité des éléments d'un intervalle pour faire conjecturer ou démontrer la propriété $P(\{X = a\}) = 0$ dans le cas de la loi uniforme ;
- Afin d'établir la loi de probabilité de la loi uniforme, trois manuels sur quatre s'appuient sur l'égale vraisemblance des intervalles de longueur égale, éventuellement en complément de conjectures obtenus par des simulations.
- L'analogie des formules de l'espérance dans les cas discret et continu est écrite dans trois manuels sur quatre, conformément au programme officiel, sans autre commentaire.

Le caractère continu des lois à densité est clair et immédiat dans les « activités » comme dans les expositions de connaissances : l'univers des possibles est d'emblée un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions de densité sont définies et continues sur cet intervalle. Dans trois manuels sur les quatre, les sous-ensembles $\mathbb{D}_n$ des décimaux à au plus n décimales (où n est de plus en plus grand) sont mobilisés pour approcher le continu de $\mathbb{R}$.

Les incohérences - voire les erreurs - que nous avons relevées dans les quatre manuels analysés sont nombreuses. Elles tiennent à un manque de rigueur concernant ce qui relève de statistiques (données en nombre fini, donc du monde du discret) versus ce qui relève de probabilités (continues) ; un manque d'explicitation de ce qui relève de la réalité (discrète, du moins dans sa quantification) versus ce qui relève de sa modélisation (par une loi continue) ; un certain vague voire des erreurs concernant la définition de l'histogramme (outil de représentation de données continues) et de la grandeur représentée en ordonnée, ce qui vient confirmer le « problème d'enseignement » de l'histogramme constaté par Roditi (2009) ; nous avons aussi exposé plus haut des erreurs d'un manuel et du site Wikipedia concernant la convergence en loi de la loi binomiale (loi discrète) vers la loi normale (loi continue).

Nous nous sommes appuyée sur Henry (2003) afin d'analyser les raisons pour lesquelles la modélisation est, dans cette introduction aux lois à densité, incontournable. Les phénomènes de la réalité qui sont modélisés peuvent être appréhendés par des données en nombre fini, ce nombre pouvant être considéré dans certains cas comme infini d'un point de vue théorique. Comme nous l'avons vu, cet infini qui n'est pas nécessairement continu suffit néanmoins à aborder les ruptures importantes des lois à densité avec les lois discrètes.
La modélisation est pourtant peu développée dans les documents officiels (programmes et des documents ressources édités par Éduscol), ainsi que dans les manuels.

Ainsi, à la difficulté du sujet vient s'ajouter ce qui ressemble à une minimisation ou une incompréhension de certains des enjeux des passages du discret au continu, de la part des concepteurs de programmes comme de ceux des manuels.
Par ailleurs, la plupart des tâches présentes dans les manuels et dans les sujets de Baccalauréat, requièrent un travail à l'intérieur d'un modèle imposé par l'énoncé. La connaissance de quelques formules et techniques de base ainsi qu'une bonne prise en main de la calculatrice sont nécessaires et suffisants pour les réussir. Les objets mathématiques que sont les lois à densité sont alors des outils performants du monde du continu qui servent à étudier des phénomènes concrets, certes, mais l'activité mathématique des élèves et celle de modélisation sont alors minimes.
Dans ces conditions, la capacité de l'enseignant à répondre aux interrogations des élèves que les ruptures entre probabilités discrètes et probabilités continues soulèvent, sa capacité à construire des tâches qui soulignent aux élèves le relief des lois à densité et leur statut d'outil dans le cadre d'une étude de phénomène concret au sein d'un modèle, sa capacité à déceler les inexactitudes de certains énoncés, sont le gage d'une construction de connaissances de la part des élèves – intra-mathématiques ainsi que sur le rôle des mathématiques dans notre société.

B. Le discret et le continu en probabilités en Terminale : du côté des élèves

L'analyse de l'énoncé d'épreuves du Baccalauréat sur le thème des probabilités continues, ainsi que de copies de bacheliers, pose et illustre des questions didactiques en lien avec le discret et continu quant :

- Aux nombres, en l'occurrence : les valeurs exactes et approchées ;
- Aux « accidents » entre les propriétés des variables aléatoires discrètes et continues ;
- A la modélisation et particulièrement aux effets de la modélisation de situations aléatoires modélisées par une loi normale.

Dans cette partie, nous faisons référence, lorsque cela est possible, à la note obtenue à l'épreuve par l'élève. En effet, nous tenons à montrer que les réponses exposées dans ce travail sont le fait d'élèves qui obtiennent des résultats moyens, voire bons, et que les procédures exposées ne sont pas du fait d'élèves en difficulté.

Les extraits d'énoncés qui suivent comportent pour la plupart une tâche de calcul d'une probabilité du type $P(X \in I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Ce type de tâche, à quelques exceptions près (utilisation des intervalles dits « un, deux, trois sigmas »), se résout via l'utilisation de la calculatrice.

Les calculatrices des élèves de Terminale permettent de calculer des probabilités du type $P(a \leq X \leq b)$ – bien entendu avec des inégalités larges ou strictes puisque X suit une loi à densité.

Afin de calculer la probabilité $P(X \leq c)$, les élèves peuvent procéder de trois manières :

- Soit ils mobilisent la propriété : si $\leq \mu$, alors $P(X \leq c) = 0{,}5 - P(c \leq X \leq \mu)$ et si $c \geq \mu$, alors $P(X \leq c) = 0{,}5 + P(\mu \leq X \leq c)$; puis ils entrent une suite de commandes qui permet d'effectuer ces calculs à la calculatrice.
- Soit ils effectuent $P(-10^{99} \leq X \leq c)$. Bien que $P(-10^{99} \leq X \leq c)$ soit une valeur approchée de la valeur exacte de $P(X \leq c)$, la calculatrice retourne avec cette procédure et la précédente des valeurs approchées considérées aussi bien par les manuels et les concepteurs du baccalauréat comme suffisamment proches pour que cette deuxième procédure soit acceptable.
- Enfin, ils peuvent centrer et réduire la variable aléatoire X : $P(X \leq c) = P(Y \leq \frac{c-\mu}{\sigma})$ où Y suit la loi normale centrée réduite. Puis ils utilisent la calculatrice pour calculer $P(Y \leq \frac{c-\mu}{\sigma})$ de l'une des deux façons décrites précédemment.

Afin de calculer la probabilités $P(X \geq c)$, ils peuvent aussi procéder de trois manières :

- Soit ils mobilisent la propriété : si $\geq \mu$, alors $P(X \leq c) = 0{,}5 - P(\mu \leq X \leq c)$ et si $c \leq \mu$, alors $P(X \leq c) = 0{,}5 + P(c \leq X \leq \mu)$; puis ils entrent une suite de commandes qui permet d'effectuer ces calculs à la calculatrice.
- Soit ils effectuent $P(c \leq X \leq 10^{99})$. $P(-10^{99} \leq X \leq c)$ est une valeur approchée de $P(X \geq c)$ considérée comme acceptable.
- Enfin, ils peuvent centrer et réduire la variable aléatoire X.

Dans certains cas, la modélisation d'un phénomène positif par une loi normale n'induit pas de différences entre les réponses possibles, ni de réelle difficulté pour les élèves. Dans d'autres cas, elle peut induire des différences entre les réponses possibles, ou des difficultés. Examinons quelques exemples issus d'épreuves de Baccalauréat de ces trois dernières années.

1. La modélisation ne génère pas de différences dans les résultats

Nous examinerons deux exemples.

a) Exemple n°1

Voici un extrait de l'énoncé de la partie B du premier exercice du Bac ES donné en métropole en juin 2015 :

> On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
> On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

La première question posée est :

> 1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.

Dans le registre formel, la probabilité que le téléphone T_1fonctionne plus de 36 mois est $P(T_1 \geq 36)$.
Les élèves ne peuvent répondre à la question qu'à l'aide de leur calculatrice.
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 48 et d'écart type 10. Or cette variable aléatoire modélise la durée de vie d'un téléphone, en mois. (Notons qu'il n'est pas question de modélisation dans l'énoncé). Une durée de vie étant positive, et pour que le modèle soit suffisamment bien choisi, la probabilité que X soit négatif doit être suffisamment proche de 0.
Ici, on a $(X < 0) \approx 8 \times 10^{-7}$. Par conséquent la valeur arrondie au millième de $1 - P(0 \leq X \leq 36)$ est égale à la valeur arrondie au millième de $P(X \geq 36)$. L'approximation $P(X \geq 36) \approx 1 - P(0 \leq X \leq 36)$ suffit pour répondre correctement à la question posée.

Quatre copies sur les 49 que nous avons pu consulter (quatre copies qui ont une note globale à l'épreuve entre 11 et 17 sur 20) ont répondu à la question en utilisant une procédure du type ci-contre :



Notons que ces élèves écrivent le signe ≈ dès lors qu'ils arrondissent un résultat.
Ils utilisent une propriété « suffisamment proche d'être vraie » dans ce cas, à savoir :
$P(X \geq 36) = 1 - P(0 \leq X \leq 36)$.



b) Exemple n°2

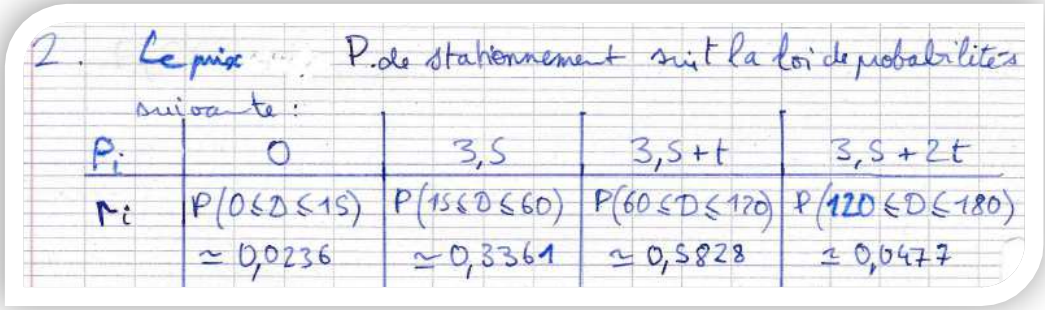
Il s'agit de l'exercice 2 du Bac S donné au Liban en juin 2017.
Dans la partie B de cet exercice, « *la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 70min$ et d'écart type $\sigma = 30min$.* »
Intéressons-nous à la deuxième question qui est la suivante :

2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Pour répondre à la question, il faut calculer, en fonction de t, l'espérance de la variable aléatoire qui modélise le prix de stationnement d'une voiture. Cette variable aléatoire étant discrète - elle prend quatre valeurs, les élèves doivent chercher sa loi de probabilité.
Or, une durée de stationnement étant positive, comme dans l'exercice précédent, les élèves peuvent être tentés de substituer l'évènement $(0 \leq D \leq 15)$ à l'évènement $(D \leq 15)$.
Voici un extrait de copie d'élève qui en donne un exemple :


2. Le prix P. de stationnement suit la loi de probabilités suivante :

p_i	0	3,5	3,5+t	3,5+2t
r_i	$P(0 \leq D \leq 15)$ $\simeq 0,0236$	$P(15 \leq D \leq 60)$ $\simeq 0,3361$	$P(60 \leq D \leq 120)$ $\simeq 0,5828$	$P(120 \leq D \leq 180)$ $\simeq 0,0477$

On a : $P(D \leq 15) \approx 0{,}0334$ et $P(0 \leq D \leq 15) \approx 0{,}0236$. Ici, la différence entre les deux probabilités est d'environ un centième.
La pondération de cette probabilité étant égale à 0 dans le calcul de l'espérance, elle n'impacte pas le résultat du calcul du tarif t.
Cependant, les élèves ont appris en classe de Première qu'il était utile d'effectuer la somme des probabilités p_i qu'ils ont trouvées afin de vérifier qu'elle est égale à 1. La différence d'un centième peut perturber un élève qui risque de passer du temps (précieux lors de la passation de l'épreuve) à chercher d'où vient son erreur.

2. La modélisation génère des différences dans les réponses

Nous examinerons là aussi deux exemples.

a) Exemple n°1

Dans la partie B du troisième exercice du Bac ES donné en métropole en juin 2016, X est une variable aléatoire qui modélise la durée de l'écoute d'une musique, en minutes (Notons qu'il n'est pas question de modélisation dans l'énoncé).

PARTIE B *Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.*

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
Le propriétaire écoute de la musique.

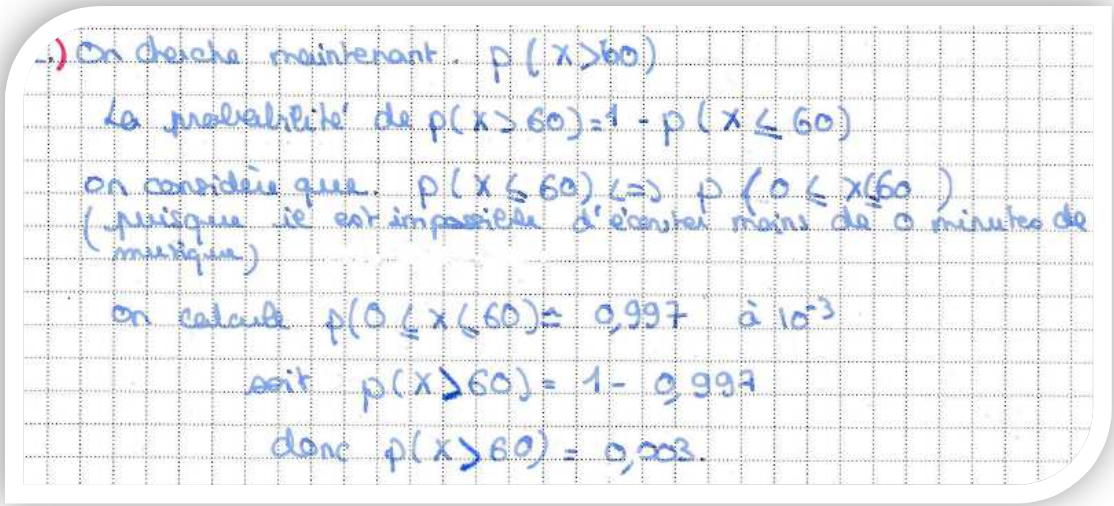
1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure? *

Intéressons-nous à la deuxième question posée :
Dans le registre formel, elle revient à : « Calculer $P(X \geq 60)$ ». Les élèves ne peuvent répondre à la question qu'à l'aide de leur calculatrice.

Une durée d'écoute de la musique étant positive, les élèves peuvent être là aussi tentés de répondre à la question en considérant l'égalité (fausse) $P(X \geq 60) = 1 - P(0 \leq X \leq 60)$.
Les résultats doivent être arrondis au millième. Or dans cet exercice, on a $P(X \leq 0) \approx 0{,}00135$. La valeur approchée au millième de $P(X \geq 60)$ est donc différente selon que l'on effectue le calcul à la calculatrice à partir de $P(X \geq 60)) \approx 1 - P(0 \leq X \leq 60)$ ou de $P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 60)$.

Ainsi, le modèle n'est pas suffisamment bien choisi pour le degré d'approximation demandé ; ou le degré d'approximation demandé est trop élevé pour le modèle choisi.

Cinq élèves sur les 53 copies que nous avons pu consulter ont répondu à cette question en effectuant une telle approximation (leurs notes à l'épreuve sont situées entre 12 et 17 sur 20). L'une d'elles est tout à fait explicite :



Dans ce cas, les élèves ne sont pas perturbés au cours de leur épreuve.
Le correcteur de l'épreuve, quant à lui, n'a pas de directive sur la façon d'évaluer une telle copie. Il décide de pénaliser, ou pas, l'élève qui a mobilisé cette approximation.

b) Exemple n°2

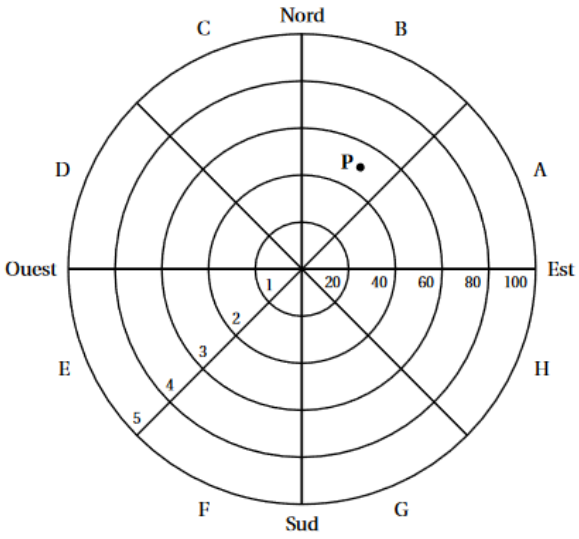
Nous allons analyser avec précision l'énoncé de la question 1 de la partie B de l'exercice 3 du Baccalauréat S donné en Métropole en juin 2017, ainsi que des copies de bacheliers. En effet, cette

question, dont l'énoncé est court, qui notée sur peu de points, est révélatrice de nombre de difficultés que pose la modélisation d'une situation par une loi normale.
Nous avons été correctrice de cette épreuve et avons eu accès à 37 copies.

Ces copies proviennent d'un échantillon de lycées des Yvelines dont la composition est inconnue.
Les 37 candidats passaient l'épreuve de spécialité « Mathématiques ». La moyenne des notes obtenues dans cet échantillon, de 13,8 sur 20, est sensiblement égale à celle des élèves d'Ile de France ayant passé la même épreuve, qui est de 13,6 sur 20.

Voici le préambule de cet exercice suivi de la partie B de l'exercice 3 :

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentrique correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$.
En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.
Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J, les évènements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.
Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près.*

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer la probabilité $P(M \in]40\,;\,60[)$.
3. On admet que $P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right) = 0{,}819$. En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

i. Analyse *a priori* de la question 1

Dans la première partie de la question 1, il s'agit de calculer l'image de 0 par la fonction de répartition de la loi normale d'espérance 50 et d'écart type 5. Les élèves ne peuvent répondre qu'à l'aide de leur calculatrice. Les élèves de lycée possèdent pour la plupart des calculatrices graphiques de marque Texas Instruments (TI) ou Casio.
Explorons les résultats obtenus sur des calculatrices TI 83 et TI Premium et Casio Graph 35, qui sont les modèles les plus répandus (X désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite) :

- En effectuant le calcul $0{,}5 - P(0 \leq M \leq 50)$, les calculatrices TI retournent 5×10^{-10}
- En effectuant le calcul $0{,}5 - P(-10 \leq X \leq 0)$, les calculatrices TI retournent $-5{,}2481 \times 10^{-10}$. En effet, leur résultat affiché pour $P(-10 \leq X \leq 0)$ est 0,5000000005 alors que $P(-10 \leq X \leq 0) < 0{,}5$!
- En effectuant le calcul $0{,}5 - P(0 \leq M \leq 50)$ ou $0{,}5 - P(-10 \leq X \leq 0)$, la Casio retourne 0.
- En effectuant les calculs $P(-10^{99} \leq M \leq 0)$ ou $P(-10^{99} \leq X \leq -10)$, les calculatrices TI retournent 0.
- En effectuant les calculs $P(-10^{99} \leq M \leq 0)$ ou $P(-10^{99} \leq X \leq -10)$, la Casio retourne $7{,}6199 \times 10^{-24}$.

Selon l'artefact utilisé et selon la procédure mise en œuvre, la calculatrice affiche donc soit une valeur qui peut paraitre exacte, 0, soit une valeur proche de 0 écrite en notation scientifique (négative dans un cas). Rappelons que l'énoncé demande une valeur arrondie à 10^{-3} près. S'ils utilisent des procédures correctes et ne font pas d'erreur d'entrée sur la calculatrice, les élèves ne sont donc pas tous égaux devant la question posée.
Si le résultat affiché est 0, ils auront pour réponse 0 (avec un signe = ou ≈).
Si le résultat affiché est un nombre en écriture scientifique, l'arrondi à 10^{-3} peut leur poser problème puisque celui-ci ne comporte pas de chiffre non nul. Ils risquent d'arrondir la mantisse à 10^{-3} au lieu d'arrondir le nombre affiché. Certains élèves peuvent répondre 0,000. Ils utilisent dans ce cas une notation rencontrée en cours de sciences physiques : la présence de trois chiffres après la virgule signifie qu'il s'agit d'une valeur approchée à 10^{-3} près (pas nécessairement d'un arrondi, est-ce une connaissance des élèves ?) du résultat.
On peut donc s'attendre à trouver dans les copies une des réponses suivantes :

- $P(M < 0) = 0$;
- $P(M < 0) \approx 0$;
- $P(M < 0) = 0{,}000$;
- $P(M < 0) = 5 \times 10^{-10}$;
- $P(M < 0) \approx 5 \times 10^{-10}$;
- $P(M < 0) = 7{,}619 \times 10^{-10}$;
- $P(M < 0) \approx 7{,}62 \times 10^{-10}$;
- $P(M < 0) = -5{,}248 \times 10^{-10}$;

Ou une quelconque variante de ces possibilités.

Dans le cas où l'élève répond $P(M < 0) = 0$ ou $(M < 0) \approx 0$, il est difficile d'en déduire quelque chose concernant ses connaissances sur les nombres décimaux et leurs arrondis, puisque rien n'indique que ce soit le fruit du résultat de la calculatrice ou de leur réflexion.

S'il répond $P(M < 0) = 0{,}000$ on est fondé à penser qu'il a réfléchi en termes d'arrondi ou de valeur approchée à 10^{-3}, soit car la calculatrice retourne 0 et ses connaissances théoriques concernant la loi normale lui permettent de savoir que la valeur affichée n'est pas exacte, soit car la calculatrice retourne une valeur non nulle qu'il sait arrondir correctement.

S'il répond à l'aide d'une des notations scientifiques précitées, l'élève n'a pas su arrondir un tel nombre à 10^{-3} près, peut-être est-il gêné par le fait que la réponse ne comporte plus que des « 0 ».

Analysons la deuxième partie de la question 1 :
Que la réponse trouvée par l'élève soit 0 ou une valeur positive proche de 0, toute interprétation sensée du résultat ne peut se faire qu'en termes de questionnement du modèle. On peut dire par exemple que « le module d'un nombre complexe étant un réel positif ou nul, ce résultat conforte le modèle choisi ». Si la réponse trouvée par l'élève à la première partie de la question est négative, il peut conclure qu'il s'est trompé, ou imputer le résultat au mode de calcul de la calculatrice.

L'interprétation du résultat est certainement source de difficulté pour les élèves. Nous pouvons voir plusieurs raisons à cela :

- L'interprétation d'une probabilité nulle peut les déconcerter – nous en avons analysé les raisons dans la partie IV A ; celle d'une probabilité négative encore davantage.
- De plus, les attentes habituelles à l'épreuve du Bac sont de l'ordre de la déduction, à partir du résultat calculé, d'une interprétation dans le contexte de l'exercice. Ainsi, les réponses du type : « par conséquent, M ne peut pas être négatif » sont prévisibles et plus probables que des réponses en termes de conformité du modèle.
- Enfin, la loi normale étant une loi à densité, $P(M < 0) = P(M \leq 0)$, comme M est à valeurs positives, les élèves pourraient en conclure que $P(M < 0) = P(M \leq 0) = 0$ et par conséquent $P(M = 0) = 0$. Leur interprétation correcte en contexte serait alors que la foudre ne peut pas tomber au point O lorsque le point d'impact affiché est le point P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$. Or le fait que $P(M = 0) = 0$ n'a rien à voir avec le contexte ; c'est une conséquence de ce que la loi normale est une loi à densité, quelle que soit la situation modélisée.

Il se peut que les élèves se trompent lors de l'entrée des données dans la calculatrice. Une erreur classique d'entrée des valeurs par les élèves est une inversion de l'espérance et de l'écart type (d'autant qu'entre les deux marques TI et Casio, cet ordre est inversé). Dans ce cas, la valeur retournée par la calculatrice est d'environ 0,46017. L'arrondi à 10^{-3} pose alors moins de difficulté. Par contre, ce résultat erroné ouvre la porte à des réponses qui n'ont pas de sens dans le contexte, du type « donc la probabilité que M soit négatif est de 0,46 environ ».

ii. Analyse *a posteriori* de la question 1

(a) Pour ce qui est du calcul de $P(M < 0)$

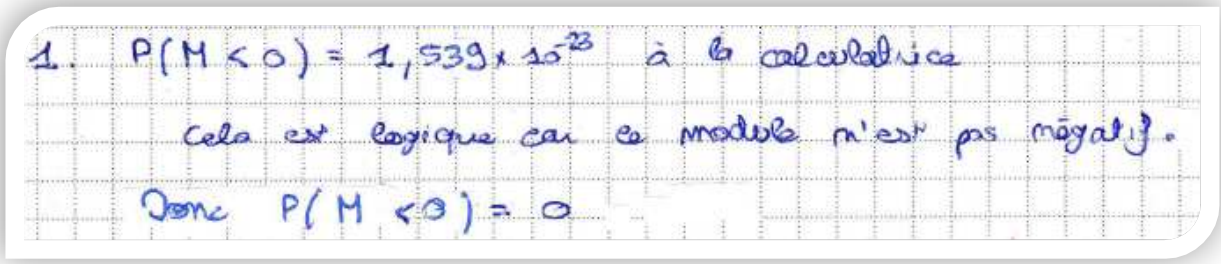
- 11% des élèves ne l'ont pas fait ;
- 27% ont répondu $P(M < 0) \approx 0$ ou $P(M < 0) = 0{,}000$ ou encore $P(M < 0) = 0$ à 10^{-3} près ;
- 32% ont répondu $P(M < 0) = 0$;
- 14% ont laissé une valeur proche de 0 en notation scientifique ; et un tiers d'entre eux ont juxtaposé cette valeur et « à 10^{-3}près ». Donc environ un élève sur 7 a obtenu un résultat en notation scientifique et n'a pas su (ou voulu) arrondir ce résultat à 0. Bien qu'on ne puisse pas la déterminer, la proportion des élèves qui n'ont pas su (ou voulu) arrondir parmi ceux qui ont obtenu un résultat correct en notation scientifique est plus élevée encore ;
- 11% ont obtenu une valeur fausse.

L'interprétation a visiblement fortement gêné les candidats, ce qui a été confirmé par des collègues correcteurs.
Les élèves qui n'ont pas trouvé de réponse au calcul de $P(M < 0)$ n'ont pas non plus donné d'interprétation.

Examinons les autres.

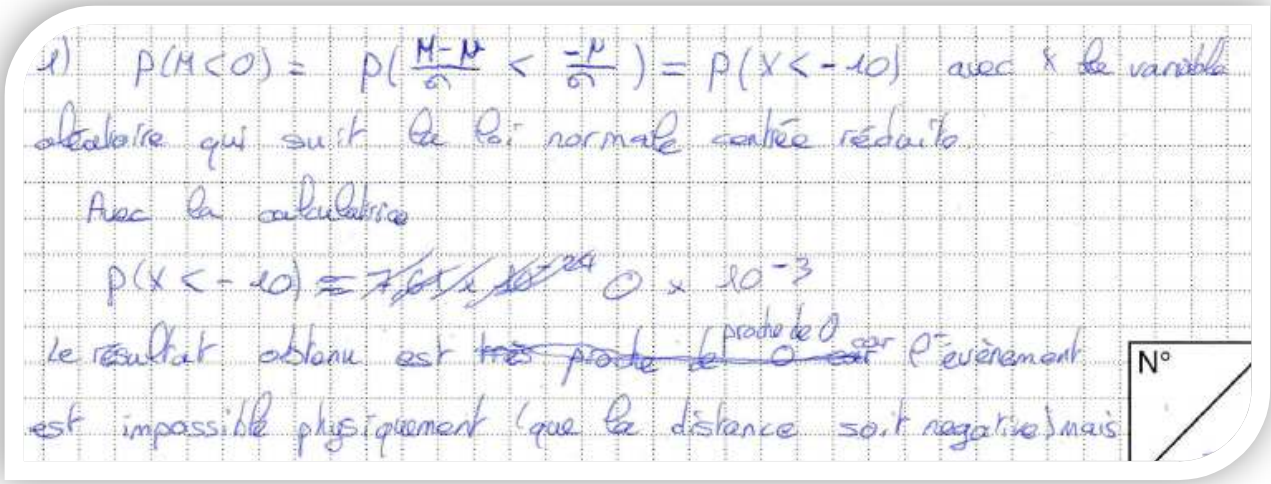
Les interprétations proches d'une analyse de la conformité du modèle :
Sans répondre en termes de conformité du modèle, 9% des élèves ont montré une réflexion qui s'en apparente. Voici les extraits des trois copies dont il est question. Notons que ces quatre élèves ont obtenu entre 15 et 17 sur 20 à l'épreuve.

Copie n°1 :


1. $P(M < 0) = 1,539 \times 10^{-23}$ à la calculatrice
Cela est logique car ce module n'est pas négatif.
Donc $P(M < 0) = 0$

Bien que cet élève n'effectue pas de retour sur le modèle, il note que son résultat est « *logique car le module n'est pas négatif* ». Il a trouvé une valeur proche de 0 mais non nulle à la calculatrice. Sa réflexion sur le contexte lui fait conclure que $P(M < 0) = 0$, ce qui est faux puisque M suit une loi normale. (On pourrait aussi déduire de ce qu'il a écrit que $1{,}539 \times 10^{-23} = 0$!). Cependant, la variable aléatoire qui, lorsque le point d'impact est P, prend pour valeur le module de l'emplacement réel de l'impact de foudre (notons-la M') vérifie $P(M' < 0) = 0$ – si tant est qu'on puisse assimiler le point d'impact à un point géométrique.

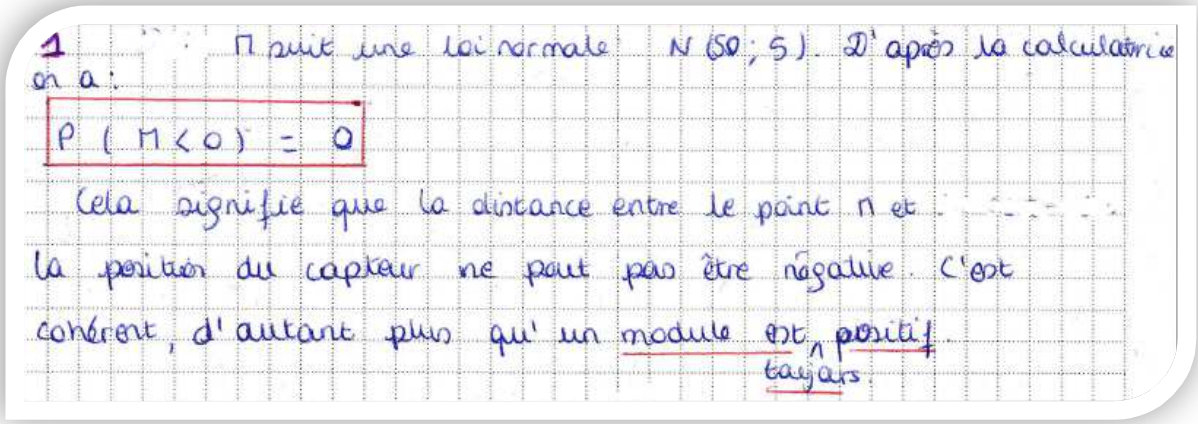
Copie n°2 :


1) $P(M<0) = P\left(\frac{M-\mu}{\sigma} < \frac{-\mu}{\sigma}\right) = P(X<-10)$ avec X la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Avec la calculatrice
$P(X<-10) \approx$ ~~7,61 x 10^-24~~ 0 x 10^{-3}
le résultat obtenu est ~~très proche de~~ (proche de 0 car) l'évènement est impossible physiquement (que la distance soit négative) mais


possible dans un caractère probabiliste.

Cet élève a noté que l'évènement « la distance du point d'impact à O est négative » est impossible. Comme précédemment, l'élève veut certainement exprimer que $P(M' < 0) = 0$. L'évènement « $M < 0$ » serait néanmoins « *possible dans un caractère probabiliste* ». Ce qui rejoint la réflexion des élèves entendue régulièrement par les professeurs lorsqu'un résultat pose problème : « oui mais on est en mathématiques » ; cela coupe court aux élucubrations !

Copie n°3 :


1 . M suit une loi normale N (50 ; 5). D'après la calculatrice on a :

P (M < 0) = 0

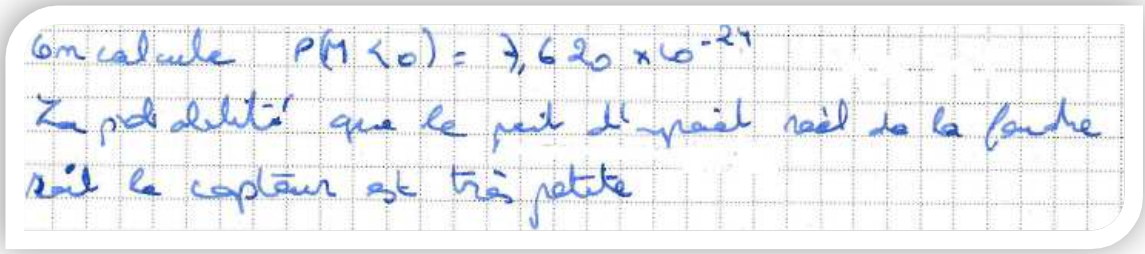
Cela signifie que la distance entre le point M et la position du capteur ne peut pas être négative. C'est cohérent, d'autant plus qu'un module est toujours positif.

Cet élève écrit en termes de cohérence entre son résultat et la réalité.
Notons qu'il confond M qui est la variable aléatoire modélisant la distance entre le point d'impact et O, avec le point d'impact. Un probable effet de l'habitude de nommer M un point variable en mathématiques.

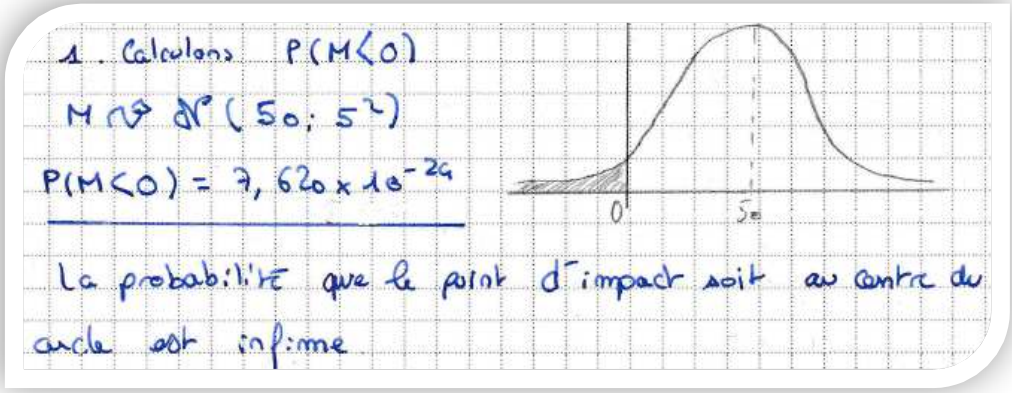
(b) Les interprétations qui conduisent l'élève à interpréter $\boldsymbol{P(M = 0)}$

22% des élèves ont écrit une réponse qui montre qu'ils assimilent $P(M < 0)$ à $P(M = 0)$, sans pour autant l'écrire explicitement.

Dans les deux exemples de copies qui suivent, la probabilité calculée par l'élève est non nulle et proche de 0. Ils concluent par le fait que l'évènement « le point d'impact est le point O » a une très petite probabilité. Alors que, M suivant une loi normale, $P(M = 0)$ est nul.

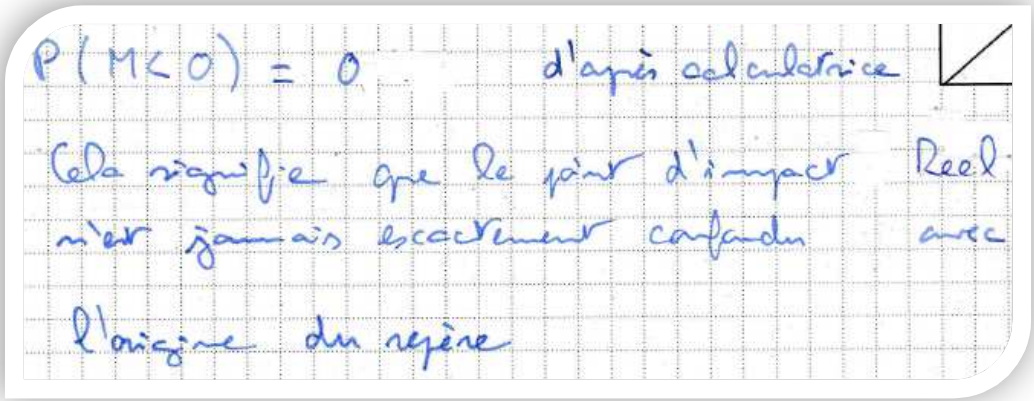

On calcule $P(M < 0) = 7,620 \times 10^{-24}$

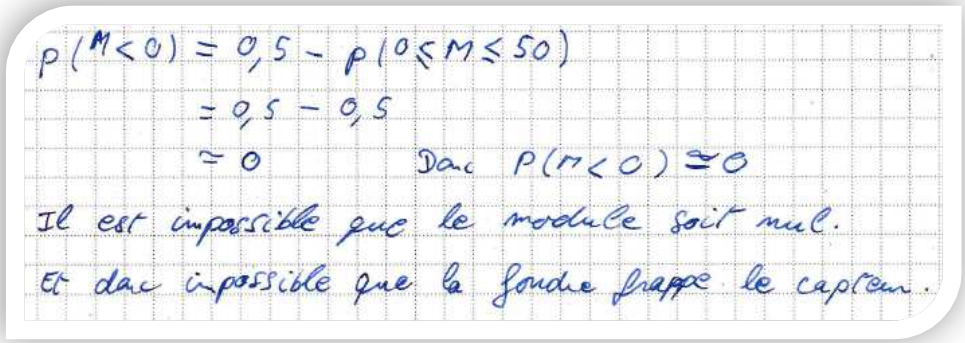
La probabilité que le point d'impact réel de la fourche soit le capteur est très petite



La probabilité que le point d'impact soit au centre de la cible est infime

Dans les deux prochains exemples, la probabilité calculée par l'élève est nulle. Il conclut par l'impossibilité de l'évènement « le point d'impact est le point O ». Remarquons que ces élèves n'écrivent pour autant pas la relation : $P(M = 0) = 0$.





Ces données confortent l'hypothèse que ces élèves, conscients qu'un module est positif ou nul, substituent implicitement l'évènement « le module est strictement négatif » par l'évènement « le module est nul ».

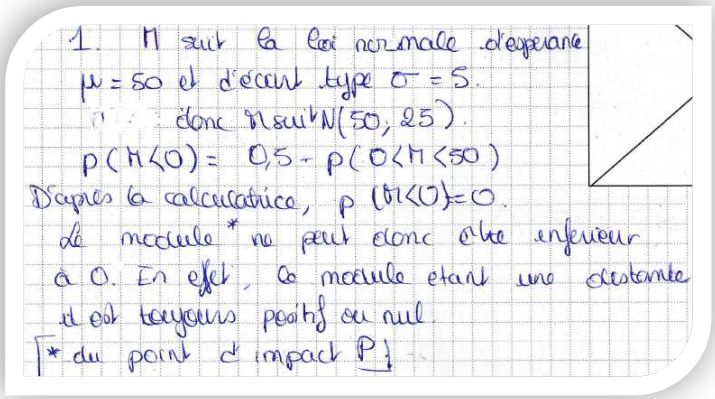
(c) Les interprétations « à l'envers »

19% des élèves répondent « à l'envers », en concluant de deux façons opposées.
La plus fréquente (les deux tiers des 19%) est qu'il serait par conséquent impossible que le module soit négatif. Les élèves remarquent, ou pas, que c'est « normal » ou « logique ». Il s'agit de la façon d'interpréter la plus proche des habitudes des élèves : déduire d'un calcul au sein d'un modèle quelque chose dans le contexte de l'exercice ; le modèle sert dans ce cas à prédire ou décrire - ce qui n'est pas le cas dans cette question.

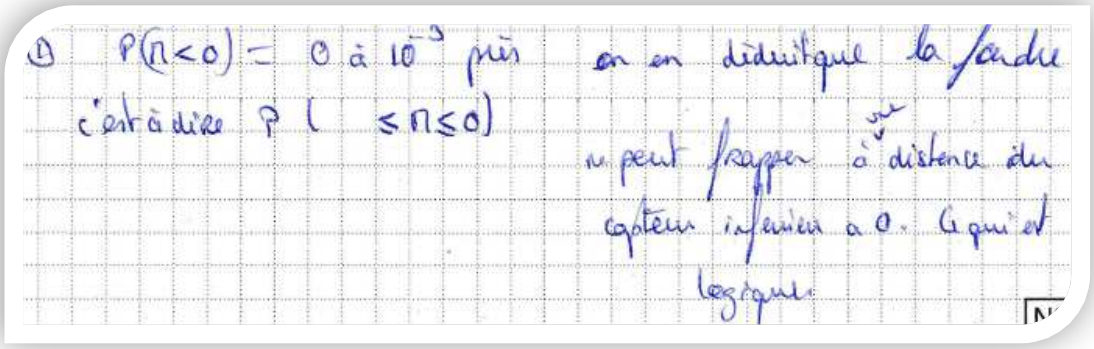
En voici trois exemples. Les mots « déduire » et « donc » indiquent la démarche de déduction que l'élève essaye d'expliciter au correcteur.

Copie n°1 :

Remarquons que M modélise le module – aléatoire - du point d'impact réel et non celui du point P (qui est déterminé et égal à 50).

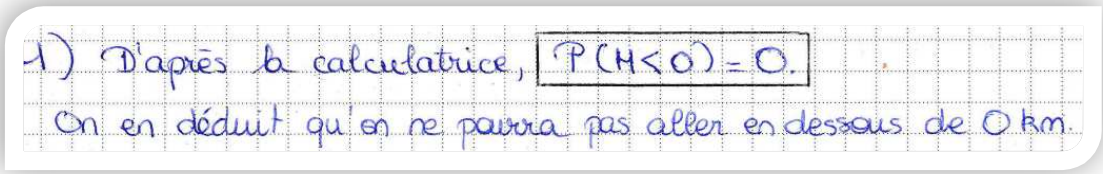

1. M suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$.
donc M suit $N(50, 25)$.
$P(M<0) = 0,5 - P(0<M<50)$
D'après la calculatrice, $P(M<0) = 0$.
Le module* ne peut donc être inférieur à 0. En effet, le module étant une distance il est toujours positif ou nul.
[* du point d'impact P]

Copie n°2 :


① $P(M<0) = 0$ à 10^{-3} près c'est à dire $P(\ \leq M \leq 0)$ on en déduit que la foudre ne peut frapper à distance du capteur inférieur à 0. Ce qui est logique.

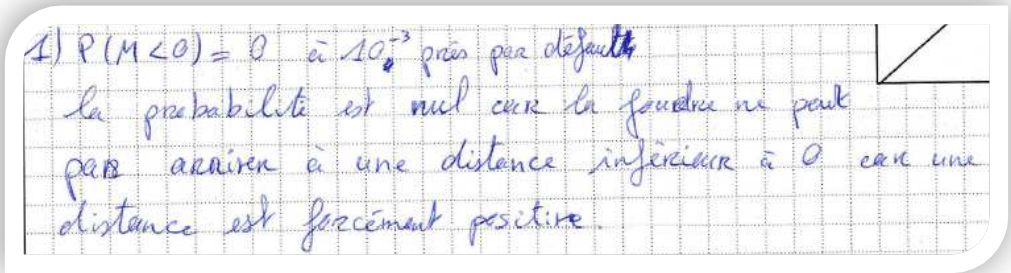
Dans l'extrait de copie ci-dessus il est explicitement noté que $P(M < 0) = P(M \leq 0)$. L'élève n'en tire cependant aucune conclusion.

Copie n°3 :


1) D'après la calculatrice, $P(M<0) = 0$.
On en déduit qu'on ne pourra pas aller en dessous de 0 km.

Cet élève ne relève pas l'incongruité d'une distance inférieure à 0km.

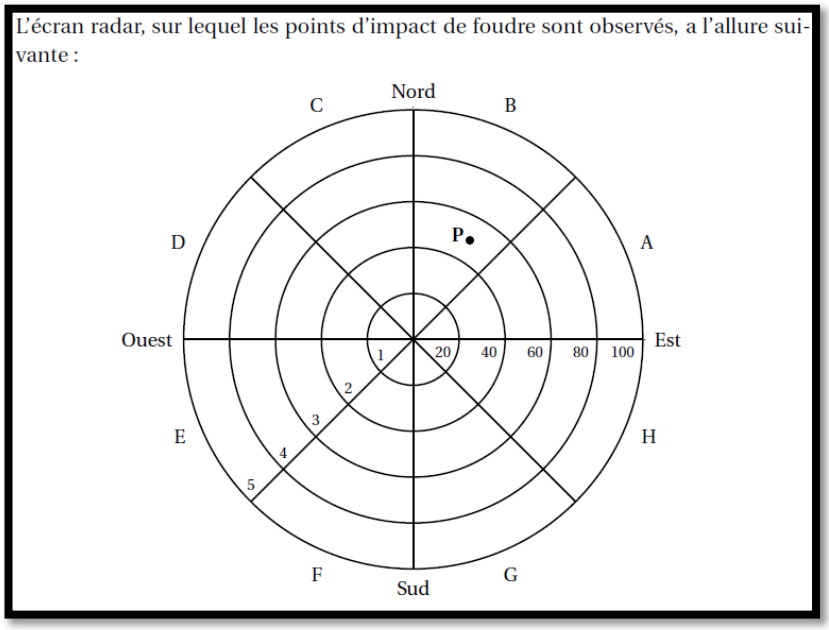
Une autre façon de répondre « à l'envers » est de dire que la probabilité est nulle parce qu'il est impossible que le module soit négatif. Dans ce cas, l'idée que la variable aléatoire M soit une modélisation du module du point d'impact réel est très éloignée. En voici un exemple :


1) $P(M<0) = 0$ à 10^{-3} près par défaut
la probabilité est nul car la foudre ne peut pas arriver à une distance inférieure à 0 car une distance est forcément positive.

(d) Les interprétations qui aboutissent à des « contre-sens »

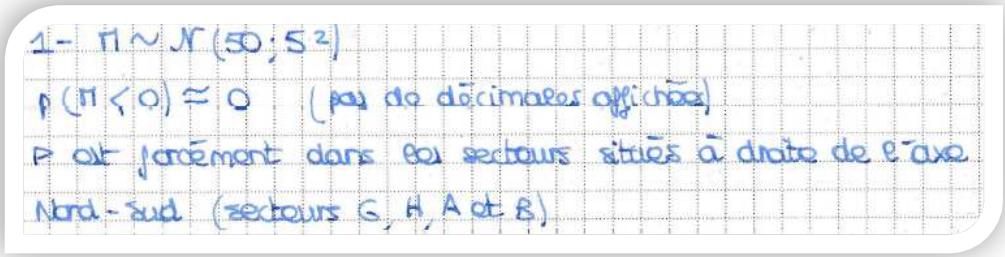
La majorité des élèves, 27%, donne une interprétation qui tient davantage du « contre-sens ».

Afin de mieux comprendre les réponses qui suivent, voici à nouveau un extrait du préambule de l'énoncé :



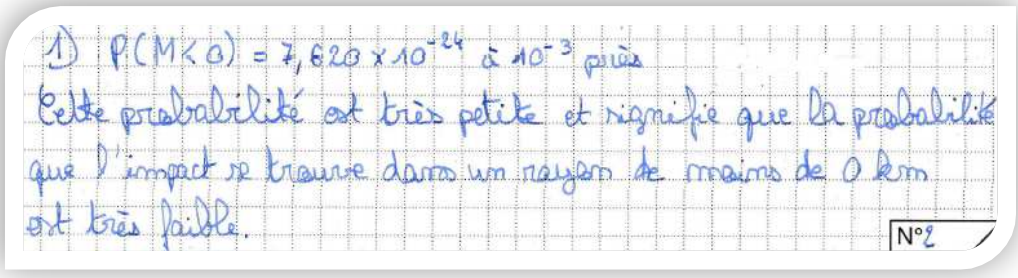
Commençons par cinq extraits de copies d'élèves ayant trouvé un bon résultat au calcul.

Copie n°1 :



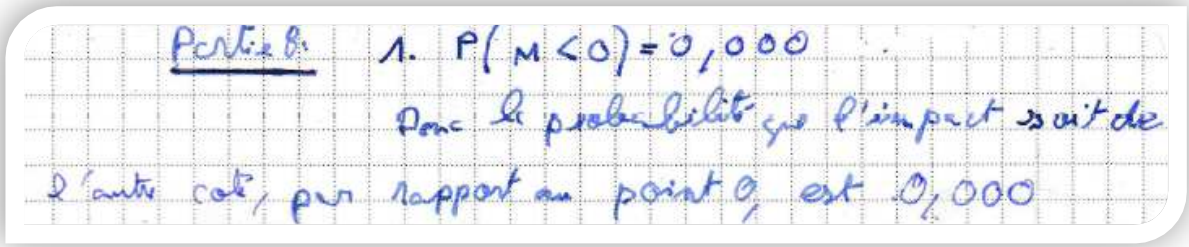
Cet élève a obtenu 18 sur 20 à l'épreuve et montre un savoir-faire sans faille concernant le module d'un nombre complexe dans les questions de la partie A de l'exercice, y compris dans le cadre graphique. Il confond P et le point d'impact réel d'une part et certainement le module et la partie réelle d'autre part.

Copie n°2 :



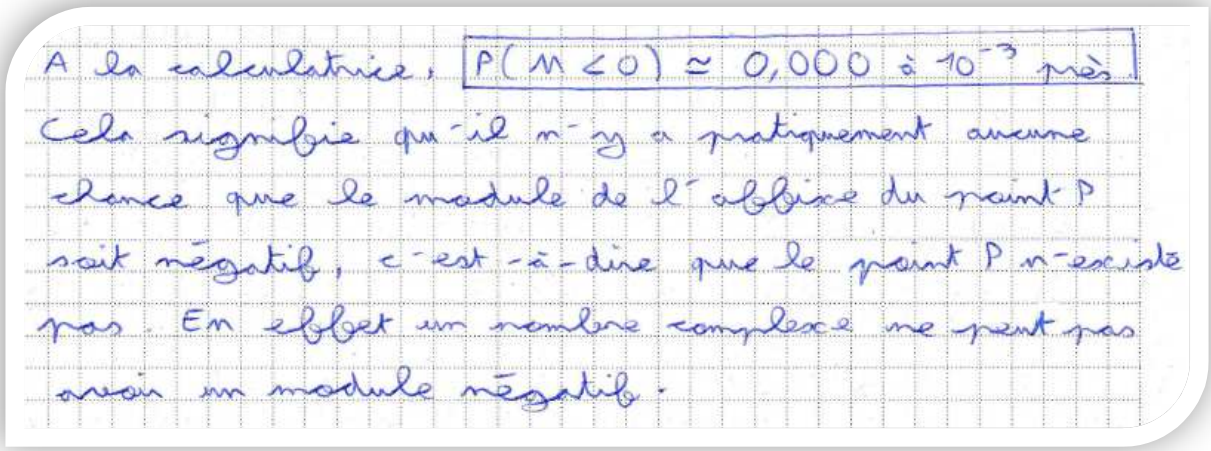
Cette copie est un exemple de conclusion dans laquelle l'idée est que le module (ou la distance à O) a une probabilité faible (donc non nulle) d'être négatif…

Copie n°3 :


Partie B : 1. $P(M<0) = 0,000$
Donc la probabilité que l'impact soit de l'autre coté, par rapport au point O, est 0,000

Que peut vouloir dire « de l'autre côté par rapport à O » ?

Copie n°4 :


A la calculatrice, $P(M<0) \simeq 0,000$ à 10^{-3} près.
Cela signifie qu'il n'y a pratiquement aucune chance que le module de l'affixe du point P soit négatif, c'est-à-dire que le point P n'existe pas. En effet un nombre complexe ne peut pas avoir un module négatif.

Cet élève a obtenu 20 sur 20 à l'épreuve. Il confond le point P, déterminé par le capteur, avec le point d'impact réel. Et conclut que le point P n'existe pas.

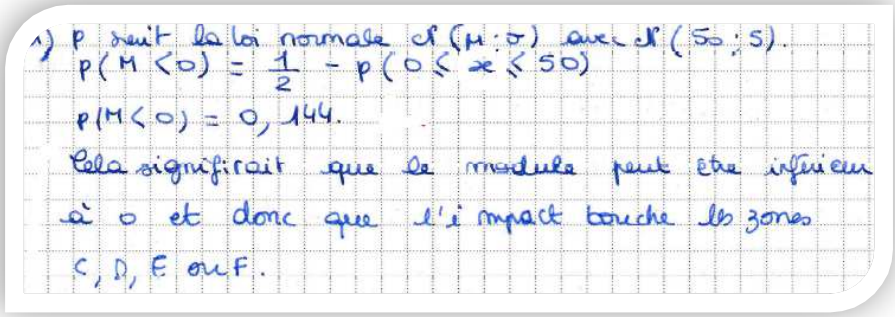
Copie n°5 :


1) $P(M<0) = 0$ Ainsi il y aurait toujours une erreur

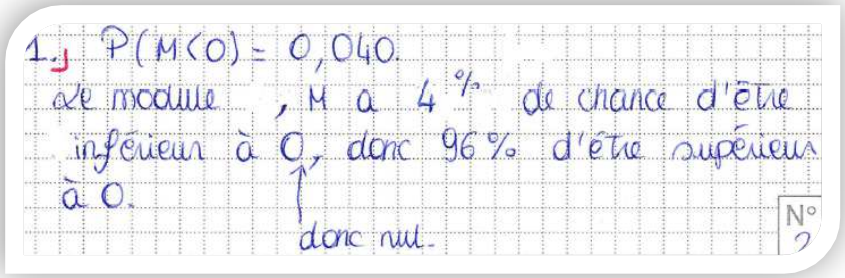
Cet élève a vu qu'il y avait un problème, mais lequel ?

Les élèves qui ont trouvé une probabilité non négligeable par mauvaise utilisation de la calculatrice semblent poussés à trouver des interprétations variées et bien sûr erronées. En voici deux exemples :

Cet élève confond module et partie réelle dans l'interprétation. Il avait pourtant réussi les questions de la partie A de l'exercice qui portaient sur les nombres complexes, y compris dans le cadre graphique.

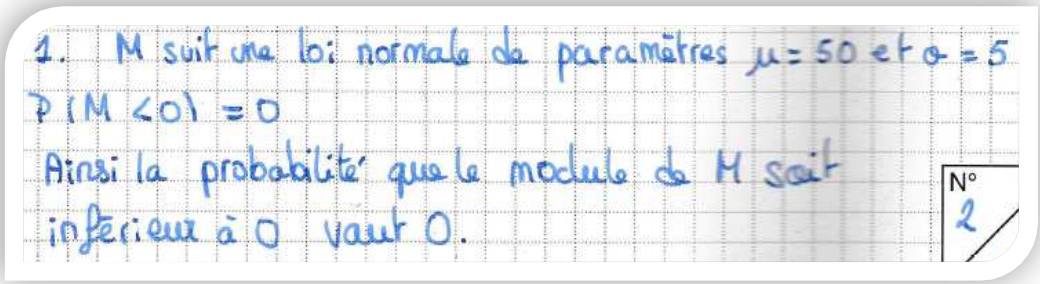


Dans ce deuxième exemple, l'élève en conclue que $P(M = 0)$ est égal à 4%, contredisant ainsi la propriété générale $P(M = a) = 0$ pour tout a réel :



(e) Les interprétations qui tiennent de la paraphrase

Pour terminer, 14% des élèves écrivent une phrase qui tient plus du passage des notations probabilistes au registre de la langue naturelle qu'à une interprétation. Par exemple :



(f) Conclusion sur le sujet de Bac S, métropole, de juin 2017

Un élève sur sept, au moins, obtient un résultat correct non nul au calcul de $P(M < 0)$ à la calculatrice, et n'a pas su (ou voulu) arrondir, à 10^{-3} près, ce résultat à 0. Quelles peuvent en être les raisons ?

Ce peut être dû à une méconnaissance du système décimal, associée à une mauvaise maîtrise des notions de valeur exacte et de valeurs approchées. Un défaut de connaissances sur ce que produit effectivement une calculatrice – des valeurs approchées qui peuvent paraître exactes, à tort ou à raison - peut amplifier ce phénomène.

Cette difficulté pourrait aussi tenir à une réticence à donner pour réponse une valeur nulle lorsqu'elle ne l'est pas, d'autant plus qu'il s'agit d'une probabilité. En effet, la probabilité nulle a une place particulière dans les connaissances des élèves : ils ont débuté leur apprentissage, en probabilités, sur des univers discrets dans lesquels l'évènement impossible est par définition celui de probabilité nulle. L'évènement impossible est descriptible, concrètement, de multiples façons. Par exemple, les élèves n'éprouvent aucune difficulté à reconnaître que les évènements « obtenir un 8 lors d'un lancer de dé cubique » ou « tirer deux as de cœur dans un jeu de cartes non truqué » sont l'évènement impossible.

Or, dans le cas de cet exercice :

- La probabilité fournie par le modèle n'est pas nulle ; alors que :
- L'évènement « le module est strictement négatif » est impossible dans la réalité.

Un élève n'ayant pas compris le processus de modélisation a de quoi être perdu.

Bien qu'aucun élève n'ait finalement trouvé de réponse négative à la première partie de la question, les difficultés liées à l'interprétation du résultat sont nombreuses. En effet, les tâches habituelles d'interprétation, dans les manuels de Terminale et les épreuves de Bac, consistent à interpréter de façon descriptive ou prédictive les résultats trouvés au sein d'un modèle ; les tâches de critique de modèle y sont rares. Aucun élève n'a su répondre dans le sens attendu par le concepteur.

Seul un élève sur 10 donne une réponse qui s'y apparente. Il s'agit de « bons élèves » dans le sens où ils ont obtenu plus de 15 sur 20 à l'épreuve. Deux d'entre eux, sur les trois, ont trouvé un résultat non nul à $P(M < 0)$ et remarquent que l'évènement « le module est strictement négatif » est impossible dans la réalité. L'un en conclut que $P(M < 0) = 0$, contredisant le résultat qu'il a trouvé précédemment ; l'autre que « *l'évènement est impossible physiquement… mais possible dans un cadre probabiliste* » ; en math tout serait donc possible ?

Une autre réaction des élèves à cette difficulté concerne un élève sur cinq. Ces élèves substituent implicitement l'évènement « le module est strictement négatif » par l'évènement « le module est nul ». Il est possible que l'égalité $P(M < 0) = P(M \leq 0)$, vraie puisque M est une loi à densité, joue un rôle dans cette substitution, mais les élèves n'en laissent pas de trace écrite. Ils concluent que la probabilité que le point d'impact soit O est très petite, ou nulle, suivant le résultat obtenu à la première partie de la question.
Ces élèves confondent la variable aléatoire M servant de modèle et la variable aléatoire M' qui prend pour valeur le module de l'emplacement réel de l'impact de foudre (si tant est qu'on puisse l'assimiler à un point).
Cette tendance répond certainement à la nécessité pour ces élèves de trouver une interprétation qui ait du sens compte tenu de la propriété de positivité du module d'un nombre complexe. Cependant elle aboutit à plusieurs contradictions avec les propriétés des lois normales – rappelons que M suit la loi normale $\mathcal{N}(50; 5)$:

- $P(M < 0)$ n'est pas nul ;
- $P(M = 0)$ est nul, il n'est pas « très petit ».
- $P(M = 0) = 0$ découle du fait que M suit une loi à densité, pas du contexte.

Comme M modélise convenablement la situation de cet exercice, $P(M = 0) = 0$ est néanmoins interprétable, dans le sens descriptif auquel les élèves sont habitués : ne pourrait-on pas dire que, concrètement, un point d'impact de la foudre est une surface, aussi « petite » soit-elle ; alors que le point géométrique O est « sans taille » et que l'évènement « la foudre tombe sur le point O » est par conséquent impossible ? Cette interprétation semble néanmoins hors de portée d'un élève de Terminale.

Un élève sur cinq conclue « à l'envers », deux de façons opposées :

- Pour les deux tiers de ces élèves : $P(M < 0) = 0$ implique que le module de l'affixe du point d'impact réel ne peut pas être strictement négatif ; le modèle dicterait les évènements de la réalité ;
- Pour le tiers de ces élèves : le module de l'affixe du point d'impact réel ne pouvant pas être strictement négatif, on a $P(M < 0) = 0$; le modèle ne pourrait que parfaitement refléter la réalité.

Il y aurait dans l'esprit de ces élèves une adéquation parfaite entre le modèle et la réalité.

Un élève sur quatre trouve des réponses variées et relevant du contre-sens. Il est intéressant de noter que des élèves qui ont parfaitement répondu aux questions concernant les modules et arguments de

nombres complexes dans la partie A du même exercice, que ce soit dans le cadre algébrique ou le cadre graphique, ont écrit pour cette question des interprétations concernant le module de l'affixe du point d'impact qui vont à l'encontre de leurs connaissances sur les nombres complexes. Ils essayent en cela de répondre à ce qu'ils croient être l'attente des enseignants sans questionner suffisamment le sens de ce qu'ils écrivent.

Un élève sur sept s'est contenté de mettre sa réponse au calcul de $P(M < 0)$ dans le registre de la langue naturelle. Il n'y a pas de trace de réflexion dans ce type de réponse.

La compréhension de l'exercice 3 pose d'autres difficultés aux élèves :

- 14% d'entre eux confondent le point P (déterminé par le capteur) avec le point d'impact réel (dont la position exacte ne peut être déterminée grâce au capteur, à cause de l'incertitude liée à l'instrument de mesure, d'où le modèle probabiliste). En effet, dans la réalité, le point d'impact réel (ou plus exactement la surface d'impact) est parfaitement déterminé, c'est le capteur qui introduit de l'aléatoire de par les imprécisions de l'appareil de mesure ! Cette difficulté peut être amplifiée par le fait que le point d'impact réel n'est pas nommé.

- La notation M pour la variable aléatoire modélisant le module du point d'impact est trompeuse pour un certain nombre d'élèves qui pensent, par habitude, que M est un point.

Remarquons de surcroît que l'intention du concepteur de tester le modèle pouvait se transformer en un test de la calculatrice, dans le cas où le résultat trouvé pour $P(M < 0)$ est négatif ! De façon incidente, ne peut-on pas induire de cet énoncé que le concepteur n'a pas effectué le calcul de $P(M < 0)$ en l'effectuant avec différentes procédures et différents artéfacts ?

3. Conclusion de la partie IV B

Avant de passer aux conclusions concernant les probabilités, remarquons que, bien que les énoncés analysés mettent tous en scène des grandeurs dites « continues », tous les nombres qui y interviennent (moyennes, écart types, bornes des intervalles) sont des entiers.

Revenons aux lois à densité. Nous avons déjà noté dans la partie IV A la quasi-absence de tâches qui, dans les manuels, convoquent :

- La propriété $P(X = a) = 0$ et son interprétation dans le contexte modélisé,
- Les questionnements sur les modèles probabilistes.

Bien que les tâches des exercices de manuels comme de Baccalauréat abordent peu (ou évitent ?) les écueils liés aux deux points précités, l'analyse de sujets et de copies d'élèves qui précède montre que ces écueils sont bien présents. Ils impactent cependant peu les résultats au Baccalauréat, de par le peu de points attribués par les barèmes à la résolution de ces tâches.

Ce sont les élèves qui se posent le plus de questions, qui sont le plus dans une approche des mathématiques qui questionne le « pourquoi » qui sont les plus pénalisés par ces tâches. Les exercices de Bac S donnés au Liban et en métropole en juin 2017 en sont de bons exemples : des élèves qui se posent des questions sur le « pourquoi » peuvent passer du temps à chercher où pourrait être leur erreur pour le premier sujet, comment interpréter une propriété qui semble incongrue pour le deuxième sujet ; temps d'une durée sans commune mesure avec le nombre de points finalement attribués à la

question. C'est sans parler de l'aspect déstabilisant de ce genre de situation, au cours d'une épreuve, sur ceux qui manquent de confiance en eux.

Les variables aléatoires qui suivent une loi normale prennent leurs valeurs sur $]-\infty;+\infty[$ alors qu'elles modélisent des grandeurs aléatoires qui prennent le plus souvent leurs mesures dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$, voire dans un ensemble fini. L'analyse de sujets et de copies que nous venons de faire montre que l'absence d'apprentissage des élèves au sujet de la modélisation en probabilités peut malgré tout impacter leur performance lors de l'épreuve du Baccalauréat.
Au cours de leur formation, cette absence peut sans doute contribuer à renforcer le comportement des élèves qui renoncent à comprendre le « pourquoi » de ce qui leur est enseigné en mathématiques et acceptent une part de « pensée magique » des mathématiques. Un élève note ainsi dans sa copie de Baccalauréat qu'un évènement impossible physiquement est possible en probabilités ; plusieurs n'hésitent pas à attribuer une probabilité non nulle à ce que le module d'un nombre complexe soit strictement négatif, à intervertir module et partie réelle (qu'ils maîtrisent bien par ailleurs) afin de trouver une réponse, coûte que coûte.

C. L'introduction des lois à densité en Terminale : du côté des enseignants

Comment les enseignants s'emparent-ils des documents officiels et (éventuellement) des propositions des manuels pour introduire les lois à densité (continues) auprès des élèves de Terminale générale, alors que leurs connaissances anciennes relèvent essentiellement de lois discrètes ? En particulier, l'histogramme est-il sollicité en tant qu'outil ? Abordent-ils le discret et le continu, les analogies entre lois discrètes et à densité, les ruptures, et dans l'affirmative, comment ? Les grandeurs sont-elles sollicitées, les questions de modélisation sont-elles abordées ?

Nous allons dans un premier temps tenter de répondre à ces questions par l'analyse de capsules vidéo accessibles sur internet. Le mot « enseignants » est alors pris dans un sens large : les concepteurs de ces vidéos sont pour la plupart (ou se présentent comme) des enseignants du second degré ; l'un d'eux se présente comme un étudiant, une capsule émane de la Kahn Academy ; et un concepteur - qui se révèle finalement être celui qui allie le mieux rigueur et synthèse tout en exposant la complexité du sujet - ne se présente pas.

Dans un second temps, nous allons analyser la séance d'introduction aux lois à densité dans une classe de Terminale S ; l'enseignante, laissée libre dans ses choix, y conduit la séance sous forme d'un cours dialogué. Les contraintes de temps y sont moindres que pour une capsule vidéo, des élèves sont présents ; nous nous attendons à ce que la séance comporte davantage de richesse que les capsules quant aux points que nous analysons.

1. L'introduction des lois à densité en Terminale : capsules sur internet

Nous avons consulté les capsules de huit sites internet accessibles sur « you tube » et qui ont pour thème les variables aléatoires à densité à un niveau de Terminale (programme 2012).

Le choix des capsules est basé sur le fait qu'elles sont proposées par le moteur de recherche de « you tube ». Nous avons retenu d'emblée celles qui y sont vues de très nombreuses fois - autour de 10000 fois par an voire davantage. Il s'agit de celles des sites « Les Bons Profs », celui d'Yvan Monka, celui de la Kahn Academy et de « J'ai compris.com ».
Nous avons consulté dans le cadre de ce travail - sur le thème des suites - les capsules des sites de la Kahn Academy, des « Bons Profs » et « Bosse tes math », parce qu'elles sont utilisées par nos élèves. Cependant, d'après nos recherches sur le web, le site « Bosse tes math » ne propose pas de capsule sur le thème des variables aléatoires à densité.

Nous nous sommes intéressée à quatre autres sites afin de compléter cette étude. L'un d'eux, « le Prof du Web », a retenu notre attention pour la qualité de ses vidéos, tant du point de vue du contenu des exposés que de la clarté de leur présentation.

Compte tenu du sujet de ce travail, nous analysons uniquement les capsules qui abordent le continu en probabilités et qui introduisent les variables aléatoires à densité ainsi que leurs propriétés générales qui relèvent du programme de Terminale, avec ou sans référence au discret.
Nous notons la durée des capsules, calculons leur nombre de vues par an sur « you tube ». Nous présentons les capsules par ordre décroissant de nombre de vues par an.

Dans la suite, nous nommerons « auteur » le groupe de personnes qui ont conçu et présenté la capsule.

Les questions qui guident leur analyse sont :
- Comment l'auteur décrit-il, caractérise-t-il le discret ?
- Comment l'auteur décrit-il, caractérise-t-il le continu ?

- Quel type d'exemple intra ou extra-mathématique est utilisé pour soutenir le discours sur les variables aléatoires discrètes et celui sur les variables aléatoires continues ?
- L'introduction du continu dans le domaine des probabilités s'accompagne-t-il de la présence de nombres non entiers dans les exemples ?
- L'auteur fait-il référence aux variables aléatoires discrètes dans son introduction aux variables aléatoires à densité, fait-il des parallèles entre les méthodes et les propriétés liées aux deux types de variables aléatoires ?
- Comment les fonctions de densité sont-elles introduites ? En particulier, le mot « densité » fait-il l'objet d'explications ?
- La propriété $P(X = a) = 0$ est-elle évoquée ? Si oui, comment est-elle justifiée, est-elle interprétée dans le « concret » ?
- Dans quelle mesure le calcul intégral est-il présent ? Comment est-il amené ?
- Finalement, qu'est-ce qui peut être construit en termes de connaissances chez un élève qui regarde la vidéo ? Et qu'est-ce qu'un enseignant peut y trouver pour sa propre formation ?

La méthodologie utilisée est la suivante :
Nous retenons les « moments » des capsules pendant lesquels se joue ce qui relève de nos questions. Afin de pouvoir y répondre :

- Les aspects du discret et du continu décrits et analysés dans la partie I de ce travail sont sollicités afin d'analyser les approches du discret et du continu exposées dans les capsules ;
- Nous caractérisons le contenu de la capsule : est-il orienté vers les techniques de calcul mobilisées dans les exercices de Bac, contient-il des éléments théoriques, des éléments de « méta » qui évoquent la complexité du sujet ?
- Nous analysons la prise en compte de l'ancien (ici les connaissances sur les probabilités discrètes, sur les histogrammes), les cadres mobilisés ; en particulier, les parallèles entre variables aléatoires discrètes et continues (établies en partie IV A 2 b) sont-ils sollicités ?
- Le type de discours est brièvement caractérisé : celui-ci est-il simpliste (la recherche de locutions du type « c'est très simple » ; « il suffit de » ; « forcément » est ciblée) ? Est-il rigoureux ?

Nous décrivons le déroulement des capsules. Les moments qui sont ciblés par cette étude font l'objet de davantage de détails, y compris de retranscriptions de ce que les auteurs disent.
Nous analysons particulièrement ces moments ciblés. Afin d'alléger le texte, certaines de ces analyses sont écrites au sein de la description du déroulement.

a) Site « Les Bons Profs »

Ce site se consulte par abonnement.

Le titre de la capsule est : « *Loi à densité sur intervalle [a ; b] – le rappel du cours – Maths terminale – Les Bons Profs* »[64].
Elle compte 77353 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 5 février 2014) – soit environ 20200 vues par an.
Sa durée est de 3'01''.
Le public visé est explicitement celui des élèves de Terminale.

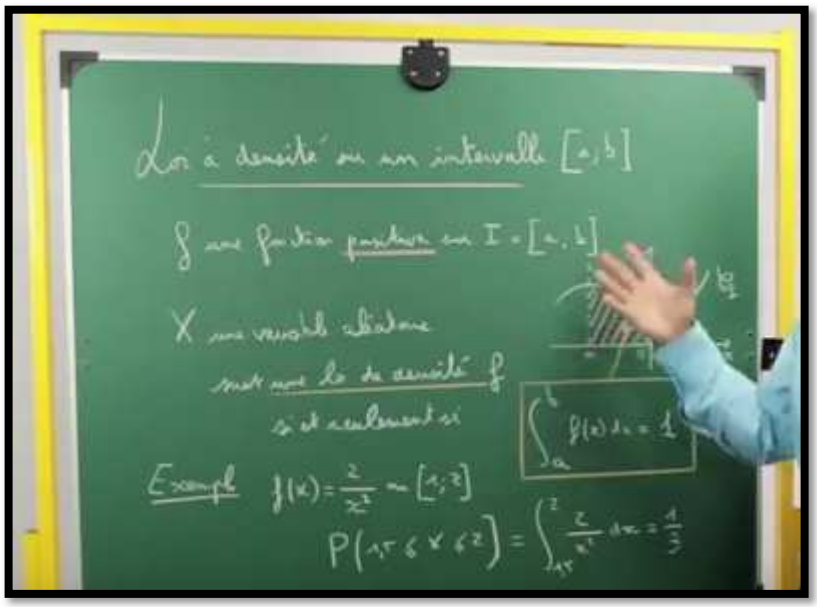
Déroulement et analyse :
La leçon est pré-écrite au tableau.
En présentiel, l'auteur démarre par une introduction de 30 secondes, à propos de la différence « *entre une loi discrète et une loi continue* » : pour une loi discrète « *on calcule la probabilité que X égale 1, que X égale 2 et X, la variable aléatoire, elle prend certaines valeurs, un nombre fini de valeurs. Ici nous allons travailler sur des variables aléatoires qui peuvent prendre toutes les valeurs entre a et b. Donc on appelle*

[64] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=aedu8gm1Kvw

ça des lois continues. Une loi à densité c'est donc une loi qui dépend donc d'une fonction. » Puis l'enseignant expose le reste de la leçon.
Notons que l'auteur écrit « loi à densité » alors qu'à l'oral, il parle davantage de « loi continue ».
L'argument retenu par l'auteur pour différencier loi discrète et loi à densité porte sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
Celle-ci prend ses valeurs :

- Dans un ensemble fini dans le cas discret ; l'énumération « *1, 2…* » vient appuyer son propos, ce qui semble exclure implicitement la valeur 0.
- Dans un intervalle dans le cas continu : « *toutes les valeurs de l'intervalle* ». Ceci permet à l'auteur d'introduire la présence d'une fonction dans le nouveau « paysage » du calcul de probabilités (rappelons que pour les élèves de Terminale, une fonction est presque toujours définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$).

Un peu plus tard, l'auteur fait un parallèle entre loi discrète et loi à densité : dans le premier cas, $\sum_i p_i = 1$ et dans le second, $\int_a^b f(x)dx = 1$. Il l'exprime ainsi : « … *vous aviez dans la loi discrète la somme des probabilités est égale à 1. Mais comme on ne peut pas prendre une valeur à chaque fois ben là cette fois ci on lie, on fait un lien, entre les probabilités et le calcul intégral* ».
Il convoque là le point de vue de sommation infinie de l'intégrale qui ne fait cependant plus partie du programme officiel à ce jour.



En conclusion :
L'auteur tente brièvement et par deux fois de s'appuyer sur les connaissances anciennes pour construire les nouvelles.
Ces allusions sont cependant difficilement compréhensibles pour des élèves de Terminale :

- La première semble imposer aux variables aléatoires discrètes de prendre des valeur entières et strictement positives. Les élèves ont certainement rencontré d'autres cas en classe de Première, ce qui peut être source de confusion ;
- La seconde fait appel à une culture mathématique qu'ils n'ont *a priori* pas : l'aspect de sommation infinie de l'intégrale.

L'auteur « glisse » du discret au continu par le truchement de la formulation « prend toutes les valeurs d'un intervalle ». Ceci permet de passer d'ensembles de valeurs qu'il est possible d'énumérer (ici implicitement des ensembles finis) aux intervalles ; or ceux-ci font partie du monde du continu, mathématiquement parlant.

Le « glissement » est aussi sémantique : le mot « intervalle » est souvent sollicité dans le vocabulaire lié aux fonctions pour un élève de ce niveau d'enseignement : l'ensemble de définition, de dérivabilité, d'intégrabilité, le sens de variation se décrivent par des intervalles.

Le premier objectif de la capsule est de présenter la définition d'une fonction de densité. Il se peut qu'un de ses buts soit que les élèves sachent démontrer qu'une fonction est une fonction de densité ; il apparait que son principal but est de présenter la formule $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ sur un exemple générique afin que les élèves puissent la mobiliser dans un calcul de probabilité qui requiert le calcul intégral. Son ambition est donc essentiellement de doter les élèves d'une technique de calcul de probabilités.

Des points délicats ne sont pas abordés. En premier lieu le calcul de $P(X = a)$. Mais aussi l'utilisation du mot « densité ». Celui-ci est choisi dans le titre de la capsule et la définition formelle d'une loi dans le continu, cependant sa signification n'est pas précisée et le mot n'est pas mobilisé oralement.

Le discours est formel, cependant la complexité du sujet n'est que peu abordée et l'est de façon simpliste.

L'élève peut en tirer une caractérisation des lois discrètes versus continues par l'opposition entre ensemble dénombrable (ou plus restrictivement sous ensemble fini de $\mathbb{N}^*$) et intervalle, ainsi que la connaissance d'une technique de calcul de probabilité, en seulement 3 minutes.

Un enseignant pourrait s'en inspirer pour introduire de façon rapide - bien que sans grand relief - les lois à densité à ses élèves.

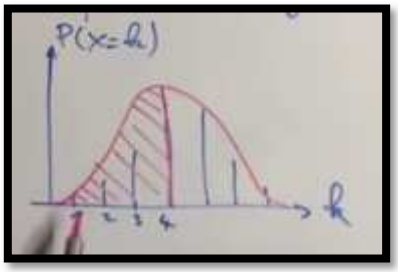
b) Site d'Yvan Monka

Le titre de la capsule est : « Utiliser une loi de probabilité à densité – Terminale »65
Elle compte 51952 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 18 décembre 2014) – soit environ 17300 vues par an.
Sa durée est de 7' 50''.
Le public visé est explicitement celui de Terminale. Le mot « utiliser » du titre montre que la capsule a pour but de présenter des techniques de résolution d'exercices.

Déroulement :
L'auteur écrit en présentiel sur un tableau blanc sur lequel, au départ, figure l'énoncé d'un exercice.
Dans un premier temps, il fait un rappel concernant les variables aléatoires(discrètes) rencontrées en classe de Première en prenant pour exemple la loi binomiale. Il trace en même temps au tableau un diagramme en bâtons :
« *Jusque là les variables aléatoires que tu as rencontrées prenaient nécessairement des valeurs entières. Par exemple pour la loi binomiale on sait que les valeurs prises étaient entières. Quand on représentait la loi de probabilité, et ben on avait en abscisse toutes les valeurs k prises par la variable aléatoire, alors 1, 2, 3, etc. pour eh bien nous renvoyer la probabilité que la variable aléatoire prenne une certaine valeur ; la probabilité que X soit égal à 1, que X égale à 2, que X égale à 3, etc. Et tout ça, eh bien on pouvait les compter. Par exemple si on voulait déterminer la probabilité que X soit inférieur ou égal à 4 eh bien ça nous menait à additionner la probabilité que X égale à 1, à 2, à 3, à 4 ; on faisait quatre calculs séparés pour obtenir la probabilité que X soit inférieur ou égal à 4.*
Mais cette année, tu vas travailler avec des variables aléatoires qui vont prendre leurs valeurs sur les réels ».

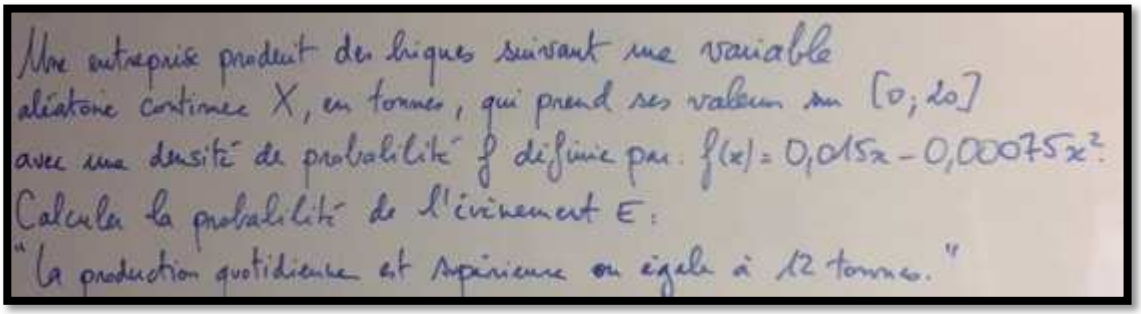
[65] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=0Ry-2yLsANA

L'enseignant trace alors une courbe « en cloche » qui passe à peu près par les extrémités des bâtons.



« *C'est-à-dire que X pourra être égal à 1 mais aussi à 1,1 ou 1,2 ou 1,3 etc donc toutes les valeurs réelles. Et dans le cas où tu souhaiterais calculer la probabilité que X soit inférieur ou égal à 4 eh bien ça nous mènerait non plus à compter mais à mesurer à calculer l'aire sous la courbe pour toutes les valeurs de x, ou de k ici, inférieures ou égales à 4. Autrement dit, on va être menés à faire un calcul intégral.* »

L'auteur efface son graphique. L'énoncé de l'exercice reste sur le tableau :



Il dit : « *Ici le problème que l'on se pose part d'un problème concret*... ».

L'auteur lit l'énoncé et après avoir lu l'expression de f(x), il rajoute « *on voit bien ici que x peut prendre n'importe quelle valeur réelle bien évidemment comprise entre l'intervalle zéro vingt* ».

Après avoir fini de lire la question, l'auteur dit : « *ce qu'on va déjà faire c'est commencer par représenter notre fonction f donc qui correspond à la loi à densité, notre loi de probabilité en quelque sorte à part que dans le cas continu ça s'appelle une loi à densité, voilà, et on voit déjà que cette fonction prend des valeurs positives sur l'intervalle zéro vingt* ».

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et 20 (mais elle passe sous l'axe des abscisses en-dehors de l'intervalle [0 ; 20]. Il explique pourquoi l'aire sous la courbe est égale à 1 puis que le problème revient à calculer une intégrale et se lance dans son calcul.

Analyse et conclusion :

Ainsi, cet auteur s'appuie (uniquement) sur la loi binomiale en tant qu'exemple générique de loi discrète. Les valeurs prises par cette loi seraient ce qu'on peut « *compter* », soit « *1, 2, 3…* ». Comme l'auteur de la capsule « Les Bons Profs », il fait appel à l'énumération, en excluant le 0.

Le cadre numérique est convoqué afin d'introduire les variables aléatoires à densité : les valeurs sont alors prises « *sur les réels* ». L'explicitation de ce que sont les réels est faite par l'exemple qu'en plus de la valeur 1, la variable aléatoire peut prendre les valeurs « *1,1 ou 1,2 ou 1,3 etc* ». Nous pouvons remarquer que l'auteur est encore dans l'énumération, cette fois de nombres décimaux à un chiffre après la virgule. L'ensemble décrit est donc lui aussi discret. Le « etc » est un raccourci qui a pour but de faire percevoir l'infinitude d'un processus (lequel ?) ; l'auteur aurait pu tenter de faire sentir la divisibilité à l'infini des réels en plaçant le « etc » dans un processus de densification – entre 1,2 et 1,3 il existe des nombres comme 1,21 et 1,22 ; entre 1,21 et 1,22 il en existe d'autres...

Pour appuyer ce propos, le cadre graphique est aussitôt convoqué par le tracé d'une courbe « en cloche », qui représente donc une fonction continue. Or les valeurs en ordonnée sont celles d'une probabilité dans le cas discret alors qu'elles sont celles d'une densité de probabilité dans le cas continu.

L'auteur fait « d'une pierre deux coups » en l'espace des deux premières minutes : un rappel sur les lois binomiales et une introduction des lois à densité. Mais à quel prix du point de vue du sens donné à ces notions ?

Le but de la capsule est d' « *utiliser une loi à densité* », donc de savoir résoudre l'exercice proposé. En l'occurrence, il s'agit de savoir calculer une probabilité par un calcul intégral. L'auteur démarre cette résolution par le tracé de la représentation graphique de la fonction de densité, qui est donnée dans l'énoncé. A cette occasion, il fait pour la deuxième fois un amalgame entre loi de probabilité et densité de probabilité en expliquant que la « *fonction f … correspond à la loi à densité, notre loi de probabilité en quelque sorte* ».
La résolution de l'exercice est aussi l'occasion de citer la propriété de l'aire sous la courbe égale à 1, dont l'énoncé est facilité par le fait que la courbe coupe l'axe des abscisses aux extrémités de l'intervalle sur lequel la fonction de densité est définie.

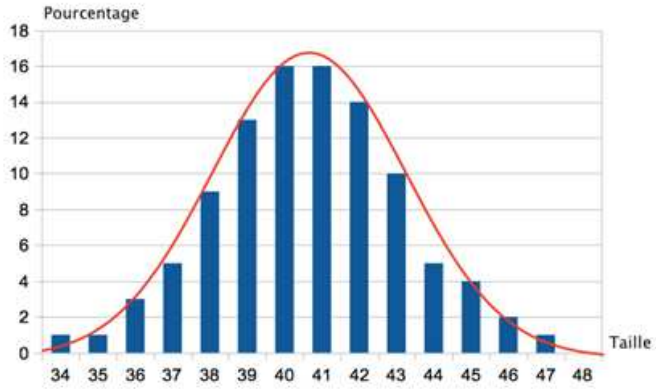
Comme la capsule précédente, celle-ci n'aborde pas la valeur de $P(X = a)$ dans le cas d'une loi à densité, ni la signification du mot « densité » qui figure pourtant dans le titre de la capsule.
Aussi, elle évoque peu la complexité du sujet. L'auteur y tente un peu plus d'explications : sur le passage de loi discrète à loi continue ; sur ce qu'est un nombre réel. Ces explications sont malheureusement porteuses de contre sens tant sur ce qu'est une densité de probabilité et sur ce qu'est un nombre réel.
Les valeurs numériques prises dans les exemples sont, comme dans la capsule précédente, toutes des valeurs entières strictement positives.

Cette capsule utilise un exemple « concret » sur lequel la technique de calcul de probabilités dans le cas d'une loi à densité est exposé : l'exemple a une fonction générique. Le problème concret est cependant curieusement choisi : une entreprise ne produit pas ses quantités entre 0 et 20 tonnes au hasard.

Un élève peut y trouver en moins de trois minutes un exposé qui l'outille d'une technique de calcul de probabilité via une intégrale.
Un enseignant peut y trouver une introduction aux lois à densité pour son cours et être séduit par sa rapidité et son apparente efficacité ; s'il n'est pas averti ou ne prend pas le temps d'y réfléchir, il risque cependant de ne pas en repérer les contre sens.

Ecartons-nous des capsules pour observer l'expositions de connaissances d'Yvan Monka intitulée « Lois à densité », trouvée sont sur son site www.maths-et-tiques.fr. Voici l'extrait qui y constitue à la fois le passage du discret au continu et le préambule à la définition d'une fonction de densité :

a) Un site de vente en ligne de vêtements établit le bilan des ventes par taille.
L'histogramme ci-contre résume ce bilan.



Du discret...
On désigne par X la variable aléatoire qui donne la taille souhaitée par un client connecté. X prend ses valeurs dans l'ensemble {34 ; 35 ; 36 ; ... ; 47 ; 48}
On a par exemple : P(X = 40) = 0,16 et P(X = 45) = 0,04.
On a encore : P(37 ≤ X ≤ 40) = 0,43.

... au continu
On a tracé la courbe d'une fonction f qui s'approche de l'histogramme. Cette fonction est appelée fonction de densité.
Dans ce cas, on considère la variable aléatoire Y qui donne la taille souhaitée par le client connecté. Y prend ses valeurs dans l'intervalle [34 ; 48]. Y est une variable aléatoire continue.

Ce « passage » du discret au continu est du même type que dans la capsule : une courbe épouse un soit-disant « histogramme » qui est en fait un diagramme en bâtons (épais). Comme les valeurs prises par la variable aléatoire sont entières, les classes sont d'amplitude 1 ; les valeurs numériques en ordonnée sont cohérentes en ce qu'elles sont à la fois celles d'une probabilité et d'une densité de probabilité. Rien ne choque à première vue, mise à part la légende de l'axe des ordonnées pour un œil averti.
Cette façon de passer d'une loi discrète à une loi continue l'amène à parler d'une taille de vêtements qui prend ses valeurs dans l'intervalle [34 ; 48]. La grandeur « taille d'un vêtement » est pourtant discrète. L'incohérence de ce discours ne peut que gêner la compréhension des élèves, à moins que l'auteur ne présente la variable aléatoire continue comme une modélisation continue d'un phénomène aléatoire discret.
Remarquons que dans la suite de l'exposition de connaissances, les exemples donnés dans le continu (durée de vie d'un disque dur ; production en tonnes de plaques en plâtre) n'utilisent, tout comme l'exemple préliminaire sur la taille de vêtement et la capsule, que des nombres entiers (d'heures, de tonnes) ; de plus, l'expérience aléatoire n'y est pas décrite.

c) Site de la Khan Academy

Le titre de la capsule est : « variables aléatoires quantitatives discrètes et variables aléatoires continues »[66]
Elle compte 35375 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 10 juin 2014) – soit environ 10100 vues par an.
La durée de la capsule est de 16 min 59s.
Le public visé n'apparaît pas.

[66] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=mGEFONTg5dM

Déroulement et analyse :
L'écran est vide au départ, l'auteur le complète de façon manuscrite à mesure que la vidéo avance.
Il commence par dire que les variables aléatoires quantitatives peuvent être discrètes ou continues.
Il souligne que le mot « discret » vient du latin « discretus » qui veut dire « séparé ». Ce qui lui permet de définir une variable aléatoire discrète par le fait qu'elle « *prend des valeurs distinctes ou séparées* ».
L'auteur explique qu'une variable aléatoire continue, elle, « *va pouvoir prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle* » ; il rajoute que cet intervalle peut être « *infini* » (il veut certainement dire « non borné »).
Il fait « *une analogie avec les ensembles ; par exemple l'ensemble des entiers naturels est un ensemble discre*t ». Il cite 1, 2, 3 (pas 0) et explique qu'entre 1 et 2 il n'y a pas d'entier. Par opposition, il cite l'ensemble $\mathbb{R}$ en tant qu'ensemble continu puisque « *entre deux valeurs il y a toujours d'autres valeurs* ».
Il dit aussi au cours des exemples de variables aléatoires discrètes qu'on peut compter les valeurs, qu'on peut les lister, qu'elles sont « *prédéterminées* ».
L'auteur souligne que la liste des valeurs peut être infinie. Il donne pour exemple le nombre de secondes écoulées depuis la création de l'univers.
Remarquons que cet exemple illustre le propos de l'auteur à condition de supposer que l'univers « a toujours existé », ou du moins que celui qui visionne la vidéo le pense. En tout état de cause, ce point n'est pas tranché par les physiciens…

L'auteur explique au cours de la vidéo qu'une variable aléatoire continue est telle qu'on ne peut pas lister les valeurs qu'elle prend. Il l'illustre par un exemple numérique : « *entre 0,01 et 0,02 il y a 0,0111 et 0,0112 et ainsi de suite donc j'en ai une infinité. Et entre 0,0111 et 0,0112 j'ai encore une infinité de valeurs.* » Le fait qu'entre deux nombres réels il y en a une infinité découle d'une raison qui n'apparait pas clairement.
On peut tout de même résumer son approche du continu ainsi : entre deux nombres il y en a toujours une infinité d'autres. Il s'agit d'une variante de la divisibilité à l'infini.

Il convoque ensuite des exemples d'expérience aléatoire. Le premier est celui de la masse d'un animal pris au hasard dans un parc animalier. Pour décrire le continu, il dit que la masse « *peut être n'importe quel nombre* » dans l'intervalle]0 ;5000] ; « *il n'y a pas de masse prédéterminée* » ; « *on ne peut pas compter* » ; et donne pour exemple des masses avec différentes précisions. Il fait démarrer l'intervalle à 0 ouvert en disant qu'on peut prendre la masse d'une bactérie par exemple.
Le deuxième exemple est « *le temps exact* » de l'athlète vainqueur aux 100 m aux JO de 2016 (la vidéo date de 2015). Il souligne le mot « exact » pour dire que c'est là que tout se joue, ce n'est pas une valeur arrondie.
Il explique que la variable aléatoire qui prend pour valeur le temps arrondi au 100e, elle, est discrète.

Il utilise à plusieurs reprises le mot « clairement », comme les élèves qui disent « forcément », lorsqu'il pense expliciter des « évidences ».

Remarquons qu'une masse, tout comme un temps, est en pratique mesurée avec une précision donnée, selon la précision de l'outil de mesure utilisé. En l'occurrence, dans un parc animalier, la masse des animaux est vraisemblablement mesurée au gramme ou au 10e de gramme près ; un temps aux 100m est mesuré au 100e de seconde. Ce n'est qu'en théorie qu'on peut considérer la mesure d'une masse ou celle d'une durée comme prenant toute valeur d'un intervalle.
En pratique, une masse ou un temps « exact » (à supposer que cela ait un sens physiquement) ne peut être mesuré. Si la divisibilité à l'infini de l'ensemble des mesures d'une masse ou d'un temps peut sembler aller de soi par une « expérience de pensée », ce n'est peut-être pas le cas d'un point de vue physique et certainement pas dans la réalité ; leur caractère continu (dans le sens de « sans trou ») tel que le suggère le fait qu'elles peuvent prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est peut-être qu'un construit théorique.
Pour que de soi-disant évidences ne perturbent pas la compréhension des élèves ou plus généralement des « apprenants », nous faisons l'hypothèse que l'enseignant doit faire preuve de clarté, voire

d'honnêteté intellectuelle, sur ce qui est du domaine du concret, de la réalité, par opposition à ce qui relève de la modélisation du réel par des outils théoriques.

Conclusion :
Cette vidéo est l'une des deux plus longues consultées. Elle est aussi la seule à porter exclusivement sur la différence entre variable aléatoire discrète et variable aléatoire continue en ce qu'elle ne comporte pas de calcul (intégral ou autre). Elle ne cible donc pas l'acquisition de techniques de calcul de probabilités et par conséquent la résolution d'exercices, mais plutôt une connaissance de quelques caractères des ensembles discrets et continus de nombres.
La longue durée de cette capsule peut être attribuée au fait que le sujet soit délicat à traiter.
L'auteur n'aborde pas la « fonction de densité » d'une variable aléatoire ; *a fortiori*, il n'aborde pas la difficulté liée à $P(X = a)$. Ce n'est pas le propos de la vidéo.

Un élève peut y approfondir sa compréhension de ce que sont les variables discrètes et continues. Les exemples pris sont variés, intra mathématiques pour certains et extra mathématiques pour d'autres.
Ils peuvent inspirer un enseignant pour expliquer à ses élèves de lycée ce que sont des variables discrètes et des variables continues. Un discours sur la modélisation du réel par les mathématiques manque cependant dans les exemples extra mathématiques ; un enseignant non averti peut ne pas le relever.

d) Site « J'ai compris.com »

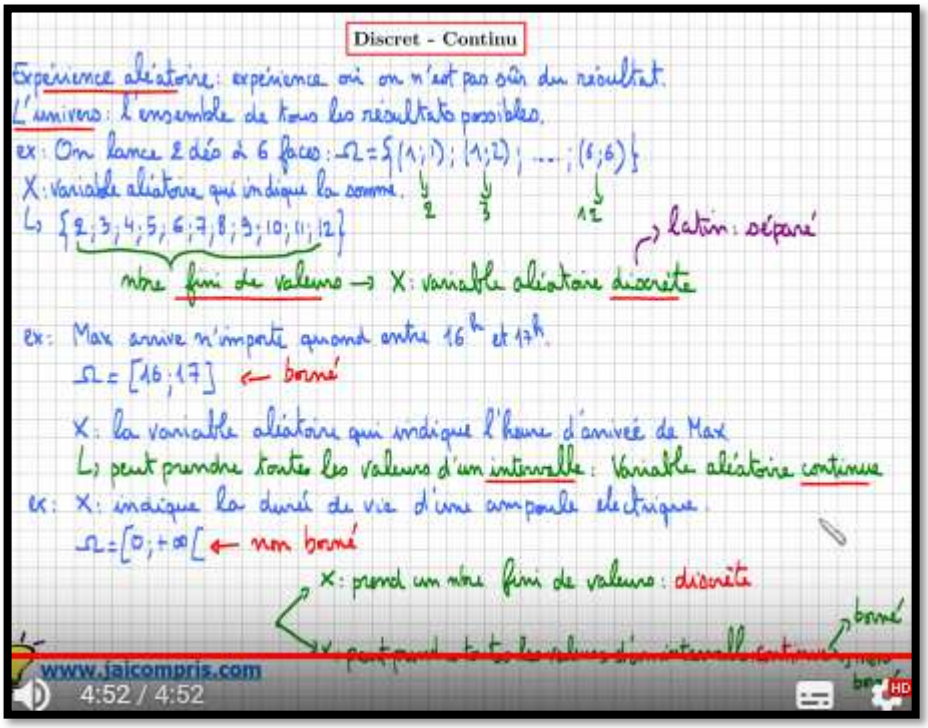
Le site est fait par deux personnes qui se présentent comme des professeurs agrégés de lycée.
Il n'est pas nécessaire de s'y abonner pour le consulter.

Le cours sur les probabilités continues est décliné en plusieurs capsules.
L'auteur y expose son propos sur un écran quadrillé qu'il remplit à mesure que le propos avance.

La première vidéo traite de la différence entre variable aléatoire discrète et variable aléatoire continue. Nommons-la « capsule 0 ».
Le titre de la capsule 0 est : « Probabilité : *comprendre la différence entre discret et continu* »[67].
Elle compte 15582 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 6 janvier 2016) – soit environ 8100 vues par an.
Sa durée est de 4'52''.

Déroulement :
L'auteur énonce la définition d'une expérience aléatoire et celle de son univers. Il différencie les variables aléatoires discrètes et continues selon que l'univers est fini – la variable aléatoire « *prend un nombre fini de valeurs* » ou est un intervalle de $\mathbb{R}$ - la variable aléatoire « *prend toutes les valeurs d'un intervalle* ». Il n'en dit pas plus.
Il utilise deux exemples de variables aléatoires continues, l'une pour laquelle l'univers est borné et l'autre pour laquelle il ne l'est pas. Dans les deux, le temps est choisi en tant que grandeur continue.

[67] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=bELfonPPXoE

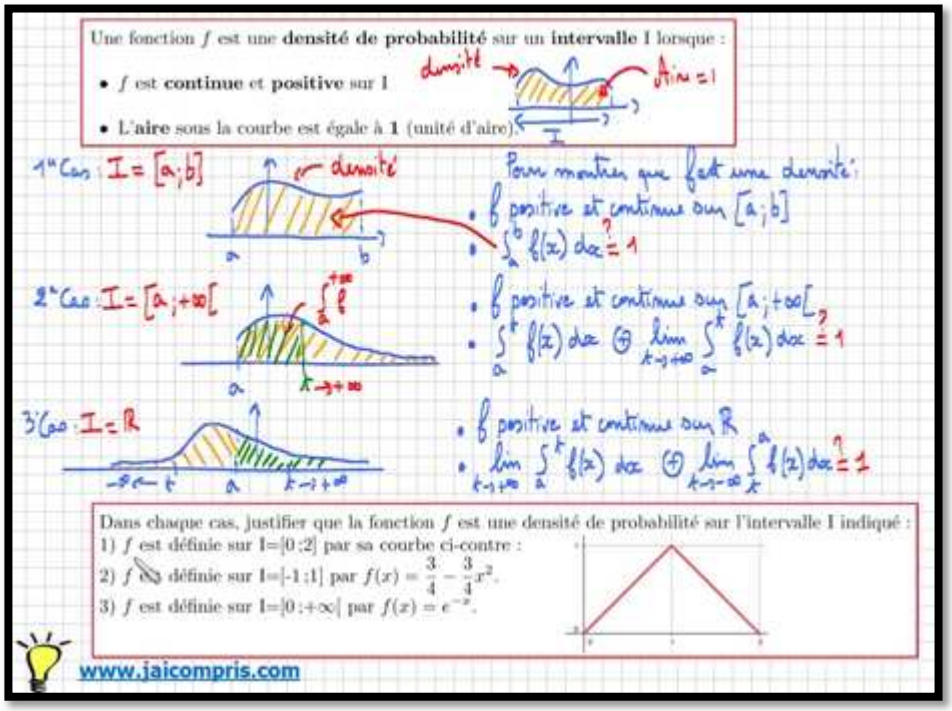


Analyse :
L'auteur de cette capsule adopte un point de vue simplificateur et clair des ensembles discret et continu (de nombres) : les premiers sont finis et les seconds des intervalles (de nombres réels). Il ne tente pas d'expliciter ce en quoi un intervalle est continu.
Son discours est construit et cohérent.

Titre de la capsule 1 : « *Probabilité continue : densité de probabilité : Cours Partie I - très IMPORTANT* »[68]
Elle compte 15436 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 12 décembre 2015) – soit environ 7700 vues par an.
Sa durée est de 7'03''.

Déroulement :
L'auteur y expose la définition d'une densité de probabilité et les cas de figure selon que la fonction est définie sur un intervalle borné ou non. Le but de la capsule est que les élèves sachent démontrer qu'une fonction est une densité de probabilité ou ne l'est pas. Le calcul intégral est largement sollicité.

[68] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=dic4qpPe9lE



Titre de la capsule 2 : « *loi de probabilité continue - densité - comprendre la définition - cours partie 2 – IMPORTANT* »[69].
14982 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 16 décembre 2015) - environ 7500 vues par an.
Sa durée est de 10'25''.

Déroulement :
Le but de la capsule est d'expliquer aux élèves la technique de calcul des probabilités dans le cas d'une loi à densité, par le calcul intégral.
L'auteur affiche la définition et un exemple manuscrit dans le cadre graphique.
Puis il dit directement : « *Dans un exercice, si on vous demande la proba que X appartienne à l'intervalle [2 ; 3], c'est chercher l'aire sous la courbe entre 2 et 3. Et ça c'est l'intégrale entre 2 et 3 de la fonction.* »
Il prend ensuite le cas du calcul de $P(X = 4)$ et se place dans le cadre graphique : « *ça revient à calculer la surface de ce segment* » (il montre le segment qui joint le point de coordonnées (4 ; 0) au point d'abscisse 4 de la courbe) « *donc la probabilité est égale à 0* ». Il généralise en disant que ce serait vrai avec n'importe quel nombre.

Analyse concernant les capsules 1 et 2 :
Le mot « densité » est présent dans les titres des capsules et les exposés ; sa signification n'est cependant pas abordée.
La longueur des vidéos tient à ce que l'auteur dit trois fois les points à retenir de son propos : après les avoir exposés, il les répète ; puis à la fin de la vidéo il les récapitule tous.
Les points à retenir portent sur des techniques de résolution d'exercices au niveau de la Terminale : comment vérifier qu'une fonction est une densité de probabilité ; comment calculer une probabilité lorsqu'une variable aléatoire suit une loi à densité donnée.
Le discours de l'auteur est clair et construit ; cependant, comme dans la « capsule 0 », il évite d'aborder les notions et propriétés délicates à comprendre.

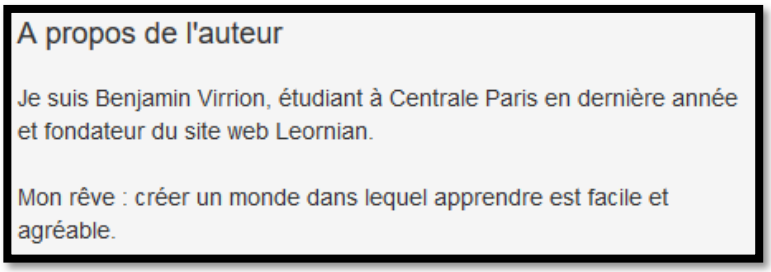
Un élève y trouve, dans un langage et un exposé clairs, ce qu'il a besoin de connaitre afin de répondre aux questions d'exercices classiques de Terminale : le « comment ». Il n'y trouve pas de réponses à des

[69] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=SXnrUjGYgKQ

questions du type « pourquoi » : les définitions sont formelles ; mise à part la définition de l'univers dans le cas de variables aléatoires à densité, l'auteur ne s'appuie pas sur les connaissances anciennes des élèves concernant les variables aléatoires discrètes afin de construire les nouvelles.
Un enseignant y trouve un exposé bien construit qui évite d'aborder les questions délicates. Cependant, en classe, contrairement à une capsule, les élèves peuvent bien sûr les poser !

e) Site « leornian.net »

Le site leornian.net est un site de partage de vidéos qui se décrit comme suit : « *Le site web fait pour enseigner vos passions et apprendre celles des autres!* ».
Le créateur du site s'y définit ainsi :


A propos de l'auteur

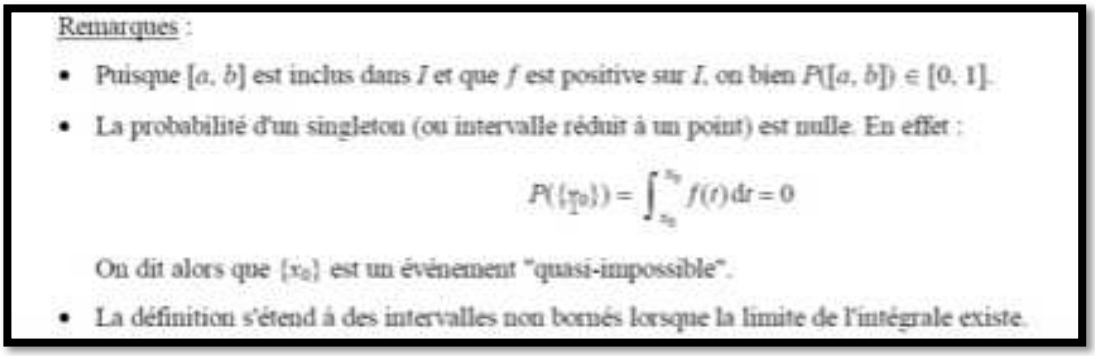
Je suis Benjamin Virrion, étudiant à Centrale Paris en dernière année et fondateur du site web Leornian.

Mon rêve : créer un monde dans lequel apprendre est facile et agréable.

Le titre de la capsule est : « *Lois de Probabilités Continues (1/5) - Densité de Probabilité - Maths Terminale S* »[70].
Elle compte 5242 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 22 septembre 2013) – soit environ 1200 vues par an.
Sa durée est de 18' 23''.
Le niveau visé est explicitement celui de Terminale S.

Déroulement :
L'auteur situe oralement le sujet comme suit : « *Dans ce chapitre, on s'intéresse aux variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle ; c'est ça la grande différence* ».
L'exposition de connaissances est affichée à l'écran. La définition d'une densité de probabilités est donnée ainsi qu'un exemple de graphe d'une fonction de densité (qui s'annule aux bornes de l'intervalle).
Suivent les définitions d'intégrales indéfinies par passage à la limite puis un exercice dans lequel la tâche consiste à chercher l'expression d'une fonction pour qu'elle soit une fonction (linéaire $x \longmapsto x + \alpha$) de densité sur l'intervalle [0 ; 1]. Elle résulte donc en du calcul intégral.

La définition qui suit est celle d'une loi de probabilité. Le mot « évènement » est absent, les évènements sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
A 14min30s, l'auteur aborde la question du calcul et de l'interprétation de $P(X = x_0)$:


Remarques :

- Puisque $[a, b]$ est inclus dans I et que f est positive sur I, on bien $P([a, b]) \in [0, 1]$.
- La probabilité d'un singleton (ou intervalle réduit à un point) est nulle. En effet :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement "quasi-impossible".

- La définition s'étend à des intervalles non bornés lorsque la limite de l'intégrale existe.

[70] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=cvvqgBJURY4

Il explique qu'il s'agit « *d'une différence très subtile où en gros dans les probabilités discrètes si la probabilité d'avoir une issue était égale à 0, eh ben vu que j'avais un nombre fini euh…. Il s'écoule 8 secondes… d'issues, ça voulait dire que l'évènement arrivait forcément jamais. Tandis que ici ça va être très différent, ici, même si la probabilité d'un évènement est nulle, même si la probabilité de tomber sur le point a est égale à 0, eh ben peut-être que je peux tomber dessus quand-même. Le seul truc c'est qu'on va dire qu'en fait la probabilité de tomber dessus c'est égal à 0, mais ça veut pas dire que je peux pas tomber dessus. C'est deux choses distinctes* ».

Analyse et conclusion :
L'exposé est formel, il dépasse la technicité mathématique attendue en Terminale S. Y figurent la probabilité d'une réunion infinie dénombrable d'intervalles ; la définition d'évènements quasi-impossibles ; les définitions mathématiques sont données sans aucun exemple concret. Les notations associées aux évènements sont celles adoptées dans l'enseignement supérieur.

En tout état de cause, l'auteur n'hésite pas à montrer la complexité du sujet ; il s'appuie toutefois peu sur les connaissances relatives aux variables aléatoires discrètes : il y fait une brève allusion dans sa phrase introductive ; puis il fait allusion à la notion d'évènement impossible au moment où il présente la propriété $P(X = x_0) = 0$. Le discours qui entoure cette propriété est mal aisé, à la hauteur de la difficulté de son interprétation dans la réalité. En témoigne la pause de 8 secondes pendant laquelle l'auteur cherche comment poursuivre son propos ; précisons qu'il ne s'agit nullement d'une habitude de sa part, le discours de l'auteur est fluide par ailleurs et il s'agit de la seule pause de plusieurs secondes de la capsule.

Il n'y aborde pas la signification du mot « densité ».

Un élève de Terminale dont le niveau de technique lui permet de suivre la capsule peut y trouver des ajouts motivants, tant du point de vue technique que du point de vue théorique.
Un enseignant peut lui aussi y trouver de quoi répondre à certaines de ses questions d'ordre théorique.

f) Site « Le prof du Web »

Ce site compte 24423 abonnés. Il offre des vidéos pour les trois niveaux de lycée, dans plusieurs disciplines.

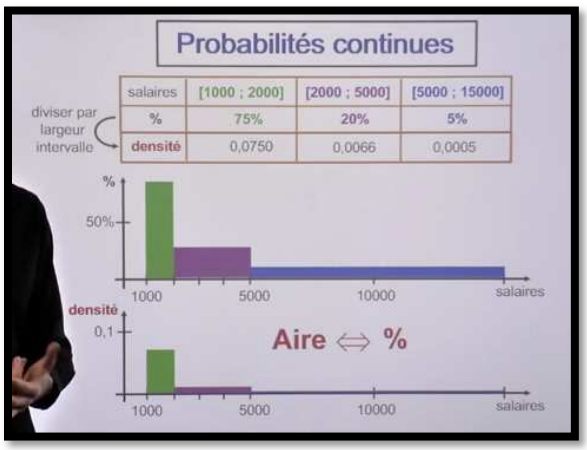
Le sujet des probabilités continues est introduit dans deux capsules.
Ces capsules sont en présentiel, présentées à l'aide d'un Tableau Blanc Interactif (TBI).

Le titre de la capsule n°1 est : « les bases des probabilités continues »[71].
Elle compte 3126 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 14 mai 2014) – soit environ 900 vues par an.
Sa durée totale est de 3'53''.

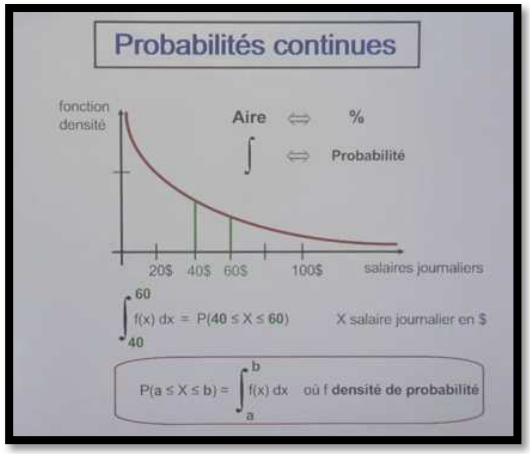
Déroulement :
L'auteur démarre par ces mots : « *Bonjour, dans cette vidéo je vais vous expliquer comment calculer des probabilités sur une variable continue, c'est-à-dire une variable qui peut prendre une infinité de valeurs.* »
Le TBI affiche une carte de l'Europe sur laquelle la France et la Hollande sont entourées, leurs populations respectives sont affichées. La consigne est « *de colorier en plus foncé les zones les plus peuplées* ». L'auteur fait remarquer que la population française est supérieure à celle de la Hollande puis fait afficher la densité de population respective des deux pays. Il explique que « *la densité, on va la retrouver en probabilités continues* ».

[71] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=8vYDonGhvwM

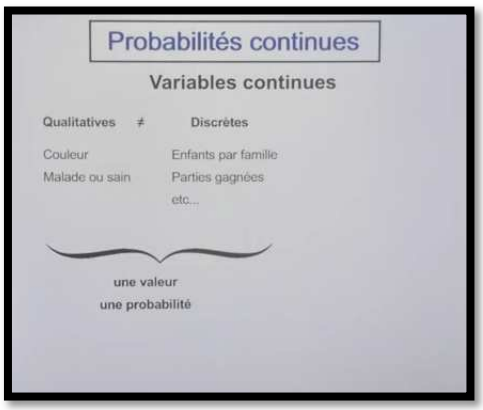
Il fait afficher un nouvel exemple sur la répartition des salaires dans une entreprise. Il fait remarquer que la représentation graphique dans laquelle l'ordonnée est le pourcentage « *prête à confusion* ». « *Pour résoudre ce problème, comme en géographie, on va prendre la taille des zones, autrement dit les largeurs des intervalles et on va diviser les pourcentages par les largeurs des intervalles pour obtenir la densité* ». Il fait remarquer que le graphique est alors « *beaucoup plus lisible* », la raison en est que l'aire et le pourcentage sont « *équivalents… et cette relation sera permanente en probabilités continues* ».



L'exemple suivant est celui de la répartition du salaire journalier, en dollars, dans le monde. Une fonction de densité est tracée. La question est de trouver le pourcentage de personnes ayant un salaire journalier compris entre 40 et 60 dollars.
L'auteur explique : « *Quand on travaille avec des densités, les pourcentages sont associés à des aires et l'aire ici est une aire sous une courbe, donc l'intégrale dans ce cas entre 40 et 60* ». La notion d'aire sous la courbe permet à l'auteur de passer du cadre graphique au cadre analytique, l'auteur affiche une intégrale.
Puis il dit : « *Ici cette intégrale représente le pourcentage de personnes qui gagnent entre 40 et 60 dollars par jour, mais aussi la probabilité qu'une personne prise au hasard ait un salaire compris entre 40 et 60* ». Il passe ainsi du domaine des statistiques à celui des probabilités.



Suit une mise en garde, selon laquelle ces techniques ne s'appliquent que pour des variables continues. L'auteur affiche sur le TBI des exemples de variables aléatoires quantitatives, « *qui ne se mesurent pas* », et de variables aléatoires discrètes, « *qui prennent un nombre fini de valeurs* » pour lesquelles « *vous utilisez vos formules de probabilités habituelles… à une valeur on peut toujours associer une probabilité* ».



Par opposition, l'auteur décrit les probabilités continues ainsi : elles « *s'appliquent à des variables continues, c'est-à-dire qui prennent une infinité ou un très grand nombre de valeurs* ». Les exemples de grandeurs continues qu'il prend sont le temps, la longueur, la masse. Il souligne qu'une probabilité est alors « *associée à un intervalle de valeurs* » et affiche la formule de calcul de $P(a \leq X \leq b)$ par une intégrale.

Analyse et conclusion :
Cette capsule gère plusieurs points délicats de façon explicite, claire et rigoureuse :

- Celui du passage des histogrammes représentant des densités aux graphes de fonctions de densité ;

- Celui du passage des calculs de fréquences lorsque le graphique est un histogramme aux calculs de fréquences lorsque le graphique est le graphe d'une fonction de densité : les aires servent d'intermédiaire ;
- Celui du passage du cadre des statistiques à celui des probabilités ;
- Ce qui diffère entre variables aléatoires quantitatives, discrètes et continues, tant dans le type de grandeurs sur lesquelles elles permettent de travailler, les valeurs qu'elles prennent que dans les techniques de calcul de probabilités associées.

Quelques remarques cependant :

- Le mot « histogramme » n'est pas prononcé, alors qu'il le serait ici à bon escient - il sert bien souvent à nommer des diagrammes en bâtons de façon erronée.
- L'histogramme serait plus « lisible » que le diagramme représentant les fréquences. Un élève qui regarde la capsule pourrait pourtant penser le contraire, puisque le rectangle qui représente la tranche de salaire [5000 ; 15000] sur l'histogramme est à peine visible. Une clarification de ce point aurait été bienvenue.
- La fonction de densité dont le tracé est présenté dans cette capsule n'est pas une représentation de données au même titre que l'histogramme : cette fonction de densité, qui est continue, modélise la répartition du salaire journalier dans le monde ; il serait opportun de le préciser.

On peut se demander pourquoi cette vidéo a si peu de vues. Ce n'est pas ce que recherchent les élèves qui regardent des capsules sur internet ? Cette capsule n'est pas très proposée par les moteurs de recherche ?
Un enseignant peut y trouver un exposé clair et rapide qui s'appuie remarquablement bien sur les connaissances anciennes des élèves. À condition que ses connaissances, sur les histogrammes en particulier, lui permettent d'en apprécier la qualité !

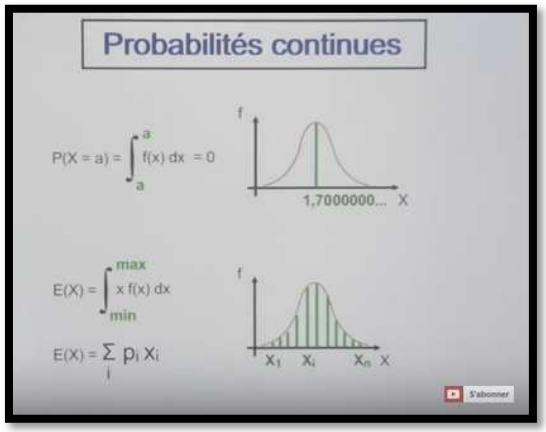
Le titre de la capsule n°2 est : « Les probabilités continues : les propriétés à connaître »[72]
Elle compte 4001 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 15 mai 2014) – soit environ 1100 vues par an.
Sa durée totale est de 4'20''.

Déroulement :
Le graphe de la fonction de densité de la capsule précédente est repris. L'auteur prend le soin de généraliser la formule de calcul de $P(a \leq X \leq b)$ par le calcul intégral à « *toutes les densités de probabilités* ».
La propriété $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$ est énoncée et justifiée graphiquement.
Remarquons que sa compréhension nécessite celle de la propriété $P(X \leq a) = P(X < a)$ qui elle-même découle de la propriété $P(X = a) = 0$. Or cette dernière est justifiée ensuite, par le calcul intégral.
Une loi normale de moyenne 1,70 est alors affichée. Il s'agit de la densité de probabilité de la taille d'individus. Concernant $P(X = 1{,}70) = 0$, l'auteur dit « *Ça peut paraitre choquant, mais ce qu'on cherche c'est la probabilité de faire un mètre 70 avec une infinité de zéros* ». Le présentateur joint le geste à la parole et fait apparaître plusieurs zéros suivis de pointillés. Il poursuit : « *et pour cette taille précise il n'y a personne* ».

[72] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=UNr8mOL_TNk

Pour terminer avec les « formules », l'auteur aborde celle de l'espérance mathématique. Il affiche $E(X)$ dans le cas discret, puis procède par analogie : les x_i du cas discret sont les x du cas continu ; les p_i du cas discret sont des densités $f(x)$; « *et l'équivalent de la somme dans le continu, et vous pouvez le retenir pour le supérieur, c'est l'intégrale* ».

La capsule se termine par un récapitulatif des « formules » vues pendant les 4'20''.



Analyse et conclusion :
L'exposé est dans cette seconde capsule tout aussi explicite, clair et précis que dans la première.
L'auteur y aborde les points délicats que sont :

- La propriété $P(X = a) = 0$ (et son interprétation dans le « concret »). Sans parler explicitement d'évènement impossible, l'auteur « raconte » que l'évènement $(X = 1{,}7)$ ne peut pas se produire. C'est l'infinité des décimales d'un nombre réel qui sert d'argument ; celui-ci vient de la théorie mathématique. Mais quel sens donner à l'évènement $(X = 1{,}7)$, à la « *taille précise* » 1m70, dans la réalité physique ?
- La formule de calcul de l'espérance d'une variable aléatoire à densité (en faisant appel à l'intégrale comme somme infinie tout en spécifiant qu'il s'agit d'une connaissance de l'après Terminale). Un point peut cependant prêter à confusion : les bornes de l'intégrale y sont nommées « min » et « max » ; elles peuvent pourtant, même en Terminale, être infinies.

Malgré ses qualités, elle est elle aussi peu regardée, du moins sur « you tube ». Un élève y trouve cependant toutes les formules importantes et des explications simples (mais pas simplistes) sur des questions qui ne le sont pas.
Cette capsule peut être une source d'inspiration pour un enseignant de Terminale.

g) Vidéo par Sophie Guichard

Son site décrit Sophie Guichard comme un professeur agrégé qui a présenté son travail sur la classe numérique à l'IFé.

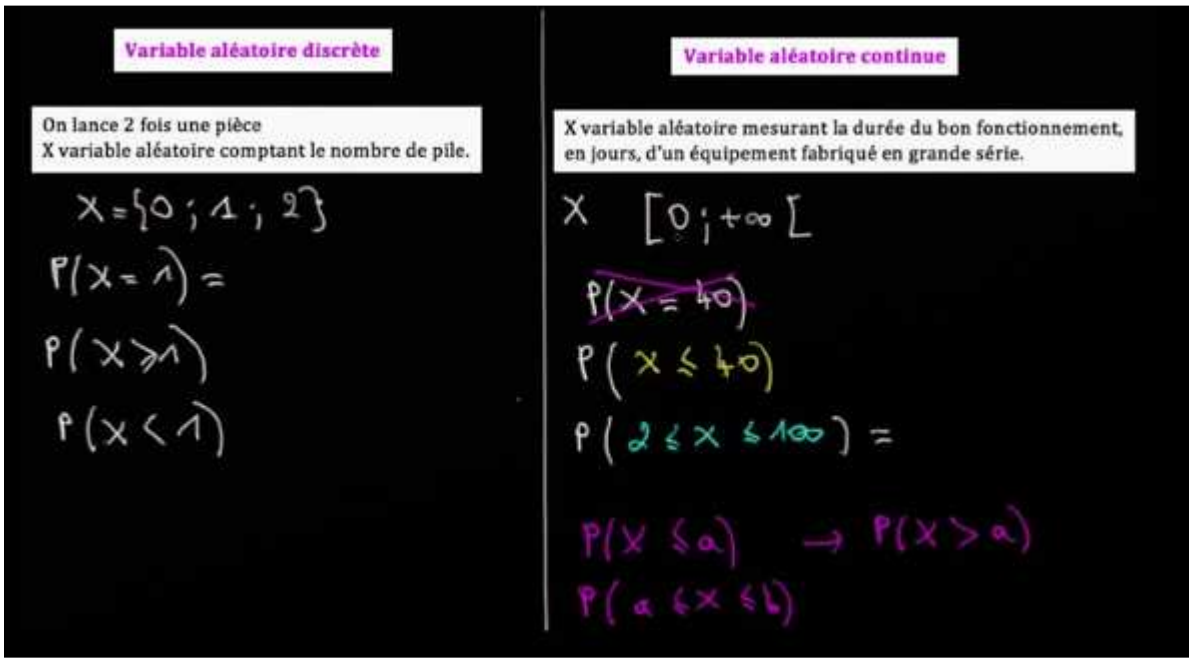
Le titre de la capsule est : « *Définition des probabilités pour une variable aléatoire continue* »[73]
Elle compte 1616 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 23 février 2015) – soit environ 600 vues par an.
Sa durée totale est de 3'25''.

Déroulement :
L'auteur écrit sur son écran et choisit de le partager verticalement en deux pour mettre en parallèle variables aléatoires discrètes et continues.
Elle rappelle que dans le cadre discret, la variable aléatoire « *prend des valeurs isolées en un nombre fini* ». Et donne pour exemple un dé jeté deux fois et X la variable aléatoire « *comptant le nombre de piles* ».
« *Dans le cadre continu ça va être un peu plus compliqué puisque ce cadre continu il va surtout intervenir dans les domaines économique ou industriel, et dans ces cas-là, les éléments qui vont être considérés vont plutôt prendre n'importe quelle valeur dans R et surtout sur des durées.* »

[73] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=raz1eZDL1rw

Elle donne pour exemple une variable aléatoire X « *mesurant la durée du bon fonctionnement, en jours, d'un équipement fabriqué en grande série* ».
« *Donc à ce moment-là, X c'est bien une variable aléatoire continue parce que du coup la durée du bon fonctionnement, eh ben l'équipement soit il ne marche pas dès le premier jour soit il marche un nombre infini de temps* ».
Elle écrit $X \quad [0;+\infty[$
« *Donc lorsqu'on va analyser ces différents équipements et surtout au niveau de leur bon fonctionnement, on va pas juste poser la question de, au 40e jour, quelle est la probabilité que l'équipement marche ou pas. C'est pas intéressant hein un jour donné. Nous ce qu'on veut c'est des durées. Donc on aimerait plutôt avoir des probabilités du type quel est le bon fonctionnement de mon équipement du début jusqu'au 40e jour…* ».
Elle écrit $P(X \leq 40)$
« *Ou on peut regarder aussi entre un laps de temps…* » Elle prend pour exemple $P(2 \leq X \leq 100)$
« *Donc ici c'est vraiment une grande différence entre le cadre continu et le cadre discret, c'est que dans le cadre continu, on va pas s'intéresser à des probabilités du type P de X égal . Et donc on va plutôt s'intéresser à des probabilités du type P de X inférieur ou égal à quelque chose ou P de X compris entre deux valeurs ou une qui sera analogue à celle-ci qui sera plutôt de la forme P de X est supérieur ou égal à quelque chose* ». Elle écrit $P(X \leq a) \rightarrow P(X > a)$
Remarquons qu'elle dit « *supérieur ou égal* » mais écrit « > ». L'égalité $P(X \geq a) = P(X > a)$ n'est pas évoquée.

Elle poursuit : « *Donc ça ce sont les trois types de probabilités qu'on va étudier dans le cadre continu ; par contre, dans le cadre discret on a toujours la possibilité de regarder lorsque c'est égal à quelque chose, ou lorsque c'est supérieur ou égal à 1 ou lorsque c'est par exemple inférieur à 1. Ici tous les cas de figure possibles sont intéressants. Vraiment dans le cadre continu regarder à un moment fixe là ça n'a plus aucun intérêt, par contre on va regarder sur des laps de temps, sur des intervalles, des parties de R* ».



Analyse et conclusion :
Cette enseignante, au début de la capsule, prend le parti de différentier variables aléatoires discrètes et continues par le fait qu'une variable aléatoire continue prend n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$.

Cet argument n'est pas repris ; l'exemple qui est choisi (durée en jour) et les valeurs invoquées qui sont entières (40, 2, 100) vont plutôt dans le sens de valeurs entières positives.
Alors en quoi la différence entre les deux types de variables aléatoires tient-elle si l'on en croit l'auteur de cette capsule ? Au fait que les probabilités continues seraient utilisées dans les domaines économique et industriel, dans lesquels cela n'a pas « *d'intérêt* » de calculer des probabilités du type $P(X = a)$.
L'auteur se passe d'exposer les notions mathématiques en jeu et affiche une méconnaissance des domaines d'application du calcul de probabilités via les lois à densité.
Les arguments sont fallacieux et le discours peu rigoureux.
La capsule est (heureusement) assez peu vue sur « you tube ».

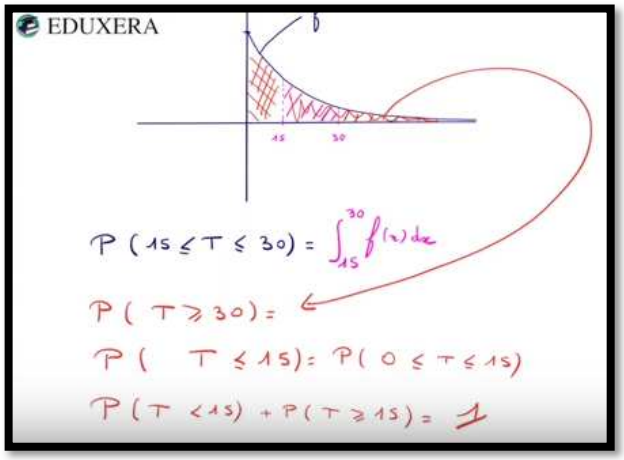
h) Site « Eduxera »

Le site « Eduxera » se décrit lui-même comme suit : « *Eduxera ce sont des centaines de videos de maths, d'exercices, de cours, de conseils par une véritable prof de maths :)* ».

Le titre de la capsule est : « *Comment calculer une probabilité avec une loi continue ? Terminale S – ES* »[74].
Elle compte 23 vues au 10 décembre 2017 (ajoutée le 23 aout 2016) – soit environ 17 vues par an.
La durée de la capsule est de 4' 10''.
Le public visé est explicitement celui des élèves de Terminales S et ES.

Déroulement :
Une densité est représentée graphiquement (il s'agit de celle de la loi uniforme sur [0 ; 2]). Une question est écrite à côté : comment calculer une probabilité avec une variable aléatoire continue ?
Ce que représente le graphique et la façon dont la fonction représentée se nomme ne sont pas dits par l'auteur. Remarquons que la voix est celle d'un homme et non d'une femme comme l'en-tête le suggère.
Oralement, l'auteur dit que la tâche consiste à « *calculer la probabilité que mon temps d'attente soit compris entre une et une virgule 5 minutes* ». Ce qu'il note $P(1 \leq T \leq 1{,}5)$. Il explique : *« c'est tout simple en fait, il suffit juste d'observer l'aire qui est située sous la courbe entre 1 et 1,5* ». Il hachure la portion de plan correspondante. Il remarque : « *Ça peut être par le graphique ou par le calcul* ».
L'exemple suivant est celui de la durée de vie d'un composant électronique. Une densité est représentée graphiquement (il s'agit vraisemblablement d'une loi exponentielle). La tâche consiste à calculer la probabilité que le composant ait une durée de vie comprise entre 30 et 50 ans. Il hachure la portion de plan correspondante et écrit $P(30 \leq T \leq 50) = \int_{30}^{50} f(x)dx$.
Puis il passe en revue sur ce même exemple les autres types de tâches et propriétés qui peuvent être utiles aux élèves :

[74] On trouve cette capsule sur « you tube » à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=H_kWuwoLvaA



Analyse et conclusion :
Cette capsule est décrite ainsi sur « you tube » : « *Cette vidéo explique de manière générale le calcul d'une probabilité avec une loi continue, graphiquement ou par le calcul. Utile pour le bac car permet de comprendre tous les types de calculs de probabilités possibles.* ». Elle se place donc dans l'optique de l'exposition de la totalité des techniques de calcul d'une probabilité utilisées au Baccalauréat, dans le cas d'une variable aléatoire à densité. Elle ne fait en effet pas référence aux variables aléatoires discrètes et se place d'emblée dans les techniques de résolution des exercices de Bac.

L'exemple de durée de vie d'un composant est utilisé dans sa fonction d'exemple générique.

Cette capsule n'aborde aucune question de vocabulaire ou théorique et ne fait aucune référence aux connaissances anciennes des élèves. En particulier, la difficulté soulevée par la propriété $P(X = a) = 0$ est passée sous silence.
L'auteur souligne à plusieurs reprises que ce qui est demandé à l'élève est « simple » et qu'il « *suffit de* »…
Le contenu et le discours sont simplistes.
La capsule est (heureusement) très peu regardée sur « you tube ».

i) Synthèse

Résumons dans un premier temps les résultats de nos analyses.

Le discret :
5 des 8 groupes de capsules analysées ci-dessus tentent de décrire l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire discrète.
Trois d'entre eux se réfèrent à la possibilité d'énumérer les éléments d'un ensemble discret ; dans deux d'entre eux, qui sont par ailleurs les plus vus sur « you tube », l'auteur joint le geste à la parole et énumère les valeurs prises par la variable aléatoire *X* : « *X*=1, *X*=2, *X*=3… » Ce faisant, il omet les cas où un ensemble fini de nombres est constitué d'éléments qui ne sont pas dans la comptine numérique. En particulier, le nombre 0 est omis alors qu'il fait partie des valeurs prises par les variables aléatoires qui suivent une loi binomiale, loi que les élèves étudient en classe de Première. Parmi les exemples de variables aléatoires que les élèves côtoient en Première, il y a par ailleurs celles qui modélisent les gains et pertes de jeux et qui prennent des valeurs négatives ou positives, entières ou décimales.
N'oublions pas que le statut de nombre a longtemps été refusé au 0 et aux nombres négatifs ; les entiers négatifs et le 0 échappent l'énumération d'objets.
Est-ce que, consciemment ou pas, certains enseignants évitent le 0 et les nombres négatifs par peur de complexification de leur discours alors qu'ils abordent un sujet difficile ?

Parmi les cinq groupes de capsules qui abordent le discret, quatre d'entre eux caractérisent les ensembles discrets par le fait qu'ils ont un nombre d'éléments fini. Deux raisons peuvent expliquer ce choix :

- La notion d'infini dénombrable peut être une difficulté supplémentaire dans un sujet déjà délicat ;
- Les exemples de variables aléatoires que les élèves côtoient en classe de Première prennent, à de rares exceptions près, un nombre fini de valeurs.

Le continu :
Sur les 8 groupes de capsules, 7 tentent de décrire l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire à densité et donc de décrire « le continu ».
Parmi eux, six expliquent que les valeurs prises sont « toutes celles d'un intervalle » - sous-entendu de $\mathbb{R}$, ou sont « sur un intervalle », ou « sur $\mathbb{R}$ ». L'ensemble continu des nombres réels et ses sous-ensembles continus que sont les intervalles y servent donc de définition au continu. L'une de ces capsules enrichit cette explication par la propriété de divisibilité à l'infini.

C'est donc essentiellement l'opposition (mathématiquement erronée bien sûr) fini/intervalle de $\mathbb{R}$ qui est utilisée par ces capsules pour expliquer ce qui différencie le discret du continu. Pour autant, les valeurs numériques des extrémités de ces intervalles sont choisies entières et strictement positives pour la plupart. Nous avons repéré deux rares apparitions d'une valeur non entière, en l'occurrence 1,5.

Le septième groupe de capsules définit l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire continue comme étant un ensemble « ayant un très grand nombre de valeurs, ou infini ». Il est le seul à utiliser l'opposition fini/infini pour caractériser le discret par rapport au continu.

Les exemples extra-mathématiques comme support du continu :
Dans 5 des 8 groupes de capsules, les auteurs convoquent des grandeurs continues comme exemples concrets. Il s'agit de temps ou durées (4 d'entre eux), de masses (3 d'entre eux), de longueurs (1 d'entre eux).

La prise en compte des connaissances anciennes des élèves – ici, de leurs connaissances sur les variables aléatoire discrètes ou sur les histogrammes :
Deux capsules sur les huit groupes ne s'appuient pas sur les connaissances anciennes ; l'une (celle de la Kahn Academy) car elle ne semble pas viser de public particulier, et en particulier pas celui des élèves de Terminale en France ; l'autre a un contenu très pauvre.

Dans les six autres groupes :

- Quatre s'appuient sur l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire discrète pour différentier variables aléatoires discrètes et continues.
- Une capsule fait une brève allusion aux variables aléatoires discrètes dans son introduction, et prend appui sur celles-ci au moment de son explication de la propriété $P(X = a) = 0$ dans le cas continu.
- Une autre s'appuie sur les histogrammes (connaissance qui devrait être ancienne pour les élèves) et la notion de densité qui lui est associée (connaissance ancienne pour les élèves, en géographie) pour introduire les variables aléatoires à densité.

Par ailleurs, deux de ces six groupes de capsules utilisent l'analogie entre les formules de calcul d'espérance dans les cas discret et continu pour expliquer la formule dans le cas continu.

L'introduction des fonctions de densité :
Deux groupes de capsules introduisent les fonctions de densité par leur définition formelle.

Nous avons vu ci-dessus que quatre groupes de capsules s'appuient sur les valeurs prises par une variable aléatoire discrète pour introduire les variables aléatoires à densité. Deux d'entre eux – les plus regardés sur « you tube » - s'en saisissent pour « glisser » des lois de probabilités dans le cas discret aux fonctions de densité.
L'un procède par le biais de l'ensemble des valeurs, prises sur un intervalle ; et « intervalle » implique qu'une fonction est dans le paysage d'un élève de Terminale : « *Ici nous allons travailler sur des variables aléatoires qui peuvent prendre toutes les valeurs entre a et b. Donc on appelle ça des lois continues. Une loi à densité c'est donc une loi qui dépend donc d'une fonction.* » Le glissement est d'ordre sémantique.
L'autre par le biais de l'ensemble des valeurs, prises sur les réels ; et les points extrémités d'un diagramme en bâtons sont reliés pour former une courbe « continue et régulière » : « *Et dans le cas où tu souhaiterais calculer la probabilité que X soit inférieur ou égal à 4 eh bien ça nous mènerait non plus à compter mais à mesurer à calculer l'aire sous la courbe* ». Le glissement se fait dans le cadre graphique.
L'impossibilité de dénombrer dans le continu amène à mesurer une grandeur continue qui, visuellement, « contient » les barres.

Un autre groupe de capsule part d'histogrammes représentant une densité (de population puis de salaires dans une entreprise). Ces densités sont des fonctions discontinues, constantes par morceaux. La représentation graphique de la densité du salaire journalier dans le monde est une courbe à l'allure « continue et régulière », plus proche des représentations graphiques de fonctions auxquelles les élèves sont habitués, qui permet d'introduire la notion de « fonction de densité ».

Trois groupes de capsules ne parlent pas de fonctions de densité et passent directement aux techniques de calcul de probabilités et aux propriétés.

La propriété $P(X = a) = 0$:
Dans trois groupes de capsules, cette propriété n'est pas abordée bien que les autres propriétés le soient. Elle n'est pas abordée non plus dans la capsule de la Kahn Academy qui ne se prête pas aux propriétés des variables aléatoires à densité.

Dans deux groupes, elle est énoncée et démontrée par le calcul intégral. Ce sont les mêmes capsules qui abordent son interprétation concrète, l'une en termes qui rappellent l'idée d'« évènement impossible », l'autre en termes d'événement quasi-impossible. Dans cette dernière, le temps passé sur ce point est important et le temps de pose dans le discours de l'auteur (8 secondes) alors qu'il cherche comment exprimer son interprétation est conséquent.

Dans une capsule, cette propriété est justifiée graphiquement en tant qu'aire d'un segment.

Une des capsules n'énonce pas la propriété mais évite de traiter le cas de l'évènement $(X = a)$ en expliquant que ces évènements n'auraient pas d'intérêt en pratique.

j) Conclusion

La majorité des auteurs des capsules font référence aux connaissances anciennes des élèves concernant les variables aléatoires discrètes. Ils s'appuient sur une caractérisation de l'ensemble des valeurs qu'elles prennent (pour la plupart : fini, ou tel qu'on peut l'énumérer) pour tenter de caractériser les variables aléatoires dites continues.
Dans ce but, le recours à l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ est le plus répandu, sous différentes formes langagières. Les intervalles de $\mathbb{R}$ constituent un support théorique du continu. Bien que les auteurs le sachent, ce n'est pas le cas des élèves. Cependant la présence d'intervalles de $\mathbb{R}$ permet un « glissement », qui peut paraître légitime aux élèves, vers le monde du continu, par le biais des fonctions

(continues pour les élèves) et de leurs représentations graphiques. C'est ce que font les auteurs de deux des trois groupes de capsules qui abordent la notion de fonction de densité.
Nous avons vu dans la partie I. de ce travail que certaines grandeurs agissent comme des supports de l'intuition du continu : ce sont les longueurs, les masses, les durées. Le recours à ces grandeurs est largement utilisé par les concepteurs des capsules pour donner une légitimité à l'incursion des fonctions de densité dans le domaine des probabilités qui appartenait essentiellement au monde du discret, jusque-là, pour les élèves.

Comme nos analyses des parties IV. A. et B. l'ont montré, de nombreux aspects de l'introduction aux lois à densité sont difficiles pour les élèves.
De ce point de vue, deux capsules se distinguent par leur longueur ; ce sont deux des trois capsules qui s'emploient à montrer à ceux qui la visionnent la complexité du sujet. Un troisième groupe de capsules, celui des « Profs du Web », aborde lui aussi cette complexité. Cependant, le contenu s'enchaine de façon claire et rigoureuse, et la durée totale des deux capsules de ce groupe excède de peu celle des autres.
L'analyse des huit groupes de capsules montre que les aspects qui peuvent être source de difficulté y sont remarquables par leur absence dans la majorité d'entre elles. En particulier :

- Cinq groupes de capsules sur les huit n'abordent pas la propriété $P(X = a) = 0$. Seulement deux des trois qui l'abordent tentent d'en donner une interprétation concrète.
- L'infini, le zéro, les nombres négatifs et plus généralement les nombres qui ne sont pas des entiers supérieurs à 1 sont largement absents. Ceci n'est pas sans rappeler les difficultés qu'a connu le développement de ces notions au cours de l'histoire. En particulier, la majorité des auteurs préfère caractériser l'opposition discret/continu par l'opposition fini/intervalles de $\mathbb{R}$ plutôt que l'opposition fini/infini. L'ensemble des nombres réels y joue un rôle d'outil : il permet d'introduire des notions (densité de probabilité, loi à densité) qui font partie du monde du continu.

Une autre grande absente du contenu de ces capsules est la modélisation. Le mot « modélisation » n'est d'ailleurs prononcé par aucun auteur. Les variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sont des objets théoriques, certes ; compte tenu des contenus de programmes officiels, pour des élèves de Terminale, ce sont avant tout des outils de modélisation de phénomènes aléatoires. Pour ne citer que ce qui concerne le sujet des capsules analysées ci-dessus, l'interprétation concrète, dans le cas continu, de l'événement $(X = a)$ ainsi que de la propriété $P(X = a) = 0$, liée à ce que pourrait être un « nombre réel exact », prend son sens dans un contexte de modélisation.

2. Une séance d'introduction aux lois à densité en classe de Terminale S

La séance a eu lieu le 6 mai 2015 au lycée d'Achères dans les Yvelines.
Il s'agit d'une séance de deux heures, dans une classe de Terminale S à petit effectif (16 élèves), à laquelle nous avons assisté. L'enseignante est un professeur agrégé qui a plus de 20 ans d'expérience et qui intervient dans la formation initiale des futurs enseignants de mathématiques.

Une caméra fixe est placée de telle sorte qu'elle enregistre en permanence le tableau blanc, visible en entier, et bien sûr les échanges oraux de l'enseignante et des élèves

C'est au cours de la première heure que l'enseignante procède à l'introduction aux lois à densités, la deuxième heure étant consacrée à la trace écrite de l'exposition de connaissances et à la résolution de quelques tâches de type analytique autour des fonctions de densité. Une transcription intégrale de la première heure de la séance est disponible en annexe 15.
Les citations de l'enseignante ou des élèves, dans ce qui suit ainsi que dans la transcription en annexe figurent en italique.

a) Le déroulement :

Nous allons dans ce paragraphe relater le contenu de la première heure de la séance.
Son format général est celui du cours dialogué : l'enseignante pose des questions aux élèves ; généralement, elle répète ou reformule leurs réponses, puis élabore elle-même ou en pose de nouvelles questions aux élèves.

Nous avons découpé le temps de cette première heure en huit épisodes qui correspondent chacun à différentes notions ou questions abordées.

Épisode 1 - Préambule - Durée 4min
En préambule, l'enseignante explique aux élèves que la présence d'un autre enseignant et de la caméra ne constituent aucun enjeu pour eux, qu'ils ne seront pas évalués sur cette séance.
Elle leur précise qu'il s'agit du dernier chapitre de l'année scolaire, puis note le titre de celui-ci au tableau : « *Lois continues ou lois de probabilité à densité* ».

Épisode 2 - Autour du vocabulaire du titre : continu ; probabilité – Durée 7,5 min.
L'enseignante commence par questionner les élèves sur ce qu'ils connaissent dans ce titre.
Les élèves reconnaissent dans un premier temps le mot « probabilité ». Dans la foulée, un redoublant fait remarquer : « *Densité c'est les aires* ». L'enseignante demande alors aux redoublants de la classe (il y en a quatre) de ne faire appel qu'à des notions vues pendant l'année scolaire en cours.

Le mot « continu » retient ensuite l'attention des élèves ; l'enseignante s'en empare, demande dans quel contexte ils l'ont vu : c'est celui des fonctions. Ils ont retenu l'idée du tracé d'une courbe sans lever le crayon.
L'enseignante rebondit sur cette idée : « *une fonction continue sur un intervalle ça veut dire que sur un intervalle donné on peut tracer la courbe sans trou, sans moment d'arrêt, sans lâcher le crayon* ».

Le deuxième mot sur lequel la classe s'appesantit est « probabilité ». L'enseignante demande aux élèves de donner « *un exemple de situation où on calculerait des probabilités* ». Un élève pense à « *voir l'efficacité du vaccin. Voir si une personne est malade* ». L'enseignante lui demande d'élaborer son propos à partir de : « *on prend une personne au hasard* », puis fait remarquer « *qu'on a une population* », pousse les élèves à ce qu'ils spécifient que la population « est » l'univers. C'est elle qui dit et écrit : « *Donc oméga c'est une population donnée* ».
Elle leur demande : « *Je fais la probabilité de quoi ?* ». Ils répondent : la probabilité de M et celle de $\overline{M}$.
L'enseignante leur demande le vocabulaire associé à M « barre » afin de faire émerger le mot

« contraire ». Le mot « évènement » n'est prononcé que quelques minutes plus tard, l'enseignante insiste au départ sur les mots « univers » et « contraire ».
En réponse à une question de l'enseignante concernant le calcul de ces probabilités, les élèves donnent la formule « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ». L'enseignante précise que « *on modélise quelque chose, pour être dans une situation très simple on suppose qu'on est en situation d'équiprobabilité c'est-à-dire qu'on choisit une personne au hasard* ».

Épisode 3 - Autour du vocabulaire du titre : loi de probabilité - Durée 12,5 min
L'enseignante relance la question du vocabulaire de son titre à propos de « loi de probabilité ».
Une élève pense immédiatement à « *la loi binomiale. Avec par exemple les naissances* ».
L'enseignante demande aux élèves qui se souviennent de la loi binomiale de lever le doigt. Ils sont 11 sur 16. Elle redemande aux élèves d'en donner un exemple.
Un autre en donne un autre exemple : « *Une pièce avec pile ou face* » ; l'élève souligne qu'il n'y a que deux issues possibles et que tout dépend de combien de fois la pièce est lancée. Il choisit deux fois ; l'enseignante explique « *deux fois, j'aurais peut-être pas besoin d'une modélisation comme celle-là* » ; l'élève propose alors 10 lancers.
L'enseignante profite de ce moment pour revoir le vocabulaire autour du schéma de Bernoulli.
Malgré cela, les élèves peinent à formuler qu'il s'agit de calculer des probabilités liées au nombre de piles obtenus à l'issue des 10 lancers, donc à définir une variable aléatoire. Le vocabulaire « variable aléatoire » n'est d'ailleurs prononcé que lorsqu'un élève au tableau vient effectuer des calculs ; il la nomme X et calcule $P(X = 4)$ puis $P(X \geq 5)$. Ce qui permet la révision des formules permettant les calculs de probabilités dans le cadre d'une loi binomiale.

Épisode 4 - Autour du vocabulaire du titre : loi de probabilité. Variable aléatoire discrète – Durée 8,5 min
L'enseignante élargit la question pour demander ce qu'est une loi de probabilité dans le cas général. Après avoir demandé combien de valeurs cette loi binomiale prend, elle souligne que le nombre de valeurs prises est fini : « *qu'est-ce qu'elle a de particulier, elle ne prend qu'un nombre fini, fini de valeurs* ». Elle dit que c'est ce qu'on nomme « variable aléatoire discrète ».

L'enseignante s'appuie ensuite sur le mot « discret » qu'elle vient d'introduire, demande aux élèves ce qu'il veut dire en mathématiques. Une élève dit qu'elle a vu cela en spécialité mathématiques, sans pour autant arriver à en dire davantage. Devant l'absence d'idée des élèves, l'enseignante demande ce qu'est le contraire de « discret ». Réponse d'un élève : « voyant ». Les élèves en connaissent donc bien le sens commun. L'enseignante élabore oralement sur le sens commun du mot « discret » puis relance la question de ce que serait une variable discrète en mathématiques, un élève dit « une variable remarquable », répondant à la question de ce que serait le contraire d'une variable discrète, à supposer que ce sens soit commun.

L'enseignante suggère alors aux élèves de réfléchir à la représentation graphique d'une suite. Une élève se souvient que c'est un nuage de points. L'enseignante rebondit en reprenant l'idée qu'il y a alors des « trous » : « *discret ça veut dire je prends des valeurs ponctuelles, précises, mais entre deux valeurs il y a un trou* » et ajoute : « *et ici, j'ai un nombre fini de valeurs* ». Il est difficile de savoir si le mot « ici » fait référence aux variables aléatoires discrètes prises comme exemple auparavant ou à la représentation graphique d'une suite.
L'enseignante construit un exemple de représentation graphique de suite au tableau ; elle souligne le fait que celle-ci diffère d'une « *représentation continue* » qui, elle, ne présente pas de « trous ». Elle rappelle aux élèves que : « *Parfois dans ce chapitre-là, spontanément, soit vous reliez avec des segments, soit pour certains vous faisiez des courbes représentatives qui passaient par ces points-là mais je vous avais expliqué qu'on n'avait pas le droit parce qu'ici les valeurs prises c'était seulement les valeurs entières* ».

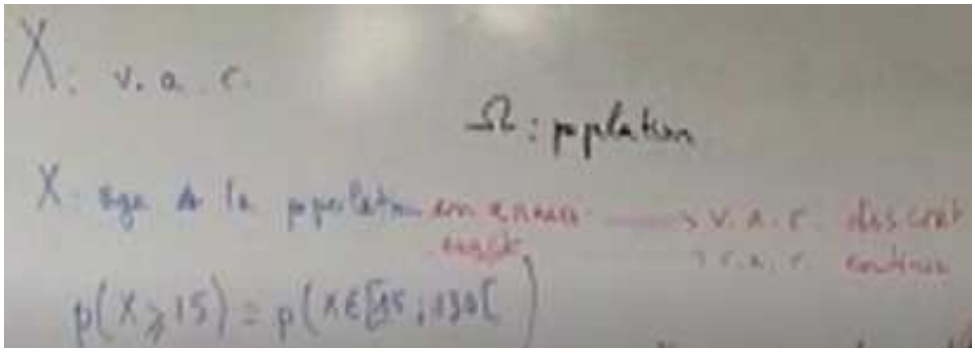
L'enseignante conclut en disant que les variables aléatoires discrètes prennent un nombre fini de valeurs. Elle demande aux élèves « *la négation* », « *le contraire* » de « prendre un nombre fini de valeurs » afin de définir une variable aléatoire continue. La première réponse d'élève est « *Qui prend plusieurs nombres finis de valeurs* ». Cette réponse est certainement inattendue pour l'enseignante. Quelques instants plus tard, elle fait remarquer à l'élève qu'il a « *dit la même chose* ».
Les deux autres réponses d'élèves sont « *elle prend un nombre infini de valeurs* » et « *elle prend toutes les valeurs dans un intervalle* ». L'enseignante acquiesce aux deux réponses et retient la première pour la noter au tableau.

Épisode 5 - Recherche d'un exemple de variable aléatoire continue – Durée 5 min
L'enseignante demande aux élèves de trouver un exemple de variable aléatoire continue. L'une d'elle intervient : « *Par exemple on prend une population. On va prendre le nombre de personnes au-dessus de 15 ans. Entre 15 et plus l'infini, on prend la probabilité de toutes ces personnes.* »
L'enseignante tâche de reformuler l'exemple en termes de valeurs prises par une variable aléatoire. Dans ce but, elle reformule oralement ce qu'a dit l'élève et écrit que X est « l'âge de la population ».
L'enseignante réécrit la question posée par l'élève sous la forme $P(X \geq 15)$, qu'elle demande immédiatement aux élèves de formuler dans le registre des intervalles (donc dans le monde du continu), sous la forme $P(X \in [15, \ldots.)$. Un élève propose 100 comme borne supérieure. L'enseignante fait remarquer que 100 est trop petit, les élèves sont d'accord pour mettre 130.
L'enseignante revient en arrière pour définir « l'univers » : « *Alors quand on dit l'âge de la population, euh (5 secondes) il faudrait affiner un petit peu quand même, quel univers on a finalement, donc on travaille sur une population et euh par exemple euh (4 secondes) oui donc oméga ce serait la population. Pour définir une expérience aléatoire faut qu'on ait au départ euh… un univers qui soit défini et qu'on soit en mesure de définir notre probabilité. Alors ici on dit on va être capable de compter le nombre de personnes* ». La gêne est palpable, en témoignent les poses de quelques secondes dans l'expression de l'enseignante.

Épisode 6 - La variable aléatoire donnée en exemple est-elle discrète ou continue ? – Durée 6,5 min
C'est peut-être ce qui explique la première réponse d'élève à la question suivante de l'enseignante, sur le fait que la variable aléatoire soit discrète ou pas : « *Selon moi c'est discret parce que le nombre il n'est pas infini, ou j'ai mal compris*. »
L'enseignante répond qu'en effet, la population est finie, et relance la discussion sur les valeurs prises par la variable aléatoire. Pour cela, elle mobilise à nouveau le cas fini, dit « discret », et fait cette fois appel au tableau de probabilité, habituellement utilisé en classes de Première et Terminale au lycée pour décrire la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. Puis elle relance la question concernant les valeurs prises par la variable aléatoire prise en exemple.
Un élève répond que la variable aléatoire prend les valeurs 15, 16, etc…
L'enseignante fait sentir que débuter par la valeur 15 est erroné ; les élèves rectifient, l'une d'elle dit « zéro, cent trente », l'enseignante note un intervalle de bornes 0 et 130 au tableau, basculant dans le monde du continu. Une discussion s'ensuit sur le fait d'inclure ou non le zéro. Puis l'enseignante repose la question : cette variable aléatoire est-elle discrète ou continue ? Les élèves discutent entre eux et ne sont pas d'accord.
Un élève qui soutient que la variable aléatoire est discrète explique que les âges sont des entiers entre 0 et 130. D'autres élèves pensent qu'il y a d'autres âges possibles (une élève dit : « *on peut avoir 15 ans et demi, 15 ans trois quarts* »).
L'enseignante fait remarquer que l'âge peut être donné en années, en mois, en jours etc. : « *c'est pas tout à fait 10 ans et demi, c'est 10 ans et tant de mois et tant de jours etc.* ». Le « etc. » peut sous-entendre la divisibilité du temps à l'infini.
L'enseignante pose à nouveau la question. La réponse d'un élève est que « *ça dépend de comment on compte* », il dit qu'on doit commencer par choisir une unité de mesure.
L'enseignante convient que si la réponse est en années (comprenons en nombre entier d'années), la variable aléatoire est discrète. Mais si « *je donne la valeur de l'âge exact, donc ça veut dire que moi j'ai en années, les mois, éventuellement les jours etc., à ce moment-là j'ai n'importe quelle valeur de*

l'intervalle qui peut être prise mais au sens tous les nombres qui vont être décimaux. » L'enseignante fait donc référence à l'existence d'une valeur « exacte » de l'âge et à ce que cette valeur peut être n'importe laquelle dans un intervalle (de $\mathbb{R}$). Pour fixer les idées des élèves, elle fait appel à « tous les décimaux » puis termine par un rappel du fait que dans tout intervalle de $\mathbb{R}$ il y a une infinité de valeurs. Ce dernier argument semble convaincre les élèves.

Pendant tout ce temps, l'enseignante prend des notes au tableau de ce qui est dit. En voici la trace à la fin de l'épisode 5 :



L'enseignante y a écrit que la variable aléatoire X est discrète, si l'*« âge de la population* » est exprimé « *en années* » ; ou continue si cet âge est « *exact* ».

Épisode 7 - Loi de probabilité, cas continu : aire sous une courbe – Durée 6 min

L'enseignante considère que le temps est venu de clore cette introduction ; il reste à définir une loi de probabilité dans le cas continu.

Elle commence par demander comment on remplit le tableau donnant la loi de probabilité dans le cas discret. Puis elle pose les questions qui permettent de revoir qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, ainsi que la formule dans le cas discret : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Elle demande alors ce que pourrait bien être une loi de probabilité dans le cas continu. La réponse vient d'un redoublant : « *c'est une surface* ». Elle lui demande pourquoi. L'élève répond en termes de nombre de valeurs dans un intervalle.

L'enseignante préfère passer sur cette réponse et avancer. Elle convoque le registre graphique, trace les deux axes d'un repère, explique qu'il est possible de représenter la situation de l'étude de l'âge de personnes dans une population par un histogramme. Elle met des graduations en abscisses : 15, 16… Puis elle dit qu'il n'y a pas d'axe vertical dans le cas d'un histogramme et efface l'axe des ordonnées.

Des élèves se souviennent qu'il y a une question de proportionnalité dans un histogramme. L'enseignante dessine un petit rectangle à droite du graphique en disant qu'il représente une unité d'aire. Puis elle dessine un histogramme possible et explique que l'aire de chaque rectangle correspond à une probabilité.

Voici l'intégralité de l'échange qui suit :

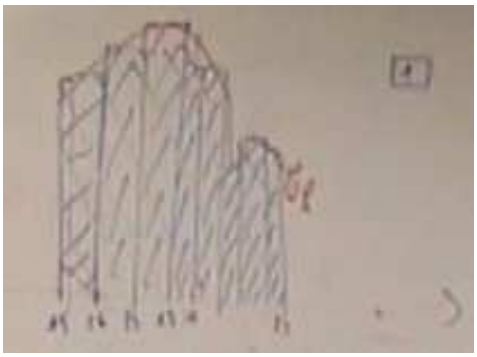
> ***Enseignante :*** *Sur l'histogramme, je peux penser à une histoire d'aire et donc du coup qu'est-ce qu'on va avoir comme idée pour passer à la loi continue ?*
> ***Un élève :*** *Une intégrale*
> ***Enseignante :*** *On va penser à une intégrale. Pourquoi y a un lien entre intégrale et aire ?*
> ***Un élève :*** *Parce que l'intégrale c'est l'aire sous la courbe.*
> ***Enseignante :*** *C'est l'aire sous la courbe. Il y a une courbe ici ?*
> ***Plusieurs élèves :*** *On peut la tracer…*

L'enseignante utilise ainsi l'histogramme pour souligner la correspondance entre probabilités et aires ; puis finalement les mots (ou les notions) d'aire et de continu mènent à des aires sous « la » courbe donc à une intégrale.

Les élèves semblent d'ailleurs convaincus qu'on peut tracer « cette » courbe.

Épisode 8 - Loi de probabilité, cas continu : fonction de densité – Durée 6,5 min

L'enseignante tente malgré tout un début de preuve de l'existence de « la » courbe en expliquant qu'on pourrait affiner la subdivision sur l'axe des abscisses : *« je pourrais, en prenant des intervalles beaucoup plus petits, faire apparaitre ici un semblant de courbe* ».



Le dessin que l'enseignante a alors tracé au tableau blanc figure ci-contre.

Elle demande aux élèves les propriétés graphiques de cette courbe.
La première réponse est « continue ». L'enseignante répond : « *la fonction elle est continue c'est-à-dire que j'ai pas de saut, ici, sur l'axe des abscisses, je peux prendre toutes les valeurs possibles, et ma courbe, elle ne va pas s'arrêter pour repartir ailleurs. Donc, OK, ma fonction est continue* ».
La positivité de la fonction, puis la probabilité calculée par intégration sont rapidement amenés.
L'enseignante conclut par un : « *magique !* »
Elle résume ce qu'est une fonction de densité définie sur un intervalle I et amène, par analogie avec le cas discret, la propriété que l'intégrale sur l'intervalle I de cette fonction vaut 1.
Elle termine en faisant récapituler le tout par une élève.

b) Éléments d'analyse :

Cette introduction aux lois à densité est conçue sous forme de cours dialogué. La démarche de l'enseignante consiste essentiellement à s'appuyer sur les connaissances anciennes des élèves.
Dans cette optique, son point de départ est le vocabulaire du titre du chapitre, qu'elle note au tableau : « *Lois continues ou lois de probabilité à densité* ». Ce titre est double, il lui permet d'y faire figurer à la fois les mots « continu », « lois de probabilités », « densité », qui font l'objet de questionnements.
Elle sollicite aussi les élèves afin qu'ils fournissent des exemples, intra-mathématiques ou « concrets », des notions dont il est question.

Dans le cadre de ce travail, nous allons bien entendu analyser la façon dont le discret et le continu sont abordés au cours de la première heure de cette séance : quelles propriétés de l'un et de l'autre sont convoquées, sont-ils présentés en opposition l'un à l'autre et dans l'affirmative, laquelle.
La modélisation des situations « concrètes » aléatoires que proposent les élèves est source de nombreuses questions et difficultés, liées au caractère aléatoire de ces situations ainsi qu'au caractère discret ou continu qui leur est attribué. C'est ce que nous allons analyser dans un second temps.
Nous nous poserons enfin la question de savoir s'il est judicieux, pour l'introduction aux lois à densité en classe de Terminale, de s'appuyer sur les connaissances des élèves, dans le cadre d'un cours dialogué ne comportant pas de support de type « activité d'introduction » construite en amont par l'enseignant (ou un manuel ou toute autre ressource que l'enseignant peut s'approprier).

i. Le discret et le continu dans cette introduction

Le discret et continu sont abordés de façon imbriquée.

Dans un premier temps, l'enseignante s'appuie sur le mot « continu » qui est reconnu par les élèves dans le titre qu'elle donne au chapitre, dès l'épisode 2. Ceux-ci le connaissent, dans le contexte des mathématiques, plus particulièrement dans celui des fonctions. L'enseignante rebondit sur l'idée de tracé de courbe sans lever le crayon, rappelée par un élève, pour y souligner l'absence de « trous ». Elle reprendra cette caractérisation du continu, par négation, pour décrire le discret.

Elle emploie ensuite le mot « discret » au début de l'épisode 4, pour qualifier les variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs : après avoir demandé combien de valeurs la loi binomiale de l'exemple traité dans l'épisode 3 prend, elle souligne que ce nombre est fini : « *qu'est-ce qu'elle a de particulier, elle ne prend qu'un nombre fini, fini de valeurs* ». Remarquons que ceci n'a rien de particulier pour les élèves, qui n'ont rencontré jusque-là, dans leur cursus de lycéen, que des variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs : tout au plus ont-ils pu rencontrer une loi géométrique tronquée.
Questionnés par l'enseignante, les élèves reconnaissent le mot « discret », dans son usage commun, qu'elle développe à l'oral. Il est probable que son intention soit de souligner que les mathématiques n'en font pas le même usage. Il n'est pas certain que cette intention soit perçue par les élèves puisque l'un d'eux propose alors comme « contraire » d'une variable discrète en mathématiques… une « *variable remarquable* ». À ce moment, un apport sur l'étymologie du mot « discret », serait approprié. Il permettrait de concilier les sens commun et mathématique et de lever un possible malentendu révélé par la proposition de l'élève.

Devant l'absence de réponse des élèves, l'enseignante fait appel à la représentation graphique des suites en tant qu'exemple du « discret » dans le sens mathématique. Elle souligne son opposition avec le continu tel qu'il est décrit dans l'épisode 2, en disant que : « *entre deux valeurs, il y a un trou* ».
Elle invoque le fait « *qu'on n'avait pas le droit* » de relier les points de la représentation graphique d'une suite « *parce qu'ici les valeurs prises c'était seulement les valeurs entières* ». Ainsi, comme au début de l'épisode 4, l'enseignante aiguille les élèves vers une opposition entre le discret et le continu qui porte sur l'ensemble des « *valeurs prises* ». Deux notions se trouvent alors en concurrence pour définir le discret : le fini et l'infini dénombrable exemplifié par $\mathbb{N}$, l'ensemble de définition de la suite.

À la fin de l'épisode 4, alors que l'enseignante a attribué à nouveau le qualificatif de « discret » aux variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs, elle demande la « *négation* », le « *contraire* » de « *qui prend un nombre fini de valeurs* ».
Un élève propose « *plusieurs nombres finis de valeurs* ». Il s'est basé sur le mot « un » et non sur le mot « fini » pour construire une affirmation sémantiquement « contraire ». La signification du mot « fini » est-elle claire pour les élèves ? Si une personne de la profession comprend que la réunion d'un nombre fini d'ensembles de cardinaux finis est fini, qu'en est-il des élèves ? Étant donné le rôle important que la notion de « fini » joue dans cette introduction, son sens mérite d'y être approfondi.

L'affirmation « contraire » proposée par un autre élève est « *elle prend un nombre infini de valeurs* » ; l'enseignante note alors au tableau qu'une variable aléatoire continue prend un nombre infini de valeurs.
Ceci vient pourtant contredire l'exemple d'ensemble discret pris juste avant par l'enseignante : les points de la représentation graphique d'une suite sont en nombre infini. Cependant, aucun élève n'en fait la remarque.
Par ailleurs, les variables aléatoires continues ne sont pas caractérisées par le fait qu'elles prennent un nombre infini de valeurs, comme en témoigne la loi géométrique par exemple.

Presque simultanément, une élève avait proposé la formulation « *prend toutes les valeurs d'un intervalle* » comme « contraire » de « *prend un nombre fini de valeurs* ». Cette proposition était plus proche du continu mathématique que la précédente, mais plus éloignée de l'opposition fini/infini apparemment visée par l'enseignante.
Celle-ci basculera cependant vers le registre des intervalles à deux reprises, au cours des épisodes 5 et 6 :

- Elle traduit l'événement « $X \geq 15$ » suggéré par un élève par « $X \in [15, \ldots$ ».
- Elle traduit un « *zéro, cent trente* », lancé par un élève concernant les valeurs des âges en années, par l'écriture d'un intervalle de bornes 0 et 130.

Au début de l'épisode 5, l'enseignante demande aux élèves de trouver un exemple de variable aléatoire continue. Une élève intervient : « *Par exemple on prend une population. On va prendre le nombre de personnes au-dessus de 15 ans. Entre 15 et plus l'infini, on prend la probabilité de toutes ces personnes.* »
Il est intéressant de noter que cette élève a retenu l'idée de l'infinité des valeurs prises par la variable aléatoire ; c'est certainement ce qui lui a fait spécifier un intervalle infini en étendue, pourtant peu compatible avec la durée de la vie humaine. On peut pour le moins se demander si elle conçoit les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ comme des ensembles infinis.

À la fin de l'épisode 6, l'argument qui emporte l'adhésion des élèves sur le fait que la variable aléatoire donnant l'âge d'une personne prise au hasard dans une population donnée est continue, est que dans tout intervalle (de $\mathbb{R}$, borné ou non), il y a une infinité de valeurs.
Les intervalles de $\mathbb{R}$ jouent donc, du côté des élèves, un rôle central en tant que support du continu dans cette séance d'introduction, non pas parce que ce sont des objets sans « trou » et sans « saut », mais parce que, bornés ou non, ils ont un nombre infini d'éléments.

Nous venons de voir plusieurs raisons pour lesquelles on peut malgré tout se demander ce que veulent dire « fini » et « infini » pour un élève. Analysons une autre intervention d'élève :
À la 46e minute, au cours de l'épisode 7, l'un d'eux dit : « … *Parce qu'il y a un nombre infini de valeurs. Mais quand même, l'intervalle ben il est défini. Par exemple là comme c'est entre 15 et 130, on sait que le minimum ce sera 15 et le maximum c'est 130. Donc on pourra quand même délimiter le nombre de valeurs. Mais… c'est comme une fonction quoi. Une fonction elle prend plein de valeurs mais on peut délimiter son intervalle*. ». L'élève a compris que dans un intervalle borné il y a « *plein de valeurs* ».
Pour lui, comme pour celui qui parlait de « *plusieurs nombres finis de valeurs* », et en cohérence avec la représentation graphique (partielle dès qu'elle est « dessinée » à la main ou sur un écran) d'une suite, « infini » serait synonyme de « beaucoup »... Et le continu serait « beaucoup » d'éléments dans une « étendue » bornée ou non.

Au cours de l'épisode 8, c'est l'aspect « sans saut » du continu que l'enseignante convoque. Elle a alors tracé une courbe « sans lever le crayon » et qui « épouse » l'histogramme. Elle explique : « *la fonction elle est continue c'est-à-dire que j'ai pas de saut, ici, sur l'axe des abscisses, je peux prendre toutes les valeurs possibles, et ma courbe, elle ne va pas s'arrêter pour repartir ailleurs. Donc, OK, ma fonction est continue* ». L'absence de « saut » dans l'intervalle $[0; 130[$ qui est l'ensemble sur lequel la fonction est définie se transfèrerait à une absence de « saut » sur la courbe. Ce transfert semble aller de soi pour les élèves, tout du moins aucun d'eux n'a fait de remarque.
Un travail sur des fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ et présentant des discontinuités peut se faire dès la classe de seconde (sans pour autant parler de continuité). Il permettrait peut-être d'enrichir les conceptions qu'ont les élèves des représentations graphiques de fonctions définies sur un intervalle ; les enseignants pourraient être moins tentés de simplifier leur discours auprès des élèves au point d'inclure des déductions fausses qui ont l'air à première vue « d'aller de soi ».

Plusieurs supports intuitifs du continu sont donc présents durant cette séance : les aspects « sans saut » et « sans trou », le tracé sans lever le crayon.
On y trouve aussi des aspects mathématiques, sous forme d'oppositions discret/continu : l'opposition fini/infini est mise en avant par l'enseignante, appuyée par l'opposition fini/intervalle de $\mathbb{R}$.
Cependant, les connaissances des élèves sur ces notions semblent être trop lacunaires, voire erronées, pour qu'un enseignant puisse les convoquer sans aggraver leurs conceptions erronées et sans amplifier l'impression que les choses en math « vont de soi », amplifiant leur côté « magique ». Il nous semble que, même au stade de pseudo-concepts, et dans le cadre des programmes en cours dans le secondaire, le fini, l'infini, le continu peuvent être abordés en évitant ces écueils ; à condition que les enseignants soient conscients des enjeux de ces notions au lycée et qu'ils aient la possibilité d'y consacrer du temps avec leurs élèves.

ii. La place et les enjeux de la modélisation dans cette introduction

La construction d'exemples par les élèves pose des difficultés liées à la modélisation.

Où est l'expérience aléatoire ?
Les élèves imaginent des situations concrètes qui ne sont pas formulées en termes d'aléatoire. Cela demande un travail de reformulation important de la part de l'enseignant, qui ne le fait pas systématiquement – Par manque de temps ? Par manque de vigilance, de connaissances en probabilités ?
Une variable aléatoire est pour eux « un nombre de… ». Ainsi, au cours de l'épisode 5, un élève dit **:** « *Par exemple on prend une population. On va prendre le nombre de personnes au-dessus de 15 ans. Entre 15 et plus l'infini, on prend la probabilité de toutes ces personnes* ». Ce que l'enseignante résume comme suit : la variable aléatoire serait « l'âge de la population ». Elle tient à définir un univers « oméga » mais ne définit pas d'expérience aléatoire.
À la fin de l'épisode 5, nous avons noté la gêne de l'enseignante : elle marque des poses de quelques secondes dans son expression, alors qu'une variable aléatoire X est définie en tant que « l'âge d'une population ». Elle sent qu'il manque des choses et cherche à définir « l'univers », sans pour autant définir une expérience aléatoire.
Notons que nous avons déjà constaté cette absence dans un certain nombre d'exercices de manuels et de Baccalauréat, ainsi que dans les capsules sur les probabilités continues en Terminale.
Dans l'exposition de connaissances qui suit l'introduction aux lois à densité de cette séance, nous avons aussi noté ce manque de définition d'une expérience aléatoire. Un élève y propose comme exemple de variable aléatoire continue le nombre de tours de la terre autour du soleil, dans une durée donnée ; l'enseignante l'écarte au motif que cette variable aléatoire ne prend pas une infinité de valeurs. Les exemples proposés alors par l'enseignante sont la durée de vie de téléphones portables, le temps passé sur un jeu vidéo.

Au cours de l'épisode 2, les élèves rappellent la formule « nombre de cas favorable sur nombre de cas possibles » et à cette occasion, l'enseignante parle d'expérience aléatoire et de modèle : « *on modélise quelque chose, pour être dans une situation très simple on suppose qu'on est en situation d'équiprobabilité c'est-à-dire qu'on choisit une personne au hasard* ».
Dans le reste de cette séance, tout se passe comme si des données statistiques (effectifs ou fréquences) et la donnée d'une loi de probabilité étaient équivalentes. Les statistiques relèvent de l'observation ; les probabilités de la théorie et supposent la définition d'une expérience aléatoire. Le passage de données statistiques à une loi de probabilité se fait par le choix d'un modèle probabiliste, l'équiprobabilité dans cette séance, qui reste souvent implicite.

Les valeurs prises par une variable aléatoire
Le fait qu'une variable aléatoire puisse constituer un modèle de la réalité est éloigné des connaissances des élèves.
Dans le cas discret au lycée, les valeurs prises par une variable aléatoire ne sont généralement pas le produit d'une modélisation. Considérons les variables aléatoires discrètes prises comme exemple au cours de cette séance : elles prennent pour valeurs le nombre de piles lors de dix lancers successifs d'une pièce de monnaie ; l'âge en nombre entier d'années d'une personne choisie au hasard dans une population. Les ensembles formés par ces valeurs sont finis et ne peuvent faire l'objet de discussions ou de malentendus.

Le mot « modélisation » fait certes l'objet d'explications dans les manuels lors de l'introduction aux lois binomiales. Mais qu'en est-il du sens que leur donnent les élèves, bien souvent perdus entre les tirages avec remise, les épreuves et les schémas de Bernoulli ? Ces explications sont certainement exposées aux élèves par un certain nombre d'enseignants. Dans la séance d'introduction analysée ici, le mot « modélisation » est d'ailleurs prononcé une fois, par l'enseignante, au moment de l'étude de l'exemple de loi binomiale « *deux fois, j'aurais peut-être pas besoin d'une modélisation comme celle-là* ».

Quant à lui, le modèle d'équiprobabilité est bien connu des élèves puisqu'il permet d'effectuer une importante partie des calculs de probabilités au lycée. Les élèves connaissent le sens du mot « équiprobabilité », connaissent-ils celui du mot « modèle » ?
Pour résumer, les élèves peuvent effectuer, sans invoquer de modèle, les tâches habituelles de Première et de Terminale concernant les lois de probabilité portant sur des univers discrets et des variables aléatoires discrètes.

Par contre, comme nous l'avons vu dans la partie IV A, les questions de modélisation se posent d'emblée lors de la mobilisation de lois à densité.
Nous en avons un exemple, au cours de la séance analysée ici, lorsque la question de l'ensemble des valeurs prises par l'âge de personnes au sein d'une population est discutée. La question est cruciale car elle constitue le cœur de l'introduction visée par l'enseignante : celle des valeurs prises par une variable aléatoire continue.
La population étant finie, (ce que l'enseignante traduit à la fin de l'épisode 5 par « *on va être capable de compter le nombre de personnes* »), l'ensemble des âges des personnes de cette population, à un instant donné, est donc fini. Ce n'est donc pas le fait que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire soit fini ou infini qui est en jeu, mais que la variable aléatoire peut prendre (potentiellement) toute valeur d'un intervalle borné ou non – ou, ce qui peut être suffisant en tant que pseudo-concept pour les élèves, un nombre infini de valeurs d'un intervalle borné.

Par ailleurs, pour certains élèves présents, il est évident que l'âge se compte en nombre entier d'années. L'un d'eux convient ensuite qu'on peut le mesurer en mois, en jours… Puis il dit : « *On peut pas compter à la fois en années et en jours. On choisit une valeur, on choisit une unité de, de mesure* ! ». Deux choses s'entendent dans son intervention :

- Il pense, de façon pertinente, que quelle que soit l'unité de mesure, l'ensemble des valeurs que la variable aléatoire peut prendre est discret dès lors que la mesure est entière ; ce qui est le cas concrètement lorsqu'il s'agit de l'âge d'une personne.
- Il n'envisage pas un âge qui prend des valeurs mesurées en nombre entiers d'années, de mois, de jours, de minutes, et ainsi de suite… ou encore par un nombre réel dans l'une de ces mesures. Ceci aussi est pertinent du fait que le phénomène est nécessairement discrétisé par sa mesure.

L'enseignante intervient alors : « *Si je dis que x c'est l'âge de la population en année, alors ça va être discret* ». Puis : « *Si par contre, je dis pas, je donne la valeur de l'âge exact, donc ça veut dire que moi j'ai en années, les mois, éventuellement les jours etc., à ce moment-là j'ai n'importe quelle valeur de l'intervalle qui peut être prise mais au sens tous les nombres qui vont être décimaux* ».
En cohérence avec son approche du continu décrite supra, l'enseignante tâche de jouer sur l'opposition nombres entiers/nombres décimaux qui, dans un intervalle borné, sont respectivement en nombre fini et en nombre infini. Remarquons que la correspondance entre une durée mesurée en années, mois, et ainsi de suite… et la même durée mesurée en nombre décimal d'années est loin d'être toujours possible (à moins de considérer des parties décimales illimitées).

L'enseignante invoque un « *âge exact* ». Nous avons vu d'autres personnes invoquer un « poids exact », une « taille exacte » dans des capsules vidéo qui tâchent de donner du sens à ce qu'est une variable continue.
Dans les faits, nos appareils de mesure permettent de mesurer un âge avec un degré de précision fini ; alors que la durée peut être considérée comme continue d'un point de vue théorique ; ne faudrait-il pas le dire aux élèves ?
Finalement, le fait qu'un âge soit une variable discrète ou continue apparait, dans le cadre de cette introduction, être un faux débat : c'est le modèle utilisé pour l'étudier qui est discret ou continu. Et le modèle ne s'impose pas par le contexte « concret » proposé par l'élève.

La conception (approximative bien sûr) du continu qui semble se dégager de cette introduction – le continu c'est « beaucoup » d'éléments dans une « étendue » bornée - pourrait servir à aborder les questions de modélisation : il est légitime d'envisager une modélisation continue d'un phénomène

quand la variable prend un « grand » nombre de valeurs. Ce qui est le cas de l'âge d'une personne si celui-ci est mesuré avec une « grande » précision.

Aborder la modélisation dans cette introduction permet aussi à l'enseignant de tenir un discours mathématiquement cohérent, par exemple sur le fait que le passage d'un histogramme à la courbe d'une fonction continue est le fruit d'une modélisation et non d'un passage à la limite de densités de fréquences obtenues en subdivisant les classes d'une série de données statistiques de façon de plus en plus fine.

iii. L'enseignante construit son introduction aux lois à densité à partir des connaissances anciennes des élèves en se basant essentiellement sur le vocabulaire qui lui est associé. Est-ce approprié ?

Laisser les élèves trouver un exemple de probabilité puis un exemple de variable aléatoire prend un temps conséquent (17 minutes soit près d'un tiers du temps consacré à cette introduction).
L'exemple de probabilité qu'ils donnent permet certes de revoir un peu de vocabulaire (le mot « univers », le mot « contraire » lié à un évènement) ; ces révisions restent cependant éloignées de l'objectif de la séance d'introduction. D'ailleurs, l'exposition de connaissances qui suit la première heure de la séance n'inclue finalement ni l'un ni l'autre de ces mots.
Les élèves donnent comme exemple de loi de probabilité une loi binomiale ; celle-ci occupe visiblement le terrain de la mémoire de la classe. Elle a en effet été étudiée en classe de Première, puis revue au cours de l'année de Terminale. La révision des formules de calcul de probabilités dans ce cas est néanmoins, elle aussi, éloignée du sujet de la séance.

Le jeu de questions/réponses orchestré par l'enseignante est faussé par la présence de redoublants :

- Au début, l'un d'eux intervient en disant : « *densité c'est les aires* ». Le mot « densité » ne sera pas explicité par la suite, si ce n'est de la part de l'enseignante pour en donner, en toute fin de cette introduction, une définition dans le cadre des lois de probabilités à densité ;
- Environ trois quarts d'heures plus tard, au moment où l'enseignante aborde la notion de loi de probabilité dans le cas continu - qui constitue le sujet de l'avant-dernier épisode, l'un d'eux en dit que « *c'est une surface* » ; l'enseignante lui demande alors pourquoi, l'élève n'apporte pas de réponse ;
- Peu après, le passage de l'aire de l'histogramme à l'intégrale (d'une fonction continue) est suggéré immédiatement par un élève : un redoublant ?

L'enseignante a demandé à ces élèves, dès leur première intervention, de « faire comme si » ils ne connaissaient pas le cours de leur année précédente. L'exercice est difficile, les élèves ne sont pas nécessairement conscients d'où et de quand proviennent leurs connaissances.

Les élèves de Terminale ne connaissent pas, *a priori*, la signification du mot « discret » en mathématiques (à moins qu'un de leurs l'enseignants de lycée leur ait fait travailler la notion de discret). L'enseignante de la séance observée dit avoir profité de l'étude des suites avec cette classe pour y introduire cette notion. Les connaissances des élèves sur le discret se sont cependant révélées non mobilisables. Leur connaissance du sens commun du mot « discret » (en l'absence d'explications sur l'étymologie de ce mot) nous semble avoir été plus un frein qu'un atout.

La connaissance des élèves sur la signification du mot « continu » est limitée à l'intuition d'une fonction dont on peut tracer la une courbe sans lever le crayon. Bien que la remarque soit faite dès le début de la séance par les élèves, cela ne sera utilisé que plus tard, pendant l'épisode 7.

C'est alors que l'enseignante effectue un « glissement » de l'objet histogramme à l'aire de l'histogramme ; puis de l'aire de l'histogramme à l'intégrale qui est l'aire sous une courbe. Les courbes que les élèves de Terminale rencontrent représentent quasi-exclusivement des fonctions continues : le tracé d'une courbe de fonction continue s'impose par associations de mots et d'idées.

Ce « glissement » s'affranchit du passage de l'histogramme en tant qu'outil de représentation de densités de fréquences d'un caractère continu, dans le domaine des statistiques, à une représentation de densité de probabilité d'une variable aléatoire. En effet, l'expérience aléatoire qui consiste à choisir une personne au hasard dans la population mène à considérer la variable aléatoire donnant son âge. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire peut être modélisée par la fonction de densité représentée par les « parties supérieures des rectangles de l'histogramme ». La fonction ainsi obtenue est constante par morceaux. À part dans des cas particuliers, elle présente des points de discontinuité quelles que soient les amplitudes des classes.
Et en tout état de cause, il n'existe pas de fonction continue prenant un nombre fini de valeurs (non égal à 1) sur un intervalle de $\mathbb{R}$. La définition intuitive de la continuité d'une fonction donnée habituellement en Terminale – fonction dont la courbe peut se tracer sans lever le crayon - peut suffire à le comprendre, intuitivement bien sûr.

Comme nous l'avons vu dans la partie IV A, cette fonction continue est un modèle continu d'un modèle continu par morceaux. Elle semble pourtant aller de soi tant pour l'enseignante que pour les élèves.
L'utilisation d'une « activité d'introduction » construite autour d'un exemple de relevés statistiques et qui soulève les questions de modélisation en jeu dans ce « glissement » d'un histogramme à une fonction continue nous semble incontournable – si le but de cette introduction est de donner du sens à la notion de loi à densité et aux notions connexes, ainsi qu'aux tâches d'études de phénomènes aléatoires que les élèves ont à résoudre par la suite.

L'histogramme est certes un excellent point d'appui pour l'introduction aux lois à densité.
Au cours de la séance que nous analysons ici, l'enseignante prend l'initiative de tracer un histogramme fictif ; les élèves se souviennent que les histogrammes sont liés à une question de proportionnalité. Il est difficile de savoir, par le seul visionnement de la vidéo, si les souvenirs qu'il en ont sont davantage conséquents.
L'enseignante dessine ensuite une unité d'aire égale à 1, nettement plus petite que l'aire totale de l'histogramme qui, comme elle le souligne oralement, est égale à 1 ; elle efface l'axe des ordonnées en expliquant qu'il n'y en a pas dans le cas des histogrammes, se privant ainsi de la possibilité d'introduire le mot « densité ». Cependant, elle prend le soin de représenter des classes d'amplitudes variées.
Comme nous l'avons déjà souligné dans la partie IV A, bien qu'il figure au programme de seconde de 2010, l'histogramme est un objet peu étudié, les enseignants et par conséquent les élèves ont des connaissances lacunaires à son propos. Il n'est ici nullement question de remettre en cause les compétences des enseignants en mathématiques, mais ceci pose la question de leurs formations initiale et continue, particulièrement lors de changements de programmes incluant des branches des mathématiques qu'ils n'ont pas rencontrées lors de leur formation universitaire.

iv. Conclusion

Les connaissances disciplinaires et didactiques des enseignants ne sont pas toujours suffisantes ou adéquates, cette introduction aux lois à densité en est, à nos yeux, une illustration. Les certifiés et les agrégés de mathématiques sont nombreux à avoir connu un parcours universitaire essentiellement intra mathématique ; les occasions de rencontrer des problèmes consistant à étudier des phénomènes aléatoires qui nécessitent une modélisation discrète ou continue sont alors rares.

Même si des analogies méritent d'être soulignées entre lois discrètes et lois continues, le passage des unes aux autres se fait avec bien plus que des associations d'idées basées sur du vocabulaire et des « glissements » dans le cadre graphique. Associations d'idées et glissements qui, comme le souligne l'enseignante, font paraitre ce passage « *magique* » aux yeux des élèves (et peut-être à un enseignant peu formé dans ce domaine).

Ainsi, et pour les diverses raisons évoquées supra, dans le cadre de cette introduction aux lois à densité, le cours dialogué se basant sur les connaissances anciennes des élèves présente un intérêt limité, d'autant plus qu'il est y pavé de difficultés pour l'enseignant.

Il nous parait par conséquent préférable de proposer des tâches davantage construites aux élèves, dans lesquelles ils ont à manier des données, à construire des histogrammes, et dans lesquelles la transition des statistiques aux probabilités est explicite et les questions de modélisation peuvent être posées.

La construction de tâches en amont, par l'enseignant, peut lui permettre, dans cette introduction aux lois à densité qui est délicate, de s'emparer davantage des difficultés qu'elle pose et de ne pas se lancer dans la construction d'une telle notion en comptant sur ce qui est « déjà là » chez les élèves, un « déjà là » trop peu construit pour servir de point d'ancrage.
Si ses connaissances ne lui permettent pas d'en construire une lui-même - ou s'il n'en a pas le temps, il peut s'emparer d'une « activité d'introduction » élaborée par des personnes possédant des compétences à la fois disciplinaires et didactiques sur la notion abordée. Si les enjeux disciplinaires et didactiques y sont suffisamment mis en avant, ce processus peut participer à la formation continue de l'enseignant.

3. Conclusion de la partie IV C

Les enseignants s'appuient presque tous sur les connaissances anciennes des élèves concernant les variables aléatoires discrètes. Ils caractérisent celles-ci par le fait qu'elles prennent un nombre fini de valeurs, que l'on peut les « compter ». Le passage à des lois continues se fait par le biais des intervalles de $\mathbb{R}$ qui permettent aux auteurs de « glisser » vers les fonctions, continues pour les élèves, et leurs représentations graphiques. L'opposition discret/continu repose essentiellement sur la distinction « fini / intervalle de $\mathbb{R}$ » ; on trouve la distinction « fini / infini » dans des capsules, elle prédomine dans la séance en classe tout en coexistant avec la première distinction.

Les analogies, les ruptures entre variables aléatoires discrètes et continues sont globalement peu abordées.

L'histogramme est sollicité par l'enseignante en classe ainsi que par une des capsules du site « Le prof du Web ». Elle l'utilise pour « glisser » de l'histogramme à une courbe de fonction continue et d'une probabilité calculée par l'aire de rectangles de l'histogramme à une probabilité calculée par une intégrale.
Le site « Le prof du Web » utilise la signification du mot « densité » en géographie pour identifier la grandeur représentée en ordonnée sur un histogramme représentant des salaires dans une entreprise. L'auteur passe de cet histogramme à une courbe de fonction de densité continue représentant les salaires dans le monde, sans toutefois préciser qu'il s'agit alors d'un modèle.

La modélisation est d'ailleurs tout à fait absente de ce que nous avons analysé. Pourtant, les exemples concrets appuient les différents propos, faisant appel à des grandeurs dites « continues ». La grandeur durée est d'ailleurs proposée comme exemple par des élèves dans la séance que nous avons observée, sous forme de l'âge d'une personne ; le fait qu'elle soit discrète ou continue est source de discussions intenses parmi les élèves ; l'abord de la question de la modélisation aurait pu contribuer à répondre à leurs interrogations.

D. Conclusion de la partie IV

Les variables aléatoires, qu'elles soient discrètes, à densité (ou autre), ont pour point commun d'être caractérisées par leur fonction de répartition. Par ailleurs, des analogies existent entre les variables aléatoires discrètes et à densité. Elles tiennent principalement au type de sommation (discrète dans le premier cas, par une intégrale dans le second). L'aspect de sommation infinie de l'intégrale n'étant plus au programme de Terminale, l'abord de ces analogies est fortement dépendant de ce que l'enseignant décide d'exposer à ses élèves.

Nous avons vu supra dans la partie A que certaines analogies présentent des ruptures alors que d'autres sont erronées. Une propriété des variables aléatoires à densité y joue un rôle essentiel : pour tout réel a, $P(\{X = a\}) = 0$; alors que les lois discrètes sont caractérisées par la liste des $\{P(\{X = x_i\}), i \in E\}$ où $E \subset \mathbb{N}$.
De ce fait, la notion d'événement impossible, familière aux élèves dans le cas discret, pose des difficultés d'interprétation dans le cas des lois à densité ; par ailleurs, on somme des probabilités nulles et le résultat n'est pas nul.
Cela n'est pas sans rappeler les errements rencontrés au cours de l'antiquité autour de la notion de point : le point n'a pas d'étendue, alors existe -t-il ? Comment les grandeurs continues pourraient-elles être formées de points ?
Aujourd'hui, les programmes et les enseignants (d'après les analyses de capsules et d'une séance en Terminale S) évitent les notions problématiques de point, d'infini ; les nombres entiers strictement positifs sont privilégiés par les enseignants et dans les épreuves de Baccalauréat. Nous ne pouvons que rapprocher l'évitements des autres nombres avec le temps long qu'ils ont pris pour émerger et être acceptés au cours de l'histoire.

Dans ces conditions, l'abord du continu, tel qu'observé dans les manuels, les capsules de vidéo et la séance en Terminale S, repose sur deux supports :

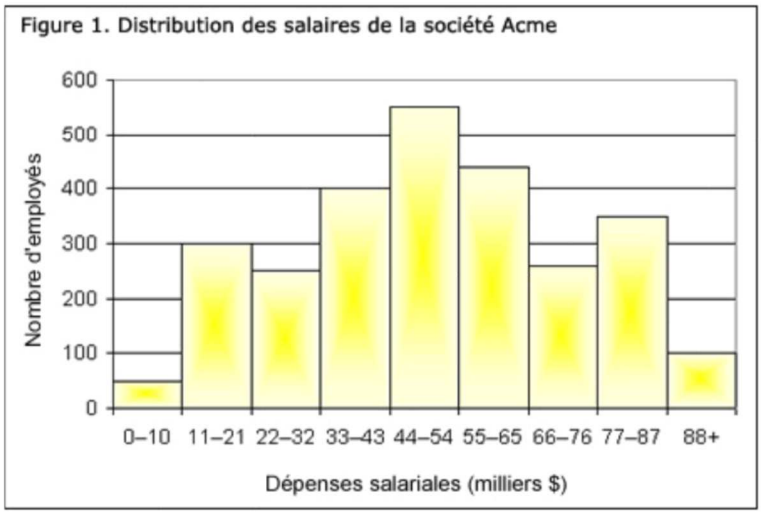
- Les grandeurs traditionnellement considérées comme continues que sont le temps, les longueurs, la masse. Leur mesure est, de plus, strictement positive.
- Les intervalles de $\mathbb{R}$, essentiellement pour leur propriété de cardinalité infinie. Ils permettent aussi un « glissement » vers les fonctions définies sur un intervalle qui sont pour la plupart des élèves de Terminale des fonctions continues. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont donc des outils dans cette introduction.

Les grandeurs dites « continues » sont investies aussi dans les exercices proposés aux élèves, conformément au programme officiel.
Que ce soit dans l'introduction aux lois à densité ou dans les exercices, l'activité de modélisation est à la fois incontournable et quasi absente : elle manque dans les programmes, dans la plupart des manuels, dans les capsules vidéo et la séance observée.
À défaut de modélisation, des courbes de fonctions continues « apparaissent » de façon plus ou moins « magique ». La question : « Quelle interprétation peut-on donner à la propriété $P(\{X = a\}) = 0$? » n'a pas de réponse cohérente.
Dans les épreuves de Baccalauréat, le modèle probabiliste est imposé aux élèves. Les énoncés posent parfois des questions relatives au modèle choisi (questions qui mettent les élèves en échec et les correcteurs dans une position difficile) ; nous avons aussi relevé des questions qui, apparemment sans intention du concepteur, peuvent poser des difficultés qui tiennent au modèle choisi.
Par conséquent, les élèves qui se pose le plus de question sur le « pourquoi » sont en reste : leurs questionnements sont en partie sans réponse ; lors d'évaluations, ils peuvent passer un temps précieux à réfléchir à certaines questions, réflexion qui n'est pas valorisée. Quant aux élèves qui approchent l'activité mathématique comme une application de règles et de méthodes, rien ne vient motiver leur évolution vers une autre approche.

Notre analyse des programmes officiels et des manuels a souligné, *a priori*, le rôle important des tâches préparées par les enseignants pour les élèves et du discours avec lequel ils leurs présentent l'introduction aux lois à densité. *A posteriori*, nous avons constaté les manques voire les erreurs des enseignants.
Mais l'enseignant de mathématiques, formé dans un cursus intra mathématique classique, n'est pas à même de percevoir l'ensemble des analogies, des ruptures, la nécessité de l'activité de modélisation, liées à l'introduction des lois à densité. D'où l'importance de la formation initiale et continue des enseignants.

De ce point de vue, la notion d'histogramme est emblématique : excellent outil pour l'introduction des lois à densité, il est méconnu des enseignants en général (y compris de concepteurs de manuels). Cette situation est aggravée par le fait que les tableurs désignent par le mot « histogramme » des diagrammes relevant de données discrètes et que les documents qu'on peut trouver sur internet sont eux aussi bien souvent erronés. En voici un exemple. Il s'agit du site d'un organisme de statistiques au Canada, qui apparait parmi les premiers avec le mot clé « histogramme » via un moteur de recherche[75].

différente. Un histogramme a une apparence semblable au diagramme à bandes verticales, mais lorsque les variables sont continues, il n'y a pas d'écart entre les barres. Lorsque les variables sont discrètes, des écarts devraient être laissés entre les barres. La figure 1 est un bon exemple d'histogramme.



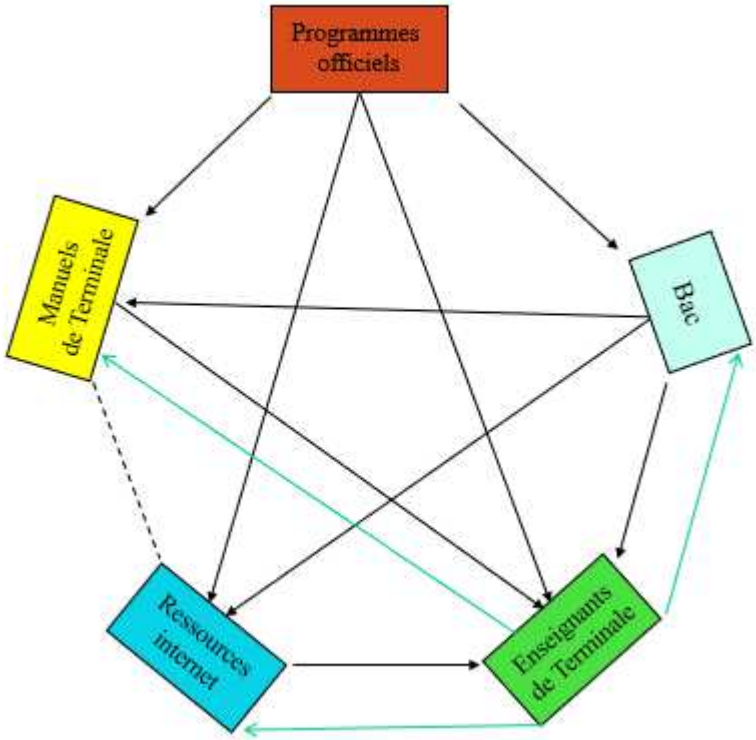
Un diagramme à bandes verticales diffère d'un histogramme de par les éléments suivants :

- Dans un histogramme, la fréquence est mesurée par la surface de la colonne.
- Dans un diagramme à bandes verticales, la fréquence est mesurée par la hauteur de la barre.

Certes, cet histogramme ne comporte pas d'écart entre les « bandes » ; cependant les intervalles des classes sont disjoints. La continuité visuelle du graphique est en discordance avec les discontinuités dans l'ensemble des valeurs potentiellement prises par les données.
Par ailleurs, l'explication *« la fréquence est mesurée par la surface de la colonne »* est contradictoire avec ce qui est indiqué sur l'axe des ordonnées du graphique.

On voit qu'il est difficile pour un enseignant de trouver des sources pour s'auto former, si celles qui sont à sa disposition sont lacunaires, voire erronées.
Nous avons représenté ci-dessous le système formé par les acteurs analysés dans le cadre de ce travail :

[7575] https://www.statcan.gc.ca/edu/power-pouvoir/ch9/histo/5214822-fra.htm le 23 avril 2018



Par « Ressources internet », nous entendons un sens du mot « ressources » restreint à ce que nous avons analysé : les capsules vidéo à vocation d'enseignement, les documents écrits en ligne.
Les flèches en noir symbolisent les influences qui existent entre les acteurs.
Les flèches en vert, d'enseignant à « Ressources internet », à « Bac », à « Manuels », symbolisent le fait que les concepteurs d'épreuves de Bac, de manuels et d'une partie des vidéos et documents qui figurent sur internet sont des enseignants de Terminale.

La partie IV. de ce travail de thèse souligne le besoin de formation initiale et continue pour les enseignants dans le domaine des statistiques et des probabilités. Le schéma ci-dessus met en évidence un système fermé. Pour l'ouvrir, des documents et des formations (en présentiel ou sur internet – pourquoi pas sous forme de capsules ?), riches en apports théoriques et didactiques, élaborés par des équipes de chercheurs, de formateur et d'enseignants, pourraient être mis à disposition des professeurs du second degré.

V. Propositions

Après avoir fait une typologie des aspects du discret et du continu, nous avons tenté de préciser la manière dont ces notions sont mobilisées dans l'enseignement des fonctions et des suites au collège et au lycée, et des probabilités en Terminale.

Nous allons voir maintenant, compte tenu des analyses mentionnées supra, quels aménagements nous pouvons proposer dans la formalisation et l'étude des fonctions, des suites et des probabilités continues, compte tenu des curricula de mathématiques en Troisième et au lycée général d'aujourd'hui.
Les questions de modélisation ont traversé à maintes reprises nos analyses, de façon transversale, c'est pourquoi nous nous focaliserons dans un premier temps sur le thème de la modélisation avant d'aborder les deux thèmes de l'analyse et des probabilités.

Nous ferons ensuite quelques propositions sur la formation des enseignants et terminerons par une réflexion sur les programmes officiels.

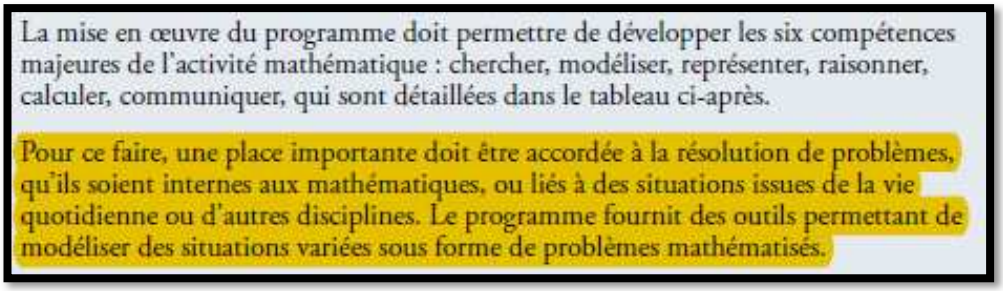
A. Modélisation

Les questions de modélisation ont traversé notre travail, tant dans le domaine de l'analyse que celui des probabilités. Nous ferons une courte synthèse de nos résultats qui nous permettra de mieux éclairer les propositions que nous sommes amenés à faire à ce sujet.

1. Un retour sur les programmes officiels d'aujourd'hui

Les recommandations de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) soulignaient en 2001 que la modélisation pourrait davantage servir d' « outil » dans l'enseignement de l'analyse, tout en permettant d'aborder « simplement » les jeux entre les mondes du discret et du continu : « *Ainsi la rencontre de phénomènes dépendant du temps, dans un contexte cinématique ou dans des contextes plus larges, a sans doute à être plus systématiquement sollicitée qu'elle ne l'a été dans un passé récent, pour donner sens aux concepts et calculs de l'analyse et permettre d'amorcer de façon relativement simple les jeux complexes entre discret et continu qui s'y jouent*[76]. »

L'analyse de programmes officiels que nous avons effectuée dans les parties précédentes, sur les domaines de l'analyse et des probabilités, montre que les curricula de collège et de lycée orientent depuis cette époque, graduellement et résolument, les mathématiques à enseigner vers la résolution de problèmes. Ceux-ci doivent motiver l'introduction de nouveaux outils mathématiques, qui servent ensuite à résoudre de nouveaux problèmes.
En témoignent les extraits suivants des derniers programmes officiels en date au collège et en Terminale S (c'est nous qui surlignons) :


La mise en œuvre du programme doit permettre de développer les six compétences majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer, qui sont détaillées dans le tableau ci-après.

Pour ce faire, une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines. Le programme fournit des outils permettant de modéliser des situations variées sous forme de problèmes mathématisés.

Extrait du programme officiel du cycle 4 de 2015 page 365[77]

[76] CREM (2001). Rapport d'étape sur le calcul page 38
[77] Bulletin officiel n°11 du 26 novembre 2015

1. Analyse

Comme dans les classes précédentes, l'activité mathématique est motivée par la résolution de problèmes. L'un des objectifs du programme est de permettre à l'élève, par une consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions, d'étudier un plus grand nombre de phénomènes discrets ou continus.

Extrait du programme officiel de Terminale S de 2011 page 3[78]

Que ces problèmes relèvent de situations intra mathématiques ou qu'ils proviennent d'autres disciplines, leur résolution passe par une étape de modélisation qui permet de mathématiser le problème, dans le monde du discret ou dans celui du continu.

Ainsi, « Modéliser » est l'une des six « compétences travaillées » explicitées dans le programme officiel du cycle 4 :

Modéliser

- Reconnaître des situations de proportionnalité et résoudre les problèmes correspondants.
- Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).
- Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique.
- Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).

Extrait du programme officiel du cycle 4 de 2015 page 367[79]

La modélisation apparait aussi, dans l'aménagement du programme de Seconde de 2017, comme un outil sur lequel s'appuyer pour enseigner l'objet mathématique « *courbe représentative de fonction* » et le distinguer « *des dessins* » de la courbe. Dans l'extrait ci-dessous, ce qui n'est pas surligné est une reprise du programme officiel de 2009, ce qui est surligné est un ajout de son aménagement de 2017.

Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. On s'appuie pour cela sur le travail mené au cycle 4 autour de :

- la modélisation de phénomènes continus par des fonctions et
- la résolution de problèmes modélisés par des fonctions.

Extrait de l'aménagement du programme officiel de Seconde de 2017, page 3[80]

La modélisation est donc mobilisée dans les curricula :

- En tant qu'outil de résolution de problème issus de situations discrètes et continues ;
- En tant qu'outil d'enseignement, à deux titres : elle permet de motiver le travail de nouvelles notions mathématiques et de préciser le statut de différents objets travaillés.

Bien que n'étant pas spécialiste de la modélisation, nous allons tirer de nos analyses des parties III et IV quelques propositions.

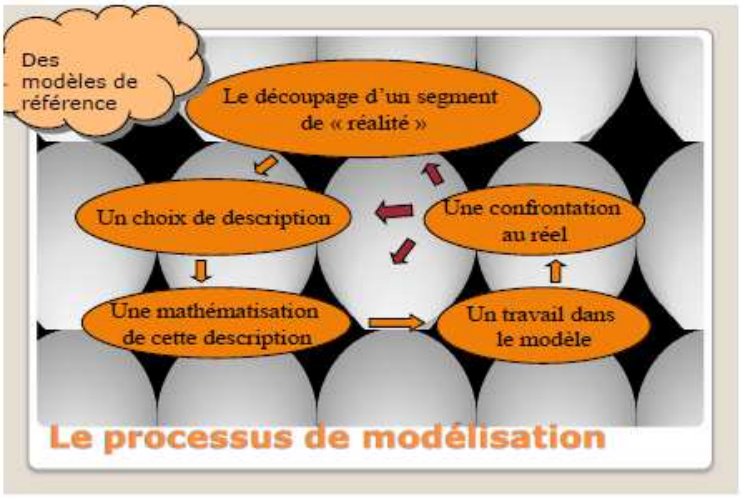
[78] Bulletin officiel n°8 du 13 octobre 2011

[79] Bulletin officiel n°11 du 26 novembre 2015

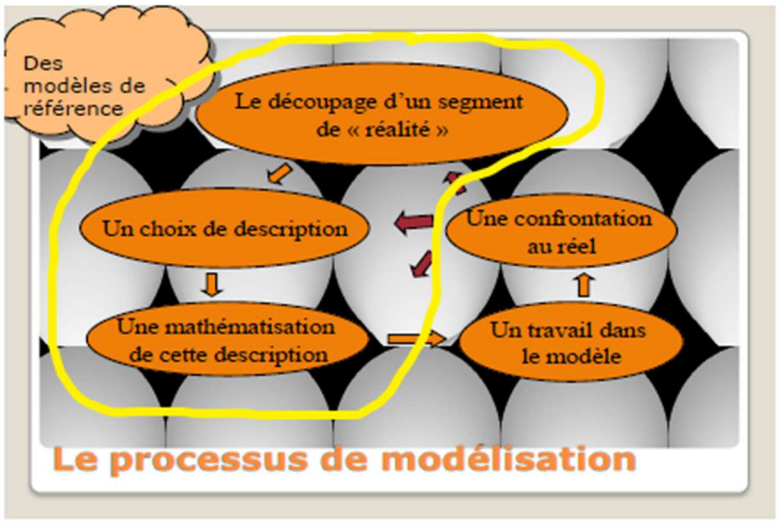
[80] http://cache.media.education.gouv.fr/file/18/95/3/ensel512_maths_757953.pdf

2. La modélisation dans les manuels, le brevet et le bac

Les analyses des manuels et des énoncés de Brevet et de Baccalauréat que nous avons effectuées montrent qu'ils évoluent graduellement selon la tendance donnée par les directives officielles. Où les tâches analysées dans les parties III et IV se situent-elles dans le schéma du processus de modélisation proposé par Artigue et al (2009) et reproduit ci-dessous ?

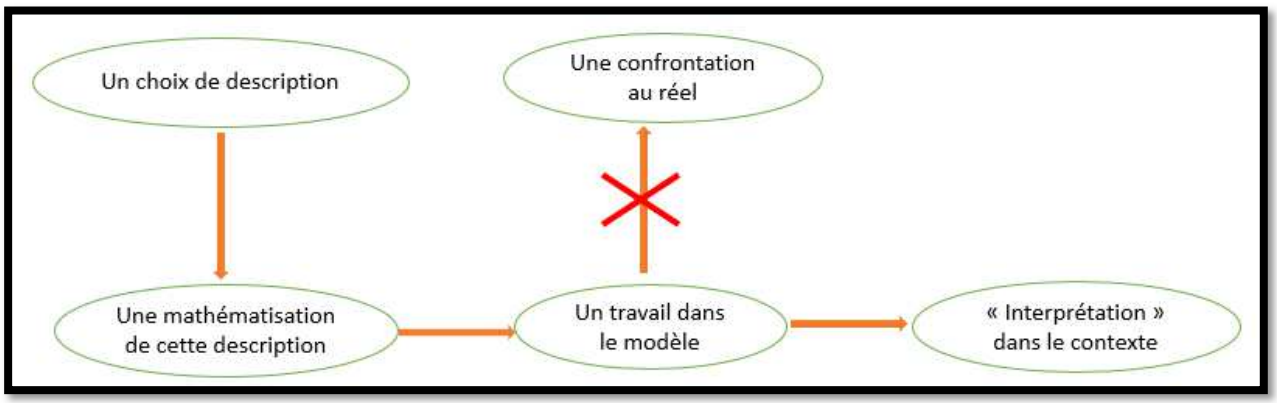


Nous avons trouvé peu de tâches de « choix de description ».
Deux manuels présentent le choix entre une représentation graphique constituée de points reliés par une « courbe harmonieuse » et une représentation graphique faite de points isolés pour une même situation (discrète). (Voir partie III A 1 b). La partie du processus de modélisation travaillée est entourée dans le schéma suivant :

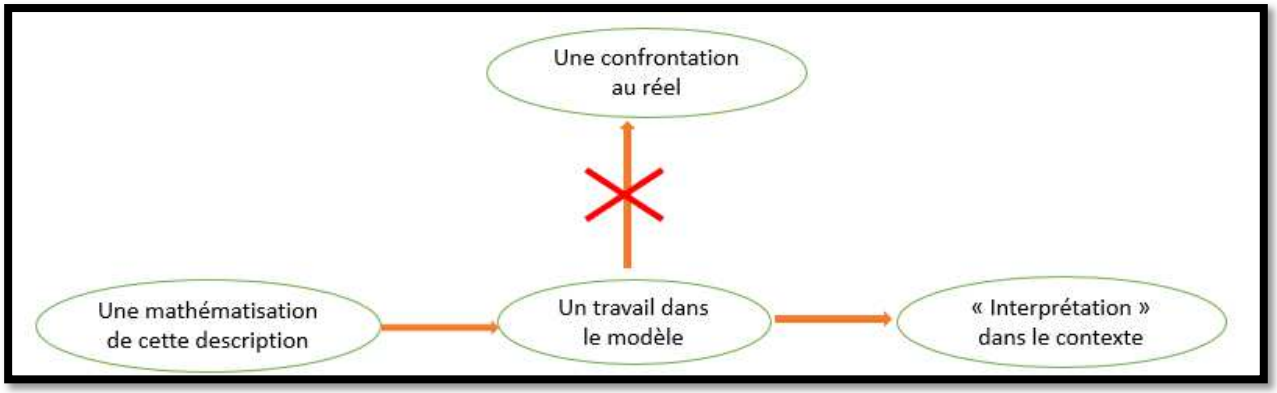


Dans la grande majorité des résolutions de problèmes nécessitant une modélisation que nous avons rencontrés, les tâches consistent essentiellement en un travail à l'intérieur d'un modèle, sur une mathématisation donnée par l'énoncé. Les questions peuvent être :

- Énoncées en langue naturelle dans le contexte du problème : la tâche consiste à les mathématiser, effectuer le travail dans le modèle, éventuellement « interpréter » les résultats dans le contexte :



- Énoncées en tant que tâche sur les objets mathématiques du modèle. Le plus souvent, une des questions suivantes demande d'en « interpréter » les résultats dans le contexte du problème :



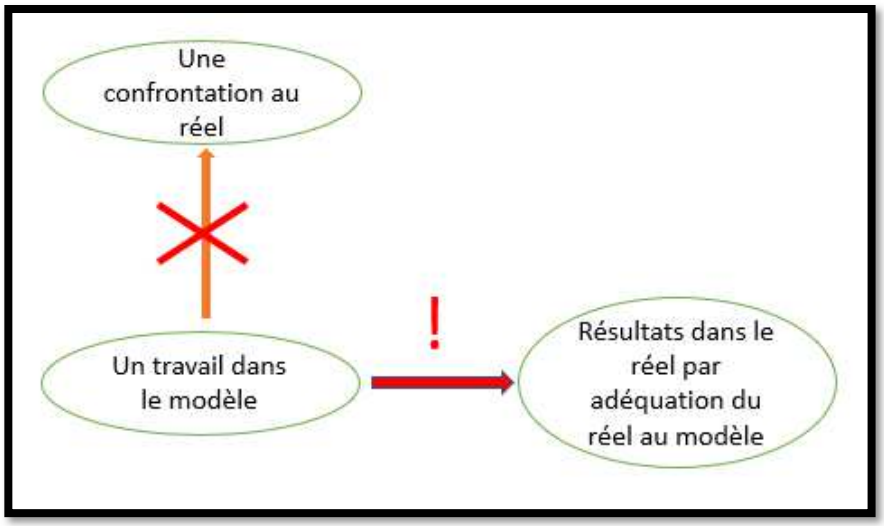
« Interpréter » les résultats devrait consister à en induire :
- Des prévisions lorsqu'un phénomène évolue dans le temps ;
- Des probabilités d'évènements lorsqu'un phénomène est aléatoire.

Malgré ces tâches d' « interprétation » des résultats, nous avons remarqué que le contexte semble parfois être un artifice qui vise à faire travailler les élèves tel ou tel domaine mathématique. La pertinence du modèle n'est généralement pas interrogée par sa confrontation au réel.
Burgermeister et Dorier (2013)[81], à propos d'exercices proposés dans les manuels du Cycle d'Orientation de Genève, relèvent de même que : « *la tâche reste essentiellement cantonnée dans […] (le modèle), sans que la pertinence ou la qualité de la correspondance ne soient interrogées. Ce type d'activité ne présente souvent qu'un intérêt très restreint du point de vue de la modélisation, dans la mesure où le système initial (celui du « monde concret » ou de la « vie courante ») est seulement évoqué dans l'énoncé du problème et la correspondance avec l'autre système (le modèle mathématique) est évidente. C'est un artifice didactique qui ne présente qu'une apparence de modélisation, dans le but de motiver les élèves à la tâche mathématique qu'ils ont à travailler.* »

Revenons brièvement à l'exercice 3 du sujet de Baccalauréat S Asie juin 2016[82] : un travail dans un premier modèle (discret) d'un phénomène en fonction du temps est demandé dans une première partie. La seconde partie commence par une confrontation avec la réalité de cette modélisation (sans faire l'objet d'une tâche pour les élèves) qui justifie le changement de modélisation qui suit. Les premières questions consistent en un travail dans le second modèle (continu), dont il est demandé

[81] Burgermeister P. F. et Dorier J. L. (2013), page 12
[82] Voir partie III. C. 1. c.

d' « *interpréter* » les résultats « *par rapport au contexte* ». Ceci induit une réponse en tant que prévision selon le modèle ; pourtant, les résultats ne peuvent qu'être confrontés aux données provenant du réel qui sont des données de l'exercice.
Dans les parties III et IV, nous avons exhibé d'autres exemples dans lesquels les questions induisent que le réel serait une conséquence des résultats trouvés à l'intérieur du modèle. Voilà comment nous pouvons schématiser la situation que nous pouvons qualifier de « détournement irréaliste du processus de modélisation » :



L'étape de « confrontation au réel » du processus de modélisation est détournée au profit d'une étape d' « adéquation du réel au modèle » !

C'est ainsi qu'à l'épreuve de Baccalauréat de juin 2017 en Métropole, un élève sur huit « interprète » une probabilité nulle ou proche de 0 - selon les arrondis retenus - par une réponse du type : « donc le module du nombre complexe est positif » ; un sur quatre « interprète » cette probabilité par un contre sens[83] , par exemple « *il n'y a pratiquement aucune chance que le module soit négatif* » ; « *le module peut être inférieur à zéro* ».

Les mathématiques apparaissent alors comme un outil « magique » qui transcende la réalité. Lorsque les résultats diffèrent selon le modèle utilisé, lorsqu'ils sont non entiers alors que le phénomène étudié est mesuré par des entiers, lorsque la probabilité d'un évènement impossible est non nulle (pour ne citer que quelques exemples rencontrés au fil des précédentes pages), le point de vue de la modélisation est incontournable afin de rendre le processus cohérent.

3. La formation des enseignants

Artigue et al. (2009) soulignent à propos de la place grandissante prise par la modélisation mathématique dans les curricula, que « *très souvent, les enseignants de mathématiques, de par leur formation, sont peu préparés à une telle évolution* ».
Nos analyses laissent supposer que des enseignants concepteurs de manuels et de sujets de Baccalauréat conçoivent des énoncés dont certains ne contribuent pas améliorer la compréhension de la nature du processus de modélisation et la perception des rapports entre les mathématiques et la réalité, chez les enseignants comme chez les élèves.

[83] Voir partie IV B 2 b.

Artigue et al. (2009) relatent la richesse de la formation en modélisation dispensée à des enseignants en Master Professionnel. Les groupes IREM « modélisation » organisent des stages de formation et publient des documents à l'adresse des enseignants en exercice.
Certains enseignants peuvent trouver la démarche de modélisation intéressante à titre personnel ou pour leur enseignement, est-ce la majorité ? Qu'ils y trouvent un intérêt ou pas, perçoivent-ils la nécessité de sa prise en compte dans l'enseignement qu'ils dispensent, compte tenu de l'évolution des programmes ?
Il nous semble important d'introduire dans la formation initiale et la formation continue des enseignants des analyses d'énoncés existants, de Baccalauréat comme de manuels, des exemples de productions d'élèves, tels que ceux que nous avons mis en avant dans ce travail. Et ce afin que l'activité de modélisation en classe soit perçue comme une étape didactique incontournable dans la résolution de problèmes, entrainant la mise en scène des jeux entre réalité discrète (du moins dans sa mesure) et modélisations discrètes et continues.

4. De la modélisation dans les programmes ?

Pour que l'étude du processus de modélisation de phénomènes discrets et continus s'ancrent dans la réalité des classes, il nous semblerait important que les programmes officiels en détaillent davantage les objectifs, illustrés par des exemples de situations et de tâches, dans chaque thème abordé qui s'y prête.

Donnons quelques exemples issus de constats de manques dans les textes officiels d'après nos analyses, à décliner selon le niveau d'enseignement, qui s'intégreraient dans les programmes officiels tels qu'ils sont écrits aujourd'hui et qui résulteraient pour les élèves en un texte des expositions de connaissances et des énoncés de tâches différents.

Dans les thèmes de la représentation de données et des fonctions :
- Relier des points sur un graphique qui représente un phénomène, qu'il soit discret ou continu, résulte d'un choix de modèle ; c'est ainsi que des phénomènes discrets sont fréquemment représentés par des « courbes continues » dans d'autres disciplines que les mathématiques.

Dans le thème des fonctions :
- Modéliser un phénomène discret ou continu par une fonction de référence est un choix qui permet un travail dans le modèle, qui utilise les propriétés de cette fonction.
- Modéliser un phénomène par une fonction continue et dérivable est un choix qui permet d'utiliser les outils du calcul différentiel et intégral.

Dans le thème des suites :
- Modéliser un phénomène discret ou continu par une suite est un choix qui donne accès à un panel d'outils du monde du discret.

Dans le thème des probabilités :
- Modéliser un phénomène aléatoire (discret ou continu) qui prend des valeurs positives par une loi normale est un choix de modélisation qui donne accès à des calculs de probabilités simples sur calculatrice ou ordinateur.

Ainsi les fonctions et les suites, les lois de probabilités discrètes et continues pourraient apparaitre explicitement comme des objets mathématiques dont les propriétés permettent de travailler au sein de modèles de phénomènes discret ou continu.
Les choix faits par les manuels en matière de modélisation, nous l'avons constaté, sont disparates. Ils seraient vraisemblablement plus homogènes, facilitant le travail de l'enseignant.

Les enseignants eux-mêmes seraient davantage outillés pour aborder la complexité de la modélisation et des jeux entre discret et continu ; ils offriraient aux élèves un discours plus pertinent et débarrassé de l'illusion d'une « magie » des mathématiques.
Pour les élèves, cela permettrait que les notions mathématiques qu'ils abordent forment un ensemble plus cohérent et dont les rapports au réel soient clarifiés. Et, comme l'écrivent Artigue et al (2010), que « *les mathématiques ne soient pas pour eux simplement une discipline scolaire mais un moyen d'intelligibilité du monde* ».

5. Quelles tâches de modélisation ?

Nous avons rencontré dans les parties III et IV des « activités » et des exercices qui consistent en un travail dans un modèle donné. Nous avons au fil des pages proposé de reformuler certaines questions afin de rendre une cohérence au travail mathématique effectué.

De notre point de vue, investir les élèves, pour le moins chaque année, dans un travail sur le cycle complet du processus de modélisation, est nécessaire. Aux élèves de choisir leurs outils pour la résolution du problème ! Selon leur niveau et la question posée, les outils (mathématiques ou numériques) peuvent provenir du monde du discret ou de celui du continu.
Modéliser un même phénomène par deux modélisations, dont l'une est discrète et l'autre continue, prend alors un tout autre sens.

Des sujets de Baccalauréat sont conçus autour de différentes modélisations d'un même phénomène concret. Il nous semble important que les énoncés comportent alors des questions sur la confrontation des modèles avec le réel d'une part, et que les choix de modèles soient motivés par le problème posé (plutôt qu'ils semblent être un prétexte à faire appel à tel ou tel domaine mathématique). Ce faisant, le choix de travailler dans le monde du discret ou celui du continu n'apparait plus comme le choix arbitraire d'un concepteur d'exercice mais comme un moyen parmi d'autres d'obtenir une réponse au problème posé.

a) Un exemple en analyse

Nous avons relaté dans la partie III. C. 2. b. i. l'incompréhension, voire le mécontentement, d'élèves de Première S devant nos explications concernant le calcul du coût marginal en économie (grandeur discrète) via la dérivée de la fonction modélisant le coût. Nous en concluions que les élèves avaient certainement besoin de davantage de temps et de tâches pour comprendre tout ce qui se joue au sein de cette modélisation. Quelles tâches ?

Les élèves pourraient être confrontés à des données réelles de coût de production.
Les variables didactiques sont nombreuses, citons-en quelques-unes :

- Le nombre d'unités produites peut être petit et les données exhaustives dans un premier temps, dans le but que les élèves s'approprient la notion de coût marginal ; il doit ensuite être grand pour que la modélisation continue se justifie ;
- Les données peuvent être brutes, dans le registre numérique ; ou figurer déjà sur un graphique, constitué de points isolés ; ou être en partie modélisées et énoncées en langue naturelle (par exemple énoncer l'existence d'un coût fixe auquel est ajouté un coût variable en fonction du nombre d'unités, proportionnel ou autre) ; en partie modélisées et représentées sur une « courbe continue ».
- Si les données sont en partie modélisées et en langue naturelle, leur mathématisation par une formule peut être simple. Le calcul d'une dérivée n'est pas nécessaire. Les questions peuvent l'amener explicitement.
- Si les données sont dans le registre numérique ou graphique, la question peut être ouverte (par exemple estimer le coût marginal à une unité pour laquelle il n'y a pas de donnée) ou guidée

par des questions intermédiaires. Les élèves peuvent travailler sur papier, papier millimétré, calculatrice, tableur, grapheur.

Nous pensons que les élèves :

- Dans le cas où une mathématisation par une formule est possible, s'approprieraient une partie du processus de modélisation de ce phénomène discret par une fonction continue et auraient une occasion de mobiliser la définition du nombre dérivé dans le but de résoudre un problème issu de l'économie ;
- Dans les autres cas produiraient une estimation du coût marginal qui, si elle ne mobilise par la notion de dérivée, s'en approcherait suffisamment dans le cadre numérique ou dans le cadre graphique pour que l'enseignant puisse amener les élèves vers un calcul de nombre dérivé ;
- Ne considèreraient plus que la notation $f'(n)$ est abusive (ou l'enseignant incohérent) lorsque f est définie sur un intervalle et n est un entier positif. Au contraire, cette notation prendrait tout son sens de nombre dérivé en n.
  Incidemment, le travail dans les cadres graphique et analytique contribuerait à éclairer les élèves sur le paramètre a et facteur $f'(a)$ de l'équation réduite d'une tangente ($y = f'(a)(x-a)+f(a)$), formule que les élèves apprennent par cœur et appliquent en éprouvant des difficultés à y distinguer les rôles de a et de x ;
- Progresseraient dans leur compréhension de la façon dont les mathématiques rendent le réel intelligible.

b) En probabilités

Henry (2009) explique l'importance de la notion de modèle dans l'enseignement des probabilités au collège et au lycée. Il montre qu'elle est incontournable dans celui des lois de probabilité continues en Terminale (Henry (2003)).
De même que dans le domaine de l'analyse, des problèmes qui peuvent être résolus par différentes modélisations devraient certainement être proposés aux élèves. En Terminale, ce pourrait être des modélisations discrètes et continues d'un même phénomène aléatoire.

De rares exercices de ce type figurent dans les manuels. En voici deux exemples tirés du manuel « Maths'x », Terminale S, de 2012.
Dans l'exercice reproduit ci-dessous, une expérience aléatoire est modélisée successivement par une variable aléatoire qui suit une loi binomiale (discrète) puis une variable aléatoire qui suit une loi normale (continue) :

38 Loi binomiale et loi normale

Dans un certain vignoble, on admet que la probabilité qu'un pied de vigne soit atteint d'une maladie donnée est 0,4. On observe 600 pieds de vigne choisis au hasard dans ce vignoble et l'on désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de pieds observés atteints par la maladie.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

a. Calculer l'espérance et l'écart type de X.

b. Calculer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, la probabilité des événements suivants :
« $240 < X < 252$ », « $X \geqslant 232$ » et « $X \leqslant 264$ »

2. On admet que le nombre de pieds malades peut aussi être approché par une variable aléatoire Y suivant la loi normale de moyenne $\mu = 240$ et d'écart type $\sigma = 12$.

a. En utilisant cette approximation, calculer les probabilités des trois événements définis à la question 1.b.

b. Comparer.

Manuel Math'x, Terminale S de 2012, éditions Didier, page 421

Dans cet autre exercice, une expérience aléatoire est explicitement modélisée par une loi géométrique (discrète) puis une loi exponentielle (continue) :

84 Temps d'attente de ROUGE TICE

Une urne contient 1 boule rouge et 9 boules blanches, indiscernables au toucher. Une partie consiste à répéter le tirage au hasard d'une boule de l'urne, avec remise après chaque tirage. La partie ne s'arrête que lorsque la boule rouge est tirée.
On désigne par N la variable aléatoire associant à une partie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la boule rouge.

A. Modélisation discrète : loi géométrique

1. a. Quelles sont les valeurs prises par N ?
b. Calculer $P(N = 1)$, $P(N = 2)$, puis $P(N = k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
c. Calculer $P(N \leqslant n)$ et $P(N > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer et interpréter $\lim\limits_{n \to +\infty} P(N > n)$.

2. Sur Geogebra, construire un histogramme dont les rectangles R_k, pour k entier naturel non nul, ont pour base $[k-1\,;k]$ et pour hauteur $p_k = P(N = k)$.
Pour la création de l'Histogramme, on pourra se limiter à $1 \leqslant k \leqslant 150$ et utiliser :
Histogramme [Hbornes, Hhauteurs] avec les listes :
Hbornes : Sequence[k, k, 0, 150] et
Hhauteurs : Sequence[« pk », k, 1, 150].

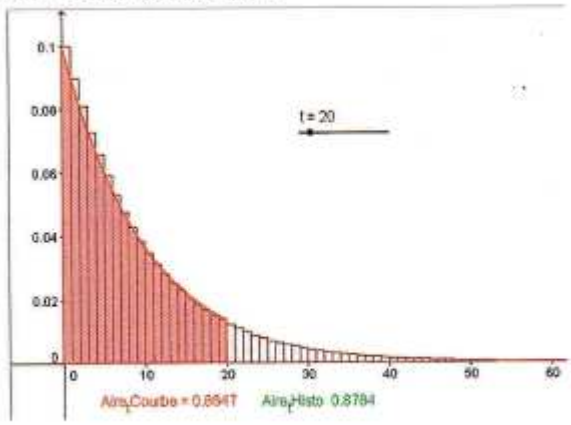
3. a. Que vaut l'aire d'un rectangle R_k ?
b. Quelles aires correspondent aux probabilités $P(N \leqslant 5)$, $P(10 < N \leqslant 20)$ et $P(N > 25)$?
c. En déterminer des valeurs approchées à 10^{-4} près.

B. Modélisation continue : loi exponentielle

L'histogramme construit évoque la courbe de densité d'une loi exponentielle.

1. Rappeler l'expression d'une telle fonction et déterminer son paramètre λ tel que $f(0) = 0{,}1$.
On prend dorénavant $\lambda = 0{,}1$.

2. a. Tracer sur le graphique la courbe de cette fonction de densité. Qu'observe-ton ?



b. Y faire figurer :
- un curseur où l'entier t varie de 1 à 150
- $Aire_tCourbe$: Integrale de f, de 0 à t
- $Aire_tHisto$: Somme [Hhauteurs, t]

c. Faire varier t avec le curseur et observer les valeurs de « $Aire_tCourbe$ » et « $Aire_tHisto$ ». Commenter.

3. On adopte ce modèle continu exponentiel pour approcher la loi de N.
a. Calculer $I(n) = \int_0^n f(x)\,dx$ et comparer avec la valeur de $P(N \leqslant n)$ obtenue à la question A.1.c.
b. En déduire des approximations des probabilités $P(N \leqslant 5)$, $P(10 < N \leqslant 20)$ et $P(N > 25)$, dont on donnera des valeurs approchées à 10^{-4} près.
c. Comparer ces approximations avec celles de A.3.c.

Manuel Math'x, Terminale S de 2012, éditions Didier, page 428

Nous ne procèderons pas à l'analyse de ces deux exercices ici.
Remarquons que leurs énoncés effectuent les choix de modélisation (de description et de mathématisation). Ils soulignent que les lois des variables aléatoires discrètes sont approximées par des lois continues et les résultats fournis par ces dernières sont confrontés à ceux obtenus via les lois discrètes. Ces mises en perspectives mettent en lumière l'approximation du réel par les modélisations continues.
Par contre, les lois discrètes n'apparaissent pas clairement comme modélisant le réel : malgré les mots « modélisation discrète » employés dans le second exercice, elles semblent bien pouvoir quantifier le réel de façon exacte.

Les enseignants que nous côtoyons estiment pour la plupart que le thème des probabilités continues comporte trop peu d'occasions de « faire des maths ». Or dans les exemples ci-dessus, l'activité mathématique est d'autant plus riche que les aspects de modélisation sont présents : les questions de calcul exact et de calcul approché sont naturellement abordées.

B. Fonctions - suites

1. La définition d'une fonction

Du point de vue des programmes officiels, nos analyses de la partie III montrent qu'il est important de définir dès la classe de Seconde la notion d'ensemble de définition et qu'elle y soit quelque peu mobilisée.
Les fonctions définies sur des ensembles discrets aussi bien que continus peuvent alors être abordées, ce qui rend la définition des suites en tant que fonction particulière en classe de Première cohérente avec les connaissances anciennes des élèves.
Cela permet aussi de travailler les questions de représentation graphique (points reliés ou pas, si oui comment ?) en Seconde et d'éviter que la façon de relier les points (ou pas) ne soient imposée par des habitudes ou des injonctions qui diffèrent d'un manuel à l'autre, d'un enseignant à l'autre. Et ainsi détruise la cohérence mathématique nécessaire à la compréhension de mathématiques par les élèves.

Des exemples de fonctions définies sur un intervalle mais présentant des discontinuités ont leur place dès la Seconde afin que la notion de fonction continue ne semble pas vide de sens dans un corpus de fonctions qui sont toutes continues au lycée. La discontinuité peut être éclairée par des exemples de fonctions modélisant des phénomènes présentant eux-mêmes des discontinuités.

2. Les représentations graphiques

Les représentations graphiques sont très présentes dans les manuels, les énoncés de Brevet et de Baccalauréat. Elles sont alors source de données à extraire et sur lesquelles les élèves travaillent.
Les tâches de nature graphique sont peu nombreuses : faire ressortir sur un graphique une lecture d'image, d'antécédent, de calcul d'aire… Parfois tracer une droite. Il reste quelques rares tâches de constructions de représentations graphiques de fonction dans les manuels, à la main ou au tableur ; elles sont absentes des examens.

Les représentations graphiques à la main ont pour ainsi dire disparu des pratiques en classe. Elles sont remplacées par les représentations obtenues avec les outils numériques.
Paradoxalement, dans le même temps, la « définition » intuitive de la continuité d'une fonction par le tracé sans lever le crayon a remplacé en série S la définition rigoureuse ; elle est illustrée par des « dessins » obtenus numériquement qui donnent l'illusion du continu, alors qu'ils comportent un nombre fini de pixels et par conséquent discrétisent la courbe.
Notre expérience d'enseignante, nos analyses et les commentaires de collègues au lycée et à l'université nous poussent à penser que le tracé à la main a toujours sa place, au côté des calculatrices, tableurs et grapheurs. Il permet entre autres :

- De sentir le geste associé à la continuité ;
- De travailler la propriété « si a M pour coordonnées $(x; f(x))$ alors $M \in C_f$ » dont seule la réciproque est mobilisée dans les lectures graphiques de coordonnées d'un point d'une courbe ;
- De travailler les notions d'ensemble de définition, de tangente ;
- De faire émerger les questions sur la façon de relier les points ;
- De constater « en acte » la multitude de « dessins » possibles et par conséquent la différence entre la représentation graphique d'une fonction définie sur un intervalle (objet inaccessible physiquement) et les « dessins » qui en sont faits, que le langage ne distingue pas.

Les outils numériques ont toute leur place aussi dans le travail sur les représentations graphiques.
Le tableur offre la possibilité de montrer différentes possibilités de représenter graphiquement un tableau de valeurs, en reliant ou pas les points correspondants.

Les manuels que nous avons consultés proposent tout au plus une tâche de représentation graphique d'une fonction sur tableur ; de surcroit, l'énoncé y guide la construction pas à pas vers un type de graphique particulier.
Le menu graphique du tableur comporte un panel de types de représentations tel, qu'il mérite d'être exploité :

- Pour que les élèves du groupe classe aient une meilleure compréhension des fonctions dans le cadre graphique – le tableur permet de faire rapidement l'expérience de la non unicité des fonctions f définies sur un intervalle dont un nombre fini de couples $(x; f(x))$ est connu ;
- Pour qu'en tant que futur utilisateur de tableur, ils apprennent à effectuer des choix éclairés.

Ces différentes façons de relier les points sur tableur peuvent être confrontées avec les représentations graphiques que les élèves rencontrent dans les autres disciplines.

La construction de la représentation graphique d'une fonction sur un intervalle peut être effectuée par un algorithme. Son écriture permet de travailler la relation entre image et antécédent dans les cadres algébrique et graphique. La subdivision de l'intervalle de définition résulte d'un choix qui met en lumière la propriété de divisibilité à l'infini de l'intervalle, propriété qui nous l'avons vu est un précurseur du continu. Les élèves peuvent paramétrer l'approche du continu de l'intervalle par les subdivisions discrètes qu'ils en font.
De plus une subdivision de plus en plus fine de l'intervalle peut montrer aux élèves la densification du nuage de points qu'elle entraine et l'illusion du continu donnée par les écrans.

3. Le sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Les confusions entre signe et sens de variation d'une fonction sont récurrentes chez les élèves. Nous avons constaté que le travail sur les suites complexifie encore le travail et amplifie la difficulté.
En amont de l'introduction de la dérivée et des suites, en classe de Seconde, le signe et le sens de variation d'une fonction pourraient être davantage travaillés en parallèle, dans les cadres algébrique et graphique. Des constructions d'exemples de fonction de signe et de sens de variation donnés pourraient être demandés aux élèves, dans les deux registres. Ce travail peut être poursuivi en Première lorsque les élèves disposent de la propriété sur le sens de variation déduit du signe de la dérivée.

Des contre-exemples d'affirmations du type « si $f(1) > f(0)$ alors f est croissante sur [0 ; 1] » permettent de faire travailler les élèves sur :

- Le fait qu'il existe des nombres entre 0 et 1, ce qu'ils ont parfois tendance à omettre compte tenu de la prépondérance des entiers au collège et au lycée ;
- Le fait que $f(0)$ et $f(1)$ étant donnés, il existe une infinité de fonctions, même continues, prenant ces valeurs ; la connaissance de ce fait prépare les élèves à la rédaction de la recherche du sens de variation d'une suite par celui de « la fonction associée ».

4. La continuité d'une fonction

La notion de continuité d'une fonction fait aujourd'hui l'objet d'un nombre réduit de tâches dans les manuels.

Afin de donner davantage de sens à cette notion, nous avons abordé supra l'enrichissement que peut apporter le tracé de courbes à la main. Des fonctions continues ainsi que des fonctions présentant des discontinuités, modélisant des phénomènes concrets, pourraient alors être représentées.

Nous avons constaté que certains manuels de Terminale S présentent un exemple de fonction quelque peu « pathologique » : la fonction de Thomae[84] ; la fonction définie par $x \longmapsto sin\frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0;1]$ et par $0 \longmapsto \lambda, \lambda \in [-1;1]$. Les représentations graphiques en sont rapidement obtenues sur un grapheur et sont propices à extraire les élèves de ce qu'ils pourraient percevoir comme un « tout continu » et à enrichir la culture mathématique des élèves.

De plus, la continuité est essentiellement utilisée lors de la mobilisation du théorème des valeurs intermédiaires, dont la rédaction est pour les élèves une tâche routinière. Or le second exemple est un contre-exemple classique de ce que la propriété des valeurs intermédiaires ne caractérise pas les fonctions continues.

5. Les suites

Les fonctions étant définies avant les suites, il nous semble opportun de définir, selon l'usage des manuels consultés, une suite en tant que fonction particulière. L'aspect de liste infinie propre au discret cohabite « naturellement » avec celui de fonction, il est présent dès qu'il est question par exemple des quatre premiers termes d'une suite, ou du 4e terme d'une suite, il est aussi présent dans la définition par récurrence d'une suite.

Les tâches qui consistent à « deviner » la définition d'une suite par l'observation de ses premiers termes peuvent avoir un effet négatif puisque, d'après nos observations, les élèves ont tendance à penser qu'ils peuvent déterminer le comportement global d'une suite par l'observation de ses premiers termes. Si ce type de tâche est proposé aux élèves, il convient d'expliciter l'hypothèse qu'une régularité repérée dans les premiers termes de cette suite se répète « à l'infini », ce qui n'est pas toujours le cas.

Nous avons vu qu'un travail de recherche de signe d'expressions dans $\mathbb{N}$, même simple, permet de donner aux élèves quelques outils pour penser cette recherche puis avoir les symboles et les mots pour l'exprimer.
Ce type de tâche peut être mobilisé dans d'autres domaines que l'analyse, dans lesquels une variable entière peut être considérée - par exemple celui des probabilités discrètes.

La notation parenthésée peut cohabiter en classe avec la notation indicée, au moins dans un premier temps. Cela permet de donner du temps aux élèves qui en ont besoin pour installer le sens de l'indice en tant que variable (et éviter que l'indice ne soit une notation algébrique supplémentaire, au sens incertain).
De plus, elle est cohérente avec la notation de la calculatrice, et elle donne un moyen de nommer le terme lorsque la notation indicée n'est pas disponible, par exemple pour nommer « u(n) » une colonne contenant les termes d'une suite sur tableur.

Nous avons constaté que la notation indicielle a besoin d'être travaillée à plusieurs reprises en tâche isolée. En effet, malgré un travail sur les expressions de $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n, les erreurs d'élèves sur les indices sont encore nombreuses et tiennent parfois à des indices mal écrits. Cette notation peut être travaillée algébriquement et aussi graphiquement.

Nous avons analysé certaines des raisons pour lesquelles le tableur et l'algorithmique sont de bons outils de travail des deux modes de génération des termes d'une suite. Nous avons souligné qu'une

[84] Rappelons que la fonction de Thomae est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} 0 \; si \; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1 \; si \; x = 0 \\ \frac{1}{q} \; si \; x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, \frac{p}{q} \text{ irréductible} \end{cases}$.

explicitation de la position et du rôle de l'indice dans la programmation sur tableur et dans l'écriture des algorithmes, selon le mode de génération, est nécessaire.

Le travail de la distinction entre signe et sens de variation peut se poursuivre sur les suites, dans les cadres algébrique et graphique avec celui de la construction d'exemples de suites de signe donné et de sens de variation donné. Ce travail devrait être fait avant d'aborder la recherche du sens de variation par celle du signe de $u_{n+1} - u_n$, qui complexifie encore la question par le changement de point de vue que cette méthode véhicule. Il peut être réinvesti ensuite.

Un travail algébrique en Seconde pour lier la comparaison de deux nombres avec le signe de leur différence préparerait la démonstration de ce que le signe de $u_{n+1} - u_n$ permet de comparer deux termes consécutifs d'une suite.

Nous avons constaté que le « méta » apporté aux élèves en entretien donnait à certains des repères dont ils avaient besoin. L'enseignant a par conséquent un rôle important à jouer en classe. Il peut souligner, lorsqu'ils se présentent, les adaptations, les changements de point de vue et de monde, les implicites sur les notations, qui, nous l'avons constaté, sont nombreux dans le domaine des suites.
Il peut rendre explicite le fait que la monotonie d'une suite s'énonce plus simplement que celle d'une fonction du fait qu'elle est un cas particulier de fonction. Cela permet de justifier l'utilisation d'un vocabulaire commun. Et, de surcroit, de justifier la propriété « si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ » qui, nous l'avons constaté, mérite d'être énoncée, du moins pour certains élèves.

Lorsque les occasions se présentent (au détour d'un exercice, d'une question d'élève), l'enseignant peut institutionnaliser ce qui se transfère de suite à fonction, de fonction à suite, les analogies entre les deux. En Première, l'analogie entre signe de la dérivée et signe des accroissements $(u_{n+1} - u_n)$ a déjà sa place, en particulier dans le travail que nous préconisons sur « signe et sens de variation ». La non équivalence entre la monotonie de f et celle de la suite de terme général $f(n)$ devrait être abordée au sein d'une tâche dans le cadre graphique.
La classe de Terminale est plus riche de ce point de vue. Les « non transferts » entre fonctions et suites dans les définitions et propriétés sont des occasions de débats en classes et/ou de production de contre exemples.

6. L'introduction aux fonctions exponentielles en Terminale ES

Nos analyses montrent qu'il est préférable d'éviter de faire une évidence de l'unicité du prolongement de la forme algébrique q^nà q^x, ou du prolongement des points représentant la suite géométrique de raison q à la courbe de la fonction exponentielle de base q.
Non pas pour la réussite des élèves au baccalauréat, dont les tâches mobilisent quasi exclusivement la fonction exponentielle de base e. Mais pour que la relation fonctionnelle ne soit seulement pour les élèves un jeu algébrique ; pour que les mathématiques ne soient pas seulement pour eux des formules qui doivent « bien marcher », de façon « esthétique » voire « magique », pour qu'elles apparaissent à leurs yeux comme une discipline développée par des humains.

La séance que nous avons présentée en partie III E nous semble un compromis satisfaisant entre une introduction basée sur une illusion d'évidence de l'unicité du prolongement, corroborée par la calculatrice, et une construction davantage étoffée mais chronophage de fonction exponentielle, tout en évitant les écueils identifiés au long de nos analyses.

C. Probabilités continues

1. La statistique descriptive

Derouet (2016) a, dans sa thèse de doctorat, « *dégagé la place importante de la statistique* » dans la genèse de la notion de densité de probabilité.
D'après nos analyses de la partie IV., la statistique descriptive constitue dans les manuels de Terminale S un des points d'entrée dans le thème des probabilités continues. L'histogramme des fréquences est un intermédiaire à privilégier, entre mode de représentation de données statistiques d'un caractère continu et fonction de densité. Nous avons pu constater qu'il est largement sollicité pour ce faire dans les manuels et dans une moindre mesure dans les capsules sur internet ; l'enseignante dont nous avons analysé la séance d'introduction l'a elle aussi mobilisé.

En conséquence, un travail en amont de la classe de Terminale sur les types de caractères statistiques (quantitatifs et qualitatifs, discrets et continus) et les représentations associées nous parait indispensable avant d'aborder les probabilités continues.
Les notions de discret et de continu apparaissent « naturellement » de par les choix qui doivent être faits pour représenter graphiquement les relevés statistiques. En particulier, les caractères quantitatifs continus requièrent la mobilisation d'intervalles de $\mathbb{R}$, qui sont de bons supports du continu.

Les histogrammes de fréquences doivent faire l'objet de tâches, notamment ceux dont les classes ont des amplitudes qui ne sont pas toutes égales, en ce qu'ils permettent de faire émerger la notion de densité de fréquences.

2. La modélisation

Nous avons développé supra quelques propositions sur la modélisation dans le domaine des probabilités au lycée.
Rappelons que concernant spécifiquement l'introduction des lois de probabilité continues en Terminale, Henry (2003) a qualifié la modélisation d' « *incontournable* »[85] : la réalité discrète (du moins dans sa mesure) est modélisée par un outil mathématique du continu choisi pour « coller » de façon satisfaisante avec la réalité et pour la puissance de calcul qu'il permet. Ceci devrait être explicité aux élèves.

Nous avons constaté dans la partie IV. sur les probabilités que le processus de modélisation est majoritairement absent des manuels de Terminale, des sujets de Baccalauréat et du discours des enseignants. Nous avons analysé quelques conséquences de ce manque : les incohérences dans le discours des manuels et des enseignants ; les difficultés qu'éprouvent les élèves dans les questions du Baccalauréat qui y font appel.

Pour que les élèves puissent donner un sens, une cohérence, aux notions et propriétés sur le thème des probabilités continues, le point de vue de la modélisation doit être inclus dans les tâches d'introduction aux lois à densité comme dans les exercices (des manuels, du Baccalauréat) qui leur sont proposés.
En particulier, la propriété « pour tout réel a, $P(X = a) = 0$ », qui constitue une rupture importante entre probabilités discrètes et continues à ce niveau d'enseignement, peut être dégagée de toute tentative d'explication faisant appel à la réalité : cette propriété est une conséquence du modèle choisi, dans le cadre graphique (aire nulle) comme celui de l'analyse (intégrale nulle).

[85] Partie IV. A. 2. f.

3. Le programme officiel

La loi uniforme se révèle être une bonne entrée dans les probabilités continues ; c'est d'ailleurs ce que préconise le programme officiel. Elle permet de s'appuyer sur l'équiprobabilité dans le cas fini, bien connue des élèves, par l'égale vraisemblance des intervalles de longueur égale. Cette propriété a de plus pour conséquence « pour tout réel a, $P(X = a) = 0$ ».
Cependant, le choix de la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$ se révèle être moins judicieux qu'une loi uniforme sur un intervalle de longueur différente de 1.

Dans son rapport d'étape sur le calcul de 2001, la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques souligne l'importance d'enseigner les deux aspects de l'intégrale que sont celui de « primitive » et celui de « *sommation infinie de contributions élémentaires* ». La commission estime que la définition de l'intégrale par « l'aire sous la courbe » permet d'aborder les deux aspects de façon satisfaisante.
Les analogies entre probabilités discrètes et continues sont compréhensibles dès lors que l'intégrale peut être vue en tant que somme infinie. Or ce point de vue de l'intégrale ne figure plus dans le dernier programme officiel de Terminale qu'en tant qu' « *illustration* » possible : *« On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition*[86]. » En effet, le théorème des suites adjacentes n'étant plus au programme, il est plus ardu (et moins naturel) de démontrer que l'intégrale d'une fonction monotone est la limite d'une somme d'aires de rectangles.
Les enseignants peuvent malgré tout proposer des tâches d'approximations d'intégrales par des sommes d'aires résultant de subdivisions de plus en plus fines de l'intervalle de définition, qui permettent de faire vivre un tant soit peu le point de vue de somme infinie de l'intégrale.

4. Tâches et déroulement : deux exemples

Nous avons argumenté dans la partie VI notre position selon laquelle le cours dialogué n'est pas opportun dans l'introduction aux lois à densité. Il est préférable de construire des tâches pour les élèves desquelles la densité de probabilité émerge, formulées avec soin afin de tenir compte entre autres des aspects de modélisation.

Derouet (2016) a développé une « *ingénierie didactique collaborative* ». Ce travail remarquablement pensé permet de faire émerger la notion de densité de probabilité à partir de la modélisation d'un phénomène aléatoire dans le temps, dont les données statistiques sont réelles. Dans le but d'estimer une probabilité, les élèves ont besoin d'approcher l'histogramme des fréquences par une fonction continue puis de calculer l'aire correspondante sous la courbe. Le calcul intégral apparait comme une Réponse A un Problème (RAP, voir partie II.). Les thèmes des probabilités continues et des intégrales émergent conjointement, sur un temps relativement long, qui n'excède malgré tout pas celui de l'enseignement de ces deux thèmes de façon classique.

En tant qu'enseignante, nous avons expérimenté deux années consécutives, dans nos classes de Terminale ES, une introduction aux lois à densité qui nous estimons avec le recul, rapide et efficace – ce sont des critères qui pèsent lourd chez les enseignants qui subissent constamment la contrainte du temps. Elle prend environ deux heures et figure en annexe 16.
L'histogramme des fréquences fait dans un premier temps l'objet de tâches afin de faire émerger la question de la grandeur qui figure en ordonnée. Elle émerge effectivement et intrigue considérablement les élèves. La deuxième année, certains se sont souvenus d'avoir, une année précédente, légendé un histogramme par « la valeur d'un carreau » ; si ce n'est pas le cas, les élèves ont besoin d'être aiguillés vers cette légende. Puis les élèves déduisent de la grandeur qui figure en abscisse celle qui figure en

[86] Bulletin Officiel n°8 du 13 octobre 2011, page 7.

ordonnée. L'enseignant peut s'appuyer par exemple sur la densité de population en géographie pour nommer la grandeur représentée en ordonnée « densité de fréquence ».
Soulignons l'utilisation qui est faite de l'histogramme des fréquences pour basculer de la statistique aux probabilités : après l'introduction d'une expérience aléatoire, la fonction représentée par la partie supérieure des rectangles de l'histogramme peut servir de fonction de densité modélisant ladite expérience.
La recherche de la valeur de $P(X = 20)$ provoque bien entendu un débat dans la classe. Certains élèves perçoivent que l'évènement $\{X = 20\}$ n'est pas l'évènement $\{20 \leq X < 21\}$; l'argument que la variable prend potentiellement une infinité de valeurs émerge des élèves sous une forme ou une autre. Le débat ne peut être clôt qu'en précisant :

- Que X n'émane pas directement de la réalité, c'est un objet qui modélise l'expérience aléatoire et qui permet d'effectuer des calculs de probabilités. Ceci est d'autant plus compréhensible par les élèves que l'histogramme, regroupant les données par classe, ne donne pas accès aux données réelles ;
- Que l'âge peut prendre théoriquement n'importe quelle valeur dans un intervalle, par opposition à des valeurs entières en années, en mois… Donc la variable est considérée comme continue, c'est le choix fait dans ce modèle.

5. Les enseignants

Nous avons constaté dans la partie IV. :

- Qu'un certain flou règne entre caractère statistique et variable aléatoire, tant dans les manuels, les capsules internet que le discours de l'enseignante dont nous avons observé la séance ;
- Que le registre graphique est mobilisé dans certaines capsules pour « glisser » rapidement du discret des diagrammes en bâtons au continu des histogrammes ;
- Que les histogrammes sont mal connus des enseignants, ce qui était déjà noté par Roditi (2009).

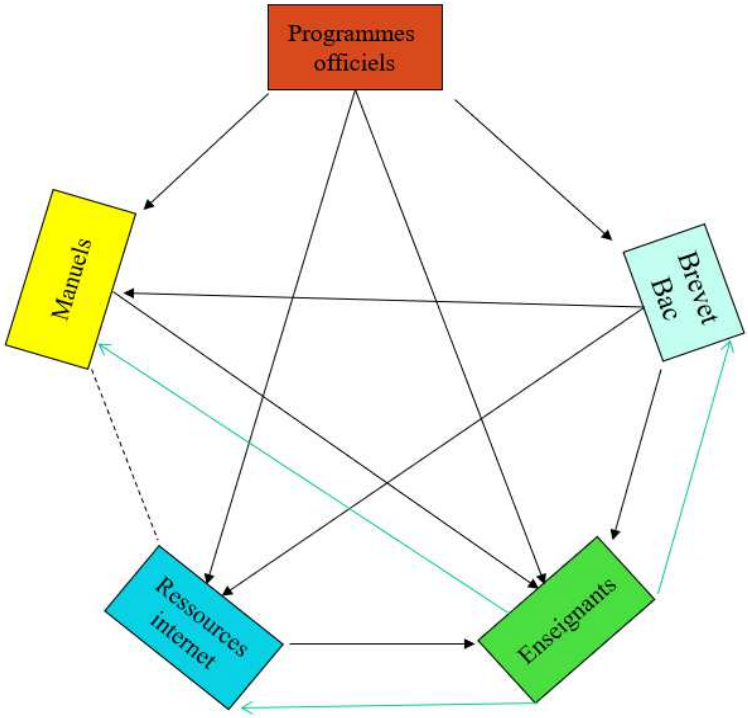
Dans les tâches et le discours produits par les enseignants, les histogrammes peuvent apparaitre comme un registre de représentation qui leur permet de passer de façon « magique » de données statistiques concernant un caractère quantitatif continu (parfois même discret) à une fonction de densité.

Notre travail montre que les enseignants ont besoin d'être formés, de se former, en statistique descriptive (particulièrement le maniement des histogrammes) et en probabilités (les questions de modélisation, l'introduction des probabilités continues en Terminale).

D. Propositions pour les enseignants

Le constat du besoin de formation des enseignants est récurrent dans notre travail.

Les curricula ont progressivement introduit un important changement de paradigme dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée : les notions mathématiques sont censées émerger de la résolution de problèmes pour devenir des outils pour la résolution de problèmes. Lorsque les problèmes émanent de disciplines autres que les mathématiques, ils requièrent une modélisation ; des grandeurs sont mesurées, de façon discrète ou continue, dans des unités parfois peu courantes et potentiellement inconnues des enseignants.
Pour la plupart, les enseignants n'ont pas été préparés par leur formation initiale à aborder les mathématiques de la sorte. La part des enseignants qui ont bénéficié d'une formation de qualité à ce sujet est réduite.
Ceci explique, du moins en partie, qu'à travers les manuels, les exercices de Brevet et de Baccalauréat, les capsules sur internet, un malentendu prévaut : le réel semble se conforter au comportement des objets mathématiques.
En conclusion de la partie IV, nous avons représenté le système formé par les acteurs analysés dans le cadre de ce travail. Élargissons-le au collège et au lycée :



Pour rappel : par « Ressources internet », nous entendons un sens du mot « ressources » restreint à ce que nous avons analysé : les capsules vidéo à vocation d'enseignement, les documents écrits en ligne.
Les flèches en noir symbolisent les influences qui existent entre les acteurs.
Les flèches en vert, d'enseignant à « Ressources internet », à « Brevet, Bac », à « Manuels », symbolisent le fait que les concepteurs d'épreuves de Brevet et de Bac, de manuels et d'une partie des vidéos et documents qui figurent sur internet sont des enseignants.

Comment ouvrir ce système fermé ?

Éduscol édite des documents « Ressources pour la classe » de qualité ; des revues comme « Repères IREM » éditent des articles accessibles pour les enseignants, écrits par des personnes aux compétences reconnues.
Visiblement, cela ne suffit pas pour toucher un grand nombre d'enseignants, d'autant plus que le malentendu s'auto alimente par l'édition de nouveaux manuels, nouvelles épreuves de Baccalauréat, nouvelles capsules internet qui le perpétuent.

Pour des sujets délicats, parce qu'ils font intervenir des disciplines extra mathématiques, parce que des jeux entre discret et continu entrent en scène, la conception de documents, de manuels, de capsules de qualité passe par une élaboration en équipes comprenant des chercheurs dans le domaine mathématique visé et en didactique de ce domaine, des formateurs, des enseignants du second degré. En effet, les chercheurs sont experts dans leur domaine mais connaissent de façon lointaine les contraintes du métier d'enseignant, les difficultés et les besoins des élèves que les enseignants vivent au quotidien ; pour leur part, les enseignants ne peuvent avoir les connaissances de chercheurs dans tous les domaines qu'ils enseignent. De telles équipes existent dans les groupes IREM.
Des formations riches en apports théoriques et didactiques élaborées par de telles équipes existent déjà. Sont-elles suffisamment nombreuses ? Et comment y attirer les enseignants ?
Prenons l'exemple de la modélisation, comment faire en sorte que ne soient attirés que ceux qui y trouvent un intérêt pour diversifier leur enseignement ou tout simplement un intérêt intellectuel personnel ?
Faire une place à la modélisation en tant qu'objet d'enseignement dans les programmes officiels créerait un appel d'air institutionnel ; faire travailler les enseignants en formation sur les effets du manque d'enseignement du processus de modélisation à partir d'analyses *a priori* et *a posteriori* sur des productions d'élèves ancrerait ce travail dans leur pratique au quotidien.

Que ce soit sur l'enseignement des fonctions, des suites ou des probabilités, afin de faire évoluer les connaissances et les pratiques des enseignants, nous pensons nécessaire que ceux-ci travaillent en équipe afin de partager leurs questionnements, confronter leurs analyses de tâches, de déroulements. Ce travail leur permettrait de s'approprier les outils d'analyse des adaptations, des changements de point de vue et de monde à l'intérieur des tâches, des implicites à l'écrit comme à l'oral qui passent inaperçus des enseignants mais peuvent entraver le travail de certains élèves.
En particulier, pourquoi ne pas expliciter aux élèves que certaines notions qu'ils rencontrent ne sont pas encore formalisées à leur niveau comme la continuité, les limites ou le discret et que d'autre ne sont pas formalisables à ce jour, comme le continu ?

E. Réflexion sur les programmes

Au fil des pages de cette partie V, nous avons fait des remarques ponctuelles concernant les programmes officiels.
Certaines sont des constats de manques : les notions en analyse, en statistique descriptive, en probabilités, prennent la forme d'ilots de « *connaissances et de compétences associées* » ; la cohérence du domaine mathématique en pâtit.
À l'intérieur de chaque ilot, il est cependant demandé aux élèves de mener des raisonnements rigoureux. Nous déplorons cette « discrétisation » des notions qui ne répond aux besoins que des élèves à la recherche de règles et de méthodes à appliquer, sans leur offrir de raison de changer leur approche des mathématiques.
Toujours est-il que cela constitue une raison supplémentaire pour que les enseignants soient explicites dans leur discours à l'écrit comme à l'oral concernant les résultats qui sont admis et ceux qui ne le sont pas.

Enseigner le processus de modélisation pour donner un sens, une cohérence à la résolution de problèmes concrets en faisant appel aux outils mathématique du discret et du continu, installer la notion de fonction dans une variété de formes (définie sur un intervalle ou sur un ensemble discret, continue sur un intervalle, présentant des discontinuités sur un intervalle), construire des exemples et des contre exemples pour faire vivre les propriétés sur les suites et les fonctions, tout cela s'inscrit dans un temps long au fil des années de collège et de lycée et mérite de figurer dans les programmes officiels. Cela pose le problème de l'horaire hebdomadaire en mathématiques des élèves.

Et si on inversait l'ordre ?
Le domaine des probabilités fait essentiellement partie du monde du discret jusqu'à l'introduction des probabilités continues en classe de Terminale. Nous doutons que quiconque songerait à procéder différemment.

Dans le domaine de l'analyse, les programmes officiels se sont engagés vers un « tout continu » en classes de Troisième et de Seconde, dans lesquelles les fonctions sont définies sur des intervalles (rarement une réunion finie d'intervalle) et modélisent des phénomènes continus. Dans les exemples donnés en exposition de connaissances et dans les exercices, les valeurs prises par la variable sont majoritairement entières et positives. C'est essentiellement le tracé des courbes qui vient attester le continu de l'ensemble de définition, soutenu par le caractère continu de la grandeur variable.
Les suites sont introduites en classe de Première en tant que fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels, ce qui contredit la définition d'une fonction utilisée pendant les deux années précédentes, tout en ne se distinguant pas clairement de ces fonctions continues essentiellement mobilisées sur l'ensemble des entiers naturels.
La logique qui sous-tend les notions de fonction et de suite a des raisons de manquer de clarté aux yeux des élèves.

Et si on étudiait les suites avant les fonctions ?
Historiquement, les entiers strictement positifs ont préexisté aux autres nombres pendant des siècles ; Leibniz, avant d'inventer le calcul différentiel et intégral, raisonna en termes de différences entre deux valeurs entières de la variable ; le continu a questionné les mathématiciens dès l'antiquité et n'a reçu de définition que 2000 ans plus tard, dans le cas restreint des corps totalement ordonnés.
La simplicité du continu présenté dans les classes de Troisième et de Seconde est illusoire. Pourquoi ne pas faire travailler les élèves de collège sur des suites de nombres (réels) qui peuvent modéliser des phénomènes discrets comme continus ? Dans le cadre graphique, les « courbes continues » peuvent avoir leur place en tant que modèles de situations discrètes (comme c'est le cas dans d'autres disciplines avec des phénomènes d'évolution dans le temps en nombre entier de jours, d'années…) comme de situations continues.

Aujourd'hui, certains curricula à l'étranger investissent le thème des suites dès le collège et même auparavant.
En Ontario, dès la classe de Première et jusqu'en classe de Huitième (équivalent de nos classes de CP à Quatrième), la partie intitulée « *Modélisation et algèbre* » commence par : « *Régularités et suites. L'élève apprend à repérer et à décrire une régularité dans une suite non numérique à motif répété ou dans une suite numérique pour lui permettre ensuite de créer ou de prolonger des suites non numériques et numériques* »[87].
En Grande Bretagne, les suites quadratiques sont étudiées dès le Key Stage 3, équivalent des classes de 5e, 4e et 3e. La propriété utilisée est la suivante (et semble juste établie par la constatation que « ça marche » pour les premières valeurs) : « si la suite des secondes différences est constante de valeur a, alors la suite est quadratique, i.e. de la forme $u_n = 2an^2 + bn + c$ ». Un prélude dans le discret à la recherche de primitives.

Les arguments qui précèdent nous poussent à penser qu'inverser l'ordre dans l'étude des suites et des fonctions au collège est une piste à étudier. Les curricula de pays qui procèdent de la sorte peuvent constituer une des bases de travail.

[87] Le curriculum de l'Ontario édité par le ministère en 2005, sur le site : http://edu.gov.on.ca/fre/curriculum/elementary/math18curr.pdf

F. Conclusion de la partie V

Avec la résolution de problèmes concrets, le discret et le continu ont fait leur apparition dans les programmes officiels de collège et de lycée, non pas en tant que notions, mais en tant qu'adjectifs qui qualifient les types de phénomènes étudiés. Aux jeux intra mathématiques entre discret et continu se rajoutent ceux entre phénomènes discrets ou continus et leurs modélisations discrètes ou continues. Les problématiques d'enseignement s'en trouvent complexifiées.
Dans ces conditions, il devient encore plus important d'expliciter rigoureusement les enjeux liés au discret et au continu, dans différents cadres, avec des outils variés (numériques, à la main), par la construction d'exemples et de contre exemples dans le contexte intra-mathématique, et par le travail du processus de modélisation de phénomènes discrets et continus.

IV. Conclusion

A. Synthèse

Le discret et le continu suscitent des questions qui sont loin d'être simples, pour les étudiants et les élèves, les enseignants, ainsi que les mathématiciens. Le sujet du continu préoccupe les physiciens, les biologistes, les philosophes depuis des centaines d'années et il est toujours d'actualité (en témoignent l'ouvrage collectif « Didactique, épistémologie et histoire des sciences »[88], ainsi que les références que nous avons consultées pour notre partie I).

Pourtant, le continu semble « aller de soi » si l'on s'en tient aux programmes officiels de collège et de lycée. Nous ferons dans un premier temps une synthèse de ce que nos analyses révèlent à ce propos.

L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée s'ancre progressivement dans la résolution de problèmes issus de diverses disciplines. Nous discuterons dans un deuxième temps les conséquences de ce changement de paradigme mises en évidence par notre travail.

Bien que les limites entre discret et continu soient ténues (voir partie I), le discret et le continu sont généralement présentés au lycée (s'ils le sont) comme des notions bien différentes, voire à opposer. Une transposition didactique est certes nécessaire à ce niveau d'enseignement, pour laquelle les enseignants se trouvent cependant quelque peu démunis. Nous allons dans un troisième temps faire le point sur le niveau de conceptualisation dans lequel discret et continu s'inscrivent aujourd'hui et tâcherons de voir vers quel niveau ils pourraient s'inscrire demain, à curricula égaux.

Nous terminerons par un bilan sur le type de notion que discret et continu constituent au lycée aujourd'hui, en termes de notion Non Encore Formalisée (NEF).

1. Et si on faisait comme si le continu allait de soi ?

Jusqu'à l'introduction des suites en Première, la tendance des programmes officiels est d'aller vers un « tout continu » : il y est spécifié que les phénomènes étudiés sont continus, que les ensembles de définitions de fonction ne doivent plus faire l'objet de tâches ; on comprend (implicitement) que les fonctions sont définies sur les intervalles de $\mathbb{R}$ et y sont continues.
Les nombres réels sont les abscisses des points de la droite réelle, les fonctions continues sont celles dont la courbe est tracée sans lever le crayon.
Le continu semble « aller de soi », soutenu par la continuité des phénomènes étudiés, le continu de la droite et l'intuition du tracé sans lever le crayon.

Nos analyses montrent une réalité plus complexe et bien plus mitigée :

- L'étude de phénomènes discrets est bel et bien présente, dans les exercices concernant les fonctions linéaires et affines des manuels de Troisième, dans une partie des épreuves du DNB ; *de facto*, la plupart des phénomènes relevant des sciences économiques et sociale sont discrets (sans que leur modélisation continue ne fasse cependant l'objet d'un questionnement) ;

- Les fonctions sont essentiellement définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ (à part les suites bien entendu), tout en pouvant être « définies par un tableau de données », selon des programmes officiels de Troisième et de Seconde, ce qui est relayé par les manuels mettant en œuvre les dits programmes ;

[88] Ouvrage sous la direction de Laurence Viennot édité en 2008, pages 125 à 193.

- L'ensemble des nombres réels apparait comme celui de « tous les nombres » (sauf en Terminale S), alors que les tâches mobilisent essentiellement de « petits » entiers positifs ;

- Les représentations graphiques sont faites de points reliés « harmonieusement » ; pourtant, le tableur propose plusieurs façons de les relier… Et l'harmonie n'est pas un gage d'unicité, ce que l'expérience d'un tracé « à la main » peut confirmer ;

- Les suites géométriques semblent se prolonger « naturellement » aux fonctions exponentielles, cependant les élèves appliquent des « théorèmes en acte » faux dans des tâches algébriques les concernant ;

- Le tracé sans lever le crayon semble une approche intuitive satisfaisante de la continuité d'une fonction, mais il génère des incohérences sur la continuité en un point dans les manuels ;

- Les modèles continus semblent résulter simplement (magiquement, *sic*) de données en nombre fini, ou de modèles discrets dans les registres graphique et algébrique, ce qui n'est pas sans poser des difficultés en l'absence d'un questionnement sur le domaine d'adéquation du modèle.

Face à cette complexité, les auteurs de manuels et de capsules internet font des choix qui leurs sont propres et font preuve dans l'ensemble d'une certaine cohérence à l'intérieur de la mise en œuvre de ces choix.
Nos analyses tendent à montrer que la formation des enseignants ne leur permet pas d'appréhender les enjeux de ces choix, alors même qu'ils utilisent ces sources pour construire leurs séquences d'enseignement.
Quant aux élèves, chaque année, ils doivent s'adapter aux choix implicites de leurs manuels et de leurs enseignants, qui peuvent leur paraitre plus ou moins intelligibles. Eux aussi auraient besoin de cohérence.

2. Un changement de paradigme

En pratique, les exercices des manuels et des examens, la plupart des cas, « tombent juste » ; les modélisations de phénomènes discrets et continus sont des données et les élèves n'ont plus qu'à travailler à l'intérieur de ces modèles.
Tout semble être en place pour qu'il n'y ait pas d'écueil. Et pourtant…
Dans les manuels, les points isolés représentant une relation fonctionnelle sont le plus souvent reliés, mais chaque collection fait son choix - points reliés par des segments, par une courbe « lisse » - sans que celui-ci ne soit justifié ni explicité.
Les exercices modélisant un problème concret consistent souvent en des « habillages » différents d'un même problème mathématique, habillages qui n'en sont pas moins parfois problématiques, nous l'avons constaté pour chacun des thèmes analysés.
D'autres modélisations de phénomènes sont davantage pertinentes, c'est alors le processus de modélisation du phénomène réel (discret ou continu) par des objets mathématiques du discret ou du continu qui fait défaut.
Nous avons pu constater que les difficultés que ces modélisations soulèvent sont souvent liées aux aspects discret et continu du phénomène, de sa mesure et de sa modélisation, et qu'elles peuvent être sous estimées par leurs concepteurs.

Comment l'expliquer ?

Au lycée, l'enseignement des mathématiques présentées comme un édifice (plus ou moins) rigoureusement construit a cédé la place à celui de mathématiques présentées comme un ensemble

d'outils de résolution de problèmes. Ce changement de paradigme a déplacé la position du discret et du continu dans l'enseignement secondaire.
La résolution de problèmes nécessite leur modélisation ; les choix effectués dans le processus de modélisation entrainent la mobilisation de l'un ou l'autre « monde ». Ainsi, à deux « mondes » dans lesquels ranger des notions mathématiques, des procédures de résolution de problèmes intra mathématiques, s'est rajoutée une dimension nouvelle : celle d'outils d'appréhension du réel.

Les auteurs de ce changement de paradigme ont-ils été conscients de toutes ses conséquences sur les aspects didactiques de l'enseignement des mathématiques ?
Nos analyses de manuels, d'énoncés d'épreuves, de séance d'enseignement, de capsules internet, montrent toutes sans exception que ce changement est souvent source de maladresses, voire d'incohérences dans le discours mathématique et sur les mathématiques.
Le changement de paradigme aurait certainement nécessité d'être accompagné par une formation continue *ad hoc* des enseignants. En effet, la plupart d'entre eux ont été formés à « faire des math », pas à modéliser le réel par les mathématiques ; ils voient donc dans la résolution de problèmes une accroche pour « faire faire des math » aux élèves (selon leurs habitudes, rappelons que les pratiques des enseignants sont stables, voir Robert (2007)). C'est ainsi que les énoncés de Baccalauréat de la série ES, et dans une moindre mesure ceux de la série S, semblent être les mêmes, seul leur « habillage » change. Certains élèves qui s'en rendent compte nous en parlent.
Les épreuves de Baccalauréat évoluent timidement et incluent pour certaines des questions concernant les aspects de modélisation ; nous avons constaté qu'elles sont malheureusement sources de gêne et d'incompréhension pour les élèves.

Ici, le parallèle avec la réforme dite « des math modernes » s'impose : le paradigme d'enseignement ayant radicalement changé, les enseignants, peu ou pas formés, n'étaient pas armés pour faire face aux nouvelles questions mathématiques et didactiques qui en découlaient. Des cohortes d'élèves n'ont pas compris les fondements de ce qui leur a été enseigné dans leurs classes de mathématiques.
Si les malentendus ne sont pas aussi profonds qu'à cette époque, il n'en reste pas moins que lorsque les écueils liés au continu sont évités par un recours accru aux implicites, aux pseudo évidences, par un discours qui véhicule la « magie » (*sic*) des mathématiques, l'enseignement ne remplit pas ses objectifs de formation du citoyen et du futur étudiant. Nous y reviendrons.

3. Inscription dans un niveau de conceptualisation

Nous nous posions, dans la partie II de ce travail, la question de savoir quelle inscription dans un niveau de conceptualisation des notions de discret et de continu pourrait être envisagée au terme des trois années de lycée : ce qui pour l'une comme pour l'autre pourrait être mobilisable, disponible, en tant qu'outil et objet, au sein de quels types de tâches, si des définitions pourraient être adoptées.
Les constats qui suivent proviennent de nos analyses du relief de ces notions au lycée.

a) En tant qu'objet, aujourd'hui : le constat

Au lycée, aujourd'hui, « le discret » est lié à la possibilité de pouvoir « compter », énumérer, les éléments. Dans une moindre mesure, il est lié à l'existence, pour tout élément, d'un successeur.
Est-ce pouvoir « compter à l'infini » ? Ce n'est pas certain. Par exemple dans le thème des probabilités, nous avons constaté que c'est « le fini » qui peut servir d'ancrage pour « le discret » avec les élèves, par opposition à « l'infini ».
En résumé, au cours des années de lycée, le discret est exemplifié par l'ensemble $\mathbb{N}$ et/ou par les ensembles finis.
C'est donc tout naturellement que les suites s'invitent dans le discret : les termes sont indexés par les éléments de $\mathbb{N}$, rangés dans un ordre (discret), on peut les « compter ». De plus, avec les relations de

récurrence et les recherches de signe de différences $u_{n+1} - u_n$, la notion de successeur est souvent mobilisée.

« Le continu » a pour support les intervalles de $\mathbb{R}$. Pour les élèves, il n'est cependant pas certain que les intervalles de $\mathbb{R}$ soient perçus en tant qu'objets continus dans le sens d'objets « sans trous » et « sans sauts ». Nous l'avons vu.
Nous avons constaté que c'est l'infinité des nombres appartenant aux intervalles qui peut servir d'ancrage pour le continu chez les élèves – ce qui n'est pas sans poser le problème de l'infini dénombrable qui, lui, est discret.
La divisibilité à l'infini est parfois sollicitée dans les manuels, par le biais de deux à quatre étapes de subdivisions, qui peuvent être poursuivies par une expérience de pensée - le sont-elles dans les pratiques ?
Donc, d'une façon générale, « le continu » est fortement lié à « l'infini » et il est exemplifié par les intervalles de $\mathbb{R}$.
La notion de continuité vient en Terminale incarner le continu dans le « tracé sans lever le crayon », support intuitif du continu selon nos analyses de la partie I.
Enfin, dans des exercices faisant intervenir un contexte, intra ou extra mathématique, les grandeurs « durée » et « longueur » sont les supports principaux du continu.

Les fonctions sont généralement définies sur un intervalle, continues et dérivables. Nous avons vu que, d'un point de vue théorique, elles s'inscrivent dans le continu à plusieurs points de vue ; nos données montrent que, tout de même, pour un nombre non négligeable d'élèves et de futurs enseignants, les fonctions définies sur un intervalle sont perçues comme des suites. Elles servent malgré tout aux enseignants, dans le registre graphique, à « glisser » (plus ou moins rigoureusement) du discret fini au continu, que ce soit des suites géométriques aux fonctions exponentielles, ou des variables aléatoires discrètes aux variables aléatoires continues.

b) En tant qu'outil, aujourd'hui : le constat

Les analyses de manuels montrent que les mots « discret » et « continu » sont peu utilisés. Ils figurent explicitement dans le chapitre sur les probabilités continues ; une seule collection les convoque à propos des représentations graphiques de fonctions.
Les sujets de Baccalauréat et les manuels les mobilisent parfois pour nommer un type de modélisation ; c'est d'ailleurs l'utilisation que le programme officiel en fait : qualifier les phénomènes et leur modélisations possibles. Nommer le type de modélisation permet de circonscrire le domaine mathématique dans lequel les élèves vont travailler et les outils mobilisés pour résoudre les tâches.

En l'absence des mots « discret » et « continu », l'utilisation des notations et des notions spécifiques à l'un ou à l'autre guide les élèves.
Le discret et le continu sont donc des outils mobilisables à travers leur nom ou celui des notions qui font partie du monde correspondant, et les notations qui leur sont associées. Tout ceci induit la mobilisation de procédures de résolution des tâches, essentiellement spécifiques à l'un ou à l'autre monde.

Cependant, que ce soit sur les thèmes des suites, des fonctions ou des probabilités discrètes et continues, une partie importante du vocabulaire et des notations est commune, concernant des notions qui se recouvrent partiellement. Dès lors, les notions n'étant pas suffisamment clairement différenciées, en tant qu'objet et en tant qu'outil, nous avons constaté de nombreuses difficultés d'élèves et de futurs enseignants.

c) Vers un niveau de conceptualisation

À l'écrit, au lycée, les notions de discret et de continu ne sont l'objet d'une définition (éventuellement) que pour qualifier les caractères statistiques.
Nous avons vu que des définitions émergent tout de même à l'oral au moment de leur utilisation explicite pour qualifier le type de variable aléatoire en Terminale.

Il apparait qu'au lycée, sans formalisation possible, c'est essentiellement par opposition des objets de l'un et de l'autre (dans différents cadres et registres de représentation) et de leur utilisation, que les notions de discret et de continu peuvent atteindre un niveau de conceptualisation conséquent, quoiqu'inévitablement partiel.
Dans le cadre numérique, le discret est essentiellement véhiculé par les ensembles d'entiers (finis ou infinis) et le continu par les intervalles de nombres réels.
Dans le cadre graphique, discret et continu s'opposent : ensembles de points isolés versus « courbes continues ».
Dans le cadre de l'analyse, ils s'opposent à travers suites versus fonctions (continues).
Dans le cadre des statistiques, c'est à travers le type de caractère étudié (et les types de graphiques correspondants) qu'ils s'opposent.
Dans le cadre des probabilités, les variables aléatoires sont explicitement discrètes ou continues et sont représentées graphiquement par des diagrammes en bâtons ou des courbes de fonction continue.

Nous soulignons dans nos propositions de la partie V que le discret et le continu pourraient être davantage explicités dès qu'ils sont présents, de façon à clarifier auprès des élèves ce qui relève de l'un et de l'autre monde : les analogies et les ruptures dans les définitions des objets mathématiques, les propriétés, les types de tâches et les procédures de résolution associées, sans oublier dans les aspects rédactionnels qui, nous l'avons vu, sont aussi source de difficultés pour les élèves.
Nous faisons l'hypothèse que les connaissances concernant les notions qui figurent dans l'un et l'autre monde seraient alors davantage disponibles. Et que ce faisant, le niveau de conceptualisation du discret et du continu se trouverait élevé de par la présence de notions, de notations, de procédures de résolution de problèmes que les élèves pourraient « ranger » dans l'un ou l'autre monde.

4. Apport théorique

Par opposition aux notions de nombre réel, de limite, d'infini, de point, de continuité, les notions de discret et de continu ne sont que rarement nommées au lycée (mis à part celle de continu qualifiant une fonction), ne font l'objet d'aucune propriété énoncée ; mais elles partagent avec les notions précitées le fait de ne pas être rigoureusement formalisées.

À la lumière de notre partie I, la notion de discret est bien une notion Non Encore Formalisée (NEF) au lycée.
Celle de continu, qualifiant les fonctions, est elle aussi une notion NEF.
Par contre, celle de continu dans sa généralité (en dehors du cas des corps totalement ordonnés) pourrait bien être une notion Non Encore Formalisable (notion qui peut être nommée NEF 2), voire une notion qui ne sera jamais (« *NEver* » en anglais) Formalisable (notion qui peut être nommée NEF 3).

Ces façons de formaliser le « non formalisé » et le « non formalisable » mettent en lumière la complexité spécifique de la notion de continu. Dans ces conditions, on peut comprendre que les multiples difficultés d'enseignement rencontrées au lycée en présence d'une telle notion soient inévitables.

B. Discussion

L'étude didactique du discret et du continu en fin de collège et au lycée constitue un terrain vierge que nous avons essayé de défricher afin de commencer à en dessiner le « relief [89]».

L'étendue de la tâche a guidé nos choix. Du point du vue du cadre théorique, la théorie de l'activité nous a permis d'appréhender la diversité des aspects du sujet de cette thèse en tenant compte des mathématiques savantes, de celles à enseigner, des aspects cognitifs des élèves, des pratiques des enseignants.

Les outils d'analyse des contenus que ce cadre intègre et fédère nous ont permis d'analyser les curricula, des manuels, des copies d'élèves, des entretiens avec eux, des capsules vidéo, une séance en classe, en se focalisant sur des points spécifiques au discret et au continu, déterminés par notre analyse épistémo-mathématique préalable.

Pour compléter ces outils, nous avons été amenée à développer des outils méthodologiques permettant de comparer les aspects du discret et du continu dans les mathématiques savantes puis dans les mathématiques à enseigner (pour les thèmes de l'analyse et des probabilités).

Ce choix d'analyser des données issues d'un large spectre nous a amenée :

- À ne pas faire une étude quantitative d'envergure sur les élèves et les enseignants, qui nous parait cependant souhaitable, dans un deuxième temps ;
- À focaliser notre étude sur l'enseignement des suites et des fonctions ainsi que celui des probabilités, mettant quelque peu de côté celui des nombres, et davantage encore celui de l'algorithmique et des mathématiques discrètes.

La notion de densité a finalement été assez peu mobilisée dans nos analyses ; la divisibilité à l'infini – densité au sens de l'ordre – y apparait à quelques reprises, en tant que précurseur du continu.
La distinction entre les notions de dense et de continu n'est pas rentré en ligne de compte dans ce travail, du fait (au moins en partie) qu'il concerne les thèmes spécifiques des suites et des fonctions (continues sur un intervalle) ainsi que celui des probabilités, au niveau lycée. Il peut cependant s'avérer pertinent de tenter des analyses avec le filtre plus fin de discret/dense/continu ou celui encore plus fin de fini/discret infini/dense dénombrable/dense non dénombrable/continu.

Finalement, la catégorie de notion Formalisatrice, Unificatrice et Généralisatrice (FUG) n'a pas été retenue pour les notions de discret et de continu. En effet, l'une et l'autre ne sont pas formalisables au lycée. Leurs caractères unificateur et généralisateur pourraient être questionnés cependant.
Pour un niveau d'enseignement qui inclut un cours de topologie, la question de savoir si la notion de discret, et celle de continu dans le cas des corps totalement ordonnés, sont des notions FUG, mérite d'être posée.

Nous avons choisi d'étudier les notions de discret et de continu sous l'angle de notions Non Encore Formalisées (NEF). Cet angle nous parait, *a posteriori*, approprié à ces deux notions dont l'étude a permis, en retour, d'affiner la définition de notion NEF. Ainsi, les catégorisations en NEF 1, 2, 3, pourraient-elles servir de filtre pour l'étude didactique d'autres notions NEF.

[89] Voir partie II.

Nous aurions pu analyser le discret et le continu sous l'angle de la classification des « *objets de savoir* » proposée par Chevallard (1991).
Il range dans ceux-ci ce qu'il nomme les « notions mathématiques » qui sont, écrit-il, « *pleinement (candidats à être des) objets d'enseignement* » ; en particulier, ils font l'objet d'évaluations directes.
Par ailleurs, il y range les « *notions paramathématiques* ». Ce sont des « *notions outil de l'activité mathématique* », à un niveau donné dans le cursus : en effet, ces notions peuvent être étudiées en tant qu'objet à d'autres moments du cursus. Ces notions sont, dit-il, en général préconstruites et introduites par monstration[90]. Elles « *ne font pas l'objet d'un enseignement* » bien que « *nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques* ». Elles ne font pas non plus l'objet d'évaluations directes.
Enfin, il y range les « *notions protomathématiques* ». Celles-ci « *sont mobilisées implicitement par le contrat didactique* ». Ces notions ont un caractère implicite qui s'exprime « *par le fait qu'elles « vont de soi* » ». D'après une note de synthèse de Mercier (2002), « *tout se passe comme s'il n'y avait là rien à savoir (et rien à enseigner sinon à apprendre) mais seulement à faire ce qu'il faut* ». Une notion protomathématique peut cependant devenir, par un discours explicite, une notion paramathématique. Mercier considère que ces notions se construisent dans la pratique, et relèvent de compétences et de capacités.

La distinction entre notions para- et proto- mathématiques que fait Chevallard est donc toute relative : elle dépend du niveau d'enseignement et du discours (des manuels, des enseignants) qui entoure la notion.

Les notions de discret et de continu sont essentiellement mobilisées implicitement dans les programmes. Elles seraient donc des notions proto-mathématiques qui, selon les choix des contenus enseignés et le discours de l'enseignant, pourraient relever de notions paramathématiques.
Cette courte analyse des notions de discret et de continu selon le filtre de la catégorisation de Chevallard mériterait d'être poursuivie afin d'investiguer les spécificités de ces notions et de leur enseignement.

[90] Wittgenstein, L. (1976). *De la certitude.* Gallimard.

C. Perspectives

Nous disposons maintenant d'une étude du relief et d'outils méthodologiques sur lesquels appuyer de plus amples recherches concernant les notions de discret et de continu.

Une étude portant sur des effectifs de lycéens plus importants, sur un temps long, permettrait d'évaluer les effets d'un enseignement spécifique du discret et du continu. Par exemple, une expérimentation sur les trois années de lycée pourrait cibler les thèmes : fonctions, suites, probabilités, nombres, en tenant compte des propositions faites en partie V, et en proposant aux élèves chaque année quelques tâches spécifiques, à élaborer. Les élèves d'une classe comportant les mêmes individus sur les trois ans pourraient être comparés à ceux d'une classe témoin. Les critères de comparaison sont à établir avec finesse ; un travail en liaison avec la première année d'université peut être envisagé.

Des études qui figurent dans notre travail mériteraient d'être approfondies.
Citons en trois :

1) Nous avons constaté qu'un nombre important d'élèves et d'étudiants différencie peu suites et fonctions. Pour ces élèves et étudiants, en quoi se différencient-ils : par leur nom et les notations associées, par les procédures de résolution de tâches… ? Les réponses à ces questions peuvent donner aux chercheurs et aux enseignants de nouvelles pistes pour favoriser les apprentissages dans le domaine de l'analyse.

2) Au lycée, la droite des réels représentée par l'axe des abscisses, sert à « définir » les nombres réels ; par ailleurs, le tracé d'une courbe sans lever le crayon sert à « définir » la continuité d'une fonction.
   Ces « définitions en acte » dans le registre graphique semblent « aller de soi », du moins pour une première approche des notions visées au lycée.
   Quelle perception du continu engendrent-elles effectivement chez les élèves ? L'une des nombreuses recherches en didactique sur les nombres réels corrobore l'hypothèse selon laquelle la droite réelle ne peut être un bon support intuitif du continu que si celle-ci est perçue comme une représentation inappropriée de l'ensemble des rationnels ou de celui des décimaux (Durand-Guerrier, 2016).
   Selon les tâches proposées aux élèves, ces « définitions » pourraient remplir leur rôle de façon satisfaisante, ou pas. N'oublions pas que le continu est aussi présent au lycée dans les phénomènes continus étudiés. Il conviendrait de croiser les perceptions du continu engendrées par différentes sources (définitions, tâches…) ; sont-elles cohérentes, suffisamment correctes pour le niveau d'enseignement visé ?

3) La réflexion sur les programmes officiels pourrait être poursuivie en construisant une progression dans laquelle les suites sont étudiées avant les fonctions (continues). Ce serait l'occasion d'envisager l'introduction de problèmes relevant de mathématiques discrètes, dans lesquelles les énoncés à l'appropriation souvent simple sont l'occasion de mise en place de raisonnements complexes.

Quelques réflexions théoriques :

1) Nous avons amorcé une réflexion sur les notions NEF.
   De nombreuses questions se posent :

- Quelles sont les notions NEF (au lycée par exemple) ?
- Sont-elles NEF 1, 2, 3 ?
- Quelles problématiques d'enseignement génèrent-elles ?
- Quelle méthodologie mettre en place pour les étudier et favoriser de meilleurs apprentissages des notions les incluant ?

2) La place de la perspective locale dans le thème des suites numériques pourrait être davantage étudiée. Nos premières analyses nous poussent à penser qu'elle se loge dans les relations entre un terme et le suivant.
   Le local pourrait-il être une passerelle entre les mondes du discret et du continu dans le domaine de l'analyse ? Confronter les élèves, les étudiants, à un travail au niveau local dans les deux mondes en en explicitant les différences serait-il un levier supplémentaire dans l'enseignement de l'analyse ?

L'élaboration de ressources :
Notre travail montre que, sur les thèmes que nous avons sélectionnés pour le fait qu'ils comportent des aspects du discret et du continu, l'élaboration d' « activités » d'introduction, de capsules internet, d'expositions de connaissances et même d'exercices, peut s'avérer délicate. Il nous parait indispensable que ces ressources soient réalisées par une équipe d'enseignants du second degré, de chercheurs en didactique et en mathématiques, éventuellement de formateurs, afin de trouver des moyens de concilier, dans les contenus, les exigences de rigueur et d'accessibilité pour les élèves.

En particulier, nos analyses montrent qu'il serait utile de mener une réflexion sur ce qu'il serait satisfaisant de présenter sur les notions de discret et de continu à des élèves de lycée – en évitant que la distinction discret/continu ne soit assimilée à celle (erronée) de fini/infini.

La formation des enseignants :
Les enseignants sont soumis à différentes contraintes, dont celles de finir le programme dans le temps qui leur est imparti, de faire en sorte que leurs élèves « réussissent » leurs évaluations au cours de l'année et les examens nationaux. Leur marge de manœuvre est étroite, compte tenu du volume horaire des cours de mathématiques. Leurs choix sont largement guidés par ces contraintes d'une part, et d'autre part les contenus des manuels et des examens. D'où l'importance de l'élaboration de ressources de qualité qui prennent en compte ces incontournables contraintes.

Notre travail souligne, entre autres, l'importance du discours de l'enseignant, du méta qu'il apporte dans la classe de mathématiques, lorsque des thèmes faisant intervenir le discret et le continu sont abordés. Il montre par ailleurs qu'une grande partie des étudiants en Master MEEF ont des connaissances pauvres concernant le discret et le continu sur le thème de l'analyse ; les enseignants en poste ont des pratiques diverses selon qu'ils soulèvent les questions épineuses ou pas. Si leurs pratiques peuvent être imputées aux contraintes du métier et à une adaptation au public d'élèves, elles peuvent aussi être le fruit d'habitudes et d'une méconnaissance de certains enjeux d'enseignement, tel que celui de la modélisation (voir partie V).

Ce faisceau d'arguments montre la nécessité d'une formation initiale et continue conséquentes, qui passe par l'édition de ressources de qualité, sur lesquelles adosser un travail des enseignants sur leurs pratiques qui s'inscrit dans un temps long. Les « laboratoires de mathématiques en établissement » tels que décrits dans la première note de cadrage concernant la mise en œuvre du plan Villani-Torossian[91], en seront peut-être un ingrédient. Ils sont décrits comme « *un lieu de formation permanente et de réflexion disciplinaire, didactique et pédagogique des équipes de mathématiques* » et supposent « *une ouverture partenariale importante et permanente (IREM, Université, Maisons pour la science, Direction des services départementaux de l'éducation nationale, organismes de recherche, etc.)* ». Le temps long y est pris en compte (il est question de formation permanente, il serait difficile de faire plus long…) ; le travail en équipe d'enseignants, en partenariat avec la recherche, l'est aussi.

[91] Note de cadrage du 5 juillet 2018.

Les besoins des élèves :
Les analyses de copies effectuées dans ce travail montrent que les élèves sont plus ou moins gênés par les énoncés comportant des implicites ou des incohérences. Certains répondent en étant au plus proche de questions rencontrées au cours de l'année et qu'ils estiment similaires, quitte à tomber dans d'importants contre sens. D'autres cherchent une réponse appropriée, avec plus ou moins de succès.
Notre expérience sur le terrain nous a montré que les élèves qui cherchent le plus à faire des liens entre les différents thèmes mathématiques rencontrés au fil des ans, à comprendre le pourquoi et le comment de ce qu'ils font, qui confrontent les réponses à un problème à la question initiale, sont souvent les plus ouvertement impactés par les implicites et les incohérences. Ils ont davantage besoin d'apports de type méta que d'autres. Les besoins des élèves seraient-ils variables ?

D'après Adamson et al. (2010)[92] :

- Il y aurait les étudiants à l'approche que ces auteurs qualifient de « superficielle » : ces étudiants tâchent de « *mémoriser des détails ou des termes clé afin d'être capables de répondre à des questions ultérieures* ». Ils ont des difficultés à restituer le message contenu dans ce qu'ils ont appris ;
- Il y aurait ceux à l'approche dite « stratégique », dont le but est d'avoir les meilleurs résultats possibles. Ils travaillent beaucoup, que ce soit par de l'apprentissage par cœur ou par un travail tourné vers la compréhension, ils sont efficaces et sont « *attentifs aux indices* » ;
- Enfin, il y aurait ceux à l'approche que les auteurs nomment « en profondeur », qui cherchent à comprendre le message contenu dans ce qu'ils travaillent.

Ainsi selon leurs goûts, leurs capacités naturelles, leurs appétences, la façon dont la discipline leur a été présentée, enseignée, les élèves n'ont pas tous les mêmes besoins. Loin de nous l'idée de les stigmatiser, au contraire : un des objectifs de l'enseignement n'est-il pas que les élèves à l'approche « superficielle » évoluent vers une approche « stratégique », voire « en profondeur » ?

Alors comment dire des choses sur des notions NEF telles que le discret et le continu, qui ne se transforment en méthode et en tâche que de façon lointaine, à destination des élèves à l'approche « superficielle » ou « stratégique » ? Ces notions aux importantes ramifications épistémologiques et philosophiques pourraient-elles contribuer à éveiller la curiosité de ces élèves quant à la discipline mathématique, afin qu'elle ne soit pas seulement le lieu de simples applications de procédures, voire de « recettes » ?
Quel discours à la fois rigoureux et cohérent tenir à destination des élèves à l'approche « en profondeur » ? Notons que ces élèves peuvent être découragés par un manque de réponses à leurs questions. Le fort taux d'échec scolaire des enfants à haut potentiel est un fait avéré ; l'ennui à l'école voire la colère envers les adultes qui ne leur apportent pas suffisamment de réponses est un facteur qui contribue de façon importante à ce phénomène. Par ailleurs, si un élève veut suivre un cursus post Bac comportant des mathématiques, des conceptions erronées risquent d'impacter ses apprentissages[93].

Si le discours tenu aux élèves sur les mathématiques, qu'il provienne des manuels, des sites internet, des enseignants, induit une composante non négligeable de croyances (« ça marche comme ça », « c'est comme ça », « on a le droit de faire ceci mais pas cela », « c'est magique »…) on est loin de l'éducation du sens critique de ces futurs adultes. Démystifier l'ordinateur et la calculatrice et les remettre à leur place d'outil ancré dans le discret ; expliciter ce qui différencie et ce qui unifie le discret et le continu dans la pratique des mathématiques, les habitudes, les conventions, les propriétés, les procédures de résolution de problèmes, le processus de modélisation ; présenter les mathématiques comme un corpus d'objets qui ont des raisons d'être, au sein d'une discipline vaste et vivante, dans laquelle certaines questions n'ont pas encore de réponse. Ce sont autant d'exemples de façons de lutter contre le

[92] Adamson et al. (2010) pages 278 et 279
[93] Voir à ce propos Bloch, I. (2018). Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. Petit x 106. Pp 65-77.

désamour d’une part non négligeable d’élèves pour les mathématiques ; de lutter contre la pensée formatée du citoyen et d’ouvrir les jeunes à la complexité du monde.

Bibliographie

Abboud-Blanchard, M., Robert, A., Rogalski, J. et Vandebrouck, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, 18*.

Adamson, B., Bray, M. et Mason, M. (2010). *Recherche comparative en éducation : approches et méthodes*. De Boeck Université.

Artigue, M. (2008). Continu, discontinu en mathématiques. Quelles perceptions en ont les élèves et les étudiants ? Dans *Didactique, épistémologie et histoire des sciences : Penser l'enseignement*. Presses Universitaires de France, 151-173.

Artigue M., Brugier F., Raymond-Barroux D. (2010). Compte rendu de l'atelier 86 des journées de l'APMEP.
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/86_Baroux_Artigue_Modelisation_interdisciplinarite.pdf

Artigue M., Dartois Y., Pouyanne N., Rumelhard G. (2009). Modélisation et interactions entre mathématiques et biologie : l'expérience du Master professionnel « Didactique » à l'université Paris-Diderot -Paris 7. In, Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) *Approches plurielles en didactique des mathématiques*. Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot, 277-293.

Boniface, J. (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse.* Ellipses.

Burgermeister P. F. et Dorier J. L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande*. Petit x, 91,* 5 -24.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble.

Cousquer, E. (1994). *Histoire du concept de nombre*. IREM.

Dedekind (2008). *La création des nombres*, introduction, traduction et notes par H. Benis Sinaceur, Vrin.

Demailly, J.P. (2010). *Puissances, exponentielles, logarithmes, de l'école primaire à la terminale*.
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/log_exp.pdf.

Derouet, C. (2016), *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot.

Dhombres, J. (1978). *Nombres, mesure et continu*, Cedic / Fernand Nathan.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Durand-Guerrier, V. (2012). Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques. Mélika Ouelbani. *Des mathématiques à la philosophie. Regards Croisés : Didactique, Histoire et Philosophie.*, Université de Tunis, Faculté des Sciences Humaines et Sociales, 163-183.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an educational challenge for undergraduate students*. International journal of Research on Undergraduate Mathematics Education*. Springer.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Fréchet, M. (2006). Achille ne rattrapera jamais la tortue. *Bulletin de l'APMEP 463*.

Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, 88, 27-47.

Groupe AHA (1999). *Vers l'infini pas à pas. Guide méthodologique*. De Boeck Wesmael.

Hanke, E. (2018). "A function is continuous if and only if you can draw its graph without lifting the pen from the paper" – Concept usage in proofs by students in a topology course. *Proceedings of INDRUM 2018.* University of Agder and INDRUM.

Henry M. (2003). Des lois de probabilités continues en Terminale S, pourquoi et pour quoi faire ? *Repères IREM 51,* 5-25.

Henry M. (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. *Repères IREM 74,* 67-89.

Klein, E. (1996). *Le temps*, Flammarion.

Largeault, J. (1993). *Intuition et intuitionisme*, Vrin, collection « Mathesis ».

Longo, G. (1999). The math continuum: from intuition to logic, In Jean Petitot, Franscisco J. Varela, Barnard Pacoud & Jean-Michel Roy (eds.), *Naturalizing Phenomenology*. Stanford University Press.

Mercier, A. (2002). La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques*, Revue Française de Pédagogie 141*.

Pariès, M., Pouyanne, N., Robert, A., Roditi, E. et Rogalski, M. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée. *Document pour les enseignants n°9*, IREM Paris 7, 9-11.

Pouyanne, N. et Robert, A. (2004). Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments de formation. *Document pour la formation des enseignants - cahier bleu du LDAR n°5*. Université Paris 7.

Robert, A. (1995). *L'épreuve sur dossier à l'oral du Capes*. Tome I, Géométrie. Paris : Ellipses.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A. (2007). Stabilités des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences de formation. *Recherche en didactique des mathématiques, 27*(3), 271-312.

Robert, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert, A. et Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(2), 145-176.

Robert, A. et Vandebrouck, F. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 37*(2-3), 333-381.

Robinet, J. (1986). Les réels : quels modèles en ont les élèves ? *Cahier de didactique* n°21, IREM Paris 7.

Roditi E. (2009). L'histogramme : à la recherche du savoir à enseigner. *Spirale 43*, 129-138.

Rogalski M. (2001) avec Robert A. et Pouyanne N. *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie.* Paris : Ellipses.

Salanskis, J. M. Continu et discret. *Encyclopædia Universalis*.
http://www.universalis.fr/encyclopedie/continu-et-discret/Encyclopaedia Universalis

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique.* Éditions Petra.

Sinaceur, H. (1991). *Corps et modèles : essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Vrin.

Tangente (2002). *L'infini, le fini, le discret et le continu*. Hors-série n°13.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse, Octarès.

Vandebrouck, F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *16*, 149-185.

Vergnaud, G. (1989). La formation des concepts scientifiques. Relire Vygotski et débattre aujourd'hui. *Enfance, 42*(1).

Vergnaud, G. (2007). Représentation et activité : deux concepts étroitement liés. *Recherche en Éducation*, *4*, 9-22.

Viennot, L. (2008). *Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Penser l'enseignement.* Presses Universitaires de France, 2008.

Vivier L. (dir.), Mac Aleese J., Parzysz B., Paulou F., Sotura B. et Le Yaouanq (2017). *Les probabilités et la statistique au lycée.* Besançon : Presses universitaires de Franche Comté.

Vygotski, L. (1986). *Pensée et langage*, Paris, Messidor/Éditions Sociales.

Bibliographie complémentaire

Bair, J et Henry, V (2009). L'exponentielle : une fonction à plusieurs facettes. *Losanges* n°3, 31-37.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 217-235.

Bridenne, M., Galeazzi, L., Gardes, D., Ghommid, F., Jovignot, J., Mercier, P.A., Regnaud, A. (2015). Un exemple d'enseignement des suites en série scientifique. *Feuille de Vigne*, 133, 12-28. IREM de Dijon.

Castela, C. (1996). La droite des réels en seconde : point d'appui ou enjeu clandestin ? IREM de Rouen.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. *Petit x,* 67, 31-61.

Coppé, S.,Dorier J.L. et Yavuz, I. (2006). Éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x 71*, 29-60.

Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Elvira Paez Murillo, R., Rousse, S., Vandebrouck, F., Verdugo, P., Vivier, L. (2016). Espace de Travail Mathématique, In Y. Matheron, G. Gueudet et al. (Ed.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015*, 383-420. La Pensée Sauvage.

Derouet, C. et Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM*, 48.6, 757-773.

Feferman, S. (2009). Conceptions of the continuum. In : *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, n°51, 2009/1. Le continu mathématique. Nouvelles conceptions, nouveaux enjeux, sous la direction de Michel De Glas. 169-189.

Fleury, G. (2006). Temps discret ou temps continu ? *Bulletin de l'APMEP*, *471*.

Friedelmeyer, J. P. (2005). Comment introduire les fonctions logarithmes et exponentielles au lycée ? *Bulletin de l'APMEP,* 460, 645-664.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM, 59*, 5-41.

Le Thai Bao, T.T. (2012). Notion de limite et décimalisation des nombres réels. Le cas de l'enseignement secondaire au Viet Nam. *Petit x, 89*, 33-50.

Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formation des maitres*. (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.

Pontille et al. (1996). Et pourtant ils trouvent… *Repères IREM, 24*, 11-34.

Rezard, H. (1994). De la reproduction exponentielle au logarithme népérien. *Repères IREM*, 15, 75-90.

Robert, A. (1982). Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherche en didactique des mathématiques, 3*(3), 305-341.

Robinet, J. (1983). Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite d'une fonction. *Recherche en didactique des mathématiques, 4*(3), 223-292.

Rogalski, M. (1990). Les nombres réels : comment en faire parler en T.D. avant de les enseigner en cours ? In *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année. Principes et réalisation.* Commission inter IREM Université, 163-170.

Simard, A. (2012). Proportionnalité en CM2 et en sixième. *Petit x, 90*, 35-52.

Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels*. (Habilitation à diriger les recherches). Université Paris Diderot.

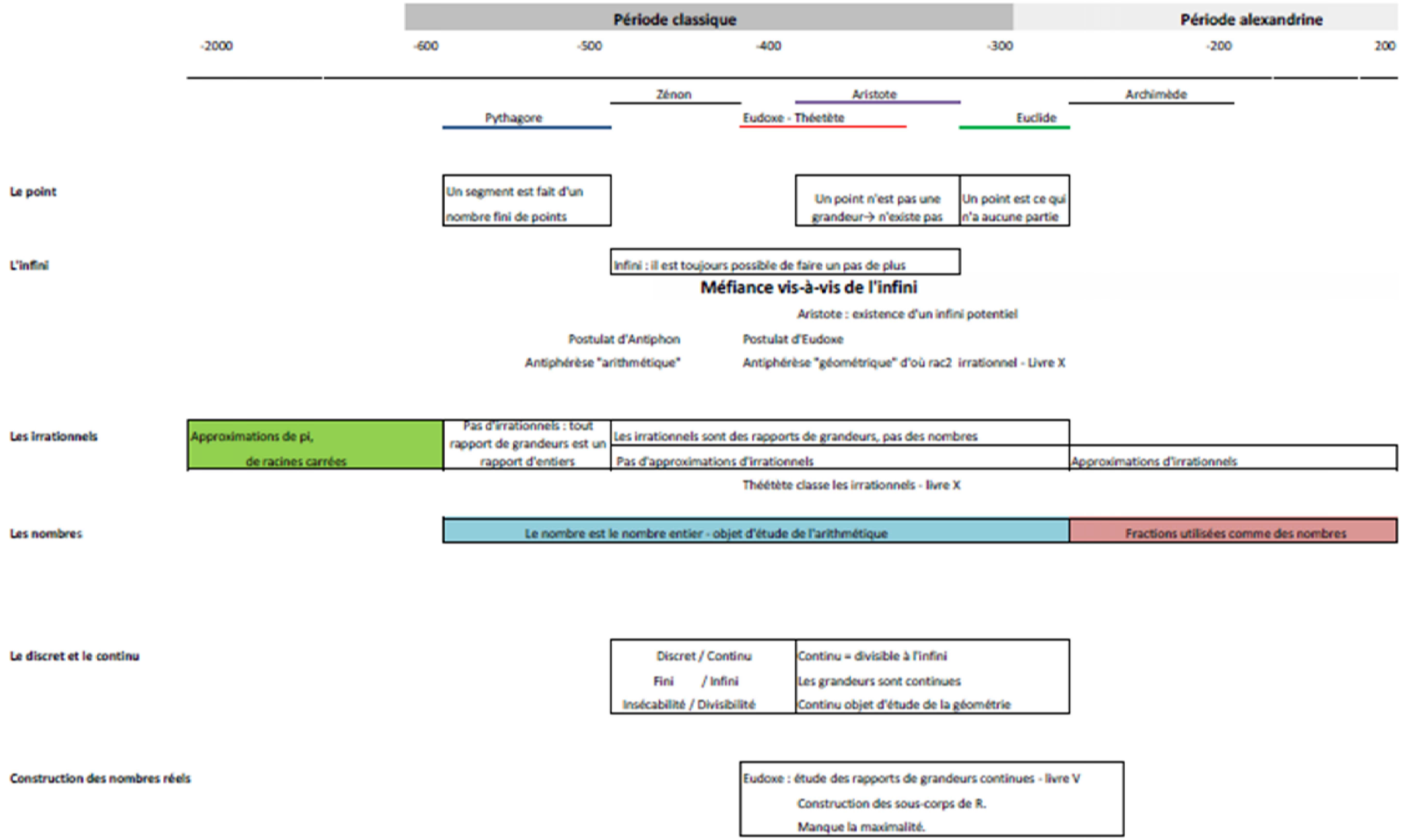
Weigand, H.G. (2004). Sequences – Basic elements for discrete Mathematics. *ZDM*, 36.3, 91-97.

Weigand, H.G. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM*, 46.4, 603-619.

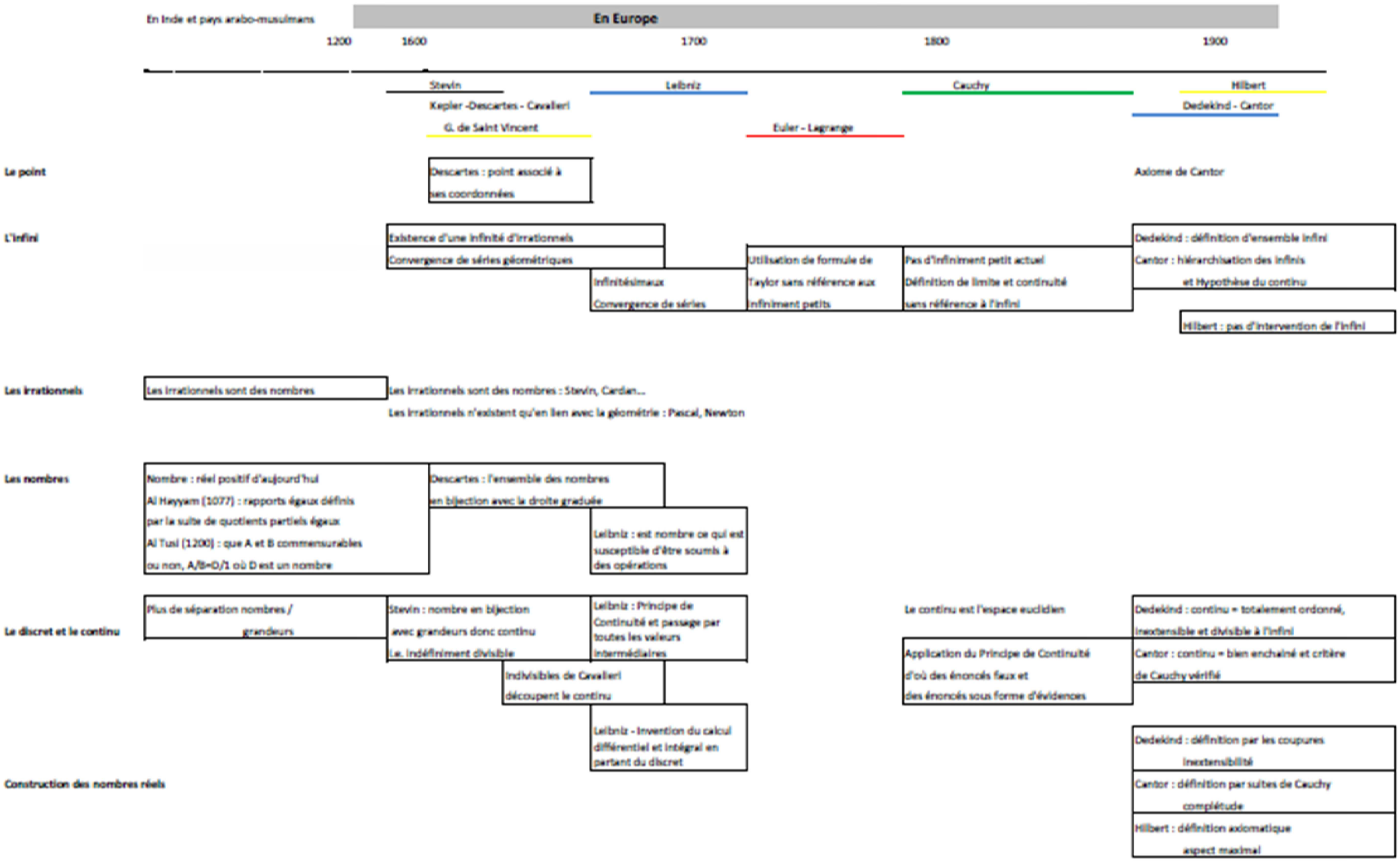
Annexes

Annexe 1 : Frise d’une histoire du continu à travers celle des nombres

Une histoire du continu à travers celle des nombres (1)



Une histoire du continu à travers celle des nombres (2)



Annexe 2 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Transmath » de 2003, classe de Troisième, édition Nathan (programme de 1999)

i. Manuel « Transmath » de 2003 : chapitre fonction linéaire

L' « activité » 1 introduit les fonctions linéaires dans un contexte géométrique continu : des aires sont fonctions de longueurs. Cependant les valeurs prises par les mesures de longueurs dans les tableaux sont des entiers.

L' « activité » 2 fait constater l'alignement avec l'origine de quatre points (dont $A(1;2)$) appartenant à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x$, à coordonnées entières positives et négatives. Elle demande de conjecturer ce qui se passe pour « *tous les autres points de coordonnées* $(x;2x)$ ».
Passer de quatre entiers à « tous les nombres » est certes un grand pas, mais le résultat est ensuite abordé dans sa généralité.
C'est d'abord la réciproque de la conjecture qui fait l'objet d'une démonstration : le théorème de Thalès est mobilisé pour montrer qu'un point P d'abscisse positive p de la droite (OA) a pour ordonnée $2p$.
Pour démontrer la conjecture, l'énoncé fait considérer le point Q de coordonnées $(q;2q)$ qui est placé juste en-dessous de la droite (OA). Il demande d'expliquer pourquoi Q est mal placé. Ce qui est attendu est certainement un raisonnement par l'absurde.

Dans l'exposition de connaissances, la fonction linéaire de coefficient a est définie par l'association « *à chaque nombre x de son produit par a c'est-à-dire ax* ». Le mot « chaque » fait à la fois office de quantificateur et d'ensemble de définition (implicitement l'ensemble des réels). La fonction est définie dans son aspect correspondance par le programme de calcul et la formule correspondants.

Un exemple est ensuite exposé : « *A un triangle équilatéral de côté x cm, on associe son périmère $p(x)$ en cm.* ». Un tableau de valeurs côtoie une expression algébrique, deux calculs dans le cadre numérique et une figure.
Bien qu'il ne soit pas question explicitement de « modèle », le domaine d'adéquation est abordé par une remarque : « *on peut calculer $p(-5) = -15$, bien que cela n'ait pas de sens dans cette situation* ».

La définition de la représentation graphique d'une fonction linéaire dans un repère est qu'elle est « *constituée des points de coordonnées* $(x;ax)$ ». Rien n'indique cette fois la nature de x.
La nature de cette représentation graphique fait l'objet d'une propriété.

Seuls cinq exercices portent sur des valeurs de départ non entières. Il s'agit alors de fractions simples, ou de décimaux à une décimale.

Les phénomènes étudiés sont dans l'ensemble discrets : la variable de départ est généralement un prix en nombre entier d'euros, parfois un nombre de personnes.
Quelques situations d'étude de phénomènes continus figurent en exercice d'approfondissement : des contextes géométriques, d'autres physique où la grandeur de départ est le temps, la distance ou la vitesse.

ii. Manuel « Transmath » de 2003 : chapitre fonctions affines

Les fonctions affines sont introduites, comme dans le chapitre précédent, dans un contexte géométrique continu. Les valeurs prises par les longueurs dans les tableaux sont à nouveau des entiers.

La représentation graphique est démontrée en « activité » sur un exemple, à l'aide d'une translation, après avoir été conjecturée sur six points à coordonnées entières.

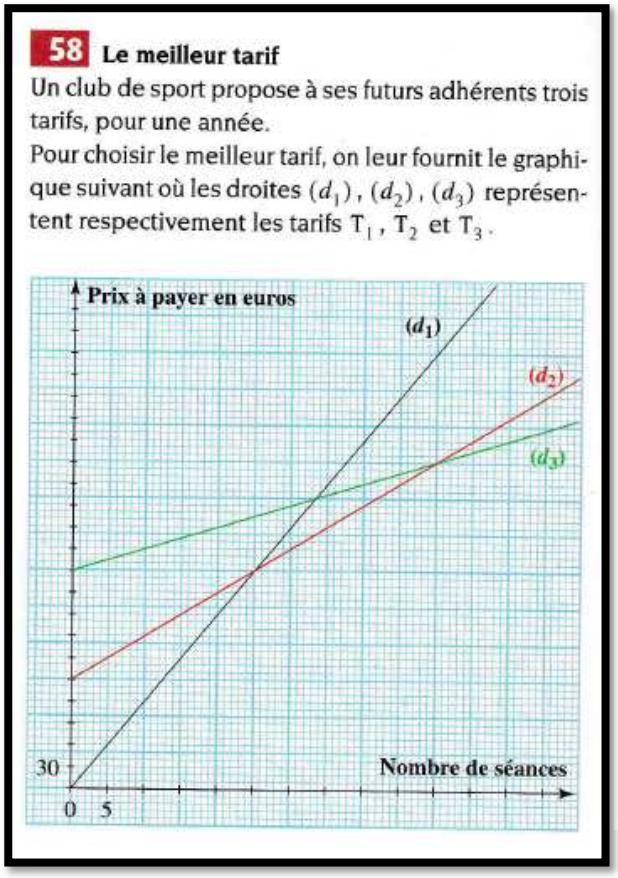
La proportionnalité des accroissements des nombres et de leurs images est constatée en « activité » dans le cadre d'une situation discrète, où les valeurs de départ sont des entiers positifs. Puis sur un

tableau de valeurs de la fonction affine correspondante $x \mapsto 180x + 900$ et enfin graphiquement. Seuls des entiers (positifs et négatifs) sont mobilisés.

En exposition de connaissances, les définitions de la fonction affine et de sa représentation graphique reprennent le même type de vocabulaire que pour les fonctions linéaires.

Les exercices utilisent, tous sauf deux, des valeurs de départ entières.
A part cinq exercices, ceux qui étudient un phénomène se situent dans un contexte discret. Les exercices qui étudient un phénomène continu se trouvent essentiellement en « approfondissement ». Dans l'un la variable est le temps, dans les quatre autres, la variable est une longueur (dont trois en contexte géométrique).

Deux exercices (d'approfondissement eux aussi) étudient des situations discrètes en exploitant des représentations graphiques de fonctions affines (donc des droites).
Le premier consiste à comparer des tarifs d'un club de sport en fonction du nombre de séances. Les données sont graphiques et l'exercice demande l'expression des fonctions. La résolution de l'équation qui permet de comparer les tarifs 1 et 3 mène à une valeur non entière qui nécessite d'être interprétée convenablement.



58 **Le meilleur tarif**

Un club de sport propose à ses futurs adhérents trois tarifs, pour une année.
Pour choisir le meilleur tarif, on leur fournit le graphique suivant où les droites (d_1), (d_2), (d_3) représentent respectivement les tarifs T_1, T_2 et T_3.

1. a. Recopier et compléter le tableau.

Nombre de séances	15	30	40	55
Prix à payer avec le tarif T_1				
Prix à payer avec le tarif T_2				
Prix à payer avec le tarif T_3				

b. Dans chaque cas, donner le tarif le plus intéressant.
2. Avec le tarif T_1, on paie à chaque séance. Avec les tarifs T_2 et T_3, on paie un abonnement en début d'année et le tarif de chaque séance est réduit.
En utilisant le graphique, donner :
a. le prix d'une séance avec chacun des tarifs T_1, T_2 et T_3,
b. le montant de l'abonnement avec chacun des tarifs T_2 et T_3.
3. Exprimer en fonction du nombre x de séances les prix P_1, P_2 et P_3 à payer avec chacun des tarifs T_1, T_2 et T_3.
4. Déterminer en fonction du nombre de séances le tarif le plus avantageux.

Manuel « Transmath » de 2003, classe de Troisième, édition Nathan, page 120

Le second est un extrait de Brevet donné à Grenoble en 2002 ; il s'agit de deux options de prix annuels de trajets de train en fonction du nombre de trajets. Les données sont dans le registre de la langue naturelle ; les expressions algébriques des fonctions associées (linéaire pour l'une, affine pour l'autre) sont demandées puis leur représentation graphique. La dernière question, à résoudre graphiquement puis par le calcul, est : « *A l'aide du graphique, déterminer le nombre de trajets pour lequel le prix total*

annuel est plus avantageux avec l'option B. » En dehors du fait que la question est curieusement posée – elle devrait être « à partir de quel nombre de trajets… », notons que le point d'égalité entre les deux fonctions est de 300/29 qui n'est pas un entier. Là aussi, la valeur trouvée doit être convenablement interprétée

Annexe 3 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, édition Hachette

i. Manuel « Phare » de 2008 : chapitre sur les fonctions – introduction et exposition de connaissances

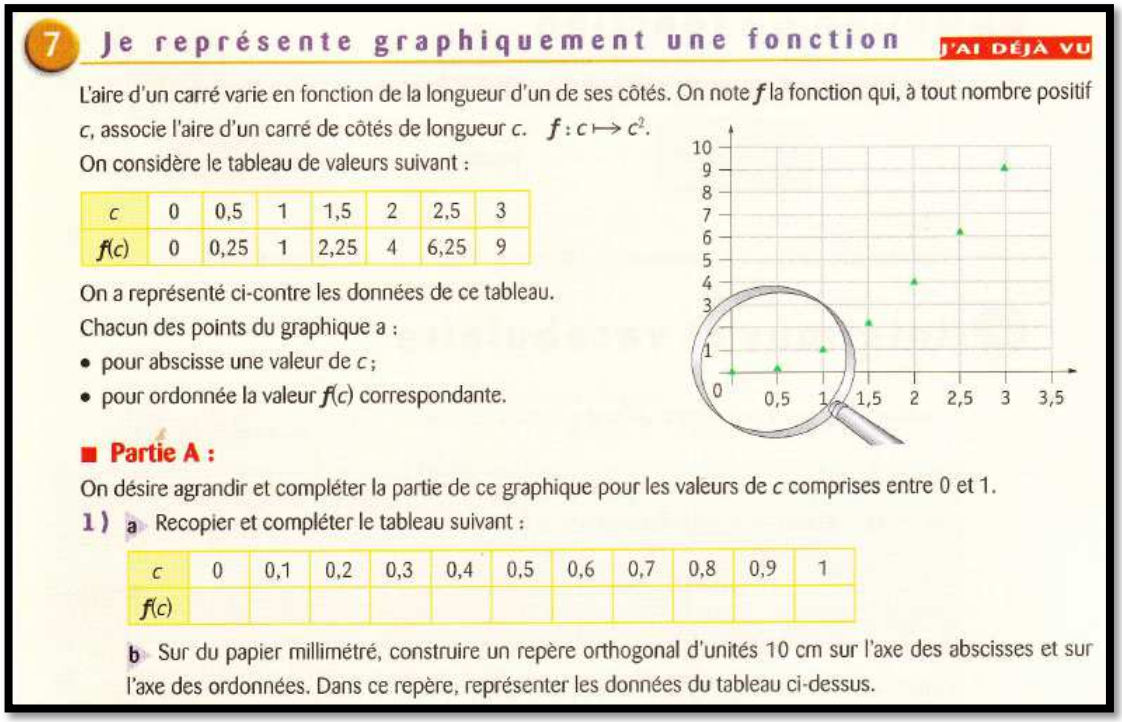
L' « activité » d'introduction à la notion de fonction mobilise l'idée de « machine » en deux temps. D'abord concrètement en mettant en scène une série de machines à embouteiller du jus d'orange, afin de mettre en relief l'importance de l' « *ordre de passage dans les trois machines* ».
L'idée est ensuite reprise avec trois « machines » qui transforment des nombres, sur des exemples d'entiers et quelques fractions simples, généralisés dans le cadre algébrique et donnant lieu à des expressions algébriques.

L' « activité » d'introduction au vocabulaire des fonctions – image, antécédent – est située dans un contexte géométrique d'une aire en fonction d'une longueur, donc de grandeurs continues. Il est indiqué en préambule que « *Cette activité est à réaliser avec un logiciel de géométrie* ». Un tableau de valeurs de mesures de l'aire en fonction de mesures entières positives de la longueur doit être rempli. Des lectures d'images et d'antécédents de nombres présents dans le tableau sont ensuite demandés.

Une troisième « activité » est proposée, elle aussi dans un contexte continu d'aire en fonction d'une longueur. La fonction qui modélise la situation est donnée ; le but de l' « activité » est de discuter le domaine d'adéquation du modèle en examinant les cas des nombres de départ : 3 ; -2 puis $\frac{1}{5}$.

L' « activité » 6 part de la représentation graphique d'une vitesse en fonction du temps, fonction continue et affine par morceaux. Le contexte est celui d'un automobiliste en excès de vitesse. Le but est d'extraire du graphique des informations pratiques sur les périodes d'accélération, d'excès de vitesse, d'arrêt du véhicule.

L' « activité » 7 est intitulée « *Je représente graphiquement une fonction* ». Elle propose l'étude de « *l'aire d'un carré en fonction de la longueur d'un de ses côtés* » ; la situation est géométrique et les grandeurs continues.



7 Je représente graphiquement une fonction J'AI DÉJÀ VU

L'aire d'un carré varie en fonction de la longueur d'un de ses côtés. On note f la fonction qui, à tout nombre positif c, associe l'aire d'un carré de côtés de longueur c. $f : c \mapsto c^2$.
On considère le tableau de valeurs suivant :

c	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(c)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

On a représenté ci-contre les données de ce tableau.
Chacun des points du graphique a :
- pour abscisse une valeur de c ;
- pour ordonnée la valeur $f(c)$ correspondante.

■ Partie A :

On désire agrandir et compléter la partie de ce graphique pour les valeurs de c comprises entre 0 et 1.

1) a Recopier et compléter le tableau suivant :

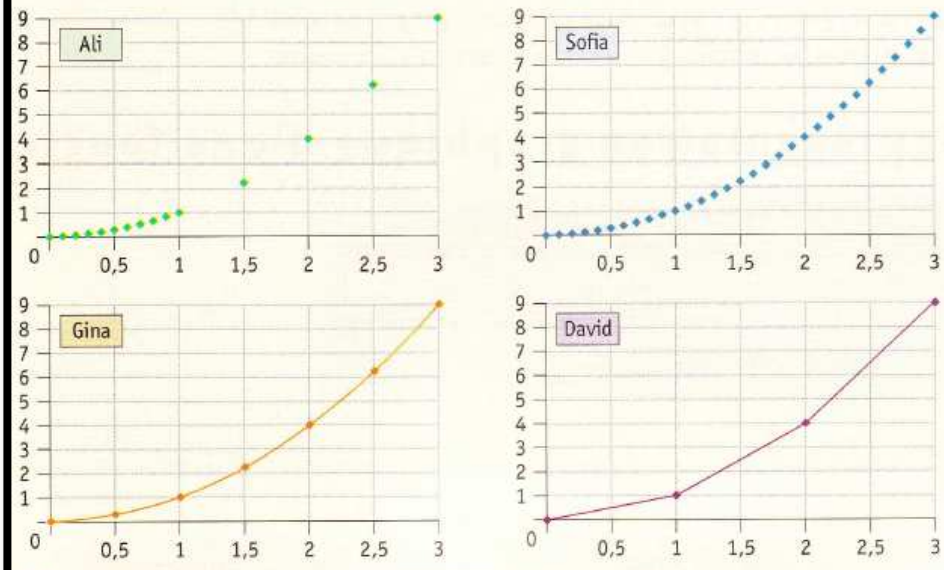
c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(c)$											

b Sur du papier millimétré, construire un repère orthogonal d'unités 10 cm sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Dans ce repère, représenter les données du tableau ci-dessus.

2) Choisir une autre valeur de c comprise entre 0 et 1. Calculer son image par la fonction f.
Placer sur le graphique le point associé à ces valeurs. Combien de points pourrait-on ainsi placer ?

■ Partie B :

Quatre élèves ont représenté graphiquement la fonction f pour c compris entre 0 et 3.



1) Un seul de ces élèves a réalisé correctement cette représentation. Lequel ?

2) Quelles sont les erreurs commises par les trois autres ?

Manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, éditeur Hachette, page 127

Un tableau contient des valeurs de départ entre 0 et 3 avec un pas de 0,5 (donc sept valeurs) ainsi que leurs images. Le manuel donne une représentation graphique des sept points isolés.
Puis il est demandé de remplir un tableau de valeurs de l'aire pour des valeurs du côté comprises entre 0 et 1 avec un pas de 0,1. Et de les représenter sur du papier millimétré.
Ensuite l'énoncé demande de calculer l'aire pour une autre valeur c comprise entre 0 et 1, ce qui oblige l'élève à prendre une valeur de la longueur du côté à au moins deux décimales s'il choisit un nombre décimal (ce qui est le plus probable). Les élèves doivent placer le point correspondant sur leur graphique ; ils peuvent s'apercevoir eux-mêmes, ou en constatant que leurs camarades n'ont pas rajouté le même point, qu'ils auraient pu en mettre bien d'autres encore. La question qui clôt la partie A, « *Combien de points pourrait-on ainsi placer ?* » permet d'avoir un mot pour le dire : une infinité.

La partie B de l' « activité » soumet quatre graphiques (deux nuages de points isolés dont un avec uniquement les valeurs des tableaux qui précèdent ; un arc de parabole ; 4 points provenant du premier tableau dont les abscisses sont les entiers compris entre 0 et 3, reliés par des segments). L'élève doit justifier lequel est le bon.

Cette « activité » problématise la question : « Relier ou non les points ; si oui, comment ? ». Lorsque l'image d'une valeur de c comprise entre 0 et 1 autre que les décimaux à un chiffre après la virgule du tableau est demandée aux élèves, ainsi que le nombre de points possibles, la divisibilité à l'infini de l'ensemble des abscisses, précurseur de son caractère continu, peut être soulignée par l'enseignant. Les graphiques de la partie B consistant en des points isolés peuvent être écartés de cette façon.
Le graphique qui comporte quatre points reliés par des segments de droite peut être aisément écarté par son allure ainsi que la non appartenance des points à abscisse non entière issus des tableaux, que ce soit à partir de la représentation graphique de l'énoncé ou de celle des élèves sur leur papier millimétré.
Elle peut aussi servir de justification de la technique de tracé (« lisse », celui d'une fonction de classe C^1) mobilisée dans quelques exercices de fin de chapitre, tracés qui ne sont alors plus argumentés.

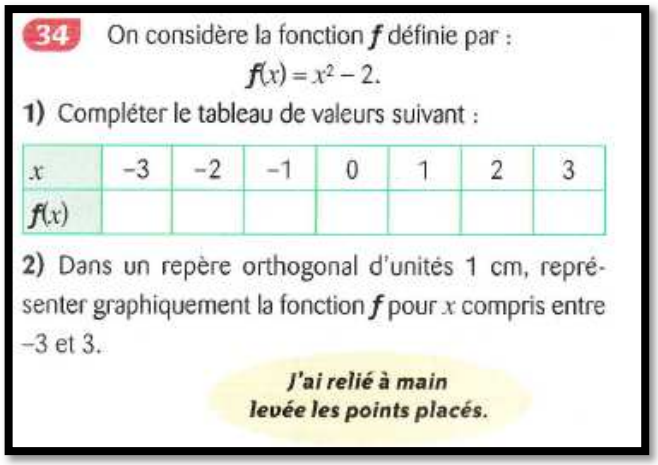
Les trois registres de représentation des fonctions que sont le graphique, le tableau de valeurs et la formule sont donc présents dans les « activités » d'introduction.
Les situations modélisées sont soit géométriques soit cinématiques, les grandeurs en jeu sont continues.

Dans l'exposition de connaissances, la fonction est définie comme « *un outil mathématique qui, à un nombre, fait correspondre un nombre.* ». Puis la représentation graphique d'une fonction f est définie comme l'ensemble des points de coordonnées $(a; f(a))$, définition illustrée par une courbe.
L'auteur de ce manuel définit la fonction uniquement en tant que processus de correspondance, pas à partir d'un tableau de valeurs ni d'un graphique, ce qui est pourtant suggéré par le programme officiel.

ii. Manuel « Phare » de 2008 : chapitre sur les fonctions – les exercices

Les calculs d'images par une fonction dont on connait l'expression algébrique comportent quelques nombres non entiers (des fractions simples).
Les représentations graphiques déjà tracées sont toutes des courbes. Celles qui correspondent à une situation concrète modélisent des phénomènes continus : la grandeur de départ est le temps ou une longueur (et aussi dans un cas une vitesse d'un véhicule et un autre une intensité électrique).

Cinq exercices comportent une tâche de représentation graphique de fonction. Examinons-les :
Un premier est intra mathématique. Il demande de compléter un tableau de valeurs d'une fonction du second degré, pour les entiers entre -3 et 3.



34 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x^2 - 2$.

1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$							

2) Dans un repère orthogonal d'unités 1 cm, représenter graphiquement la fonction f pour x compris entre −3 et 3.

J'ai relié à main levée les points placés.

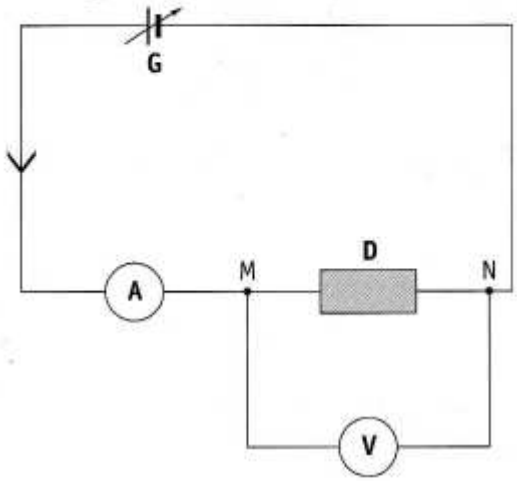
Manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, éditeur Hachette, page 133

Puis il est demandé de représenter graphiquement la fonction f « *pour x compris entre -3 et 3* ». Les élèves peuvent comprendre la consigne de deux façons : la représentation graphique est faite pour les entiers du tableau de valeurs (on obtient sept points isolés) ou pour les réels de l'intervalle $[-3; 3]$ (on obtient une courbe).
L'aide qui suit : « *J'ai relié à main levée les points placés* » permet de comprendre la réponse attendue : un tracé de courbe « lisse ». Le minimum de la fonction est atteint en 0, qui figure dans le tableau de valeurs, ce qui garantit un tracé à l'allure convenable.

Le deuxième exercice se situe dans un contexte d'électricité ; un tableau de mesures d'intensités en A et de tensions correspondantes en V est donné.

57 Physique

Pour analyser le fonctionnement d'un dipôle **D**, on réalise le montage ci-dessous.



On fait varier la tension du générateur **G**.

On utilise un voltmètre **V** pour mesurer la tension entre les bornes M et N du dipôle.

On utilise un ampèremètre **A** pour mesurer l'intensité du courant. Voici les mesures obtenues :

I (en A)	0,00	0,22	0,28	0,33	0,39
U_{MN} (en V)	0,0	1,0	1,5	2,0	3,0

Tracer, sur une feuille de papier millimétré, la représentation graphique de la caractéristique $U_{MN} = f(I)$ de ce dipôle.

J'ai choisi des unités adaptées en abscisse et en ordonnée.

Manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, éditeur Hachette, page 137

L'aide fournie ne permet pas de déterminer si l'auteur attend une représentation graphique de points isolés ou une courbe. Les habitudes des élèves en sciences physiques peuvent influencer leur choix.
Les mesures de la tension sont entières (à part 1,5) alors que celles de l'intensité sont des décimaux à deux chiffres après la virgule et il est demandé de représenter la tension en fonction de l'intensité. Il est inhabituel que les nombres de départ ne soient pas entiers alors que les images le sont, cette inversion des types de nombres pourrait troubler les élèves.

Le troisième exercice se situe dans un contexte géométrique et donne lieu à une fonction du second degré $f: x \mapsto 2(2+x)(1+x)$, strictement croissante sur $[0; 4]$.
Sa représentation graphique est demandée sur papier millimétré. Les élèves peuvent là aussi représenter des ponts isolés ou relier les points, par des segments ou de façon « lisse ». Le contexte continu de cet exercice, identique à celui de l'activité 7, devrait inciter les élèves à relier les points, d'autant plus que ceci est nécessaire à la lecture de l'antécédent de 35 par la fonction f.

Le quatrième exercice étudie à nouveau, dans un contexte pratique, une aire en fonction d'une longueur.

59 Un maître nageur utilise une corde et deux bouées (B et C) pour délimiter une zone de baignade. Il forme ainsi une zone de baignade surveillée de forme rectangulaire.

Il dispose d'une corde de longueur 160 m.

Il se demande où placer les bouées B et C pour obtenir une zone de baignade ayant la plus grande aire possible.

On note x la longueur AB.



1) On note f la fonction qui, à une longueur AB, associe l'aire du rectangle $ABCD$.

Montrer que cette fonction se note $f : x \longmapsto -2x^2 + 160x$.

2) a Quelle est la plus petite valeur possible de x ? Justifier la réponse. On note x_0 cette valeur.

b Quelle est la plus grande valeur possible de x ? Justifier la réponse. On note x_1 cette valeur.

3) On désire observer la fonction f pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1.

a Faire un tableau de valeurs en choisissant pour valeurs de x des nombres entiers de dizaines.

b Représenter graphiquement la fonction f pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1.

c Quelle semble être la valeur de x pour laquelle le nombre $f(x)$ est le plus grand possible ? On note x_2 cette valeur.

4) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$x_2 - 1$	$x_2 - 0{,}1$	$x_2 - 0{,}01$	x_2	$x_2 + 0{,}01$	$x_2 + 0{,}1$	$x_2 + 1$
$f(x)$							

5) Finalement, comment le maître nageur doit-il placer ses bouées ?

Manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, éditeur Hachette, page 138

Les premières questions ont pour but de montrer que le problème posé revient à trouver la valeur en laquelle $f : x \mapsto -2x^2 + 160x$, pour x compris entre 0 et 80, est maximale.
Puis l'énoncé demande d'établir un tableau de valeurs pour des valeurs de x en nombres entiers de dizaines puis de représenter graphiquement la fonction. Une lecture graphique permet de conjecturer de façon exacte la valeur cherchée, notée x_2 (qui vaut 40).
Le tableau de valeurs de la question 4 permet de conforter la conjecture en cherchant les images de valeurs dont la distance à x_2 est de 10^{-2}, 10^{-1} et 1.

Le cinquième exercice est à effectuer sur tableur ; il est proposé en fin de chapitre. Il étudie la distance de freinage d'un véhicule (en m) en fonction de sa vitesse (en m/s). La fonction $f : v \mapsto 0{,}08v^2$ exprime la dépendance de ces deux grandeurs continues. L'énoncé guide les élèves pas à pas pour qu'ils remplissent un tableau de valeurs puis qu'ils « *représentent graphiquement la fonction* f » par ce que le tableur dénomme un « *nuage de points reliés par une courbe lisse* », c'est-à-dire par une courbe de fonction de classe C^1.

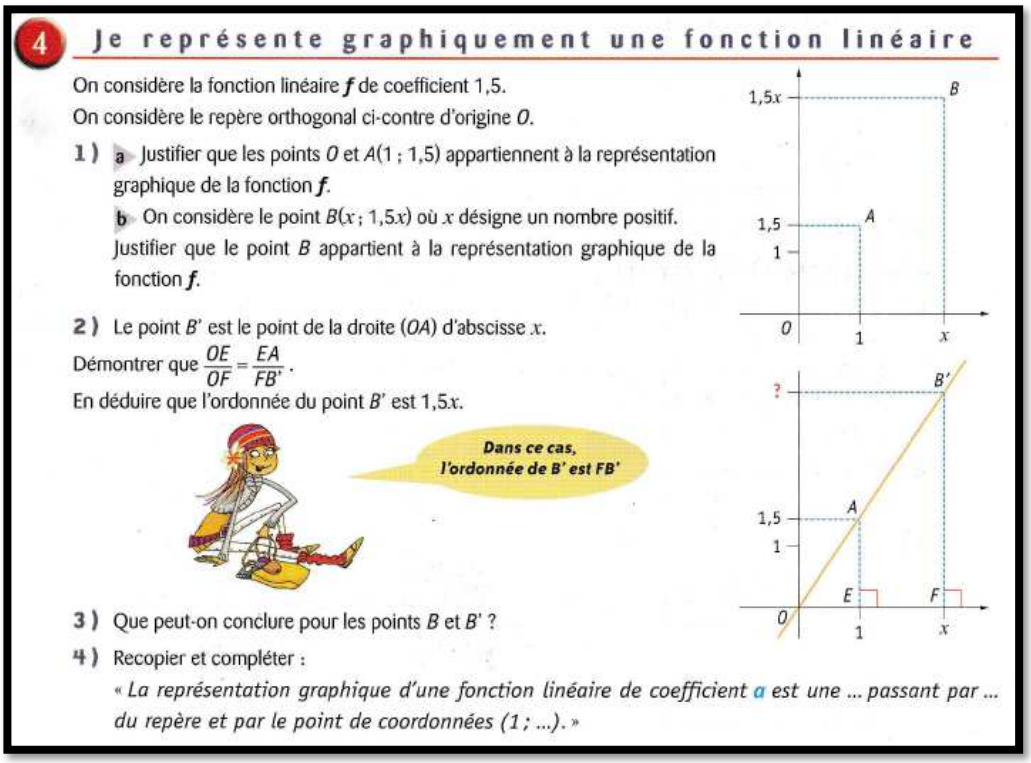
Les constructions de courbes « à la main » sont donc présentes dans une « activité » et quatre exercices qui mobilisent explicitement le papier millimétré.
Les exercices qui mènent à des représentations graphiques comportent des tâches variées – de lectures d'images et d'antécédents, de valeur où un extremum est atteint ; les tâches comportent des adaptations et ne consistent pas seulement en des tâches simples et isolées.
Ceci dit, les extrema des fonctions sont dans les tableaux de valeurs et, après que l' « activité » 7 l'ait fait (ou parce qu'elle l'a fait ?), les exercices ne questionnent pas la façon de relier (ou non) les points. Tout se passe comme si l'activité 7 servait d'exemple générique pour que les élèves relient, dans tous les cas, les points de façon « lisse ».

iii. Manuel « Phare » de 2008 : chapitre sur les fonctions linéaires

L' « activité d'introduction » aux fonctions linéaires utilise une situation de proportionnalité dans un contexte discret (le prix en fonction du nombre de DVD). Il est explicitement dit que la fonction linéaire associée « modélise » la situation. Le domaine d'adéquation du modèle est questionné dans la dernière question : peut-on interpréter les images de 16, de 2,5, de -3 dans le contexte ?

La 2e « activité » reprend la même fonction linéaire, en dehors du contexte. Elle y fait calculer des images d'entiers positifs, puis les antécédents de 21. Il y en a un, qui est entier. Puis elle demande de faire calculer les antécédents d'un nombre choisi par l'élève. Il est probable que cela donne lieu à des antécédents non entiers.

L' « activité » 4 traite de la représentation graphique de la fonction linéaire $f: x \mapsto 1{,}5x$. Elle considère le points $A(1; 1{,}5)$ et fait montrer par le théorème de Thalès que le point de la droite (OA) d'abscisse x appartient à la représentation graphique de la fonction (implicitement pour tout x réel positif). Suit une conclusion à remplir : *« La représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une ……. passant par l'origine du repère et par le point de coordonnées (1 ;…)* ».



4 Je représente graphiquement une fonction linéaire

On considère la fonction linéaire ***f*** de coefficient 1,5.
On considère le repère orthogonal ci-contre d'origine *O*.

1) a Justifier que les points *O* et *A*(1 ; 1,5) appartiennent à la représentation graphique de la fonction ***f***.
b On considère le point $B(x ; 1{,}5x)$ où x désigne un nombre positif. Justifier que le point *B* appartient à la représentation graphique de la fonction ***f***.

2) Le point *B'* est le point de la droite (*OA*) d'abscisse x.
Démontrer que $\frac{OE}{OF} = \frac{EA}{FB'}$.
En déduire que l'ordonnée du point *B'* est $1{,}5x$.

3) Que peut-on conclure pour les points *B* et *B'* ?

4) Recopier et compléter :
« *La représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une … passant par … du repère et par le point de coordonnées (1 ; …).* »

Manuel « Phare » de 2008, classe de Troisième, éditeur Hachette, page 143

L'implication : « si un point appartient à la représentation graphique de f, alors il appartient à (OA) » manquerait-elle à ce raisonnement ? Ou peut être l'auteur pensait-il au raisonnement suivant : le point d'abscisse x de la représentation graphique de f est le point d'abscisse x de la droite (OA) (implicitement pour tout x réel positif). Donc la représentation graphique de f est la droite (OA). Un geste continu peut appuyer le propos et montrer que lorsque x décrit l'axe des abscisses, le point de coordonnées $(x; f(x))$ décrit (OA).

La propriété « si la différence des abscisses de deux points de la droite (d) est égale à 1, alors la différence de leurs ordonnées est égale à 2 », où (d) représente la fonction $f: x \mapsto 2x$, est démontrée dans l'activité 5. Elle démarre dans le cadre algébrique par la détermination des expressions $f(x)$ et $f(x+1)$ en fonction de x ; x est une indéterminée, puis un nombre généralisé en tant qu'abscisse d'un point de la droite. Une interprétation graphique permet de conclure. x et $x+1$ sont-ils perçus par les élèves comme deux nombres quelconques distants de 1 ou comme deux entiers consécutifs?

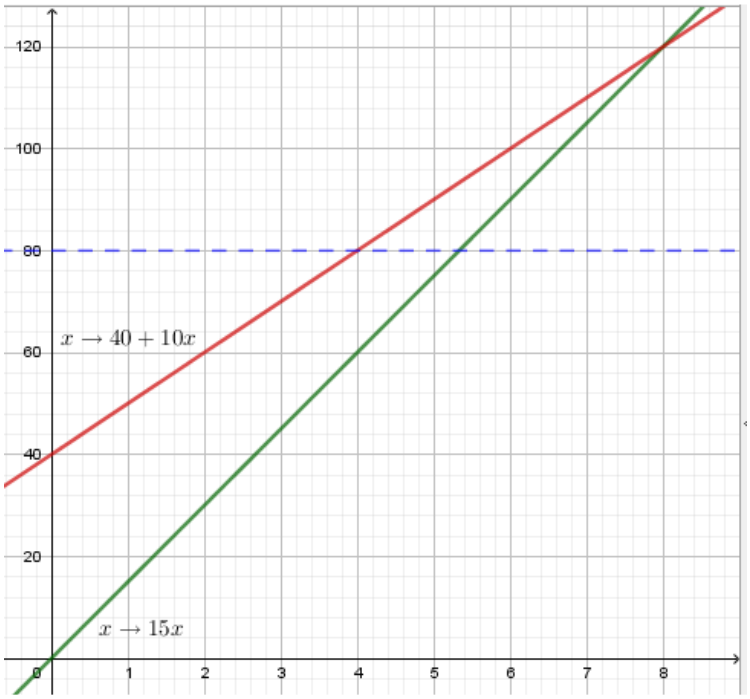
L' « activité » 6 fait modéliser une augmentation en pourcentage par une fonction linéaire. Le contexte est discret (un nombre de photos, donc entier). Les valeurs choisies pour les calculs d'images et d'antécédents donnent lieu à des entiers et ne soulèvent pas de difficulté d'interprétation.

Dans les exercices, la plupart des modélisations relèvent de situations continues : elles se situent dans le cadre géométrique ou étudient un phénomène physique tel que le poids en fonction de la masse, l'énergie électrique en fonction de la durée pour une puissance donnée, la tension électrique en fonction de l'intensité, une hauteur en fonction du temps.
Un exercice, provenant du brevet donné en Amérique du Nord en 2006, étudie un phénomène discret : un prix de vente en fonction d'un nombre de saladiers vendus ; les questions de calculs d'images ou d'antécédents sont faites pour que ceux-ci soient entiers.

iv. Manuel « Phare » de 2008 : chapitre sur les fonctions affines

L' « activité » d'introduction aux fonctions affines étudie le supplément payé et le montant de la facture d'un forfait mobile en fonction du temps de dépassement en minutes. Dans ce cas, le temps est une grandeur discrète.
L' « activité » 4 a pour but de déterminer, sur un exemple, la représentation graphique d'une fonction affine. Elle introduit la fonction linéaire associée, mobilise le résultat sur la représentation graphique de cette dernière. Puis la correspondance point par point par « décalage » vers le haut de la représentation graphique de la fonction affine à partir de la fonction linéaire associée est admise (ce qui revient à utiliser sans le dire une translation, qui n'est pas au programme officiel de 2008 mais qui l'était dans le précédent).

Dans les exercices comportant des modélisations de phénomènes par des fonctions affines, la majorité des situations est discrète : il s'agit le plus souvent de l'étude de prix ou de tarifs en fonction d'une variable entière. Les recherches d'antécédents ou de valeurs pour lesquelles deux images sont égales aboutissent à des valeurs entières, par conséquent l'énoncé ne soulève aucune difficulté.
Quelques fonctions modélisent des phénomènes continus dans lesquels la variable est une mesure de longueur, de temps ou de température.
L'énoncé du Brevet, groupement ouest de 2006, est utilisé en exercice. La situation est la suivante : Sonia peut acheter des cartouches d'encre en magasin à 15€ l'une ou sur internet à 10€ l'une, avec des frais de livraison de 40€. Après avoir demandé une représentation graphique des fonctions qui représentent chacun des prix à payer en fonction du nombre de cartouches achetées, la question suivante, à résoudre graphiquement, est posée : « *Sonia dispose de 80 euros pour acheter des cartouches. Est-il plus avantageux pour elle d'acheter des cartouches en magasin ou Internet ?* ».
Voici ci-dessous le graphique au complet :

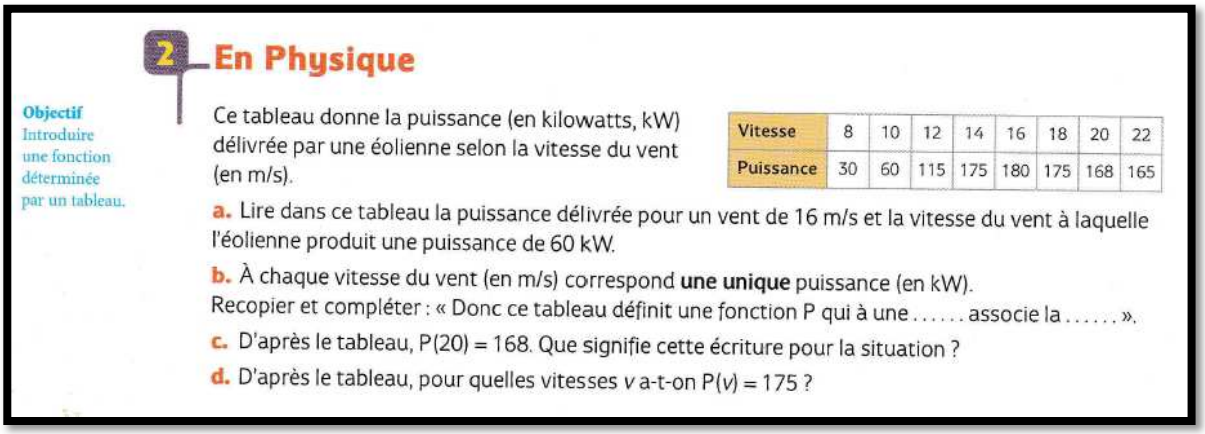


Graphiquement, les élèves peuvent lire qu'avec 80€, Sonia peut acheter 4 cartouches sur internet. Et en magasin, elle peut en acheter 5 ; l'abscisse correspondante à l'ordonnée 80 est un nombre non entier compris entre 5 et 6, ce qui peut perturber les élèves. Cependant, le nombre de cartouches n'est pas demandé, l'élève n'a donc pas besoin de penser que ce nombre est nécessairement entier puisqu'un nombre compris entre 5 et 6 est supérieur à 4. Finalement, dans ce cas, la réflexion sur les entiers est inutile.

Annexe 4 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième

i. Manuel « Transmath » de 2008 : chapitre « notion de fonction »

Les « activités » d'introduction sont au nombre de 6. L'objectif affiché de la première est d' *« introduire une fonction déterminée par un graphique* », celui de la deuxième d' « *introduire une fonction déterminée par un tableau* ». Dans les deux, un phénomène continu est étudié.
Dans la première, une courbe d'une vitesse en fonction du temps est tracée, la perspective globale est mise en avant ; les questions posées mobilisent des points spécifiques du graphique et par conséquent la perspective ponctuelle.
Le tableau de valeurs de la deuxième, qui comporte huit entrées (de puissance en kW délivrée par une éolienne selon la vitesse du vent en m/s), ne « détermine » ni ne « définit » donc pas une fonction qui modéliserait le phénomène. Bien que celui-ci soit continu, le registre des tableaux de valeurs induit une perspective ponctuelle.



2 En Physique

Objectif
Introduire une fonction déterminée par un tableau.

Ce tableau donne la puissance (en kilowatts, kW) délivrée par une éolienne selon la vitesse du vent (en m/s).

Vitesse	8	10	12	14	16	18	20	22
Puissance	30	60	115	175	180	175	168	165

a. Lire dans ce tableau la puissance délivrée pour un vent de 16 m/s et la vitesse du vent à laquelle l'éolienne produit une puissance de 60 kW.

b. À chaque vitesse du vent (en m/s) correspond **une unique** puissance (en kW).
Recopier et compléter : « Donc ce tableau définit une fonction P qui à une ..... associe la ..... ».

c. D'après le tableau, P(20) = 168. Que signifie cette écriture pour la situation ?

d. D'après le tableau, pour quelles vitesses v a-t-on P(v) = 175 ?

Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 105

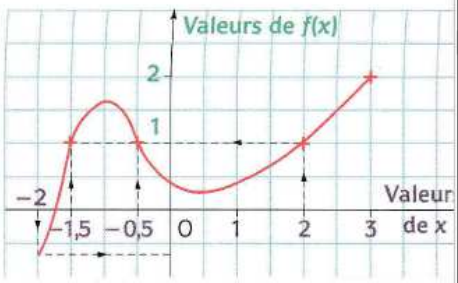
La troisième « activité » a pour objectif affiché d' « *introduire une fonction déterminée par une formule* ». Elle utilise, dans les registres de la langue naturelle et des schémas, l'idée de « *machine à produire des nombres* » qui donne une perspective ponctuelle à la notion de fonction.

C'est cette approche qui est retenue pour la définition d'une fonction dans l'exposition des connaissances. Le mot « variable » y a sa place ainsi que dans des exercices : dans deux d'entre eux, traités dans le cadre graphique, il est demandé d'identifier « *la variable* ».
La définition est suivie des « *trois façons de définir une fonction* » déclinées sur des exemples.
Pour la « *façon avec un graphique* », l'auteur prend le soin de spécifier que les valeurs lues sont « *exactes* » lorsque précisées « par une croix ou des traits de rappel » ; sinon elles sont « *approchées* ». Il peut s'agir d'un résidu du programme de 1999 dans lequel il était demandé de « *Représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative* ».

a Avec un graphique

• Ce graphique définit une fonction f qui à chaque nombre x compris entre -2 et 3 (lu sur l'axe des abscisses), associe un nombre $f(x)$ (lu sur l'axe des ordonnées).

• Dans certains cas, précisés sur le graphique (par une croix + ou des traits de rappel), les valeurs lues sont exactes, mais **le plus souvent il ne s'agit que de valeurs approchées**.



Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 108

La représentation graphique d'une fonction n'est pas définie : au contraire, une représentation graphique définit une fonction.

Les pages suivantes sont intitulées « *Savoir-faire* ». L'un d'eux a pour titre « Passer d'un tableau à un graphique ». Les points reportés sur le graphique n'y sont pas reliés.

2 Passer d'un tableau à un graphique

ÉNONCÉ

Ce tableau définit une fonction h qui à l'âge, en années, d'un conifère (de type douglas) associe sa hauteur en mètres.

a. Lire $h(50)$ et le nombre a tel que $h(a) = 22{,}5$.

b. Dans un repère, représenter graphiquement ce tableau.

Âge	Hauteur
15	13,5
20	18
25	22,5
30	26
35	29
40	32
45	34
50	36

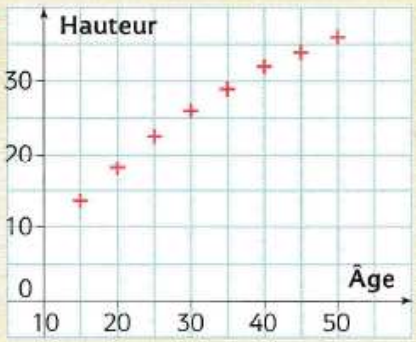
SOLUTION

a. Dans le tableau, on lit que :

• la hauteur à l'âge de 50 ans est 36 m.
Donc $h(50) = 36$;

• l'âge d'un conifère de 22,5 m est 25 ans.
Donc $a = 25$.

b.



• Ce tableau donne « la hauteur **en fonction de l'âge** », donc la variable est ici l'âge.
Pour représenter graphiquement un tableau, **on porte toujours les valeurs de la variable en abscisses**.

• **Axe des abscisses :** il est gradué à partir de 10 avec 1 cm pour 10 ans.

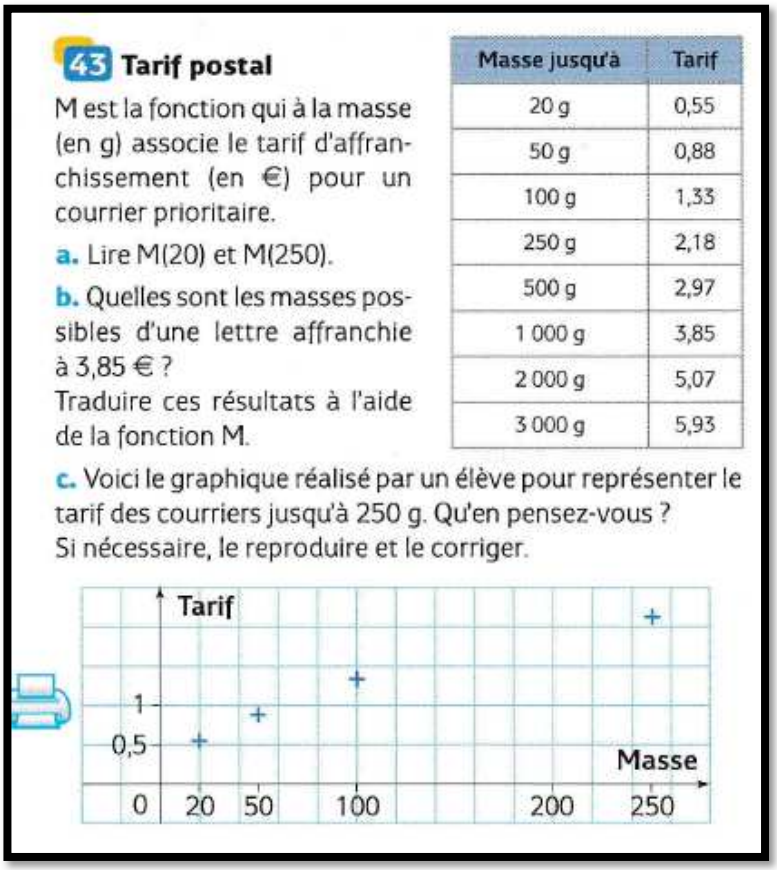
• **Axe des ordonnées :** 1 cm représente 10 m ; donc 1,35 cm représente 13,5 m ; 1,8 cm représente 18 m...

Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 110

Plus loin, deux exercices sont proposés sur ce modèle. Il est intéressant de noter que dans les trois cas, un phénomène continu est étudié et que tous les graphiques donnés par ailleurs dans ce chapitre, que le contexte soit intra ou extra mathématique, sont des courbes de fonctions continues.
Donc l'auteur ne considère pas que la donnée d'un tableau définisse une fonction sur un intervalle ; cependant, la question de savoir s'il est opportun de « relier les points » n'est pas posée.

Les phénomènes étudiés dans les exercices sont continus, sauf deux.
L'un d'eux étudie le nombre de petites annonces en fonction du nombre de de lignes de la petite annonce : les deux grandeurs prennent des mesures en nombre fini ; la fonction est (légitimement) définie par un tableau de valeurs. Sa représentation graphique n'est pas demandée. Cet exercice, avec les deux exercices sur le thème « *Passer d'un tableau à un graphique* » auxquels nous faisions allusion ci-dessus, sont les seuls qui portent sur une fonction « définie » par un tableau de valeurs.

Un autre, proposé en « *approfondissement* », porte sur les tarifs postaux (grandeur discrète) en fonction de la masse du colis (grandeur continue). La fonction est donc en escalier.



43 Tarif postal

M est la fonction qui à la masse (en g) associe le tarif d'affranchissement (en €) pour un courrier prioritaire.

a. Lire M(20) et M(250).

b. Quelles sont les masses possibles d'une lettre affranchie à 3,85 € ?
Traduire ces résultats à l'aide de la fonction M.

Masse jusqu'à	Tarif
20 g	0,55
50 g	0,88
100 g	1,33
250 g	2,18
500 g	2,97
1 000 g	3,85
2 000 g	5,07
3 000 g	5,93

c. Voici le graphique réalisé par un élève pour représenter le tarif des courriers jusqu'à 250 g. Qu'en pensez-vous ?
Si nécessaire, le reproduire et le corriger.

Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 118

La réponse à « Traduire ces résultats à l'aide de la fonction M » (deuxième partie de la question b) peut être articulée en termes d'images ou d'antécédents. Elle prépare la dernière question.
Celle-ci est ouverte, elle mobilise un jeu de cadres qui peut donner lieu à une réflexion riche de la part des élèves sur la notion de représentation graphique d'une fonction.

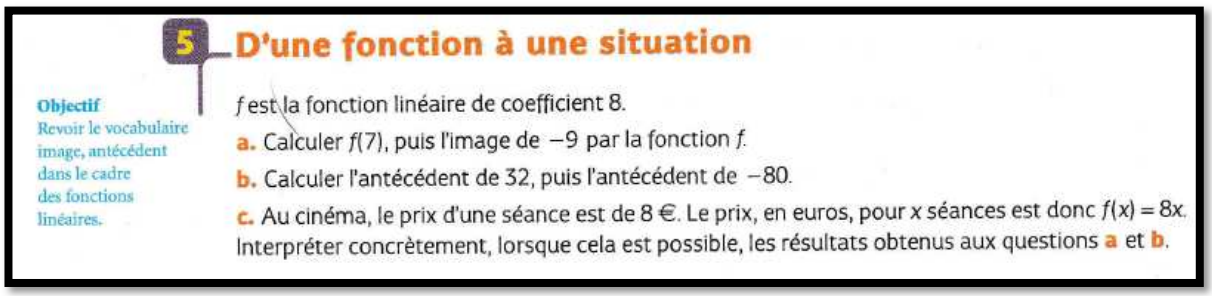
Les tableaux de valeurs sont mis à contribution dans un autre exercice d' « *approfondissement* ». Le phénomène étudié est continu : un volume est fonction d'une hauteur. Le tableur permet de générer un tableau de valeurs puis une courbe « lisse » reproduite dans le manuel. Pour obtenir ce graphique, les élèves doivent expérimenter avec les divers types de graphique disponibles sur le tableur. Ce peut être l'occasion pour eux de constater qu'il y en a plusieurs et de débattre avec eux des caractéristiques et du bien fondé de chacun dans le contexte donné.
Le graphique permet de conjecturer que la fonction atteint son maximum en une valeur comprise entre 3 et 4. L'énoncé demande alors de générer au tableur un nouveau tableau de valeurs avec un pas de 0,1 sur l'intervalle $[3;4]$.
Cet énoncé permet un jeu de cadres entre le graphique et le numérique, un jeu entre les mondes du discret et du continu, qui peuvent aboutir à une meilleure construction des concepts de fonction et de représentation graphique.

Les nombres utilisés dans ce chapitre sont essentiellement entiers et décimaux (les décimaux sont surtout présents dans les exercices d'étude de phénomènes concrets).
Les quelques fractions et nombres négatifs mobilisés le sont dans le cadre algébrique (la fonction est alors définie par une formule). Les fractions ont des numérateurs et dénominateurs compris entre 1 et 7.
Un irrationnel est présent : il est demandé dans un exercice de calculer $f(\sqrt{3})$ lorsque f est définie par $f(x) = x^2 - 3$.

ii. Manuel « Transmath » de 2008 : chapitre « Proportionnalité. Fonctions linéaires »

Après une première « activité » permettant des révisions sur la proportionnalité, une deuxième activité propose trois situations concrète, une discrète et deux continus, modélisées respectivement par une fonction affine et deux fonctions linéaires. Le vocabulaire des fonctions linéaires est introduit.

Puis une fonction linéaire est définie dans le cadre algébrique. Une situation discrète modélisée par cette fonction est proposée. C'est implicitement l'occasion de discuter le « *domaine d'adéquation* » de la fonction, conformément au document « *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège* », intitulé « *Proportionnalité au collège* » édité par Éduscol que nous avons analysé plus haut.



5 D'une fonction à une situation

Objectif
Revoir le vocabulaire image, antécédent dans le cadre des fonctions linéaires.

f est la fonction linéaire de coefficient 8.

a. Calculer $f(7)$, puis l'image de -9 par la fonction f.

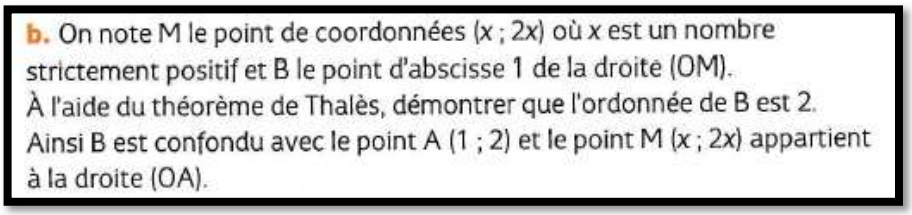
b. Calculer l'antécédent de 32, puis l'antécédent de -80.

c. Au cinéma, le prix d'une séance est de 8 €. Le prix, en euros, pour x séances est donc $f(x) = 8x$.
Interpréter concrètement, lorsque cela est possible, les résultats obtenus aux questions **a** et **b**.

Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 124

La question de l'adéquation du modèle est présente aussi dans l'exposition de connaissances dans un contexte géométrique où un périmètre $p(x)$ est fonction d'une longueur x ; il y est remarqué que « *dans cette situation, x et $p(x)$ sont positifs car ce sont des longueurs ; on peut pourtant calculer $p(-7)$* »
Dans les deux exemples, l'adéquation du modèle est questionnée sur des valeurs entières uniquement.

Bien qu'absente du programme officiel, la démonstration de la nature de la représentation graphique de la fonction linéaire est proposée en « activité », sur l'exemple de la fonction linéaire de coefficient 2.
Le sens « si $M \in (OA)$, alors M a pour coordonnées $(x; 2x)$» est démontré en dernier.
La démonstration du sens « si M a pour coordonnées $(x; 2x)$, alors $M \in (OA)$ » est l'objet de la question que voici :



b. On note M le point de coordonnées (x ; 2x) où x est un nombre strictement positif et B le point d'abscisse 1 de la droite (OM).
À l'aide du théorème de Thalès, démontrer que l'ordonnée de B est 2.
Ainsi B est confondu avec le point A (1 ; 2) et le point M (x ; 2x) appartient à la droite (OA).

Manuel « Transmath » de 2008, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 124

Elle consiste à montrer que $A \in (OM)$, ce qui permet d'en déduire que $M \in (OA)$; un changement de point de vue qui peut être difficile pour les élèves. Dans cette démonstration, (OM) est une droite qui *a priori* est variable. Elle permet, moins naturellement que celle qui est suggérée au début de cette

partie, de montrer par un double geste (continu) que lorsque x décrit la droite réelle représentée par l'axe des abscisses, les points de (OA) d'abscisse x décrivent (OA).

Dans l'exposition de connaissances, la définition de la représentation graphique d'une fonction linéaire est donnée. La propriété démontrée ci-dessus est énoncée dans les deux sens.

Lorsqu'une fonction linéaire modélise une situation concrète en exercice, dans l'ensemble, le phénomène étudié est continu (problème géométrique, vitesse en fonction du temps). Un phénomène discret de prix de vente en fonction du nombre de saladiers (provenant de l'épreuve du Brevet 2006) est étudié dans les exercices corrigés, dans lequel aucun problème d'adéquation du modèle n'est posé.

Comme dans le chapitre précédent, les nombres sollicités sont dans l'ensemble des entiers ; des décimaux sont présents dans les exercices modélisant un phénomène continu.
Quelques rares rationnels figurent dans les exercices traités dans le cadre algébrique.

iii. Manuel « Transmath » de 2008 : chapitre « Fonctions affines »

Deux situations concrètes sont utilisées dans les deux premières « activités » d'introduction ; dans la première, la variable est discrète (nombre de DVD loués) et dans l'autre elle est continue (nombre de km parcourus). Les exercices de modélisation sont dans des contextes continus dans l'ensemble, à part quelques rares exercices modélisant des prix par unité ne soulevant aucun problème d'adéquation.
La nature des nombres sollicités est comparable à celle des nombres du chapitre précédent.

Une « activité » d'introduction fait démontrer que tout point de coordonnées $(x; 2x + 3)$ appartient à la droite parallèle à la droite représentant la fonction linéaire $x \mapsto 2x$. Elle mobilise les propriétés du parallélogramme.
La réciproque est admise. Un double geste continu peut montrer aux élèves que lorsque x décrit l'ensemble des abscisses, les points de coordonnées $(x; 2x + 3)$ décrivent la droite en question.

Annexe 5 : Analyse des chapitres sur les fonctions du manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième

i. Manuel « Transmath » de 2016 : premier chapitre

Les « activités » d'introduction du chapitre intitulé « *comprendre et utiliser la notion de fonction* » sont au nombre de deux. La première a pour but de « *définir une fonction avec un programme de calcul* ». Elle vise à introduire le vocabulaire et les notations des fonctions sur l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2 - 4$. Les calculs d'images sont faits sur les nombres entiers 4 et – 1 ; les antécédents de 21 sont cherchés, il s'agit des entiers 5 et -5.
La deuxième « activité » d'introduction a pour objectif de « *définir une fonction avec un graphique* ». Un graphique représentant un relevé de température en degrés Celsius par un ballon sonde en fonction de l'altitude en km est donné. Des points sont reliés par des segments, la courbe est par conséquent celle d'une fonction affine par morceaux continue. Des lectures graphiques sont demandées ; elles font appel à des nombres entiers sauf pour un antécédent de 0.

Dans l'exposition de connaissances, la fonction est définie par un processus de correspondance. Il est ensuite exposé qu'une fonction peut aussi être définie par un graphique, un tableau, une formule. L'exposé de ces trois modes de « définition » d'une fonction est un résidu du programme officiel précédent. La représentation graphique d'une fonction ne fait pas l'objet d'une définition, c'est la représentation graphique qui semble définir la fonction.
La fonction du point de vue de dépendance d'une grandeur en fonction de l'autre, la variable mathématique, sont absents de l'exposition de connaissances, malgré la place que le programme officiel leur fait.
Dans l'édition précédente de ce manuel, l'exposition de connaissances sur les fonctions commençait pourtant par : « *Une fonction de la variable x est un processus qui à chaque valeur de x associe un unique nombre* ». L'objet « variable » avait sa place aussi dans quelques exercices.

Les exemples qui sont associés à l'exposition de connaissances utilisent des nombres entiers, sauf pour une image, donnée dans un tableau de valeurs. Remarquons que l'auteur s'est gardé de proposer une activité d'introduction intitulée « *définir une fonction avec un tableau de valeurs* ».
L'aspect de dépendance entre deux grandeurs mesurables (continues) de la fonction, que le programme officiel met en avant, est absent de cette exposition de connaissances.
Les exercices offrent des tâches ayant des aspects de correspondance ainsi que des tâches ayant des aspects de dépendance de deux grandeurs.
Le mot « modélisation » est absent de ce chapitre ; les phénomènes qu'il est proposé de modéliser par une fonction dans les exercices sont dans l'ensemble des grandeurs mesurables, continues ou prenant un « grand » nombre de valeurs (comme un prix en euros ou un nombre de Megaoctets).

L'étude d'un tarif postal en fonction de la masse de l'envoi est proposée et donne lieu à une fonction en escalier. Il est similaire à un exercice de l'édition précédente. Cependant la dernière question est enlevée, le graphique n'est pas demandé, la discontinuité de la fonction n'apparait donc pas dans le cadre graphique. Les questions (par exemple : le tarif d'un envoi de 28 g) sont posées dans le registre de la langue naturelle et des notations symboliques des fonctions.

L'exercice portant sur le nombre de petites annonces en fonction du nombre de lignes de la petite annonce (deux grandeurs discrètes finies) est repris de l'édition précédente.

En dehors de cet exercice, peu de fonctions sont « définies » par un tableau de valeurs parmi les 76 exercices proposés : nous en avons repéré trois, dont deux nous paraissent rejoindre notre problématique qui peut s'énoncer : « relier les points : oui, non, comment ? ».

Voici le premier :

32 Le tableau ci-dessous donne la hauteur (en m) d'un ballon de basket lors d'un lancer franc en fonction du temps (en s).
On note h la fonction ainsi définie.

Temps (en s)	Hauteur (en m)
0	2,4
0,1	3
0,2	3,6
0,3	4
0,4	4,3
0,5	4,4
0,6	4,4
0,7	4,2
0,8	3,8
0,9	3,4
1	3



1. a. Que signifie pour cette situation $h(0) = 2{,}4$?
b. Lire $h(0{,}5)$.
c. Lire les antécédents de 3 par h.

2. a. Tracer un repère avec pour unités :
• 1 cm pour 0,1 s sur l'axe des abscisses ;
• 1 cm pour 0,4 m sur l'axe des ordonnées.
b. Représenter graphiquement ce tableau.

Manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 89

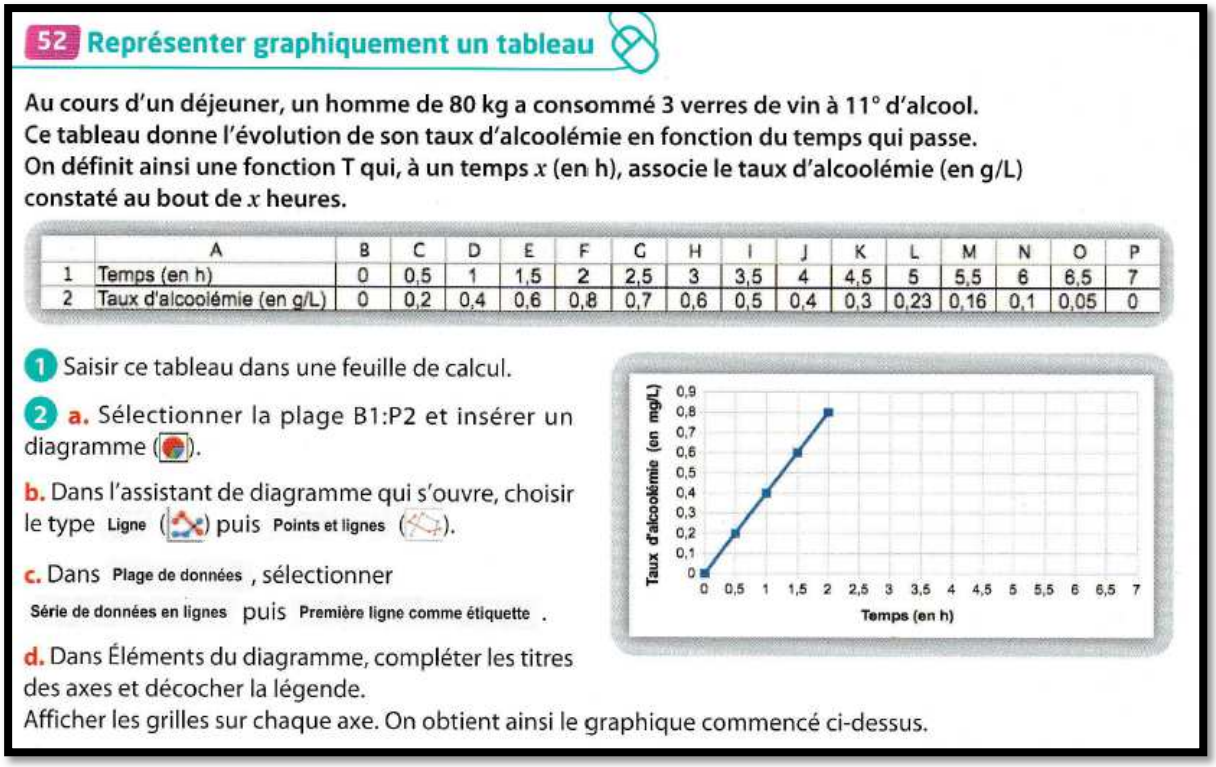
En toute rigueur, la fonction h définie par le tableau de valeurs a un ensemble de définition fini de cardinal 11. Elle constitue donc une modélisation discrète du phénomène (continu) étudié, sur l'intervalle $[0; 1]$.
La dernière question est celle qui nous intéresse. A priori, la tâche est à réaliser avec papier et crayon.
Les élèves peuvent représenter graphiquement le tableau *stricto sensu*, en représentant les 11 points correspondant au tableau de valeurs. En toute rigueur, c'est tout ce qu'ils peuvent faire.
Cependant, tout les pousse à relier les points :

- La totalité des représentations graphiques du chapitre représente des fonctions continues ;
- Le tableau comporte des valeurs d'une fonction qui modélise un phénomène continu ;
- Ils sont habitués à relier des points.

Si les élèves relient les points, ils peuvent théoriquement le faire d'une infinité de manières ; en pratique, ils relieront les points par des segments de droite ou « de façon régulière et continue ».
Dans ce contexte de balistique, relier les points par des segments de droite a peu de sens.
En particulier, comment relieraient-ils les points d'abscisses 0,5 et 0,6 qui ont la même ordonnée ? Le ballon n'a certainement pas une trajectoire horizontale entre deux instants ; intuitivement, le maximum de la hauteur du ballon est supérieur à 4,4 m et est atteint entre 0,5 s et 0,6 s (en théorie en 0,55).
Les points étant reliés (d'une façon ou d'une autre), la représentation graphique obtenue n'est plus celle de la fonction h définie par le tableau de valeurs.
La question de la représentation graphique de la hauteur de la balle en fonction du temps sur l'intervalle $[0; 1]$ peut être l'occasion d'un débat riche en classe sur l'interpolation continue d'un nuage de points et la validité d'un modèle.

Le deuxième exercice qui traite de la problématique « Relier ou non les points ; si oui, comment ? » se situe sur la page intitulée « *Avec un logiciel* » de ce chapitre. Il consiste à guider les élèves pour qu'ils effectuent une représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs via un tableur. Les valeurs du

tableau sont celles de l'évolution d'un taux d'alcoolémie en fonction du temps. L'auteur guide pas à pas les élèves vers une représentation de points reliés par des segments, ce qui est discutable compte tenu que le phénomène est non seulement continu mais aussi dérivable.



52 Représenter graphiquement un tableau

Au cours d'un déjeuner, un homme de 80 kg a consommé 3 verres de vin à 11° d'alcool.
Ce tableau donne l'évolution de son taux d'alcoolémie en fonction du temps qui passe.
On définit ainsi une fonction T qui, à un temps x (en h), associe le taux d'alcoolémie (en g/L) constaté au bout de x heures.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Temps (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
2	Taux d'alcoolémie (en g/L)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,23	0,16	0,1	0,05	0

1 Saisir ce tableau dans une feuille de calcul.

2 **a.** Sélectionner la plage B1:P2 et insérer un diagramme ( ).

b. Dans l'assistant de diagramme qui s'ouvre, choisir le type Ligne ( ) puis Points et lignes ( ).

c. Dans Plage de données, sélectionner Série de données en lignes puis Première ligne comme étiquette.

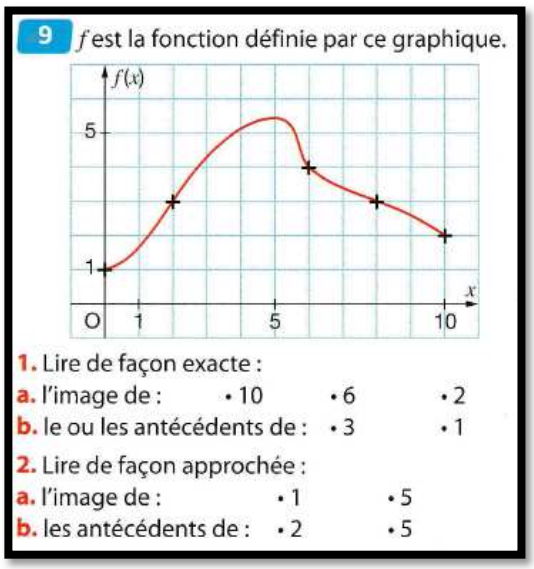
d. Dans Éléments du diagramme, compléter les titres des axes et décocher la légende.
Afficher les grilles sur chaque axe. On obtient ainsi le graphique commencé ci-dessus.

Manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 91

Or, les tableurs proposent un grand nombre types de graphiques, reliant ou non les points correspondants à deux séries de données. Les points peuvent être reliés par des segments, par une courbe dite « lissée ». Cette tâche peut être une deuxième occasion de poser avec les élèves la question de la légitimité de relier les points dans un contexte donné et des façons de le faire. Et par conséquent de porter un regard critique sur les modes de représentations de données (et par conséquent les différents modèles) proposés par le tableur.

Dans le chapitre que nous analysons, les nombres sollicités sont essentiellement des entiers.
Quelques fractions simples sont convoquées dans des exercices intra mathématiques : un exercice mobilise une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$; trois exercices demandent le calcul d'images de $\frac{2}{3}$, de $\frac{1}{2}$.
De rares nombres décimaux sont aussi présents : dans l'exercice analysé précédemment ; dans deux questions de deux exercices différents qui consistent à vérifier le calcul d'un antécédent de 10,2 ; dans trois exercices qui font intervenir un tableur.

Les lectures graphiques d'images et d'antécédents font l'objet de plusieurs exercices. Lorsque l'une ou l'autre des coordonnées à lire n'est pas un nombre entier de carreaux, l'auteur de l'exercice le signale par la consigne « *Lire approximativement* » et lorsque les lectures graphiques mélangent des nombres entiers de carreaux et des nombres non entiers de carreaux, il le signale par la consigne « *Lire de façon exacte ou de façon approchée* ».



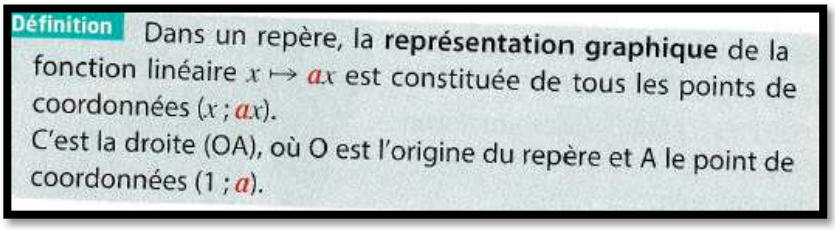
Manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 86

ii. Manuel « Transmath » de 2016 : deuxième chapitre

Le chapitre suivant de ce manuel s'intitule « *Relier proportionnalité et fonction linéaire* ».
Les phénomènes étudiés dans ce chapitre sont pour la plupart continus.
Cependant, l' « activité » d'introduction n°1 propose comme premier phénomène étudié celui du coût de billets en fonction du nombre de billets achetés à 1,50 € l'un. La modélisation de ce phénomène par la fonction linéaire $f: x \mapsto 1{,}5x$ est proposée par l'énoncé. La dernière question portant sur cette fonction f concerne le domaine d'adéquation du modèle (modèle continu d'un phénomène discret positif) : le calcul de l'image par f d'un entier négatif, -5, et d'un décimal, 1,5 sont demandés, puis l'interprétation des résultats « *pour la situation étudiée* ». Aucune généralisation de ces deux exemples n'est proposée ni demandée.
Les modélisations de phénomènes discrets par une fonction linéaire sont finalement peu présentes dans ce chapitre : deux autres exercices ont pour thème de modéliser un prix (de bracelets, de DVD) en fonction du nombre d'articles achetés.
La deuxième « activité » d'introduction est l'étude d'un phénomène continu (une énergie électrique consommée en fonction du temps)

Dans l'exposition de connaissances, le lien entre proportionnalité et fonction linéaire est énoncé comme suit : « *A toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire. On dit que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.* »
Cet énoncé permet qu'une fonction continue définie sur l'ensemble des réels puisse être outil dans la résolution d'un problème lié à une situation de proportionnalité, que les grandeurs soient discrètes ou continues, à mesures appartenant à un intervalle borné, semi-borné ou non.
Un exemple suit cette phrase et pose la question du domaine d'adéquation du modèle. Une fonction modélise le périmètre d'un carré en fonction la longueur de son côté : l'image d'un nombre (ici entier négatif) par la fonction qui modélise existe, bien qu'on ne puisse interpréter le nombre et son image dans le contexte de la situation.

La propriété : « la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est la droite passant par O et le point de coordonnées $(1; a)$ » est énoncé au sein de la définition de la représentation graphique :



Définition Dans un repère, la **représentation graphique** de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ est constituée de tous les points de coordonnées $(x\,;ax)$.
C'est la droite (OA), où O est l'origine du repère et A le point de coordonnées $(1\,;a)$.

Manuel « Transmath » de 2016, classe de Troisième, éditeur Nathan, page 100

Dans ce chapitre, les nombres entiers sont les plus représentés ; les décimaux occupent une plus grande place que dans le chapitre précédent.

iii. Manuel « Transmath » de 2016 : troisième chapitre

Le dernier chapitre sur les fonctions de ce manuel est intitulé « *Connaitre les fonctions affines* ». De même que dans celui sur les fonctions linéaires, la première « activité » d'introduction concerne l'étude d'un phénomène discret (trois différents tarifs de séances de cinéma en fonction du nombre de séances). Le domaine d'adéquation des trois fonctions n'est pas questionné cette fois.
La deuxième « activité » d'introduction étudie un phénomène continu de correspondance entre degrés Celsius et Fahrenheit. Elle mobilise la translation qui fait passer de points de mêmes abscisses des représentations graphiques des fonctions $x \mapsto 1{,}8x$ et $x \mapsto 1{,}8x + 32$. En s'appuyant sur le fait (connu des élèves depuis le chapitre précédent) que le premier ensemble est une droite, la translation transformant les droites en droites, la seconde est aussi une droite. Le cadre géométrique permet toujours de « transporter » le continu de la première droite sur la seconde.

Les phénomènes étudiés dans les exercices sont dans l'ensemble continus ; d'autres, moins nombreux, sont discrets – essentiellement des questions de tarifs et une situation de « niveaux » dans un jeu vidéo.

Annexe 6 : Analyse du chapitre sur les fonctions du manuel « Dimensions » de 2016, classe de Troisième

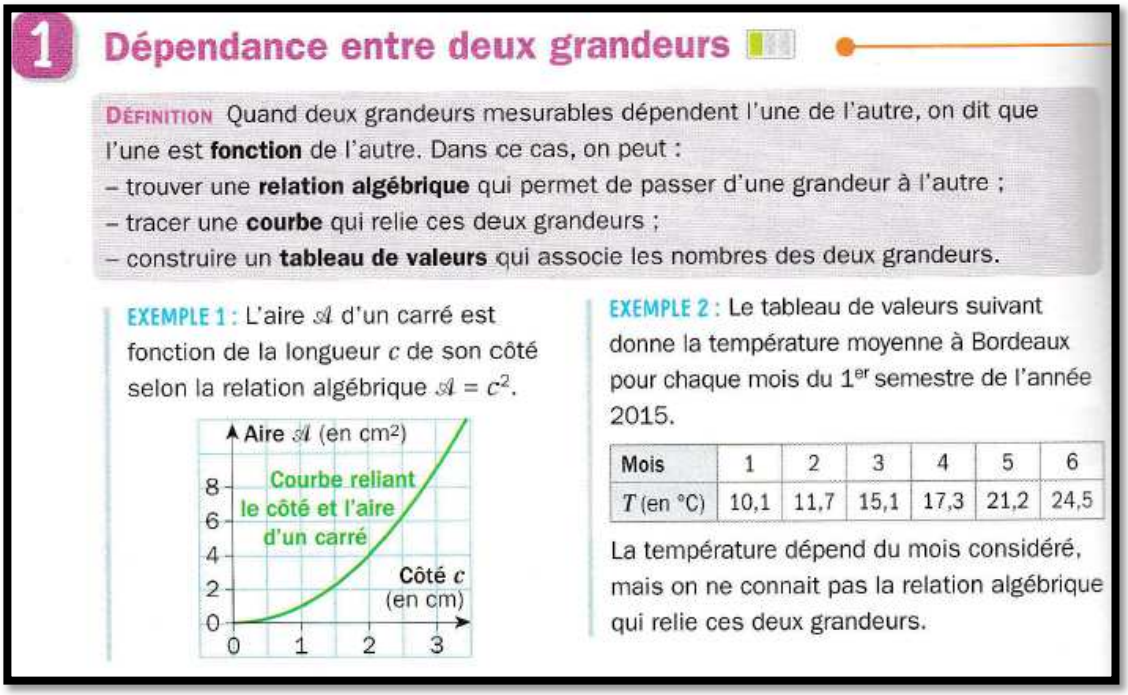
i. Manuel « Dimensions » de 2016 : exposition de connaissances

L'exposition de connaissances est faite sans « activité » introductrice. Elle expose en premier une définition d'une fonction du point de vue de la dépendance entre deux grandeurs et la possibilité de :

- « *trouver une relation algébrique qui permet de passer d'une grandeur à l'autre ;*
- *tracer une courbe qui relie ces deux grandeurs*
- *construire un tableau de valeurs qui associe les nombres des deux grandeurs.* »

La formule, la courbe et le tableau de valeurs apparaissent ici comme des objets qu'il est possible de mobiliser lorsqu'une grandeur est fonction de l'autre ; sans pour autant nécessairement caractériser la fonction.

Compte tenu des exemples de représentations graphiques du chapitre, et en particulier de cette exposition de connaissances, le mot « courbe » est sans doute pris dans le sens de courbe de fonction continue ; son usage insère d'emblée la fonction dans le monde du continu. Remarquons qu'il n'est pas du tout question de « relier des points » (ce qui semble aller de soi) mais de « relier deux grandeurs ».



1 **Dépendance entre deux grandeurs**

DÉFINITION Quand deux grandeurs mesurables dépendent l'une de l'autre, on dit que l'une est **fonction** de l'autre. Dans ce cas, on peut :
– trouver une **relation algébrique** qui permet de passer d'une grandeur à l'autre ;
– tracer une **courbe** qui relie ces deux grandeurs ;
– construire un **tableau de valeurs** qui associe les nombres des deux grandeurs.

EXEMPLE 1 : L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré est fonction de la longueur c de son côté selon la relation algébrique $\mathcal{A} = c^2$.

EXEMPLE 2 : Le tableau de valeurs suivant donne la température moyenne à Bordeaux pour chaque mois du 1er semestre de l'année 2015.

Mois	1	2	3	4	5	6
T (en °C)	10,1	11,7	15,1	17,3	21,2	24,5

La température dépend du mois considéré, mais on ne connait pas la relation algébrique qui relie ces deux grandeurs.

Manuel « Dimensions » de 2016, classe de Troisième, éditeur Hatier, page 116

Deux exemples sont choisis pour illustrer la définition :

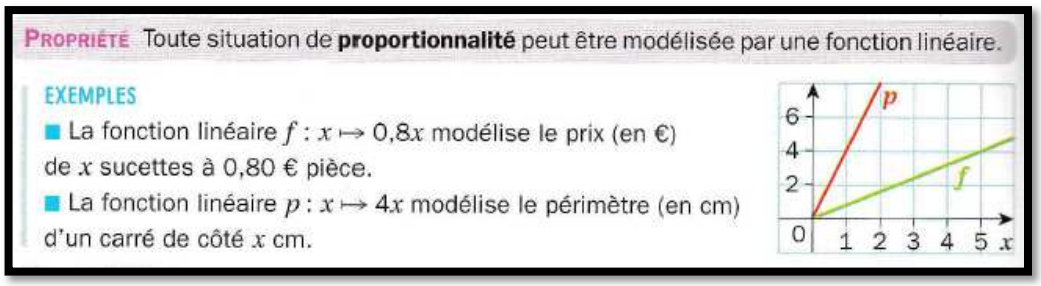
- la « relation » entre « *le côté et l'aire d'un carré* », deux grandeurs continues, exprimée dans le registre algébrique par une formule et dans le registre graphique par une courbe ;
- la température en fonction du temps selon le mois au cours d'un semestre ; les six couples de données figurent dans un tableau de valeurs.

Dans ces deux exemples, les représentations choisies définissent bien la fonction sur son ensemble de définition. On peut cependant se demander comment la courbe « reliant » la température selon le mois peut être envisagée par l'auteur.

Le point de vue de correspondance de la fonction est développé dans un deuxième temps ; la représentation graphique d'une fonction est alors définie.

Une double page est ensuite consacrée à l'exposition de connaissances sur les fonctions linéaires et affines.

Il y est énoncé en propriété : « *Toute situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire* ». Elle est suivie de deux exemples, l'un d'un phénomène discret et l'autre d'un phénomène continu.



Manuel « Dimensions » de 2016, classe de Troisième, éditeur Hatier, page 118

Cependant, aucun commentaire n'est fait concernant le domaine d'adéquation de ces deux modèles.

ii. Manuel « Dimensions » de 2016 : exercices

Les deux pages suivantes comportent chacune un « *problème résolu* » qui relève d'un phénomène discret modélisé par une fonction affine.
Les modes de résolution proposés sont multiples pour les deux : l'un d'eux mobilise le cadre algébrique ; un autre le cadre graphique ; un troisième utilise un tableau de valeurs générées par un tableur.

Le reste du chapitre est constitué d'exercices. Ceux qui étudient la variation d'une grandeur en fonction d'une autre relèvent dans l'ensemble de phénomènes continus, sauf pour les problèmes modélisés par des fonctions affines (des prix qui varient en fonction du nombre d'articles achetés).

Les représentations graphiques présentes dans ce chapitre sont toutes des courbes « continues ».

Les représentations graphiques qu'il est demandé aux élèves d'effectuer sont des représentations de fonctions linéaires ou affines. Un exercice fait exception, qui demande un tracé de courbe à partir d'un tableau de valeurs.

86 TICE **Âge canin**

MODÉLISER à l'aide d'un tableur.

Le tableau suivant donne l'équivalence, pour des chiens de moins de 15 kg, entre leur âge réel (en années) et leur âge humain (en années).

Âge réel du chien	1	2	3	4	5	6	7	8
Âge humain	20	28	32	36	40	44	48	52

1. a. Avec un tableur, représenter graphiquement la fonction modélisant cette situation.

b. Est-ce une fonction affine ? Pourquoi ?

c. À partir de 2 ans, la fonction qui modélise cette situation est affine. Donner l'expression algébrique de cette fonction.

2. a. Calculer l'âge réel d'un Yorkshire ayant un âge humain qui équivaut à 80 ans.

b. Calculer l'âge humain qui correspond à un Yorkshire de 12 ans.



c. Vérifier ces résultats graphiquement.

Manuel « Dimensions » de 2016, classe de Troisième, éditeur Hatier, page 131

Ce tracé doit être effectué via un tableur. Le phénomène étudié est discret (les mesures des âges des chiens sont en années entières). Dans ce cas, un tableau de valeur définit la fonction sur l'ensemble des valeurs entières de 1 à 8.
Un âge peut aussi être considéré comme continu. Il est demandé de tracer « la » fonction qui modélise cette situation. Laquelle ?
La question laisse aux élèves le choix du type de graphique sur le tableur. On peut supposer qu'en l'absence de représentation graphique constituée de points non reliés dans leur cursus, les élèves choisissent une des courbes qui figurent dans le menu du tableur ; c'est l'occasion de constater avec eux la non unicité des fonctions qui passent par ces points.
Les valeurs des âges calculées en question 2 sont entières et ne posent aucune difficulté d'interprétation.

Les nombres mobilisés dans ce chapitre sont essentiellement des entiers positifs, quelques nombres décimaux positifs. De rares nombres négatifs et fractions de numérateur et dénominateurs entre 1 et 9 sont présents.

Annexe 7 : Analyse du premier chapitre sur les fonctions de quatre manuels de Seconde

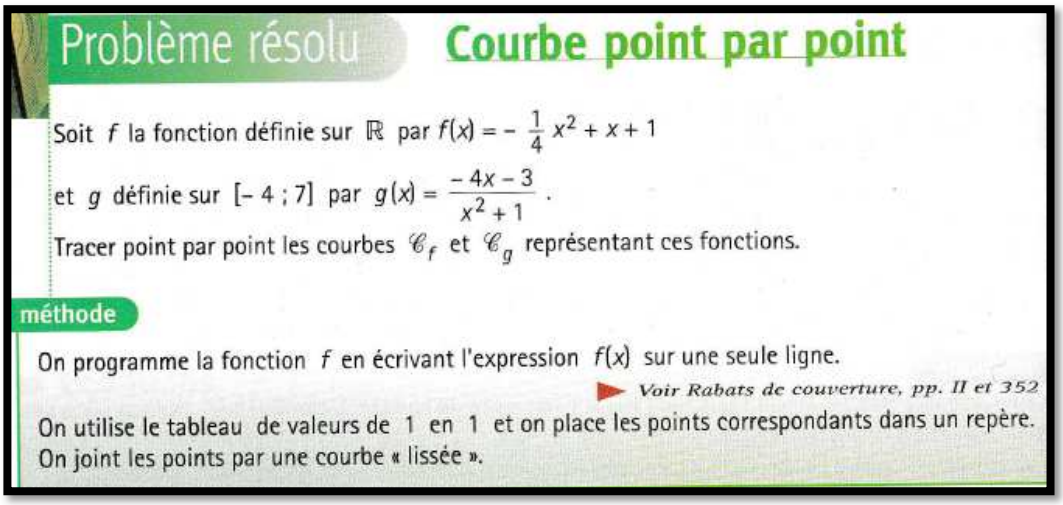
a) Manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, éditeur Hachette (programme de 2001)

Analysons le premier chapitre sur les fonctions de ce manuel, qui traite des « généralités ».

i. Introduction et exposition des connaissances

Les trois « activités » d'introduction du chapitre ont pour point de départ des graphiques. Ceux-ci représentent des fonctions définies et continues sur un intervalle, sauf l'une d'elle qui est continue sur les trois intervalles disjoints de son ensemble de définition.
Dans l'exposition de connaissances, conformément au programme officiel, la fonction est définie par un processus de correspondance entre un réel de l'ensemble de départ et « *un seul réel* ».
La représentation graphique d'une fonction f est désignée par sa « courbe représentative ». Elle est définie par l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que « *l'abscisse x décrit l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et l'ordonnée y est l'image de x par f* ». Notons le mot « décrit » qui introduit une perspective globale dans la définition par ensemble de points qui relève de la perspective ponctuelle.
Suivent les définitions de sens de variation et d'extremum, dans le registre de la langue naturelle ainsi que le registre symbolique.
Chaque définition et chaque exemple de l'exposition de connaissances est illustré par un graphique de courbe de fonction continue sur un intervalle.

Le manuel propose en « *problème résolu* » une méthode de « *tracé point par point* » de courbe (d'une fonction dont l'expression est donnée) :



Problème résolu **Courbe point par point**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

et g définie sur $[-4\,;7]$ par $g(x) = \frac{-4x-3}{x^2+1}$.

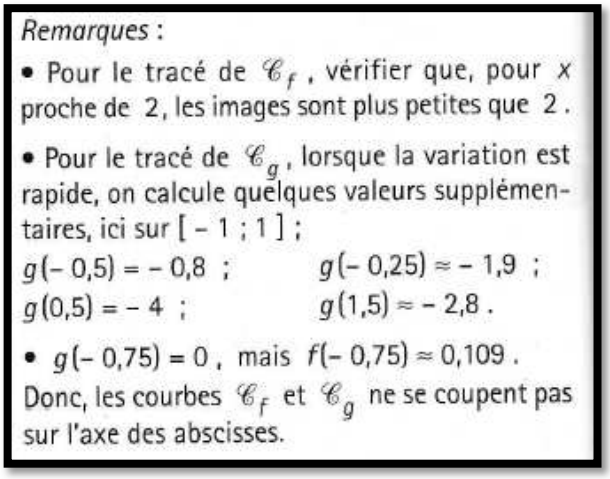
Tracer point par point les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant ces fonctions.

méthode

On programme la fonction f en écrivant l'expression $f(x)$ sur une seule ligne.

Voir Rabats de couverture, pp. II et 352

On utilise le tableau de valeurs de 1 en 1 et on place les points correspondants dans un repère.
On joint les points par une courbe « lissée ».



Remarques :

- Pour le tracé de $\mathscr{C}_f$, vérifier que, pour x proche de 2, les images sont plus petites que 2.
- Pour le tracé de $\mathscr{C}_g$, lorsque la variation est rapide, on calcule quelques valeurs supplémentaires, ici sur $[-1\,;1]$;

$g(-0{,}5) = -0{,}8$; $g(-0{,}25) \approx -1{,}9$;
$g(0{,}5) = -4$; $g(1{,}5) \approx -2{,}8$.

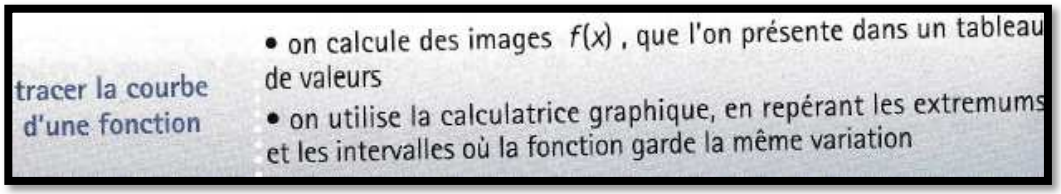
- $g(-0{,}75) = 0$, mais $f(-0{,}75) \approx 0{,}109$.

Donc, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ne se coupent pas sur l'axe des abscisses.

Manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, éditeur Hachette, page 68

Le maximum de la fonction f est dans le tableau de valeurs ; le manuel fait remarquer de *« vérifier que, pour x proche de 2, les images sont plus petites que 2* » sans en expliciter la raison.
Le minimum de g n'est pas dans le tableau de valeurs ; le conseil est alors : « *lorsque la variation est rapide, on calcule quelques valeurs supplémentaires* ».

Le « savoir faire » correspondant à « tracer la courbe d'une fonction » donne un autre « conseil » certainement plus généralisable : la calculatrice est l'outil d'observation les variations de la fonction.



Manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, éditeur Hachette, page 74

ii. Les exercices

Neuf exercices ont pour objectif explicite de tracer une « *courbe point par point* ».
Le premier est dans un contexte de croissance du diamètre d'un arbre en fonction de son âge en années à partir d'un tableau de 15 valeurs. Il est demandé de « lisser la courbe ».
Les six autres exercices donnent l'expression de la fonction à représenter ainsi que son ensemble de définition. De surcroît, soit le tableau de variation est donné, soit il est écrit qu'on admet que les changements de sens de variation se font « *en des valeurs entières* ».
Deux derniers exercices comportent une tâche de représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs ; l'un, dans un contexte de biologie où la variable est le temps en jours, spécifie de « *joindre les points par une courbe lissée* » ; dans l'autre, les performances à la course de 80 m sont évaluées par 11 notes différentes en fonction du temps de la course regroupé en 11 classes ; le tableau de valeurs définit donc la fonction ; la courbe, en escalier, est un exemple de fonction présentant des discontinuités (le seul du chapitre).

Un « problème guidé » consiste à résoudre un problème d'optimisation d'une aire en fonction d'une longueur. La procédure consiste à exprimer l'aire en fonction de la longueur puis par balayage de plus en plus fin de la variable de départ, ou par affichage de la courbe sur la calculatrice, chercher une valeur approchée au 10e de cette variable qui rend l'aire minimale. Cette procédure ne figure pas dans les exercices de fin de chapitre.

La modélisation de situations est très présente.
Celles qui relèvent du continu sont majoritaires : des situations géométriques (9 exercices) ; des phénomènes physiques (5 exercices : poids en fonction de la masse ; cinématique ; un problème d'électricité) ; un phénomène économique (de coût en fonction d'une vitesse).
Deux phénomènes biologiques ont pour variable le temps dont les valeurs, dans le cadre de cet exercice, sont des jours entiers ou des années entières (le temps pourrait malgré tout être une variable continue) ; l'énoncé demande alors de « lisser la courbe ».
Trois évolutions au cours du temps en années (de dépenses, d'effectifs) se situent explicitement dans le discret ; il est écrit par exemple que « *la variable x ne prend que des valeurs entières* ». La représentation graphique est donnée, elle est constituée de points reliés par des segments.

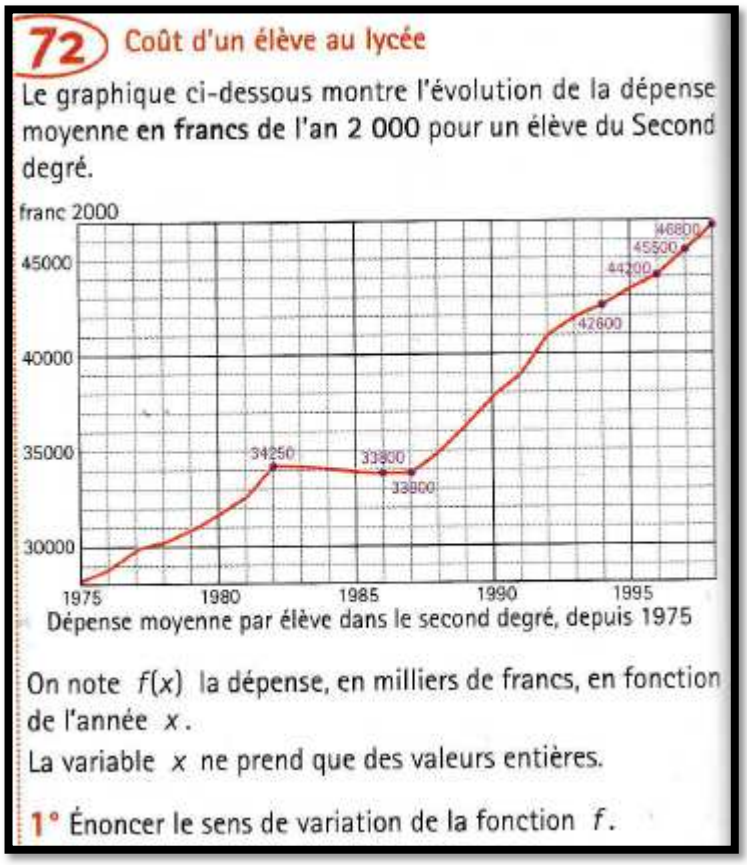
Le chapitre propose cinq exercices de tracés de courbes à partir de quelques indices : variations de la fonction, valeurs en un petit nombre de points. Les énoncés demandent prudemment une « *courbe possible* ».

Les nombres mobilisés sont essentiellement des entiers ; lorsque l'expression de la fonction est connue, quelques images et antécédents de fractions et de racines carrées sont demandés.
Le « problème guidé » du chapitre aborde l'approximation d'un irrationnel à l'entier puis à 0,1 près, par balayage de valeurs de la fonction avec pas de 1 puis de 0,1sur la calculatrice.

Le vocabulaire de la modélisation est absent.

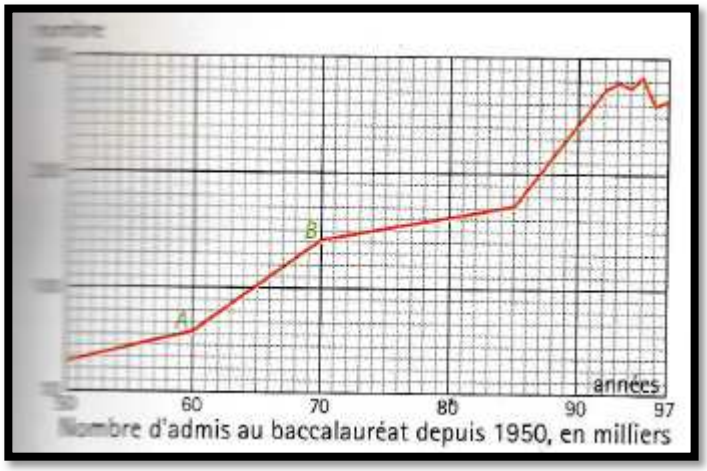
Dans ce manuel, le continu est largement dominant :
La calculatrice est très présente (tracé de courbes de fonctions pour tracer sur papier, génération de tableaux de valeurs, balayage pour approximation)
Les tâches dans lesquelles les tableaux de valeurs sont mobilisés pour tracer des courbes de fonction continue font l'objet de diverses précautions, il est question de « courbe possible » ; le sens de variation est à conjecturer sur la calculatrice ou bien il est explicitement dit que les changements de sens de variation se font en des valeurs entières. Ainsi, les tableaux de valeurs n'apparaissent pas comme moyen de définir une fonction.

Le discret est seulement présent dans trois exercices qui étudient des phénomènes d'évolution dans le temps discrétisé en années entières. L'auteur adopte une cohérence interne implicite : si la variable est discrète alors on joint les points par des segments – par opposition à : si elle est continue alors la courbe est « lisse ».
Ce qui est moins cohérent est que l'énoncé demande de préciser les variations de la fonction alors que le sens de variation d'une fonction n'est défini en classe de Seconde que sur un intervalle de $\mathbb{R}$:



Manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, éditeur Hachette, page 84

Ou encore que la courbe ci-dessous représente une fonction définie sur les entiers de 50 à 97 (alors que le chapitre exploite trois courbes représentant des fonctions affines par morceaux continues en début de chapitre) :



Manuel « Déclic » de 2000, classe de Seconde, éditeur Hachette, page 85

b) Manuel « Math'x » de 2005, classe de Seconde, éditeur Didier (programme de 2001)

Les « activités » d'introduction du chapitre sur les généralités des fonctions sont variées : une première a pour donnée un graphique (de fonction continue) ; une deuxième définit une fonction par un « programme de calcul » qui amplifie le point de vue ponctuel ; une troisième consiste en l'étude d'une situation géométrique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique qui permet de déplacer un point variable de façon (apparemment) continue.

L'exposition de connaissances est comparable à celle que nous avons décrite précédemment.

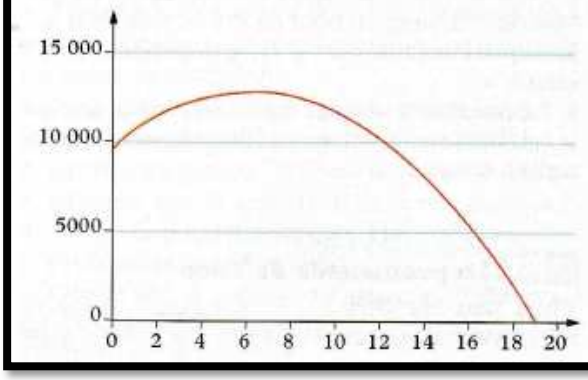
Les exercices

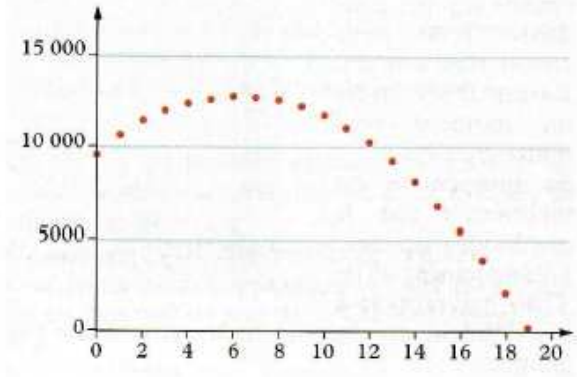
Le chapitre propose six exercices comportant une tâche de représentation graphique d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs.
Un seul de ces exercices relève d'une situation discrète : une recette est fonction de la baisse d'un prix (baisse en entiers d'euros).

61 Le cirque Gladiator

Le directeur d'un cirque sait que le nombre de spectateurs par séance est fonction du prix de la place ; il veut fixer ce prix à un nombre entier d'euros et s'assurer une recette maximale. Il sait qu'il reçoit en moyenne 500 spectateurs par séance lorsque le prix de la place est fixé à 19 €. Mais à chaque fois qu'il baisse le prix de la place de 1 €, il a 80 spectateurs de plus.

1. Lequel de ces deux graphiques représente le mieux la recette en fonction de la baisse de prix ?





2. Déterminer graphiquement de combien il doit baisser le prix pour avoir une recette maximale.

3. Soit n le nombre d'euros dont le prix baisse.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre n ?

b. Montrer que la recette est

$$(19-n)\times(500+80\times n)\,.$$

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice le prix pour lequel la recette est maximale.

Manuel « Math'x » de 2005, classe de Seconde, éditeur Didier, page 87

La variable prend 20 valeurs, elle est nommée n, alors que dans le reste du chapitre la variable est nommée x. L'énoncé demande de choisir entre deux « graphiques », dont l'un est continué de 20 points isolés et l'autre d'une courbe de fonction continue. Remarquons qu'il n'utilise pas le mot « courbe ». Le but de l'exercice est de trouver la valeur de la variable pour laquelle la recette atteint son maximum (remarquons que l'énoncé évite le mot « fonction ») ; un tableau de valeurs généré à la calculatrice peut suffire à répondre ; un élève qui n'aurait pas perçu le caractère discret de la situation pourrait cependant chercher la valeur en laquelle la fonction du second degré associée atteint son maximum.
À part le graphique constitué de points isolés de cet exercice, la totalité des représentations graphiques du manuel sont des courbes de fonctions continues sur un intervalle.

Deux exercices comportent une tâche de représentation graphique sur un intervalle exclusivement à partir d'un tableau de valeurs : l'expression algébrique de la fonction n'est pas connue, il ne relève pas d'une situation particulière. Prudemment, l'énoncé demande de « *tracer une courbe pouvant représenter* f ».
Les autres tâches de représentations graphiques à partir d'un nombre fini de points sont dans des exercices où la fonction est unique de par la donnée de son expression algébrique ou de la situation qu'elle modélise. L'énoncé demande alors de « *tracer la courbe* » ; la procédure consiste à « *joindre harmonieusement* » les points. L'emplacement des extrema n'est pas questionné, contrairement au manuel analysé précédemment.

Les déterminations de valeur auxquelles les fonctions atteignent un extremum se font par lecture graphique (généralement à l'aide de la calculatrice) ou par le calcul algébrique.

Le vocabulaire de la modélisation est absent. Cependant les exercices qui en relèvent sont nombreux : nous avons repéré 12 situations géométriques ; 6 situations en physique ; 5 en biologie ; 2 en économie dont un phénomène discret (qui a fait l'objet d'une analyse supra).
En dehors des situations en géométrie dans lesquelles la variable est une longueur, la quasi-totalité des phénomènes étudiés ont pour variable le temps : qu'il soit mesuré en secondes, en jours, en mois ou en

en années, et bien que les valeurs des mesures en jeu soient entières, le temps est considéré comme une variable continue représentée par tout ou partie (connexe) de l'axe des abscisses.

c) Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, éditeur Didier (programme de 2009)

Nous nous intéressons au chapitre 1 du manuel, intitulé « *Modéliser par une fonction* ».

i. Introduction et exposition des connaissances

Les deux premières « activités » ont pour but d'introduire la définition d'une fonction par un graphique puis par une formule. Le tableau de valeurs apparait en tant que registre de représentation partiel de la fonction.
L' « activité » 3 aborde la fonction en tant que modèle de la dépendance entre deux grandeurs. Six situations sont proposées, dans des registres variés : langue naturelle, tableau de valeurs, graphique, calculateur sur un site internet. Cinq d'entre elles mobilisent des grandeurs théoriquement continues. L'une d'elles mobilise des grandeurs entières positives ; il s'agit du nombre de diviseurs (positifs) d'un nombre entier non nul en fonction de ce nombre ; la situation est exposée dans le registre graphique, par un nuage de points isolés.
L' « activité » 6 s'intitule « *Relier les points ?* ». Son objectif est explicite : *« Différencier situations discrètes et continues* ». Deux situations sont proposées, les données sont sous forme d'un tableau de six couples de valeurs, représentés chacun par deux graphiques. L'un des deux est un ensemble de points isolés, l'autre une courbe de fonction continue. La consigne est de choisir celui qui représente la situation.

6 Relier les points ?

Dans les deux cas suivants, un tableau de valeurs d'une fonction est donné. Préciser de quelle fonction il s'agit, quelle est la variable, puis choisir un des graphiques proposés par un tableur pour représenter cette fonction. Argumenter.

a. Le prix des places au cinéma

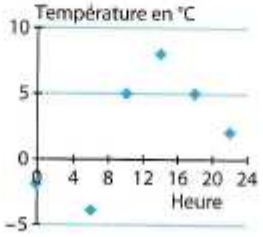
Nombre de places	Prix (en €)
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	48

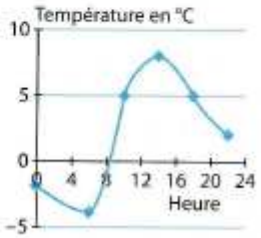




b. La température en °C le 8 décembre2009

Heure	Température (en °C)
0	−2
6	−4
10	5
14	8
18	5
22	2





Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, éditeur Didier, page 31

La question est ouverte et les élèves n'ont pas de moyen de contrôle de leur réponse ; la phase de correction mise en place par l'enseignant a donc toute son importance.
Cette « activité » est reprise dans le manuel de Première S édité l'année suivante, les auteurs de cette collection estiment que la question « *Relier les points ?* » mérite d'y consacrer du temps avec les élèves.

La définition dans l'exposition de connaissances présente la fonction comme outil de modélisation, dans certains cas, du lien entre deux quantités. Le vocabulaire de la modélisation figure dans le titre du chapitre et dans à cet endroit, nous ne le retrouvons pas au sein des exercices.
La fonction est définie par un processus de correspondance. Ce manuel n'écrit pas que x « décrit » l'ensemble de définition mais que la fonction associe « à chaque » nombre x de l'ensemble de définition son image. De façon assez semblable, dans la définition de la représentation graphique d'une fonction, nommée « *courbe représentative* », « *l'abscisse x prend toutes les valeurs de l'ensemble de définition* ». Ce vocabulaire induit un caractère discret aux définitions.
Les trois « définitions » de la fonction qui figurent au programme officiel sont présentées sur des exemples, en situation. La « définition » par un tableau de valeurs est illustrée par l'exemple de la pointure en fonction de la taille du pied :

1. Fonction donnée par un tableau de valeurs

À chaque taille de pied, on associe une seule pointure. On introduit la fonction p : taille du pied ↦ pointure.
La variable est la taille du pied.

Remarque. On ne peut pas considérer une fonction qui à la pointure associerait la taille du pied car, à la pointure 37, correspondent des tailles différentes.

p

Taille du pied en cm	23	23,5	23,6	25
Pointure (en Europe)	36	37	37	39



Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, éditeur Didier, page 32

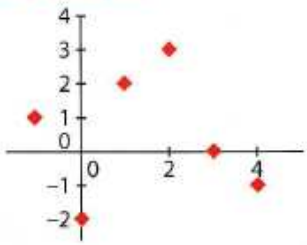
Ce tableau ne définit cependant pas la fonction en question puisque la taille du pied prend un ensemble de valeurs (théoriquement) continu.

La question de relier ou non les points figure dans l'exposition de connaissances : « *selon les cas on relie ou non les points de façon « harmonieuse »* »

B. Tracer une courbe représentative d'une fonction

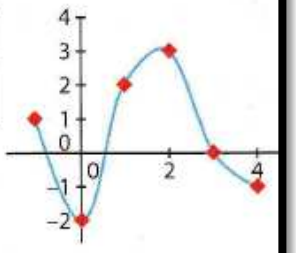
• **Cas général** On dresse un tableau de valeurs de f et on place les points de C_f ainsi connus. Suivant les cas on relie ou non les points de façon « harmonieuse ».

Exemples



x	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	−2	2	3	0	−1

Si x est une variable entière, on ne relie pas les points.
Si x est une variable réelle décrivant $[-1 ; 4]$, on les relie.



Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, éditeur Didier, page 34

Si nous généralisons les deux exemples, les ensembles de définition retenus sont : un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ dans le cas discret, un intervalle de $\mathbb{R}$ dans le cas continu.

ii. Les exercices

Au total, quatre tâches de représentation graphique d'un tableau de valeurs sont présentes. Trois d'entre elles sont dans des contextes continus. Dans un « Travaux pratiques », une aire est fonction d'une longueur. Après avoir rempli un tableau de valeurs et déterminé l'expression algébrique de la fonction, il est demandé de placer les points « *déjà connus* ». Puis la question est posée explicitement : « *Doit-on relier ou non les points pour tracer une courbe pouvant représenter la fonction $\mathcal{A}$* ? ». La question suivante « *Tracer une belle courbe* », peut cependant mettre les élèves sur la voie !
Le TP suivant étudie un volume en fonction d'une longueur. Un tableau de valeur est généré par le tableur. Puis celui-ci reste mobilisé pour effectuer une représentation graphique à partir de ce tableau. Les élèves sont guidés pour utiliser la fonctionnalité qui génère une « courbe lissée ».
Un troisième exercice étudie un phénomène continu en économie : un cout de production est donné en fonction d'un volume produit. L'expression algébrique permet de remplir un tableau de 9 couples de valeurs ; il est demandé de placer les points puis de « *tracer une courbe pouvant représenter la fonction* ». La courbe est exploitée pour en déterminer le volume pour un coût donné ; les réponses des élèves peuvent varier selon la façon sont ils auront relié les points.
Le dernier exercice du chapitre est en anglais :

1. Function defined by a table of values

Sketch a graph of the function defined by the following table of values. Have all pupils the same graph ? Why ?

x	−4	−1,5	0	1	2,6	6
$f(x)$	7	−1	−1	3	5,5	−3,1

Manuel « Math'x » de 2010, classe de Seconde, éditeur Didier, page 54

Les trois questions reprennent les trois « définitions » de la fonction données dans le programme officiel. La première est ouverte : les élèves peuvent placer six points puis les relier, ou pas. La question « *have all pupils the same graph ? Why ?* » est une invitation à en débattre en classe (peut-être en anglais ?)
On relie de façon harmonieuse

Les situations modélisées sont nombreuses : 17 sont géométriques ; 6 relèvent de la physique, 7 de la biologie et 5 de l'économie dont deux sont discrètes finies ; et 3 sont arithmétiques.
Au total, cinq sont discrètes dont trois finies et deux infinies ; dans ces deux dernières, le mot « fonction » est utilisé.
Les autres sont continues ; les variables sont des longueurs, surfaces, volumes et le temps.

iii. Conclusion sur le manuel « Math'x » de 2010

La question de relier ou non les points est posée à plusieurs reprises, en contexte et hors contexte ; le manuel invite manifestement à ce qu'elle soit débattue en classe.
Les graphiques faits de points isolés tiennent une place non négligeable puisque trois tels graphiques sont donnés au fil des pages du chapitre et que deux exercices comportent des tâches de construction de graphiques de ce type.
Lorsque les points sont reliés, les expressions algébriques ou le contexte font que les courbes sont « lisses ». Le manuel l'exprime dans les termes suivants : « *une courbe harmonieuse* » ou « *une belle courbe* » ; le vocabulaire relève donc de l'esthétique. La non unicité des fonctions pour un tableau d valeurs ou de variation donné n'est pas du tout abordée.

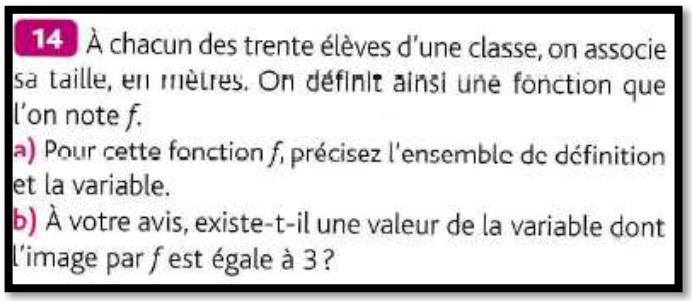
d) Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan (programme de 2009)

Le chapitre 1 de ce manuel concerne les généralités sur les fonctions. Il ne comporte pas d' »activité » d'introduction.
Les fonctions sont définies selon un processus de correspondance pour « *chaque* » nombre x de l'ensemble de définition. Dans la définition de la représentation graphique d'une fonction, il est précisé que la variable « x *prend toutes les valeurs de D* » (D est l'ensemble de définition). Le vocabulaire qui entoure la variable amplifie le caractère discret de la fonction.

Les exercices

« Identifier l'ensemble de définition d'une fonction » est dans ce manuel explicitement une « capacité attendue » du programme officiel qui fait l'objet d'une page comportant un exercice résolu, dans le cadre algébrique, suivi d'un exercice du même type. Les fonctions sont des polynomiales, rationnelles ou des composées de ces fonctions avec la fonction racine carrée. Les ensembles de définition sont des réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$. En fin de chapitre, quatre exercices comportent des tâches similaires. Trois exercices consécutifs retiennent notre attention : les énoncés, dans le registre de la langue naturelle, définissent une fonction. La première question qui est posée est de déterminer l'ensemble de

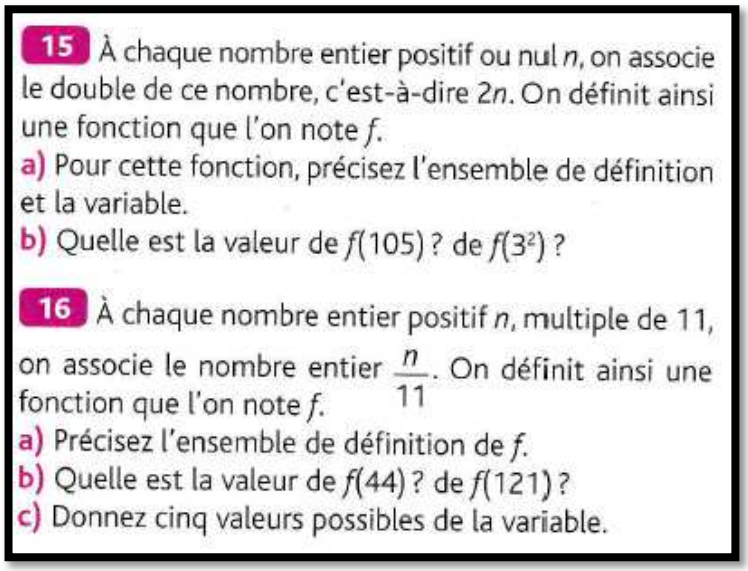
définition de la fonction (notons l'utilisation du mot « fonction » même si l'ensemble de définition est discret).
Dans le premier exercice, l'ensemble de définition est discret fini ; les élèves peuvent numéroter les trente élèves pour se ramener à une fonction numérique (comme toutes les fonctions qu'ils ont rencontrées jusque-là), ou pas :



14 À chacun des trente élèves d'une classe, on associe sa taille, en mètres. On définit ainsi une fonction que l'on note f.
a) Pour cette fonction f, précisez l'ensemble de définition et la variable.
b) À votre avis, existe-t-il une valeur de la variable dont l'image par f est égale à 3 ?

Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 34

Dans deux autres exercices, l'ensemble de définition est discret infini :



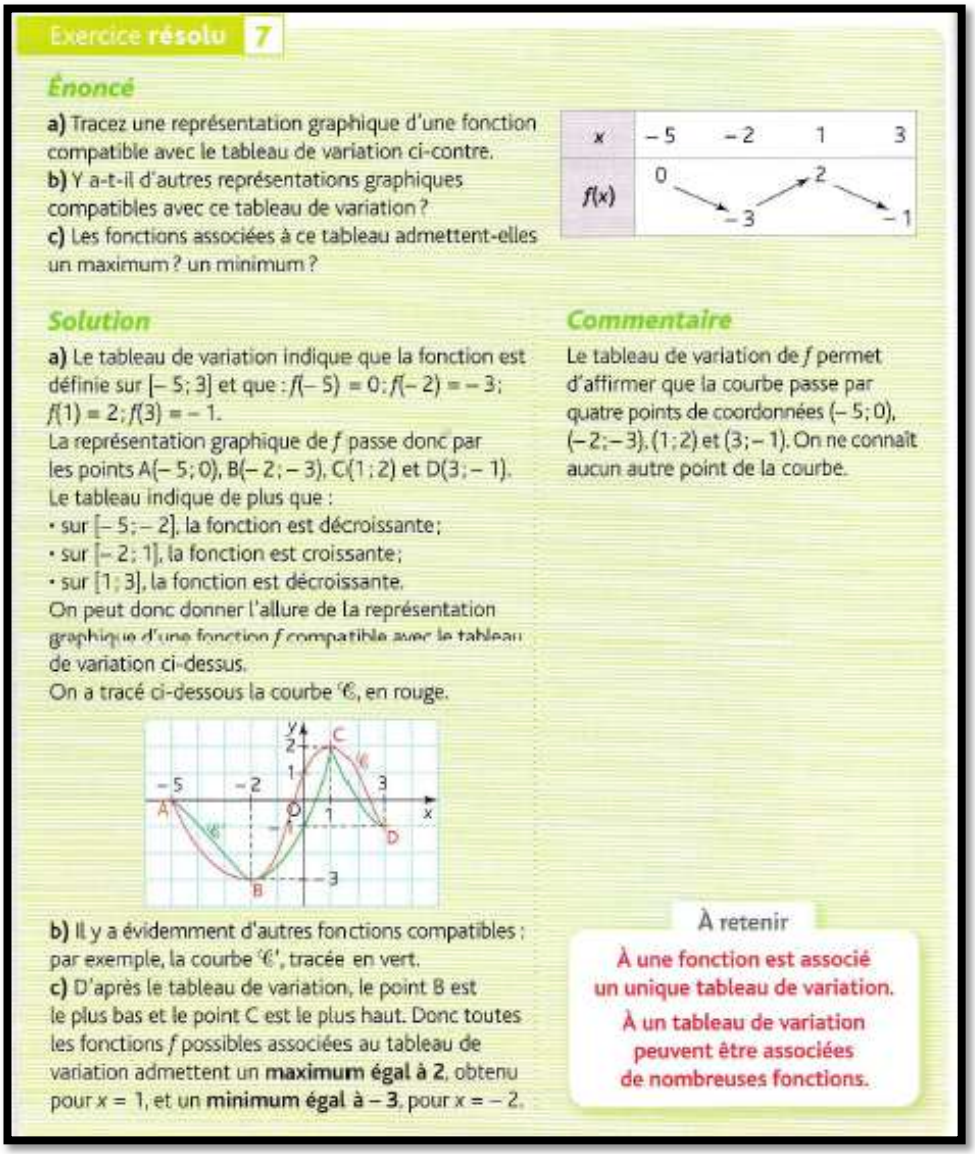
15 À chaque nombre entier positif ou nul n, on associe le double de ce nombre, c'est-à-dire $2n$. On définit ainsi une fonction que l'on note f.
a) Pour cette fonction, précisez l'ensemble de définition et la variable.
b) Quelle est la valeur de $f(105)$? de $f(3^2)$?

16 À chaque nombre entier positif n, multiple de 11, on associe le nombre entier $\frac{n}{11}$. On définit ainsi une fonction que l'on note f.
a) Précisez l'ensemble de définition de f.
b) Quelle est la valeur de $f(44)$? de $f(121)$?
c) Donnez cinq valeurs possibles de la variable.

Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 34

Dans ce manuel, le mot « fonction » est donc associé à des ensembles de définition continus (ou réunion finie d'ensembles continus) ainsi qu'à des ensembles de définition discrets, explicitement et par le biais de tâches spécifiques.

Ce manuel travaille de façon isolée la tâche « *tracer une représentation graphique d'une fonction compatible avec un tableau de variations* ». Pour commencer, la résolution de cette tâche est exposée dans un exercice corrigé :



Exercice résolu 7

Énoncé

a) Tracez une représentation graphique d'une fonction compatible avec le tableau de variation ci-contre.
b) Y a-t-il d'autres représentations graphiques compatibles avec ce tableau de variation ?
c) Les fonctions associées à ce tableau admettent-elles un maximum ? un minimum ?

x	-5		-2		1		3
$f(x)$	0	↘	-3	↗	2	↘	-1

Solution

a) Le tableau de variation indique que la fonction est définie sur $[-5;3]$ et que : $f(-5)=0$; $f(-2)=-3$; $f(1)=2$; $f(3)=-1$.
La représentation graphique de f passe donc par les points A$(-5;0)$, B$(-2;-3)$, C$(1;2)$ et D$(3;-1)$.
Le tableau indique de plus que :
• sur $[-5;-2]$, la fonction est décroissante ;
• sur $[-2;1]$, la fonction est croissante ;
• sur $[1;3]$, la fonction est décroissante.
On peut donc donner l'allure de la représentation graphique d'une fonction f compatible avec le tableau de variation ci-dessus.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, en rouge.

b) Il y a évidemment d'autres fonctions compatibles : par exemple, la courbe $\mathscr{C}'$, tracée en vert.
c) D'après le tableau de variation, le point B est le plus bas et le point C est le plus haut. Donc toutes les fonctions f possibles associées au tableau de variation admettent un **maximum égal à 2**, obtenu pour $x=1$, et un **minimum égal à -3**, pour $x=-2$.

Commentaire

Le tableau de variation de f permet d'affirmer que la courbe passe par quatre points de coordonnées $(-5;0)$, $(-2;-3)$, $(1;2)$ et $(3;-1)$. On ne connaît aucun autre point de la courbe.

À retenir

À une fonction est associé un unique tableau de variation.
À un tableau de variation peuvent être associées de nombreuses fonctions.

Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 28

Le but en est explicite : que les élèves retiennent qu'à « *une fonction est associé un unique tableau de variation. A un tableau de variation peuvent être associées de nombreuses fonctions* ». Ceci fait l'objet d'un rappel, non plus dans le cadre fonctionnel mais dans le cadre graphique, dans une page intitulée « *le résumé* » qui précède les exercices : « *Plusieurs courbes, et non pas une seule, peuvent être associées à un même tableau de variation.* » Pas moins de 6 exercices comportent cette tâche.

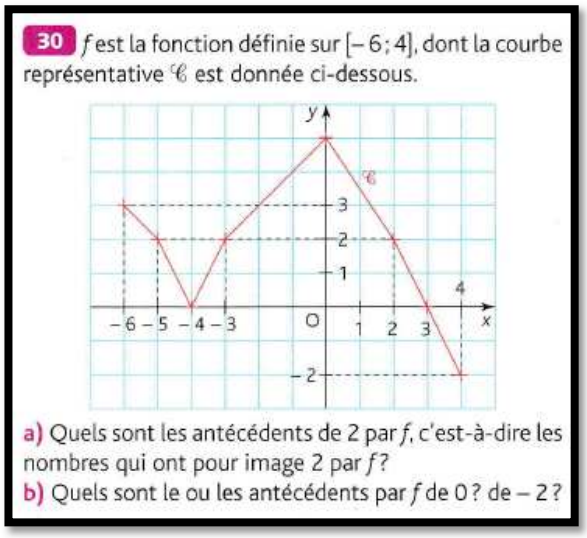
Nous avons repéré deux exercices comportant une tâche de représentation graphique de fonction à partir d'un tableau de valeurs. Dans l'un d'eux, la fonction modélise le poids d'un enfant en fonction de son âge en mois. La variable peut être considérée comme discrète ou continue ; elle est notée x.
L'autre exercice affiche qu'il a pour but de « *faire connaissance* » avec la fonction sinus : la variable est l'angle en degrés et la fonction est explicitement définie sur l'ensemble continu $[-180;180]$.
Dans les deux exercices, il est demandé de tracer une « *courbe continue et régulière* ».

Le vocabulaire de la modélisation est absent dans ce manuel. Les fonctions sont néanmoins outil de résolution de problèmes dans différentes situations : 5 sont géométriques ; 7 relèvent de la physique, 5 de la biologie (dont 3 phénomènes discrets et 2 continus), 4 des Sciences Économiques et Sociales (dont 3 phénomènes discrets et 1 continu) ; 2 sont des problèmes arithmétiques.

Au total, dans 8 situations, les ensembles de définition sont discrets : 6 sont discrets finis et 2 sont discrets infinis (dans les problèmes arithmétiques). 15 situations relèvent du continus (les variables sont essentiellement des longueurs, le temps)

A une exception près, les courbes qui sont données dans ce chapitre sont des courbes fonctions continues ; la plupart sont dérivables. Dans l'exercice qui fait exception, quatre courbes sont à associer à quatre séries d'éléments descriptifs de la fonction représentée. Les fonctions sont toutes définies sur un intervalle. L'une des courbes présente un point de discontinuité (les trois autres représentent une fonction continue mais non dérivable en un point).

Sur l'ensemble du chapitre, seules quatre représentations graphiques sont constituées de points reliés par des segments ; la première est au sein d'un énoncé intra-mathématique où la fonction est définie sur un intervalle :



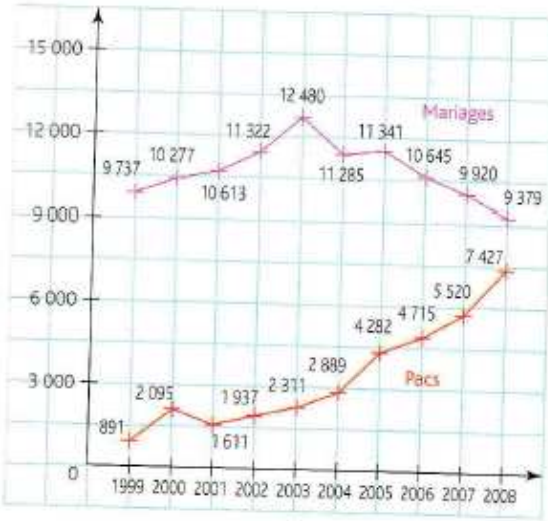
Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 35

Les trois dernières représentent des phénomènes d'évolution dans lesquels la variable temps est discrète (le temps est mesuré un nombre entier de jours ou d'années).
Dans le premier des trois problèmes d'évolution, les effectifs de mariages et de pacs, par année, sont représentés :

65 ▪ **Mariage, pacs**

Thème : *Tableau de variation. Lectures graphiques.*

Le graphique ci-dessous indique les nombres de mariages et de pacs à Paris, entre 1999 et 2009.



Source : *Le Parisien*, 14/10/2009.

1. Dressez le tableau de variation de chacune des deux fonctions représentées sur ce graphique : la fonction donnant le nombre de mariages (courbe violette) et celle donnant le nombre de pacs (courbe rouge).

2. Traduisez par des phrases l'évolution du nombre de mariages, puis l'évolution du nombre de pacs.

3. a) Calculez, pour chacune des dix années, la somme du nombre de mariages et du nombre de pacs.

b) Dans un repère, placez les dix points correspondant à ces dix sommes (en abscisses les années, en ordonnées les sommes).

c) Reliez ces points par une courbe continue et régulière, puis interprétez les variations de cette courbe.

Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 39

Le caractère discret de la variable est incontournable. La grandeur représentée en ordonnée est le nombre de mariages/pacs par an. Certes, le graphique de points isolés reliés par des segments est la représentation graphique d'une fonction (continue) définie sur un intervalle dont il est possible de déterminer les variations. Cependant, les deux fonctions ne représentent pas le nombre de mariages ou de pacs comme il est indiqué dans l'énoncé et leur interprétation dans le contexte en des valeurs non entières serait bien mal aisée.

La dernière question demande de relier les points correspondant au cumul du nombre de mariages et de pacs (par an) « *par une courbe continue et régulière* ». Pourtant, la représentation graphique est toujours celle d'une situation discrète.

Dans les deux autres problèmes modélisant un phénomène discret d'évolution, le fait que la variable soit discrète, que ceci ait pour conséquence le choix de relier les points par des segments, sont clairement explicités :

- Dans l'un, une représentation graphique est donnée et il est expliqué que « *deux points correspondants à deux jours consécutifs sont reliés par un segment* » ;
- Dans l'autre (n°72 dont l'énoncé figure ci-dessous), une tâche de représentation graphique est à effectuer par les élèves et l'énoncé précise : « *Reliez par un segment deux points correspondants à deux jours consécutifs* ».

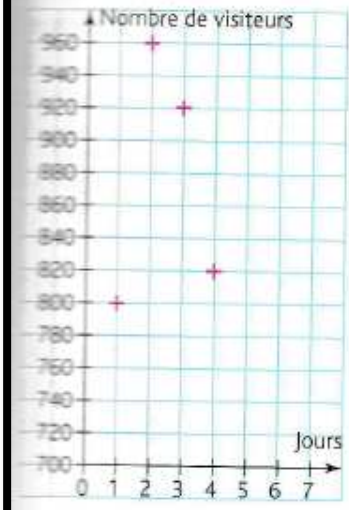
Le caractère discret de la variable est souligné par l'adjectif « consécutif » qui qualifie les jours qui se suivent (les jours y sont d'ailleurs numérotés par des entiers consécutifs).

L'énoncé du n°72 explicite clairement que la représentation graphique obtenue est celle d'une fonction définie sur un intervalle ; il est alors légitime d'en demander un tableau de variation.

72 • **Exposition**

Tableur : Tableau de variation. Interprétation d'un graphique.

Voici un graphique accompagné d'un tableau qui représente le nombre d'entrées quotidiennes à une exposition durant sept jours.



Jours	Entrées
1	...
2	...
3	...
4	...
5	870
6	910
7	1 000

1. D'après le graphique, inscrivez dans le tableau le nombre d'entrées enregistrées pour chacun des quatre premiers jours.
2. Recopiez et complétez le graphique pour les trois derniers jours, d'après les données du tableau.
3. Reliez par un segment les points correspondant à deux jours consécutifs. On obtient ainsi la courbe représentative d'une fonction définie sur l'intervalle [1 ; 7].

a) Dressez le tableau de variation de la fonction ainsi représentée.
b) Traduisez par des phrases l'évolution du nombre d'entrées.

Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 41

À part le dernier exercice que nous venons d'analyser, les tâches de représentation graphique de ce manuel relèvent de variables continues ; l'énoncé demande alors de tracer une « *courbe continue et régulière* ».

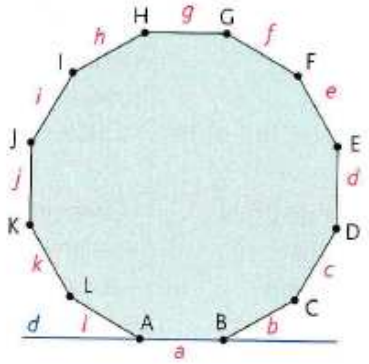
Le manuel ne comporte pas de tâche à effectuer sur tableur. Par contre, il propose deux exercices en toute fin de chapitre qui utilisent la fonctionnalité « trace » de GeoGebra pour représenter le lieu d'un point M qui dépend d'un point B qui décrit les arêtes d'un hexagone ou d'un dodécaèdre. Ce lieu est un ensemble continu, cependant le logiciel trace un ensemble de points isolés. L'énoncé le désigne malgré tout par le mot « courbe ».
La partie B de l'exercice a pour objectif de démontrer algébriquement le résultat conjecturé en partie A. La variable $x = AB$ est continue, le lieu des points M est la représentation graphique d'une fonction continue affine par morceaux constituée de deux demi-droites de même origine (qui n'est pas la « courbe » tracée en rouge de la partie A).
Le contexte géométrique continu est peut-être propice au « glissement » de l'ensemble de points isolés aux deux-demi-droites.

Contrairement au tableur dont le menu comporte de multiples façons de représenter des données discrètes par un graphe (dont l'apparence est) continu, ici, les données appartiennent au monde du continu et c'est le logiciel qui les discrétise…

80 Deux demi-droites inattendues ?

On considère un dodécaèdre régulier, le côté [AB] étant inclus dans une droite d, A étant fixe et B variable.

On se propose d'étudier comment varie le périmètre de ce dodécaèdre lorsque B se déplace sur la droite d.

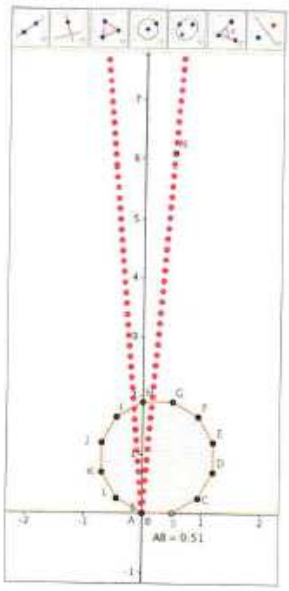


A. Un logiciel pour conjecturer

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, construisez un tel dodécaèdre, en plaçant A à l'origine du repère et B sur la droite des abscisses.

2. Placez le point M d'intersection de la droite perpendiculaire à d en B et de la droite d'équation $y = p$, où p désigne le périmètre du dodécaèdre.

3. Lorsque B décrit la droite d, faites tracer en rouge la courbe décrite par le point M.
Vérifiez que vous obtenez la courbe tracée en rouge ci-contre.



4. La courbe décrite par M semble symétrique par rapport à la droite des ordonnées.
Expliquez ce résultat.

B. Par le calcul

La courbe décrite par M semble être constituée par deux fonctions. Démontrez ce résultat en posant $x = AB$, et en exprimant le périmètre en fonction de x.

Manuel « Antibi » de 2010, classe de Seconde, éditeur Nathan, page 43

Annexe 8 : Questionnaire pour les étudiants en Master MEEF

1. Qu'est-ce qu'un ensemble dénombrable, un ensemble indénombrable ? Qu'est-ce qu'un ensemble discret ? Qu'est-ce qu'un ensemble continu ? Donner des exemples de chaque type d'ensemble.

2. Le temps est-il discret, continu, l'un et l'autre, ni l'un ni l'autre ? Pourquoi ?

3. La droite réelle est-elle un ensemble discret, continu, l'un et l'autre, ni l'un ni l'autre ? Pourquoi ?

4. Combien de points faut-il placer pour tracer la courbe d'une fonction définie sur [0 ; 10] ?

5 Les programmes actuels de 3e et de 2nde demandent de « *déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule*. » (C'est nous qui soulignons). Qu'en pensez-vous ?

6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ? Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ».

Annexe 9 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Hyperbole » Terminales ES et L, édition Nathan, 2012

L'introduction aux fonctions exponentielles est faite au sein du deuxième chapitre de ce manuel, intitulé « les fonctions exponentielles ». Le premier chapitre a pour titre « Suites géométriques » et le troisième « Notion de continuité sur un intervalle ».
La notion de continuité d'une fonction n'est donc abordée qu'au chapitre qui suit celui dans lequel les fonctions exponentielles sont présentées comme « *un prolongement continu des suites géométriques* » selon les termes du programme officiel.

Dans ce manuel, les tâches introductives aux notions nouvelles sont intitulées « Activités d'approche » ; elles sont précédées par une page d'exercices intitulée « Pour vérifier les acquis », qui a pour but de revoir des notions anciennes réinvesties dans ce chapitre. Chaque exercice fait référence à un point précis donnant lieu au titre de l'exercice : les connaissances sont donc mobilisables. L'exercice indique la page du manuel à laquelle l'élève peut chercher l'exposé de connaissance dont il a besoin pour le résoudre, sous forme de « Leçon » s'il s'agit de connaissances abordées dans un chapitre précédent, de formulaire s'il s'agit de connaissances plus anciennes, ou de listes de commandes situées dans le rabat de couverture du manuel s'il s'agit de l'utilisation de la calculatrice ou du tableur.

Les exercices « Pour vérifier les acquis » du chapitre intitulé « les fonctions exponentielles » :

L'exercice 1, « calculer avec des exposants entiers », passe en revue sur des exemples numériques simples les propriétés algébriques des puissances à exposants entiers.
Les exposants y sont strictement positifs (sauf l'un d'eux qui vaut -3) et les bases sont des entiers strictement positifs.
L'exercice permet de réinvestir des connaissances de base du programme du collège pour les élèves suivant ce cursus. Il se réfère à un formulaire exprimant les formules de puissances entières d'un nombre réel dans le cadre algébrique.

L'exercice 2, « Reconnaitre une suite géométrique », se réfère à la « leçon » du chapitre précédent. Deux suites géométriques y sont proposées, chacune définie selon l'un des deux modes de génération. La première est définie par récurrence, dans le cadre de la mathématisation d'une évolution avec pourcentage dans le registre de la langue naturelle ; la seconde en fonction de l'indice, dans le cadre algébrique.
Les raisons des deux suites sont des nombres décimaux positifs à un chiffre après la virgule. Les connaissances mobilisées datent de la classe de 1ère ES.

L'exercice 3, « connaitre le sens de variation d'une suite géométrique », se réfère à la « leçon » du chapitre précédent. Il mobilise des connaissances, elles aussi de 1ère ES, sur le sens de variation des suites géométriques de raison strictement positive, selon que la raison est inférieure ou supérieure à 1. Deux suites sont définies en fonction de l'indice dans le registre algébrique, leur terme général est de la forme q^n ; la troisième est définie dans le registre de la langue naturelle par sa raison et son premier terme 3. Les raisons sont entières ou décimales à un chiffre après la virgule.

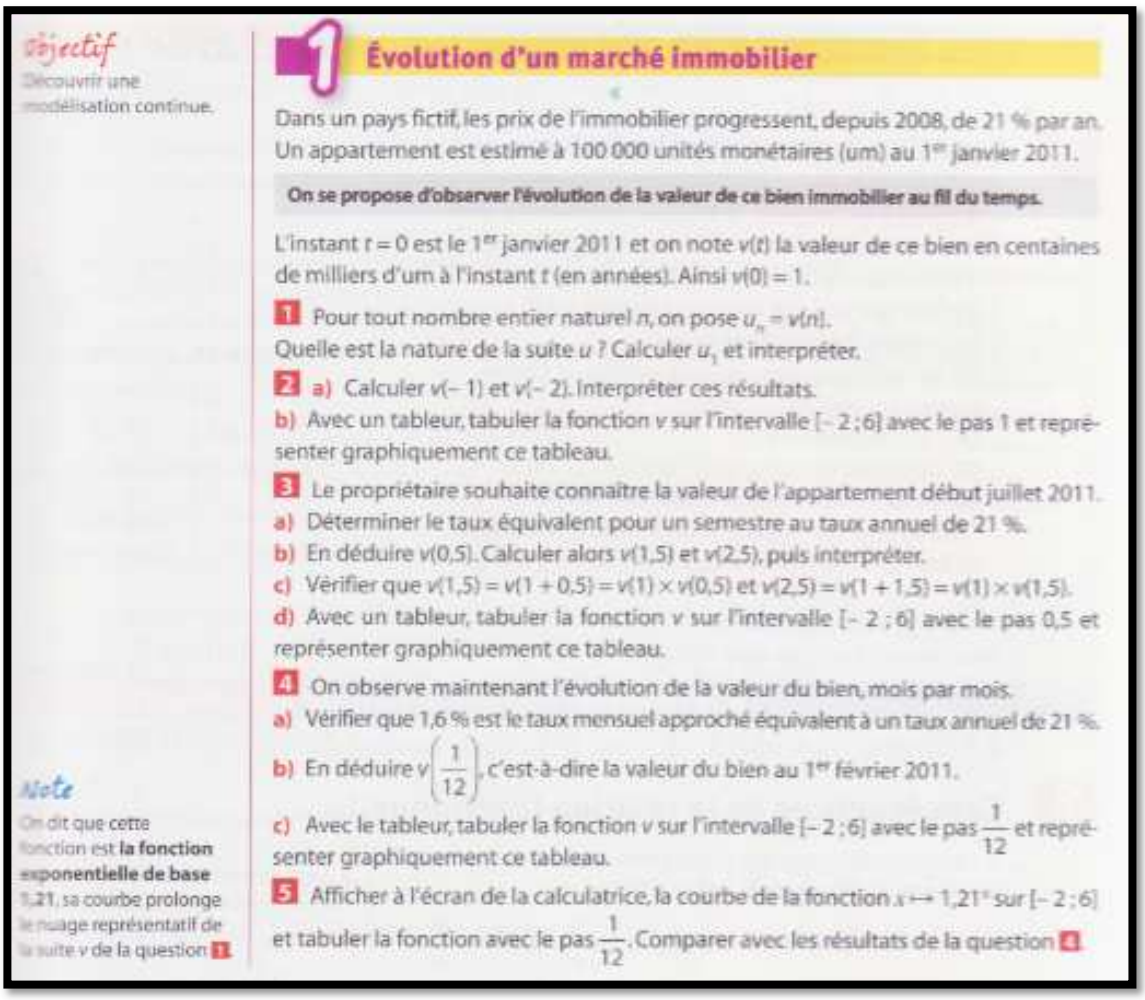
L'exercice 4, « Utiliser un tableur », se réfère au rabat du manuel. La première question permet de revoir la génération, à l'aide du tableur, des premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,48. Le premier terme n'est pas directement indiqué par l'énoncé. Cependant, la donnée d'une feuille de calcul comportant deux colonnes (celle des « n » avec des valeurs entières de 0 à 12 et celle des « u_n » correspondants) permet de le trouver – il vaut 3. Il existe deux réponses correctes, qui correspondent respectivement à un mode de génération des suites géométriques.
Puis, l'exercice pose la question de la représentation graphique correcte, dans le plan, de cette suite, en proposant deux graphiques : l'un est composé de points isolés, l'autre de points reliés par une courbe

continue qui semble sans point anguleux. Il est vraisemblablement obtenu par l'une ou l'autre commande du tableur « nuage de points avec courbes lissées et marqueurs » ou « nuage de points avec lignes droites et marqueurs » (l'œil fait difficilement la différence entre les deux sur ce nuage de points particulier).
Le but est très probablement de poser la question de ce qu'est la représentation graphique d'une suite dans le plan, par opposition à celle d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Par la même, ce qui est en jeu est l'ensemble de définition – discret - d'une suite.
Les élèves peuvent répondre à la question en représentant graphiquement la suite sur leur calculatrice, celle-ci renvoie des points isolés.
La correction de cet exercice en classe entière donnerait lieu à l'expression des avis des élèves, qui, *a priori*, ne manqueraient pas d'être divergents. L'intervention de l'enseignant serait alors cruciale afin de mener le débat en classe ; il pourrait y introduire le méta qui permet de motiver et donner du sens au travail qui suit – à savoir l'introduction aux fonctions exponentielles par prolongement des suites géométriques.

Les quatre premiers exercices mobilisent les cadres algébrique, analytique et graphique. Les registres numérique, algébrique, de la langue naturelle et des tableaux sont mobilisés. Les bases des exponentielles sont toutes strictement positives, entières dans le premier exercice et décimales à un chiffre après la virgule dans les trois autres.
Ils permettent de réviser la quasi-totalité des notions en jeu dans la première « activité d'approche » que nous analysons ci-après ; il y manque la révision du calcul du coefficient multiplicateur pour une demi-période dans le cas d'une croissance à variation relative constante.
En proposant l'allure de la courbe de la fonction exponentielle de base 1,48, l'exercice 4 risque cependant de faire paraitre cette courbe aux élèves comme allant de soi (visuellement ils ne la traceraient pas autrement, et en plus le tableur l'a tracée !). Cela risque de réduire la légitimité du travail qui leur est demandé dans l' « activité » d'introduction aux fonctions exponentielles qui figure à la page suivante.
L'enseignant peut aussi décider de s'appuyer sur cet exercice pour introduire en classe, oralement, les fonctions exponentielles (le méta qu'il met dans son discours peut alors être très variable) et passer directement à l'exposé de connaissances.

La tâche de l'exercice 5 consiste à lire graphiquement un nombre dérivé sur une courbe de fonction, capacité attendue du programme de 1ère ES. Il permet de réviser les connaissances mobilisées dans l' « activité d'approche » n°2 qui a pour but de conjecturer graphiquement l'existence et l'unicité de la fonction exponentielle dont le nombre dérivé en 0 est égal à 1.
La tâche de l'exercice 6 consiste à déterminer une équation de tangente à la courbe d'une fonction dérivable, donnée par son expression en fonction de x, capacité attendue au programme de l'année précédente.
Les cadres graphique et algébrique sont ainsi mobilisés pour revoir la notion de dérivée.

L'« activité d'approche » 1 : Évolution d'un marché immobilier



Objectif
Découvrir une modélisation continue.

1 Évolution d'un marché immobilier

Dans un pays fictif, les prix de l'immobilier progressent, depuis 2008, de 21 % par an.
Un appartement est estimé à 100 000 unités monétaires (um) au 1er janvier 2011.

On se propose d'observer l'évolution de la valeur de ce bien immobilier au fil du temps.

L'instant $t = 0$ est le 1er janvier 2011 et on note $v(t)$ la valeur de ce bien en centaines de milliers d'um à l'instant t (en années). Ainsi $v(0) = 1$.

1 Pour tout nombre entier naturel n, on pose $u_n = v(n)$.
Quelle est la nature de la suite u ? Calculer u_1 et interpréter.

2 a) Calculer $v(-1)$ et $v(-2)$. Interpréter ces résultats.
b) Avec un tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ avec le pas 1 et représenter graphiquement ce tableau.

3 Le propriétaire souhaite connaître la valeur de l'appartement début juillet 2011.
a) Déterminer le taux équivalent pour un semestre au taux annuel de 21 %.
b) En déduire $v(0,5)$. Calculer alors $v(1,5)$ et $v(2,5)$, puis interpréter.
c) Vérifier que $v(1,5) = v(1 + 0,5) = v(1) \times v(0,5)$ et $v(2,5) = v(1 + 1,5) = v(1) \times v(1,5)$.
d) Avec un tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ avec le pas 0,5 et représenter graphiquement ce tableau.

4 On observe maintenant l'évolution de la valeur du bien, mois par mois.
a) Vérifier que 1,6 % est le taux mensuel approché équivalent à un taux annuel de 21 %.
b) En déduire $v\left(\frac{1}{12}\right)$, c'est-à-dire la valeur du bien au 1er février 2011.
c) Avec le tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ avec le pas $\frac{1}{12}$ et représenter graphiquement ce tableau.

5 Afficher à l'écran de la calculatrice, la courbe de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$ sur $[-2 ; 6]$ et tabuler la fonction avec le pas $\frac{1}{12}$. Comparer avec les résultats de la question **4**.

Note
On dit que cette fonction est **la fonction exponentielle de base 1,21**, sa courbe prolonge le nuage représentatif de la suite v de la question **1**.

Son objectif explicite est de « *découvrir une modélisation continue* ».
Elle se propose d'étudier une évolution des prix de l'immobilier qui « *progressent depuis 2008 de 21% par an* », en fonction du temps en nombre d'années.
L'origine du temps est au 1er janvier 2011. La variable est notée t. Rien n'est dit concernant l'ensemble auquel elle appartient. Il pourrait s'agir de $\mathbb{N}$ puisque dans le langage courant il est généralement question d'évolution de l'immobilier par an ou par groupe d'années entières. Cependant, la notation utilisée pour la valeur du bien en fonction du temps en centaines d'unités monétaires, $v(t)$, de type fonctionnel, peut suggérer que v est, selon l'usage au lycée général, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

La question 1 vise à ce que les élèves s'approprient le problème via une modélisation de cette situation de croissance à taux constant par une suite, modélisation qui leur est familière depuis la classe de Première. Ils ont besoin de reconnaitre cette situation, pour la modéliser par une suite géométrique dont ils ont à déterminer le premier terme et la raison.
Les questions préliminaires de ce type sont courantes en Terminale ES et consistent généralement en un va et viens :

contexte → modélisation → retour au contexte.

L'énoncé introduit un changement de notation : $u_n = v(n)$ pour tout entier naturel n. Le but de la question est de montrer que la suite u est géométrique, de calculer son deuxième terme $u_1$et d'interpréter (le résultat, c'est implicite dans le contexte).

Quelle utilité ce changement de nom de la fonction peut-il avoir ? En effet, par définition, $v_n = v(n)$. De par l'utilisation de leur calculatrice, les élèves sont habitués à passer pour les suites d'une notation indicée sur le papier à une notation fonctionnelle sur la calculatrice et vice versa.
Par ailleurs, le nom de la variable est lui aussi changé, de t à n. Rappelons que n est la variable majoritairement utilisée pour les suites, habitude confortée par l'usage des calculatrices.
Sans être nécessaires, ces changements de notations peuvent servir d'ostensifs afin de souligner le fait que la question traite d'une suite, bien que ce point soit explicite dans son intitulé. Enfin (et peut-être surtout ?), les élèves disposent ainsi des notations auxquelles ils sont habitués, ce qui favorise leur reconnaissance de définitions et propriétés.

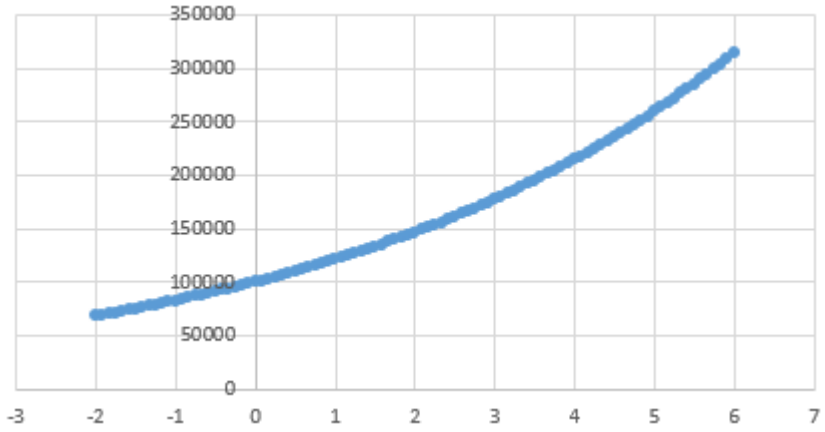
La question 2 consiste dans un premier temps à calculer les images de -1 et de -2 par v. La variable prend des valeurs dans un domaine plus étendu, celui des nombres entiers relatifs, ce qui implique que v n'est pas une suite. La variable t ne peut plus être une mesure de grandeur.
Les élèves peuvent procéder par inversion du processus de multiplication, c'est-à-dire par division de proche en proche par 1,21.
S'ils ont trouvé l'expression de u_n en fonction de n à la question 1, (bien que non demandée mais ils peuvent le faire par habitude), ils peuvent aussi avoir l'idée d'étendre le domaine d'utilisation de la formule et de calculer $1{,}21^n$avec $n = -1, n = -2$ – sans pour autant être nécessairement en mesure de le justifier. Les expressions correspondantes ont été définies au collège ; la calculatrice peut effectuer le calcul ; aucun obstacle ne semble empêcher cette extension.
L'interprétation des deux résultats fait revenir les élèves au contexte. Il s'agit de la valeur du bien aux 1er janvier 2010 et 2009 ; le temps peut être remonté, c'est une variable qui se prête bien à la prise de valeurs positives et négatives.
Puis la question 2 fait tabuler v sur [-2 ; 6] sur un tableur. v est explicitement décrit comme une « fonction », l'intervalle [-2 ; 6] peut donc être perçu comme continu. Cependant, le pas demandé est de 1, les valeurs de la variable sont donc à cette question des entiers relatifs.
Le tableur permet de générer le tableau de valeurs demandé en fonction de n ou bien de façon récursive.
Une représentation graphique sur le tableur est demandée. Selon la représentation graphique choisie par les élèves, ils peuvent faire apparaitre neuf points isolés ou une courbe « continue » lissée ou pas passant par ces neuf points.
A ce stade, la variable peut donc apparaitre à l'élève comme un élément de $\mathbb{Z}$ ou d'un ensemble continu ; la représentation graphique comme un ensemble de points discret ou une courbe « continue ».
Les élèves de la filière ES sont généralement plus familiers avec l'utilisation de leur calculatrice qu'avec celle du tableur ; ils risquent d'avoir besoin d'une aide de la part de l'enseignant pour effectuer cette question.

La question 3 impose une discrétisation du temps en semestres. Il n'est pas dit que la croissance est de type « variation relative constante », peut-être est-ce supposé évident dans ce contexte économique.
La recherche du taux semestriel revient à chercher le nombre positif qui, au carré, donne 1,21. A moins d'avoir été travaillée en amont afin d'être mobilisable, cette mathématisation de la question risque de nécessiter aussi une aide de la part de l'enseignant.
La résolution de l'équation du 2nd degré qui en découle peut se faire en restant dans le registre de la langue naturelle en passant par l'utilisation de la racine carrée. Sinon, elle peut passer par une écriture dans le registre des expressions algébriques et être résolue par passage à la racine carrée ou, plus longuement, par calcul du discriminant.
Pour trouver $v(0{,}5)$, les élèves doivent faire appel au fait que $v(0) = 1$. Et pour calculer $v(1{,}5)$ et $v(2{,}5)$ ils ont besoin de mobiliser la procédure d'application du taux semestriel en le multipliant par $v(1)$et $v(2)$ respectivement. A moins qu'ils n'étendent la formule $1{,}21^n$ à $n = 0{,}5, n = 1{,}5$ et $n = 2{,}5$. Cette fois, bien que la calculatrice fournisse un résultat, les élèves ne disposent pas de définition de ces expressions.
La relation fonctionnelle est ensuite vérifiée sur des exemples numériques provenant des questions précédentes.

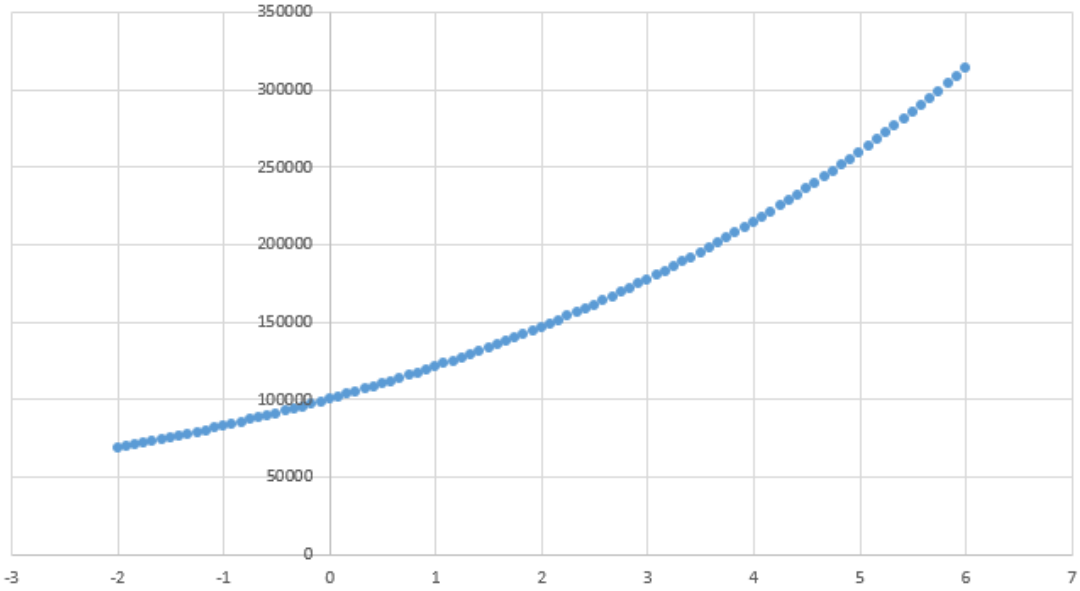
Pour finir, la question 2 fait tabuler et représenter la fonction sur le même intervalle que précédemment mais avec un pas de 0,5. A ce stade, cet intervalle peut apparaitre à l'élève comme inclus dans l'ensemble des décimaux à une décimale ou bien dans ensemble continu.
Pour traiter cette question, les élèves peuvent créer une colonne comportant le nombre entier n de semestres, puis une colonne comportant les $1{,}1^n$, via des formules en fonction des « n » ou des formules de type récursif. Cependant, cela parait peu probable puisque n est défini en tant que nombre d'années depuis le début de l'exercice.
Plus probablement, ils peuvent créer une colonne comportant le nombre d'années (-2 ; -1.5 ; … ; 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5…). Ils peuvent choisir de le nommer n bien que la variable ne soit plus un entier naturel, ou t, ou x… Choisissons n. Puis ils créent une colonne comportant les $1{,}21^n$ ou les $1{,}1^{2n}$. Ou une colonne de façon récursive en partant de la valeur de $v(n)$ pour n=0 puis en multipliant de proche en proche par 1,1 (cas des nombres positifs d'années) et en divisant par 1,1 (cas des nombres négatifs d'année). Ou plus simplement en partant de la valeur de $v(n)$ pour n=-2 puis en multipliant de proche en proche par 1,1.
Dans tous les cas, une bonne pratique du tableur est nécessaire, ce qui peut présenter des difficultés avec les élèves de Terminale ES.
De même que précédemment, selon la représentation graphique choisie par les élèves, ils peuvent faire apparaitre un nuage de points ou une courbe.
A ce stade, la variable peut donc apparaitre comme un élément de $\mathbb{D}$, peut-être restreint aux décimaux à un chiffre après la virgule, ou $\mathbb{Q}$, peut-être restreint aux demis entiers, ou d'un ensemble continu.

La question 4 vise à discrétiser le temps en mois. Le taux mensuel approché au 10e de pourcent, 1,6%, est donné à vérifier. A ce niveau scolaire, les élèves peuvent élever 1,016 à la puissance 6 pour retrouver une valeur approchée du taux semestriel ou l'élever à la puissance 12 pour retrouver une valeur approchée du taux annuel. La calculatrice affiche 1,099922909 dans le premier cas, valeur à comparer à 1,1. Elle affiche 1,209830407 dans le 2e cas, à comparer à 1,21. Ces techniques comportent plusieurs étapes et des choix à effectuer. Elles nécessitent d'estimer la proximité des résultats renvoyés par la calculatrice avec le résultat escompté.
Dans le cas où le cursus des élèves ou de certains d'entre eux en Sciences Économiques et Sociales ou celui de Mathématiques leur a fait rencontrer les racines nièmes (qui sont hors programme), ils peuvent calculer $\sqrt[6]{1{,}1}$ ou $\sqrt[12]{1{,}21}$. La valeur affichée par la calculatrice est 1,01601868, que les élèves doivent comparer à 1,016.
Remarquons que cette question, bien qu'elle ne consiste qu'en une vérification, nécessite une certaine aisance avec la manipulation des valeurs approchées d'un nombre. A ce sujet, l'énoncé prête à confusion puisqu'il y est écrit que 1,6% est le taux mensuel approché équivalent au taux annuel de 21% (c'est nous qui soulignons) alors qu'il s'agit de l'arrondi au 10e de pourcent de celui-ci.

Puis la question 4 demande de tabuler et représenter la fonction, sur tableur, toujours sur le même intervalle, avec un pas de $\frac{1}{12}$. Les techniques envisageables sont multiples, tout comme dans la question précédente.
A ce stade, la variable peut donc apparaitre comme un élément de $\mathbb{Q}$, ou d'un ensemble continu – ou des deux à la fois !
En effet, les valeurs consécutives de t sont relativement proches. Pour ce qui est du graphique, observons ce que le logiciel Excel propose avec la commande « nuages de points » :



Il faut l'agrandir considérablement pour faire apparaitre des points isolés. Le voici avec un agrandissement de 50% :



En utilisant la commande « nuage de points avec lignes droites », le graphique parait « lisse » sauf à l'agrandir considérablement. Les élèves peuvent aussi utiliser une commande « nuage de points avec courbe lissée » et le graphique est visiblement celui d'une fonction continue et dérivable.

La calculatrice sert, à la question 5, à comparer la courbe de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$ ainsi que son tableau de valeurs avec un pas de $\frac{1}{12}$, avec ce qui a été trouvé concernant la fonction v via le tableur. A moins que les élèves aient fait apparaitre des points isolés sur le tableur, les courbes sont visiblement semblables.
Si le graphique obtenu sur le tableur laisse apparaitre les points isolés, les élèves peuvent se poser des questions, ou pas : habitués à relier les points de façon « lisse » depuis des années, la courbe affichée par la calculatrice peut leur paraitre parfaitement « normale ».
S'ils posent des questions à l'enseignant, que peut-il répondre ? Par exemple que le processus de discrétisation du temps peut se poursuivre à l'infini. Ce processus infini est celui de la divisibilité à l'infini qui permet de concevoir un ensemble de valeurs sans « sauts ». Rappelons qu'il ne permet pas d'aboutir à un ensemble continu, sans « trous ». La connaissance qu'ont les élèves de l'ensemble $\mathbb{R}$ leur permet-elle d'accéder à ce type de questions ? Compte tenu du peu de connaissances dont ils disposent sur $\mathbb{R}$ et des difficultés historiques relatées dans la première partie de ce travail, nous nous permettons d'en douter.

Les valeurs du tableau générées par la calculatrice diffèrent de celles calculées au tableur si la question 4. a. été effectuée avec la valeur approchée 1,6% du taux mensuel, ce qui est la technique la plus probable :

	A	B
1	t	v(t)
86	5	259192,53
87	5,0833333	263339,61
88	5,1666667	267553,04
89	5,25	271833,89
90	5,3333333	276183,23
91	5,4166667	280602,16
92	5,5	285091,8
93	5,5833333	289653,27
94	5,6666667	294287,72
95	5,75	298996,32
96	5,8333333	303780,26

Extrait du tableau de valeurs généré sous Excel avec un taux mensuel de 1,6%

X	Y1
5	2.5937
5.0833	2.6353
5.1667	2.6775
5.25	2.7203
5.3333	2.7639
5.4167	2.8082
5.5	2.8531
5.5833	2.8988
5.6667	2.9452
5.75	2.9924
5.8333	3.0403

Extrait du tableau de valeurs de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$ généré par la calculatrice TI Premium avec un pas de $\frac{1}{12}$

Ces disparités peuvent être source de questionnements et permettent d'aborder avec les élèves l'incidence de l'utilisation de valeurs approchées dans des calculs.
L'objectif affiché de cette comparaison est exprimé dans la « note » dans la marge à gauche : « *on dit que cette fonction est la fonction exponentielle de base 1,21, sa courbe prolonge le nuage représentatif de la suite v de la question 1* ». Remarquons qu'à ce stade, le manuel nomme la suite v et non plus u.
Est-ce une façon de souligner l'aspect « prolongement » du processus décrit dans cette « activité d'approche », explicite pour ce qui est de la courbe par rapport au nuage de points ?
Cette « note » ne qualifie pas le prolongement de « continu ». Rappelons que ce manuel ne traite de la continuité d'une fonction qu'au chapitre suivant. Cependant, l'objectif annoncé en haut dans la marge était pourtant de « découvrir une modélisation continue ».

Conclusion sur l' « activité d'approche » 1 :
Résumons le passage du discret positif au continu dans cette « activité d'approche » : le temps (substrat dont on peut supposer qu'il peut être perçu comme continu par les élèves) est dans cette « activité d'approche » discrétisé en années, puis en demi-années et enfin en douzièmes d'années. Implicitement, cette discrétisation pourrait se poursuivre avec les semaines, les jours, les heures… indéfiniment, le temps pouvant être perçu comme divisible à l'infini. De plus, quelle que soit l'origine prise pour la variable temps, l'élève peut admettre que la variable prenne aussi bien des valeurs positives et des valeurs négatives.
Le temps est ainsi mesuré tout d'abord en nombres entiers positifs d'années puis en nombres entiers relatifs d'années et enfin en fractions d'années.
Ces fractions peuvent apparaitre comme quelconques. Ainsi, si la divisibilité à l'infini du temps est considérée comme allant de soi, un argument qu'on pourrait qualifier de « physique » justifie que la fonction v ait un ensemble de départ incluant $\mathbb{Q}$.
Les élèves sont en mesure de calculer à l'aide de la calculatrice les valeurs de $v(t)$ lorsque t est entier, lorsqu'il est un multiple de $\frac{1}{2}$ puis de $\frac{1}{12}$. Ils construisent donc en partie, dans le cadre numérique, la nouvelle fonction. Une fois le procédé de calcul établi, le tableur permet de générer toutes les valeurs fractionnaires de ce type dans un intervalle borné. La généralisation du procédé à toutes les fractions est passé sous silence mais peut faire l'objet d'une expérience de pensée.
Le prolongement de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, lui aussi passé sous silence, est « à la charge » de la calculatrice : sous le mode « fonction », l'utilisateur peut y entrer $x \mapsto 1{,}21^x$; le mode « fonction » de la calculatrice et les notations sont ceux du continu ; l'affichage de la courbe montre une courbe « continue ».

Nous pouvons cependant faire l'hypothèse que les élèves n'éprouvent pas le besoin de combler les « trous » qui subsistent dans l'ensemble des rationnels, compte tenu des connaissances réduites des élèves de filière ES au sujet des irrationnels.

Rappelons que le programme officiel demande de se limiter à une approche « intuitive » de la continuité des fonctions (et implicitement bien entendu une approche « en acte » du continu). Le continu est présent de deux façons dans cette « activité » :

- Implicitement, l'aspect continu de $\mathbb{R}$ est présent de par la continuité supposée du temps ;
- La continuité de la fonction exponentielle de base 1,21 peut être observée graphiquement par les élèves.

Différents cadres sont sollicités :
Les calculs des taux semestriels et mensuels ainsi que la vérification de la relation fonctionnelle sur deux exemples se font dans le cadre numérique, à la calculatrice. Le travail dans ce cadre permet une appropriation (partielle) des processus de calcul par les élèves avant de déléguer le restant des calculs au tableur.
Le cadre algébrique est *a priori* peu présent ; il peut l'être davantage si les élèves produisent l'expression de u_n en fonction de n dans la première question. Ils peuvent alors (sollicités en cela par leur professeur, ou pas) établir des liens entre les propriétés des puissances et les instances de la relation fonctionnelle à vérifier en question 3, et entre l'expression de u_n en fonction de n et celle de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$. Il est aussi possible qu'ils étendent l'utilisation de $u_n = 1.21^n$à des exposant qui ne sont pas des entiers naturels dès la question 2, procédant en cela par prolongement du domaine d'utilisation de la « forme » des puissances à exposants entiers naturels, à la manière des mathématiciens du XVIIe siècle.
La nouvelle fonction est écrite dans le registre algébrique *a minima*, dans la dernière question et par la même occasion la notation exponentielle est étendue aux exposants réels.
Le cadre graphique tient une place prépondérante dans le passage du discret au continu, via le tableur puis la calculatrice. Notons cependant un hiatus de fond : la calculatrice est utilisée pour constater visuellement le continu alors que tous ses processus relèvent du discrets, que ce soient les calculs ou les représentations graphiques.

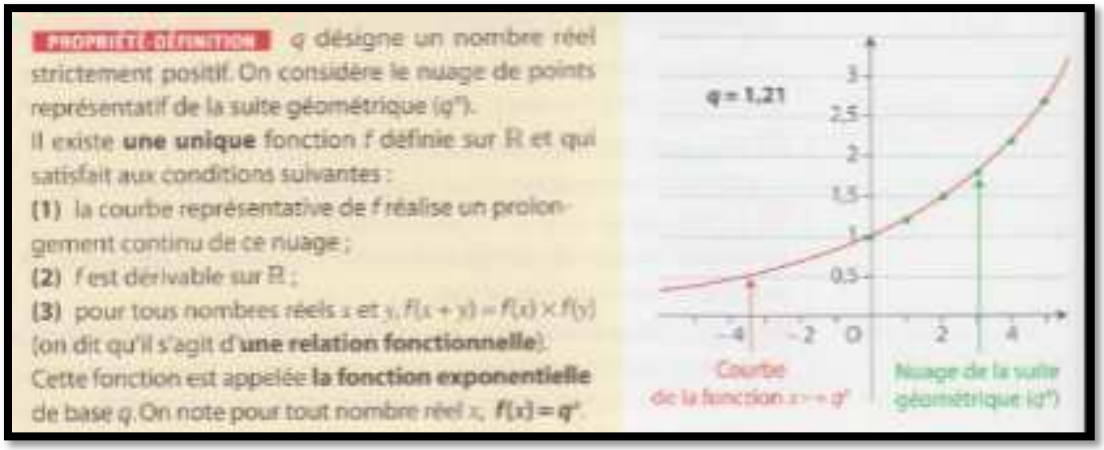
Comme nous l'avons observé dans l'analyse de la question 4, les difficultés liées aux valeurs approchées sont nombreuses :

- Les élèves doivent être capables de manier des valeurs approchées de taux de croissances en pourcentages pour répondre à la question 4.a) ;
- L'utilisation d'un taux mensuel approché sur le tableur génère des réponses qui sont éloignées des valeurs exactes calculées dans les questions précédentes et de celles générées par le tableau de valeurs de la calculatrice.

Cette « activité d'approche », en plus des difficultés intrinsèques au prolongement qu'elle tente de présenter, comporte des embuches pour les élèves liées au calcul approché, à l'utilisation du tableur dans la génération des termes d'une suite. Les différents types de graphiques qui sont disponibles pour représenter des données discrètes sur tableur peuvent brouiller les objectifs de cette « activité ».
Selon le travail qui aura été fait en amont, les questions qui concernent les calculs de taux semestriel et mensuel peuvent excéder les capacités des élèves de Terminale ES, ou pas.
Pour ces raisons, à moins que l'enseignant ne dispose d'une longue plage horaire et d'effectifs réduits (ce qui est rare), il semble difficile de la donner dans sa totalité aux élèves seuls ou par groupe, et préférable d'effectuer en classe entière au minimum les questions délicates.
De plus c'est le jeu entre cadres numérique, algébrique et graphique, sous tendu par une situation modélisée qui évolue en fonction du temps, qui permet de mettre en scène le prolongement opéré de suite à fonction, d'exposant entier à exposant réel quelconque avec conservation de la transformation

des sommes en produits, de points isolés à courbe continue. Ce jeu reste dans sa plus grande partie à la charge de l'enseignant.

L'exposé de connaissances définissant les fonctions exponentielles :



La propriété-définition énoncée est mathématiquement rigoureuse. Elle invoque explicitement le prolongement du nuage de points représentatif de la suite géométrique tel qu'exposé dans l'« activité d'approche » analysée ci-dessus ; de surcroit, l'exemple choisi dans le cadre graphique est celui de la suite géométrique de raison 1,21 et de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$ qui modélisent la situation de l'évolution du marché immobilier dans cette même « activité ».
L'énoncé de la définition précise que la courbe représentative de la fonction « *réalise un prolongement continu* » du nuage de points. Aucune définition de la continuité, même intuitive, n'est donnée à ce stade dans le manuel. Elle est convoquée dans le cadre graphique, le concepteur pense-t-il que dans ce cadre, le continu est suffisamment intuitif pour ne pas être quelque peu explicité ?

L'« activité d'approche » 2, qui introduit la fonction exponentielle :
Analysons succinctement l'« activité d'approche » n°2 qui vise à introduire la fonction exponentielle (de base e). Elle procède d'une façon proche de ce que nous avons proposé dans l'analyse du programme (partie a.). Elle consiste à créer sur GeoGebra un curseur q qui prend des valeurs de 0 à 5 avec un incrément de 0,1 puis la fonction $x \mapsto q^x$, à tracer sa courbe et placer le point A d'abscisse 0 de la courbe.
Les variations de la fonction exponentielle de base q en fonction de la valeur de q sont observées graphiquement.
Suit un travail sur la tangente à la courbe en A qui est dans un premier temps tracée et nommée T. Puis une commande du logiciel, « Pente [T] », permet d'afficher le coefficient directeur de la tangente. Une interprétation en termes de nombre dérivé est demandée aux élèves. Cette question marque un passage du cadre géométrique à celui de l'analyse.
L'énonce se poursuit par : « *on note e la valeur de q qui réalise une pente exactement égale à 1* » : les questions de l'existence et de l'unicité du nombre e ne sont pas problématisées par l'énoncé, elles restent non dites, ou bien à la charge de l'enseignant.
Le logiciel est ensuite à nouveau sollicité pour obtenir un encadrement de e d'amplitude 10^{-2}. Ceci requiert de l'utilisateur qu'il change l'incrément du curseur.
Puis la définition de la fonction exponentielle conforme au commentaire du programme officiel est donnée. C'est la définition reprise dans l'exposé de connaissances.
Selon la familiarité des élèves avec GeoGebra, cette « activité » peut être dévolue aux élèves seuls ou par binômes, ou bien menée en classe entière, avec un élève ou le professeur aux commandes de l'ordinateur.

Annexe 10 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Odyssée » Terminales ES et L, édition Hatier, 2012

Dans le manuel « Odyssée » de 2012, les fonctions exponentielles sont introduites et étudiées au chapitre 3. Les deux précédents chapitres s'intitulent : « suites » pour le premier ; « fonctions » pour le deuxième. C'est dans le deuxième chapitre qu'est définie la continuité d'une fonction par l'intuition du continu induite par le tracé d'une courbe sans lever le crayon auquel est juxtaposé l'absence de « saut » dans ce tracé.

Chaque chapitre est précédé d'une page d'exercices de révision, sous forme de QCM, intitulée « pour bien commencer ». Chaque exercice propose quatre affirmations, dont au moins une est vraie.

La page « Pour bien commencer » du chapitre « Fonctions exponentielles » :

La tâche des exercices 1 et 2 consiste à reconnaitre si une suite est géométrique ou arithmétique, étant donnés quatre termes consécutifs de la suite. Dans le premier exercice, les termes donnés sont des nombres décimaux ; dans le deuxième ce sont des puissances de 2 à exposants entiers positifs et négatifs. Deux registres de représentation des nombres sont donc sollicités.

L'exercice 3 considère une suite géométrique définie dans le registre de la langue naturelle par son premier terme 1 et sa raison 1,05. Les affirmations proposées concernent son sens de variation, son signe et sa limite. Ce QCM permet donc de revoir le lien entre la raison d'une suite géométrique d'une part, son sens de variation et sa limite d'autre part.
L'erreur classique de confusion par les élèves entre signe et sens de variation est peut-être ciblée.
Le choix d'une raison proche de 1 n'est peut-être pas dû au hasard : les évolutions des termes de la suite sont alors plus difficiles à observer à la calculatrice.

L'exercice 4 considère une suite géométrique définie dans le registre de la langue naturelle par son premier terme 1 et sa raison 1,2. Les deux premières affirmations proposées sont, pour l'une, l'expression du terme de rang 4 en fonction du terme de rang 3, et pour l'autre, du terme de rang 2 en fonction du terme de rang 3. Elles ne ciblent pas la forme générale d'un terme en fonction de son prédécesseur, mais deux instances de celle-ci. Les élèves peuvent répondre soit en calculant les termes de rangs 2, 3 et 4, soit en appliquant par deux fois la forme récursive générale de la suite.
Les deux dernières propositions posent la question de savoir si le terme de rang 3 est la moyenne arithmétique ou la moyenne géométrique des termes de rangs 2 et 4. L'énoncé est en langage algébrique. La propriété ciblée n'est pas au programme officiel de ces élèves, la tâche demande donc une prise d'initiative de leur part : ils doivent calculer les termes de rangs 2, 3 et 4 s'ils ne l'ont pas fait auparavant, effectuer les deux moyennes en comparant leur résultat au terme de rang 3. La résolution se fait donc dans le cadre numérique. Ces deux questions visent spécifiquement à préparer les élèves à l' « activité » d'introduction aux fonctions exponentielles proposée par ce manuel.

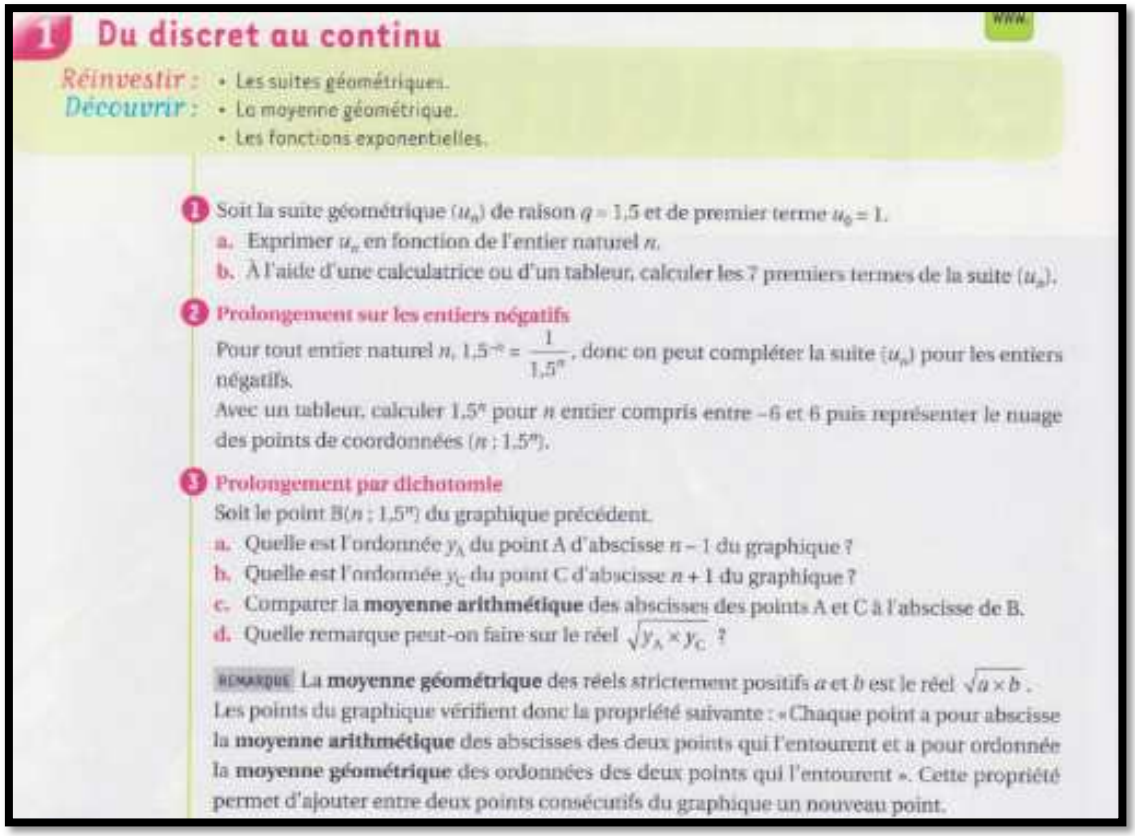
L'exercice 5 met en jeu le cadre graphique : il s'agit tout d'abord de reconnaitre la raison d'une suite géométrique de la forme (q^n) des premiers termes de laquelle on donne la représentation graphique dans le plan. Le fait que la suite soit représentée par un nuage de points est donc imposé par l'énoncé et non questionné. Les élèves doivent lire l'ordonnée du point d'abscisse 1, qui est 0,75.
Puis la question de la limite en $+\infty$ est posée par le biais de l'affirmation « q^n tend vers $-\infty$ ». Il s'agit d'une question de cours. Cependant le graphique montre aux élèves que la suite est décroissante, ils pourraient appliquer un « théorème en acte » erroné : « toute suite décroissante diverge vers $-\infty$ ».

Les cinq premiers QCM préparent de façon indirecte à l' « activité » 1, qui traite aussi d'une suite géométrique de raison décimale.

L'exercice 6 vise la révision des formules, $(a^n)^m = a^{n\times m}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ avec n et m entiers positifs et a réel strictement positif.
Le cadre de cet exercice est algébrique, la base est un réel q strictement positif quelconque, les exposants sont des petits entiers - à un chiffre.
Deux questions sur les quatre font appel de surcroit aux racines carrées : il s'agit de puissances paires de racines carrées.
L'objectif de ce QCM est peut-être de préparer à la question 3 de l'activité 1, mais on verra que la tâche y est de nature différente.
Remarquons qu'il ne cible pas la révision de la formule $a^{n+m} = a^n \times a^m$ qui pourtant joue un rôle important dans ce chapitre en ce qu'elle donne lieu, par prolongement, à la relation fonctionnelle vérifiée par les fonctions exponentielles.

L'exercice 7 permet la révision de la lecture graphique du coefficient directeur d'une tangente (tracée) à une courbe en un point. Il est dans le cadre graphique.
L'exercice 8 fait chercher le nombre dérivé en zéro de fonctions polynômes. Il se place dans le domaine de l'analyse de type « calculus », dans le cadre algébrique.
La tâche de l'exercice 9 consiste à lire graphiquement le nombre dérivé en 0 d'une fonction f dont la courbe est donnée. Aucune tangente n'y est tracée. Il joue donc sur le changement de cadre graphique à analytique.
L'exercice 10 reprend la courbe de l'exercice précédent et pose des questions de lecture graphique d'un sens de variation et de lecture graphique du nombre de solutions d'une équation. Les changements de cadre vont de graphique à analytique puis à algébrique.
Ces quatre derniers exercices visent à réinvestir des connaissances mobilisées, dans ce chapitre, dans la définition de la fonction exponentielle de base e et les mises en fonctionnement des connaissances sur cette fonction.

L'activité 1 intitulée : « Du discret au continu » :



1 Du discret au continu

Réinvestir : • Les suites géométriques.
Découvrir : • La moyenne géométrique.
• Les fonctions exponentielles.

1 Soit la suite géométrique (u_n) de raison $q = 1{,}5$ et de premier terme $u_0 = 1$.
a. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n.
b. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer les 7 premiers termes de la suite (u_n).

2 **Prolongement sur les entiers négatifs**
Pour tout entier naturel n, $1{,}5^{-n} = \frac{1}{1{,}5^n}$, donc on peut compléter la suite (u_n) pour les entiers négatifs.
Avec un tableur, calculer $1{,}5^n$ pour n entier compris entre -6 et 6 puis représenter le nuage des points de coordonnées $(n ; 1{,}5^n)$.

3 **Prolongement par dichotomie**
Soit le point $B(n ; 1{,}5^n)$ du graphique précédent.
a. Quelle est l'ordonnée y_A du point A d'abscisse $n - 1$ du graphique ?
b. Quelle est l'ordonnée y_C du point C d'abscisse $n + 1$ du graphique ?
c. Comparer la **moyenne arithmétique** des abscisses des points A et C à l'abscisse de B.
d. Quelle remarque peut-on faire sur le réel $\sqrt{y_A \times y_C}$?

REMARQUE La **moyenne géométrique** des réels strictement positifs a et b est le réel $\sqrt{a \times b}$.
Les points du graphique vérifient donc la propriété suivante : « Chaque point a pour abscisse la **moyenne arithmétique** des abscisses des deux points qui l'entourent et a pour ordonnée la **moyenne géométrique** des ordonnées des deux points qui l'entourent ». Cette propriété permet d'ajouter entre deux points consécutifs du graphique un nouveau point.

L'intitulé de cette activité est (relativement) explicite pour l'enseignant. Pour leur part, les élèves devraient avoir rencontré la continuité d'une fonction au chapitre précédent. Le mot « discret » a pu, ou pas, être utilisé par l'enseignant et peut donner lieu à des questions des élèves.
Les buts du concepteur en sont explicites : cette « activité » d'après lui, permet de « *réinvestir les suites géométriques* » et de « *découvrir la moyenne géométrique et les fonctions exponentielles* ».

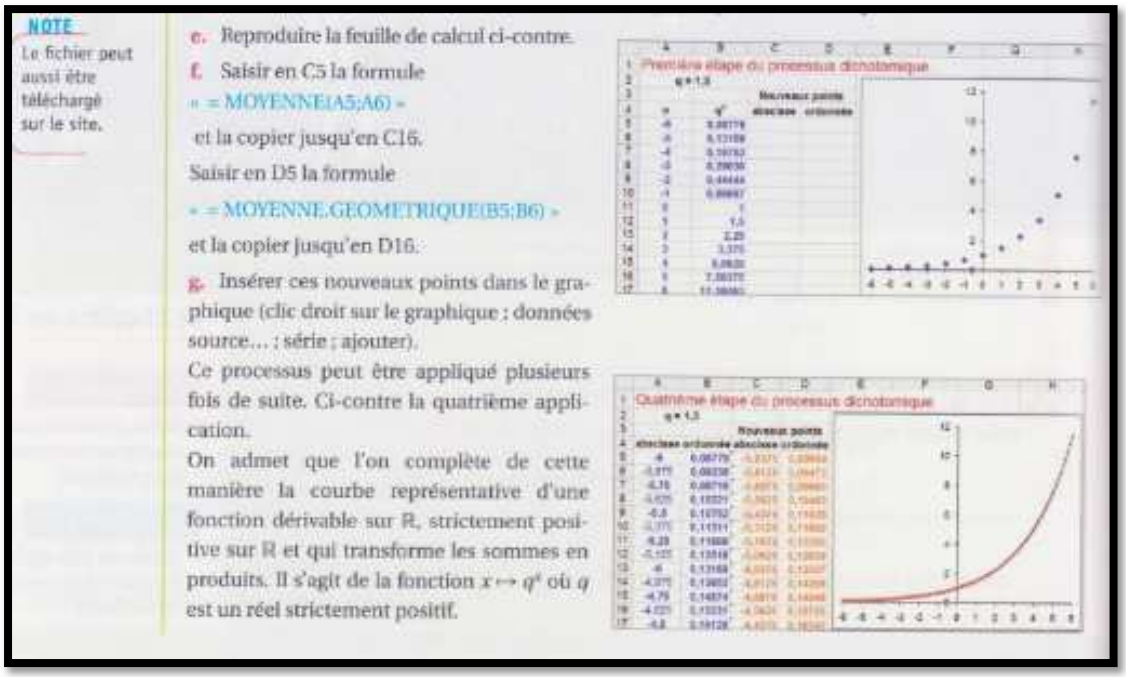
La question 1 demande l'expression en fonction de n du terme de rang n d'une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme 1 (donnée dans le registre de la langue naturelle) puis de trouver un tableau de valeur des 7 premiers termes de la suite. L'utilisation d'un outil numérique est imposée : calculatrice ou tableur.
La calculatrice permet dans le mode « suites » d'entrer la suite géométrique et d'afficher le tableau de valeurs et le graphe demandés.
Le tableur nécessite de générer une colonne dans laquelle figurent les indices puis une autre dans laquelle figurent les termes correspondants. Ceux-ci peuvent être générés par l'expression du terme général en fonction de n ou récursivement. L'insertion d'un graphique de type « nuage de points » termine le travail. Rappelons que le tableur propose différents types de graphiques de ce type, dont des nuages de points interpolés « avec courbe » ou « avec lignes droites ».
La question de relier ou non les points, et si on les relie, de quelle façon le faire, peut donc être posée par les élèves si le tableur est utilisé, ce qui n'est pas le cas si la calculatrice est utilisée.
Remarquons que le graphique de type « avec courbe lissée », est la restriction à [0 ; 6] de la représentation graphique de la fonction exponentielle de base 1,5 que cette « activité » tente de partiellement construire. A moins d'explicitations de la part de l'enseignant, le travail risque d'être court-circuité.

Explicitement, la question 2 a pour but le « *prolongement sur les entiers négatifs* » de la suite, en la « complétant » via l'identité $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ appliquée à la base 1,5.
La représentation graphique est-elle à effectuer sur tableur, sur calculatrice, sur feuille ?
Sur tableur, les élèves peuvent étendre la formule déjà entrée aux nouveaux exposants.
Sur calculatrice, cela est impossible puisqu'en mode « suite », la variable entrée est un entier positif. Ils seront peut-être tentés de passer en mode « fonction » de la calculatrice, d'y entrer la fonction $\mapsto 1{,}5^x$. Ils peuvent paramétrer le tableau de valeurs avec un pas de 1, afin de ne faire figurer que les entiers de -6 à 6. La représentation graphique sera néanmoins celle de la fonction $\mapsto 1{,}5^x$, ce ne sera pas un nuage de points. La suite de cette « activité » risque d'être ici aussi court-circuitée !

Toujours explicitement, la question 3 a pour but le « *prolongement par dichotomie* ». Prudemment, l'énoncé ne dit pas sur quel ensemble.
Le point de départ est de considérer « *le point B*$(n; 1{,}5^n)$ *du graphique précédent* ». B est donc un point qui varie en fonction de n ; l'énoncé ne spécifie pas à quel ensemble n appartient ; il laisse entendre que c'est un entier de l'intervalle [-6 ; 6] comme précédemment. Pour de nombreux élèves, l'écriture $1{,}5^n$ induit cependant que n est positif ; ce qui peut être renforcé par le rappel de la question précédente : pour tout entier naturel n, $1{,}5^{-n} = \frac{1}{1{,}5^n}$.
La tâche de la question a. est de déterminer l'ordonnée du point A d'abscisse $n-1$. Ce point varie lui aussi en fonction de n, ce qui peut être une difficulté pour les élèves de filière ES ou L. Ils peuvent répondre en substituant $n-1$ à n dans les coordonnées $(n; 1{,}5^n)$ de B ; il s'agit d'une procédure algébrique. Dans ce cas, ils ne seront pas gênés par le fait que si $n = -6$, alors $n-1 = -7$ et le point A n'est pas sur le graphique (tel qu'il est à la question 2).
La tâche de la question b. est du même type, concernant le point C d'abscisse $n+1$.
Ces deux questions utilisent la propriété de l'existence d'un prédécesseur et d'un successeur dans l'ensemble discret $\mathbb{Z}$.
Les questions c. et d. consistent à calculer successivement la moyenne arithmétique des abscisses de A et de C (énoncé dans le registre de la langue naturelle) et la moyenne géométrique de leurs

ordonnées (énoncé dans le registre algébrique). Ces tâches sont éloignées des pratiques habituelles des élèves, et à effectuer dans le cadre algébrique, avec une indéterminée n. Le calcul de $\sqrt{y_A \times y_C}$ est particulièrement difficile : il requiert l'utilisation de la formule $a^{n+m} = a^n \times a^m$ à adapter aux exposants $n-1$ et $n+1$, puis de la formule $(a^n)^m = a^{n\times m}$ à adapter aux exposants n et 2 et enfin de la propriété : la racine carrée du carré d'un nombre positif est égale à lui-même. Trois étapes qui comportent des enjeux de technique algébrique. Remarquons que l'exercice 6 du QCM, en proposant de déterminer si l'affirmation « $\left(\sqrt{q}\right)^6 = q^3$ » est vraie cible une autre propriété et ne constitue pas en cela une préparation au dernier enjeu du calcul de cette moyenne géométrique.
Cependant, si l'exercice 4 du QCM a été fait en amont, et si l'enseignant en a dégagé les notions de moyennes arithmétique et géométrique, les connaissances des élèves seront davantage mobilisables.

Sous forme de remarque, la propriété démontrée est énoncée en langue naturelle. Le concepteur, plutôt que de choisir le vocabulaire « prédécesseur » et « successeur » de B, lui préfère « *les points qui l'entourent* ».


NOTE
Le fichier peut aussi être téléchargé sur le site.

e. Reproduire la feuille de calcul ci-contre.

f. Saisir en C5 la formule
« = MOYENNE(A5;A6) »
et la copier jusqu'en C16.
Saisir en D5 la formule
« = MOYENNE.GEOMETRIQUE(B5;B6) »
et la copier jusqu'en D16.

g. Insérer ces nouveaux points dans le graphique (clic droit sur le graphique : données source… ; série ; ajouter).
Ce processus peut être appliqué plusieurs fois de suite. Ci-contre la quatrième application.
On admet que l'on complète de cette manière la courbe représentative d'une fonction dérivable sur R, strictement positive sur R et qui transforme les sommes en produits. Il s'agit de la fonction $x \mapsto q^x$ où q est un réel strictement positif.

La feuille de calcul sur tableur qui permet d'afficher les termes et la représentation graphique de la suite « prolongée » à [-6 ; 6] de la question 2 est reprise (ou faite, ou même téléchargée) en question e.
L'exercice se poursuit en question f. avec l'ajout des moyennes arithmétiques des abscisses de points successifs dans une colonne « abscisses » et des moyennes géométriques des ordonnées de ces points dans une colonne « ordonnée ».
La question g. fait adjoindre les points qui correspondent au graphique précédent.
La première étape du « prolongement par dichotomie » est terminée. L'énoncé ne le souligne pas. C'est le discours de l'enseignant qui peut éclairer la démarche.
La feuille de calcul qui correspond à la 4e étape de ce « *prolongement par dichotomie* » est donnée après la remarque : « *ce processus peut être appliqué plusieurs fois de suite* ». Le nuage de points est resserré, les carrés qui servent à représenter les points se touchent et font deviner une courbe presque lisse et continue.

Conclusion sur l'activité 1 :

Mathématiquement, le processus décrit dans cette « activité » permet de construire la fonction exponentielle de base 1,5 sur l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ $(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$. La propriété de divisibilité à l'infini de $\mathbb{R}$ est ici utilisée. Or tout nombre réel x est la limite d'une suite (x_n) de rationnels de cette forme, construite par dichotomie. L'image de x par la fonction exponentielle de base 1,5 s'obtient par passage à la limite de la suite de terme général $1{,}5^{x_n}$.
Il est donc faux d'affirmer, comme le fait la conclusion de cette « activité », « *que l'on complète de cette manière la courbe représentative d'une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ ». Tout au plus la courbe est-elle prolongée à celle d'une fonction définie sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

Il serait certainement peu adapté de dire aux élèves que ce prolongement de la suite géométrique généralisée à $\mathbb{Z}$, à une fonction définie sur $\mathbb{R}$, est le résultat du passage à la limite d'un processus dichotomique.
L'enseignant peut en revanche leur expliquer que le processus décrit par cette « activité » peut être « *appliqué plusieurs fois de suite* » bien sûr, mais aussi autant de fois que l'on veut (autrement dit à l'infini, un infini potentiel discret). C'est la propriété de divisibilité à l'infini de $\mathbb{R}$ qui est mobilisée alors. Les « trous » qui restent peuvent passer inaperçus aux yeux des élèves : nous avons vu que la divisibilité à l'infini a constitué un support à intuition du continu pendant des siècles. Les résultats dans les cadres numérique et graphique obtenus dans cette « activité » peuvent corroborer cette intuition. L'enseignant devrait cependant être prêt à répondre à des questions plus poussées.

L'activité se termine par une phrase qui à la fois conclut le travail fait à partir de la suite géométrique de base 1,5 et généralise subitement le processus à toute base q, réel strictement positif quelconque. Ce peut être difficile à suivre pour les élèves.

Étant données les difficultés d'ordre de technique algébrique, le manque possible de pratique du tableur par les élèves en séries ES et L ainsi que les difficultés conceptuelles liée à ce prolongement et le peu de commentaires qui l'accompagnent dans le manuel, l'intervention de l'enseignant est indispensable à la mise en œuvre de cette « activité ». Seul son discours adapté peut éclairer les élèves sur ce qui se joue effectivement dans ce processus dichotomique.

Différents cadres sont sollicités :
Le cadre algébrique, en ce qu'il fournit l'expression du terme général de la suite en fonction de n. Ce qui permet d'effectuer les calculs (algébriques) des moyennes arithmétiques des abscisses et des moyennes géométriques des ordonnées des points qui précèdent et succèdent tout point de la représentation graphique dans $\mathbb{Z}$.
Les calculs numériques sont à la charge de la calculatrice ou du tableur. Le registre du tableau est alors utilisé.
Le cadre graphique joue un rôle prépondérant en tant que support de l'expérience de pensée qui permet d'imaginer la densification de l'ensemble des points isolés obtenus par le processus dichotomique décrit, de la suite généralisée à $\mathbb{Z}$ à une courbe qui représente une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le tableur est largement mis à contribution dans ce cadre.

L'utilisation du tableur avec une gestion éclairée des graphiques qu'il propose est donc centrale à la bonne mise en œuvre de cette « activité ». Quant à elle, la calculatrice graphique comporte le risque de court circuiter le cheminement proposé dès la question 2 !

L' « activité » s'intitule « du discret au continu » ; les mots « discret » et « continu » sont pourtant totalement absents dans la suite de l'énoncé. Certes, la dernière phrase spécifie que la fonction obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue. Là aussi l'enseignant devrait pouvoir éclairer les élèves.

Mais qu'y a-t-il de continu dans cette « activité » ?
Comme nous l'avons vu, le support du continu y est l'ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel le prolongement se fait dans le cadre numérique, et qui est représenté par l'axe des abscisses dans le cadre graphique. Le contexte reste mathématique, aucun appel à une intuition du continu qui passe par l'expérience de grandeurs comme le temps ou les longueurs n'est fait.
Si chaque réel x a finalement une image, la courbe obtenue ne comporte plus de « trous » ; l'absence de « sauts » dans la courbe, elle aussi passée sous silence, peut être perçue intuitivement par les élèves du fait que la moyenne géométrique de deux nombres positifs est comprise entre ces deux nombres. Ainsi, pour rester dans un registre intuitif, la courbe, n'ayant ni « trou » ni « saut », est celle d'une fonction continue.

L' « activité » 1 affirme dans sa conclusion que la fonction obtenue transforme les sommes en produit. La relation fonctionnelle en est pourtant une grande absente (comme elle l'était des exercices de révision). Les élèves pourraient être invités à la vérifier (de façon approchée) sur quelques exemples numériques calculés par le tableur.
Avec des élèves performants en calcul algébrique, la relation $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{f(a) \times f(b)}$ qui sert de base au processus dichotomique pourrait être mise en valeur, puis en lien avec la relation fonctionnelle.

L'activité 2 intitulée « La bonne pente » :

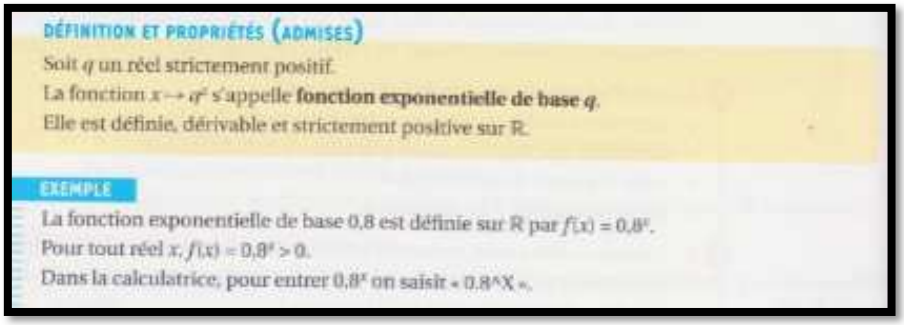
Le but explicite de son concepteur est de réinvestir le théorème des valeurs intermédiaires et de découvrir le nombre e.
A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une « variable numérique q » (comprendre curseur ?) prenant des valeurs de 0,1 à 5 est créée, puis la représentation graphique la fonction $f: x \mapsto q^x$ et le point A d'abscisse 0 de sa courbe et la tangente en A à la courbe.
L'énoncé demande de conjecturer grâce au logiciel le sens de variation du coefficient directeur de la tangente en fonction de q.
Une conjecture du tableau de variations pour $q \in]0; +\infty[$ est demandée. L'attente du concepteur est-elle que les élèves changent le domaine de définition du curseur afin de tester les valeurs inférieures à 0,1 et supérieures à 5 ? Dans ce cas, cette question demande une adaptation importante. Sinon, ils peuvent utiliser la propriété en acte « tout se passe bien car on est en mathématiques » pour prolonger le tableau de variations ! Toujours est-il qu'on ne peut attendre des élèves qu'ils conjecturent les limites aux bornes de $]0; +\infty[$: celles-ci ne sont pas au programme officiel.

Puis l'énoncé demande de justifier l'existence et l'unicité de la valeur de q telle que $f'(0)=1$. L'étape qui consisterait à admettre le résultat conjecturé précédemment est passée sous silence. C'est le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qui doit être appliqué. Le tableau de variations étant fait sur $]0; +\infty[$, les élèves ont donc besoin d'identifier une valeur en laquelle le nombre dérivé est strictement inférieur à 1 et une autre valeur en laquelle il est strictement supérieur à 1 (qui peuvent être 0,1 et 5).

Une valeur approchée de ce qui se notera e est demandée, au 10e puis au 100e. Cela demande un éventuel changement de pas dans la définition du curseur.

Cette activité est une autre variante de ce que le programme officiel nous a fait imaginer *a priori*.

L'exposition de connaissances :



DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Soit q un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto q^x$ s'appelle **fonction exponentielle de base q**.
Elle est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

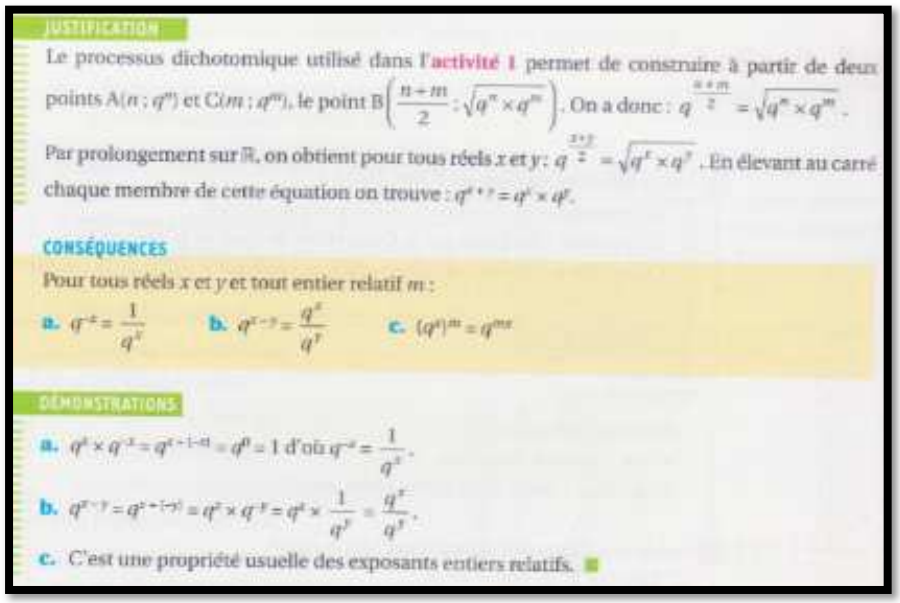
EXEMPLE

La fonction exponentielle de base 0,8 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}8^x$.
Pour tout réel x, $f(x) = 0{,}8^x > 0$.
Dans la calculatrice, pour entrer $0{,}8^x$ on saisit « 0.8^X ».

La « définition » des fonctions exponentielles proposée par ce manuel repose sur le prolongement de la forme algébrique de l'exponentiation, par substitution de la lettre x à la lettre n.
Il ne s'agit donc pas d'une définition ; cet énoncé ressemble à la démarche de Leibniz décrite au début de cette partie sur les fonctions exponentielles.
De façon surprenante, elle ne comporte rien qui rappelle que les fonctions exponentielles sont mathématiquement le fruit d'une construction, dont l'une est ébauchée dans l' « activité » 1. Elle laisse croire que la forme peut tenir lieu de définition, alors que « la notation ne fait pas la fonction » !
Il se peut que le concepteur ait pensé son énoncé comme faisant suite à une définition de q^x préalable (peut-être comme suite directe de l' « activité » 1). Il serait préférable d'être plus explicite, l'implicite crée un manque dans la construction du nouvel objet mathématique.

La phrase « *elle est définie, dérivable et strictement positive sur* $\mathbb{R}$ » met à un même niveau ce qui relève de la définition et des propriétés de la fonction exponentielle de base q.

La relation fonctionnelle est ensuite énoncée en tant que propriété. Rappelons qu'elle n'était visée ni par les exercices de révision « *pour bien commencer* » ni par l' « activité » 1. Par contre, une tentative de justification en est donnée via le rappel du résultat trouvé dans l' « activité » 1 :



JUSTIFICATION

Le processus dichotomique utilisé dans l'activité 1 permet de construire à partir de deux points $A(n ; q^n)$ et $C(m ; q^m)$, le point $B\left(\frac{n+m}{2} ; \sqrt{q^n \times q^m}\right)$. On a donc : $q^{\frac{n+m}{2}} = \sqrt{q^n \times q^m}$.

Par prolongement sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tous réels x et y : $q^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{q^x \times q^y}$. En élevant au carré chaque membre de cette équation on trouve : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

Pour tous réels x et y et tout entier relatif m :

a. $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$ b. $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$ c. $(q^x)^m = q^{mx}$

DÉMONSTRATIONS

a. $q^x \times q^{-x} = q^{x+(-x)} = q^0 = 1$ d'où $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

b. $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = q^x \times \frac{1}{q^y} = \frac{q^x}{q^y}$.

c. C'est une propriété usuelle des exposants entiers relatifs. ■

Le raisonnement exposé dans la justification présente deux écueils :

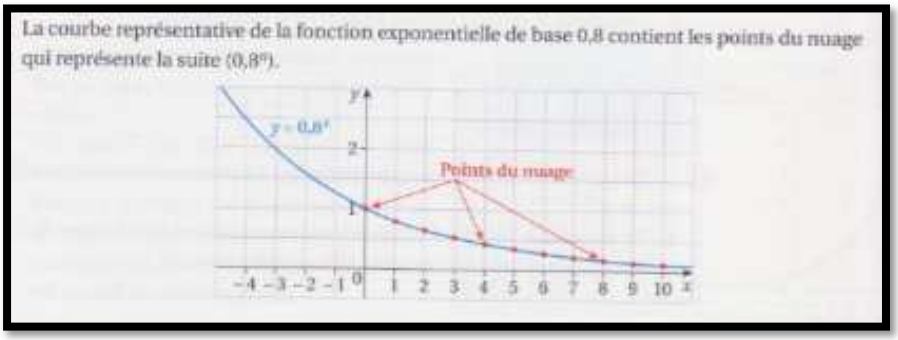
- Par construction, l' « activité » 1 permet d'affirmer que la relation $q^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{q^x \times q^y}$ est vraie pour tous x et y de la forme $x = \frac{k}{2^n}$ et $y = \frac{k+1}{2^n}$ $(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$. Le prolongement de cette égalité à tout x et tout y de $\mathbb{R}$ ne va pas de soi, même d'un point de vue intuitif.

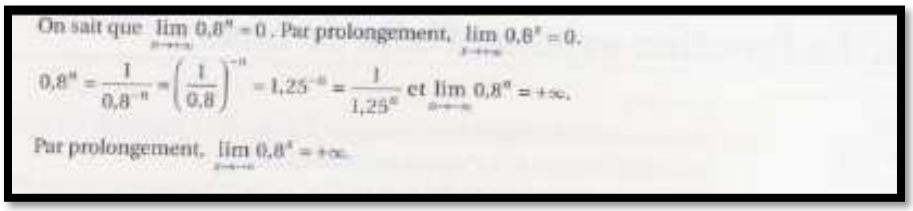
- Dire que $q^{\frac{x+y}{2}}$ au carré est égal à q^{x+y} suppose que la relation $(q^x)^m = q^{mx}$ $(x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z})$ soit connue, du moins pour $m = 2$. Or elle est énoncée dans la propriété qui suit puis (soi-disant) démontrée.

La justification de la relation $(q^x)^m = q^{mx}$ $(x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z})$ serait d'après le manuel : « *c'est une propriété usuelle des exposants entiers relatifs* ». Cependant x n'est pas un entier relatif, c'est là tout l'intérêt de la démonstration.
Celle-ci se fait simplement par récurrence, raisonnement qui n'est pas au programme des Terminales ES et L. Cependant, on pourrait dans ces filières montrer (dans le sens de la monstration) que pour m entier positif $(q^x)^m = q^x \times \ldots \times q^x$ (produit de m facteurs). La relation fonctionnelle permet de conclure dans ce cas. Puis démontrer le cas $m \in \mathbb{Z}_-$ par application de la relation $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$ $(x \in \mathbb{R})$ énoncée et justifiée précédemment.

L'exposé de connaissances des définitions et propriétés algébriques repose exclusivement sur le cadre algébrique. Le cadre graphique y est absent - rappelons qu'il était au cœur de l' « activité » 1 qui a introduit ces définitions et propriétés.

Le cadre graphique apparait par la suite, avec le but d'induire les propriétés analytiques des fonctions exponentielles. La suite géométrique de raison 0,8 et la fonction exponentielle de base 0,8 sont représentées graphiquement sur le même graphique (précédé d'une remarque sur le fait que la courbe de la fonction « *contient les points du nuage qui représente la suite* ».





Le graphique sert d'exemple générique afin d'énoncer les limites des fonctions exponentielles aux bornes de leur ensemble de définition : « *par prolongement* » de la limite de la suite (dans le cadre graphique, de la « forme », en remplaçant n par x ?), le manuel en déduit la limite de la fonction en $+\infty$. Un raisonnement qui utilise les calculs de limites par composition permet de conclure que $\lim_{n\to-\infty} 0,8^n = +\infty$; la limite de la fonction exponentielle de base 0,8 en $-\infty$ s'en déduirait « *par prolongement* » (de la « forme », en remplaçant n par x ?).
En tout état de cause, ces résultats sont hors programme, les limites de fonctions comme les limites par composition ne sont officiellement pas étudiées en Terminales ES et L.

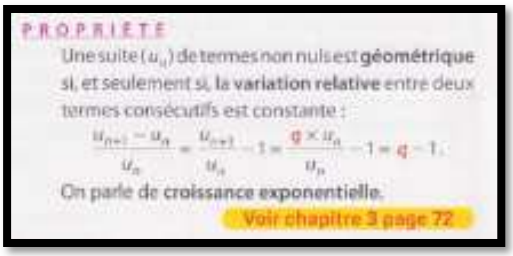
La « Définition et propriétés » des fonctions exponentielles de ce manuel fait état d'une confusion entre ce qui tient de la définition et ce qui tient des propriétés. Elle laisse même à penser que le prolongement de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) à $\mathbb{R}$, de la « forme » exponentielle peut tenir lieu de définition. Les

justifications des propriétés présentent pour certaines des manques voire des incohérences, notamment dans leurs prolongements de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) à $\mathbb{R}$. Ces prolongements semblent rentrer en jeu pour masquer un manque d'arguments - dont on ne peut attendre qu'ils soient tous d'ordre mathématique à ce niveau d'enseignement, mais qui pourraient davantage s'appuyer sur des registres de représentation variés… ou des propriétés explicitement admises.
Le décalage entre l' « activité » 1 qui tente un début de construction mathématique des fonctions exponentielles, et les non-dits de sa conclusion ainsi que le manque de rigueur de l'exposé de connaissances, est étonnant.
Serait-ce dû à la difficulté éprouvée par le concepteur devant un prolongement qui est à la fois si « facile à voir » grâce au tableur, à la calculatrice graphique et à la notation, et si difficile à justifier auprès d'élèves qui ont un bagage mathématique modéré en analyse ?

Annexe 11 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Déclic », Terminale ES, édition Hachette, 2012

Le manuel « Déclic » fait le choix de traiter les fonctions exponentielles dans le troisième chapitre, après un premier chapitre intitulé « Suites » et un deuxième chapitre intitulé « Continuité et convexité ».

Des quatre manuels analysés dans ce travail, celui-ci est le seul à aborder la notion de variation relative. Elle ne figure en effet pas au programme officiel de mathématiques. Celle-ci figure dans l'index du manuel et y fait référence à 7 pages différentes, au sein des chapitres 1 (sur les suites) et 3 (sur les fonctions exponentielles). Dans le chapitre 1, une propriété caractéristique des suites géométriques y est énoncée dans l'exposé de connaissances :


PROPRIÉTÉ

Une suite (u_n) de termes non nuls est **géométrique** si, et seulement si, **la variation relative** entre deux termes consécutifs est constante :

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{q\times u_n}{u_n}-1=q-1.$$

On parle de **croissance exponentielle**.

Voir chapitre 3 page 72

C'est l'occasion pour l'auteur d'introduire l'expression « croissance exponentielle ». Nous verrons que la notion de variation relative constitue un fil rouge pour l'introduction aux fonctions exponentielles de ce manuel.

Chaque chapitre est précédé d'une page d'exercices intitulée « partir d'un bon pied ». Les exercices sont corrigés en fin de manuel ; chacun fait référence à un exposé de connaissances d'un chapitre précédent ou à un d'exercice d'accompagnement personnalisé figurant dans un chapitre précédent ou le chapitre en cours.

Les exercices « Partir d'un bon pied » du chapitre « Fonction exponentielle » :

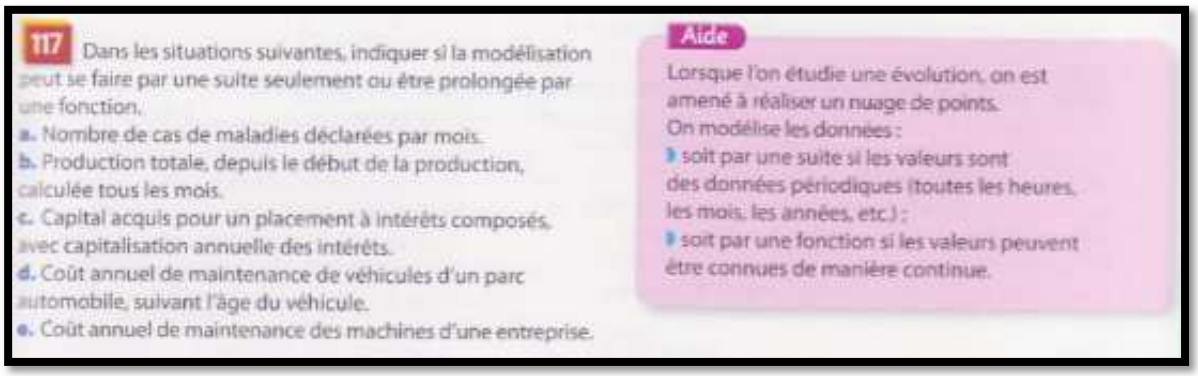
L'exercice A est un QCM portant sur les propriétés des puissances à exposants entiers. Dans la première question, les bases sont indéterminées alors que dans la deuxième l'exposant est indéterminé. Les deux comportent des adaptations de type « introduction d'étapes intermédiaires », dans le cadre algébrique.

L'exercice B est un QCM qui porte sur les suites géométriques. Les questions comportent aussi des adaptations du type « introduction d'étapes » : passage d'une définition par récurrence à une expression en fonction de n qui requiert une mise en facteur ; détermination de la raison connaissant les termes de rangs 1 et 4 ; calcul de la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite définie par récurrence et de premier terme différent de 1 – seule la formule permettant de calculer $1+q+\cdots+q^n$ est un attendu du programme en filière ES.

L'exercice C donne trois graphiques représentant des nuages de points et pose la question de savoir s'ils peuvent être « *modélisés par une suite géométrique* ».
Les élèves peuvent éliminer le premier graphique à cause de son allure.
Pour les deux suivants, s'ils veulent répondre avec précision, les élèves doivent lire les ordonnées de points consécutifs et effectuer les rapports qui correspondent. Le passage du cadre graphique au cadre fonctionnel requiert une prise d'initiative importante de la part des élèves (à moins qu'ils aient déjà traité ce type de tâche) et la prise d'information sur le graphique est possible bien que malaisée.

Le corrigé proposé en fin de manuel montre que le concepteur n'attend des élèves qu'une réponse argumentée en termes de croissance (ou décroissance) qui « *parait exponentielle* ». Remarquons que les élèves n'ont *a priori* rencontré à ce stade l'expression « croissance exponentielle » que dans une propriété (hors programme officiel) sur les suites géométriques du chapitre 1, si tant est que leur professeur s'en est emparé.

L'exercice C fait référence à un exercice sur une page dédiée à l'accompagnement personnalisé :



117 Dans les situations suivantes, indiquer si la modélisation peut se faire par une suite seulement ou être prolongée par une fonction.

a. Nombre de cas de maladies déclarées par mois.
b. Production totale, depuis le début de la production, calculée tous les mois.
c. Capital acquis pour un placement à intérêts composés, avec capitalisation annuelle des intérêts.
d. Coût annuel de maintenance de véhicules d'un parc automobile, suivant l'âge du véhicule.
e. Coût annuel de maintenance des machines d'une entreprise.

Aide

Lorsque l'on étudie une évolution, on est amené à réaliser un nuage de points.
On modélise les données :
- soit par une suite si les valeurs sont des données périodiques (toutes les heures, les mois, les années, etc.) ;
- soit par une fonction si les valeurs peuvent être connues de manière continue.

Il est difficile de voir en quoi cet exercice peut aider à résoudre l'exercice C. Il a cependant le mérite de poser une question qui peut contribuer à donner davantage de sens à l'activité mathématique des élèves. En effet, le programme officiel de Terminale ES ou L met l'étude de phénomènes discrets et continus au cœur des tâches de ce niveau d'enseignement dans le domaine de l'analyse, par le biais de leurs modélisations par une suite ou une fonction[94].
L'auteur de l'exercice s'empare de cet exercice pour y insérer le mot « prolongée » dans un sens proche de celui du prolongement d'une suite géométrique à une fonction exponentielle. L'enseignant peut à son tour s'emparer de cet exercice pour introduire du méta dans son discours aux élèves, concernant la modélisation d'une part, et les prolongements de suites en fonctions d'autre part.
Cet exercice soulève malgré tout des difficultés :

- Dans l' « aide » : on modéliserait une évolution « *par une fonction si les valeurs peuvent être connues de manière continue* ». Cela n'est pas toujours vrai. Prenons un exemple en économie, courant en Terminale ES : le cout de production en fonction du nombre d'objets fabriqués. La variable est discrète, cependant le phénomène est souvent modélisé par une fonction continue et dérivable.
- La seule situation qui nous semble relever à la fois du discret et du continu est celle de la question c. Or dans ce cas, la fonction qui représente les intérêts acquis est une fonction en escalier. Les fonctions en escalier sont peu rencontrées par les élèves de Terminale ES, habitués aux fonctions continues sur leur ensemble de définition. La question est donc difficile à plusieurs titres : la compréhension de la situation (d'autant plus que ce qui est acquis, ce sont des intérêts et non le capital) ; l'utilisation d'un type de fonction qui fait peu partie du « paysage » mathématique des élèves.

L'exercice D est un « vrai ou faux » qui pose trois questions relatives à trois situations différentes :

- Donnée : chiffre d'affaire en début et fin d'une période de trois ans.
  Tâche : vérifier un taux de croissance moyen annuel.
  Les élèves peuvent appliquer le taux proposé trois fois (ou utiliser un exposant 3). Ou chercher le taux moyen annuel et le comparer à celui qui est proposé (ce qui est peu probable à moins qu'ils aient déjà traité ce type de tâche) ;
- Donnée : effectif initial et après une heure d'une population de bactéries qui augmente à un taux constant toutes les demi-heures.
  Tâche : vérifier un effectif au bout d'une demi-heure.

[94] Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011, page 3

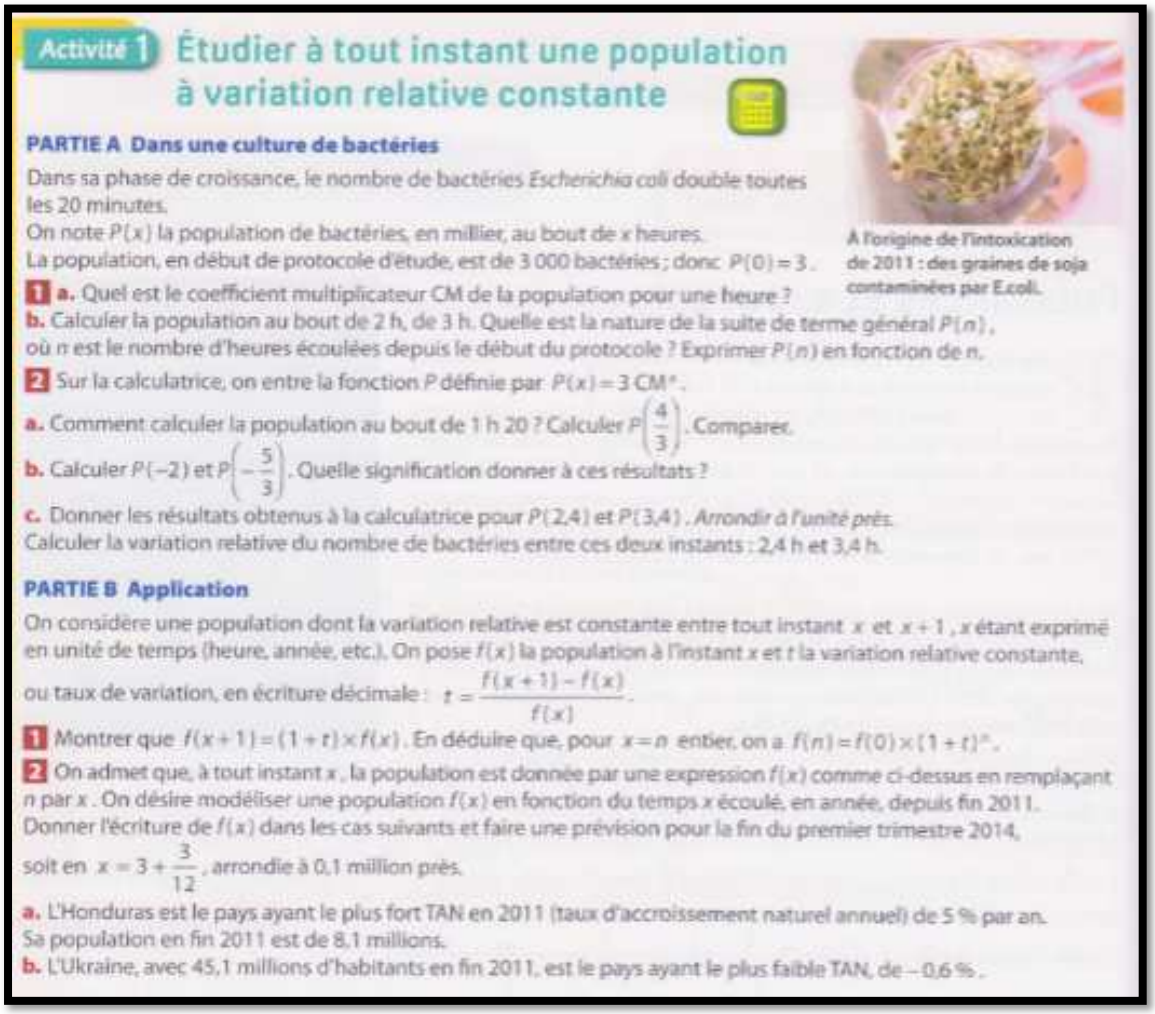
Les élèves peuvent chercher le taux de croissance (ou le coefficient multiplicateur) correspondant à l'effectif proposé au bout d'une demi-heure qui est de 300% (ou 3), l'appliquer à l'effectif proposé pour comparer à l'effectif au bout d'une heure. Ou chercher le taux moyen par demi-heure (Ce qui est peu probable à moins qu'ils aient déjà traité ce type de tâche) ;

- Donnée : prix d'un bien immobilier en début et fin d'année.
  Tâche : vérifier une variation relative du prix sur six mois.
  Les élèves peuvent chercher le taux de croissance (ou le coefficient multiplicateur) correspondant à la variation relative proposée, l'appliquer deux fois au prix initial et comparer le résultat au prix au bout d'un an.

Les trois tâches reviennent donc à l'application d'un taux de croissance, deux ou trois fois. Elles permettent de réinvestir les notions de coefficient multiplicateur, de taux de croissance et de variation relative.
Les deux dernières sont reprises dans l' « activité » 1 du chapitre.

Les fonctions exponentielles sont introduites par trois « activités » séparées.

L' « activité » d'introduction 1 intitulée « *Étudier à tout instant une population à variation relative constante* ».



Activité 1 Étudier à tout instant une population à variation relative constante

À l'origine de l'intoxication de 2011 : des graines de soja contaminées par E.coli.

PARTIE A Dans une culture de bactéries

Dans sa phase de croissance, le nombre de bactéries *Escherichia coli* double toutes les 20 minutes.
On note $P(x)$ la population de bactéries, en millier, au bout de x heures.
La population, en début de protocole d'étude, est de 3 000 bactéries ; donc $P(0) = 3$.

1 **a.** Quel est le coefficient multiplicateur CM de la population pour une heure ?
b. Calculer la population au bout de 2 h, de 3 h. Quelle est la nature de la suite de terme général $P(n)$, où n est le nombre d'heures écoulées depuis le début du protocole ? Exprimer $P(n)$ en fonction de n.

2 Sur la calculatrice, on entre la fonction P définie par $P(x) = 3\,\text{CM}^x$.
a. Comment calculer la population au bout de 1 h 20 ? Calculer $P\left(\frac{4}{3}\right)$. Comparer.
b. Calculer $P(-2)$ et $P\left(-\frac{5}{3}\right)$. Quelle signification donner à ces résultats ?
c. Donner les résultats obtenus à la calculatrice pour $P(2{,}4)$ et $P(3{,}4)$. *Arrondir à l'unité près.*
Calculer la variation relative du nombre de bactéries entre ces deux instants : 2,4 h et 3,4 h.

PARTIE B Application

On considère une population dont la variation relative est constante entre tout instant x et $x + 1$, x étant exprimé en unité de temps (heure, année, etc.). On pose $f(x)$ la population à l'instant x et t la variation relative constante, ou taux de variation, en écriture décimale : $t = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$.

1 Montrer que $f(x+1) = (1+t) \times f(x)$. En déduire que, pour $x = n$ entier, on a $f(n) = f(0) \times (1+t)^n$.

2 On admet que, à tout instant x, la population est donnée par une expression $f(x)$ comme ci-dessus en remplaçant n par x. On désire modéliser une population $f(x)$ en fonction du temps x écoulé, en année, depuis fin 2011.
Donner l'écriture de $f(x)$ dans les cas suivants et faire une prévision pour la fin du premier trimestre 2014, soit en $x = 3 + \frac{3}{12}$, arrondie à 0,1 million près.
a. L'Honduras est le pays ayant le plus fort TAN en 2011 (taux d'accroissement naturel annuel) de 5 % par an. Sa population en fin 2011 est de 8,1 millions.
b. L'Ukraine, avec 45,1 millions d'habitants en fin 2011, est le pays ayant le plus faible TAN, de – 0,6 %.

Le titre de l'activité spécifie que l'étude se fait « *à tout instant* » ; la variable temps prend donc d'emblée ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ (donc un ensemble continu).

La notion de variation relative constante avait servi à caractériser les suites géométriques dans le chapitre 1 ; elle a été revue dans la dernière question des exercices « partir d'un bon pied » de ce chapitre ; elle permet à nouveau de caractériser les situations envisagées dans ce nouveau chapitre.

La partie A : « *dans une culture de bactéries* ».
La situation est celle d'une population qui double toutes les 20 minutes, soit un tiers d'unité. L'unité est d'emblée fractionnée, la variable ne prend donc pas exclusivement des valeurs entières, ce qui exclut une modélisation par une suite.
La population en milliers de bactéries au bout de x heures est notée $P(x)$. La variable se nomme x, la notation est fonctionnelle ; la nature du nombre x n'est pas précisée cependant les notations sont conformes aux habitudes de lycée concernant les fonctions d'une variable réelle.

Dans la première question, la sous question a. demande le coefficient multiplicateur pour une heure. Les élèves risquent de multiplier 2 par 3 au lieu de l'élever à la puissance 3. Le professeur aura pu préparer les élèves à l'aide de l'exercice D de « *partir d'un bon pied* » : en particulier, une des questions y considère une situation de reproduction de bactéries.
La nature de « *la suite de terme général* $P(n)$ » est demandée. La notation fonctionnelle est conservée bien qu'il s'agisse d'une suite, mais le nom de la variable est changé de x à n. Le concepteur joue sur l'implicite : $n \in \mathbb{N}$.

La question 2 demande d'entrer sur la calculatrice la fonction P définie par $P(x) = 3 \times CM^x$. Elle utilise un résultat de la question précédente : CM= 8.
L'existence de la fonction P n'est pas questionnée, le contexte permet de l'assurer. Cependant, rien n'est dit sur l'existence ni la signification de 8^x pour $x \in \mathbb{R}$, ni le fait que la fonction P soit effectivement la fonction $x \mapsto 8^x$. Le prolongement de la forme algébrique est utilisé ici, comme allant de soi, légitimé par sa présence dans les fonctionnalités de la calculatrice.

En question 2.a., il est demandé de calculer la population au bout de 1h20. Les élèves ont le choix entre calculer la population au bout de 1h puis multiplier par 2 pour obtenir la population 20 min après ; ou multiplier 4 fois par 2 (ou multiplier par 2^4) la population initiale.
Ils peuvent aussi utiliser la fonction $P: x \mapsto 8^x$ qui leur a été présentée comme allant de soi et qu'ils ont entrée dans leur calculatrice – effectuer la conversion 1h20min= 1h + 1/3h = 4/3h, puis calculer à la calculatrice $P\left(\frac{4}{3}\right)$. Cette éventualité n'a pas été prévue par le concepteur : la comparaison demandée en fin de question 2.a. n'a alors pas de sens.
En tout état de cause, cette question introduit le fait que la variable puisse être rationnelle (non décimale) positive. Le choix du doublement tous les tiers d'heure permet cette transition qu'un doublement toutes les 30 minutes n'aurait pas permis.

Il est probablement attendu que, dans la question 2.b., les calculs de $P(-2)$ et de $P\left(-\frac{5}{3}\right)$ soient faits à la calculatrice.
Cependant, celui de $P(-2)$ peut être fait à partir de $P(0)$ par deux divisions successives (au moins). Celui de $P\left(-\frac{5}{3}\right)$ peut être fait à partir de $P(-2)$ par une multiplication par 2, à partir de $P(0)$ par des divisions successives. Cette éventualité n'a pas été prévue par le concepteur : l'interprétation demandée en fin de question 2.b. n'a alors pas de sens.
Le but du concepteur est probablement de faire évoluer dans l'esprit des élèves l'ensemble des valeurs prises par la variable : calcul de $P(-2)$ suggère que la variable peut être un entier négatif. Celui de $P\left(-\frac{5}{3}\right)$ qu'elle peut être un rationnel négatif.

La question 2.c. demande le calcul de $P(2{,}4)$ et de $P(3{,}4)$ explicitement à la calculatrice. Ceci suggère que la variable peut être un nombre décimal.

A ce stade de l' « activité », la variable a pris des valeurs dans les sous-ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ par le biais d'un va et viens entre les valeurs calculées par la calculatrice et la situation de la croissance de la population de bactéries.
La calculatrice renvoie 147,0333894 pour $P(2{,}4)$ et 1176,267116 pour $P(3{,}4)$. L'énoncé demande d'arrondir les résultats à l'entier avant de calculer la variation relative entre ces deux instants.
Pour calculer celle-ci, les élèves peuvent chercher le coefficient multiplicateur puis lui soustraire 1, ou calculer directement la variation relative.
Il se trouve que $\frac{1176}{147} = 8$, donc les arrondis à l'unité permettent de trouver le quotient $\frac{P(3,4)}{P(2,4)}$ exact – ainsi que la variation relative exacte. Par contre, l'utilisation des valeurs approchées telles qu'affichées par la calculatrice donne un quotient de 8,000000005 – et une variation relative de 7,000000005.
Ceci dit, les élèves peuvent aussi être tentés de prolonger la propriété énoncée dans le chapitre 1 de ce manuel (qui rappelons-le n'est pas au programme officiel) : la variation relative entre deux rangs consécutifs d'une suite géométrique est égal à la raison de la suite moins 1. Dans ce cas, ils n'effectueraient pas de calcul.
Le lien entre la propriété de variation relative constante entre deux termes consécutifs des suites géométriques, et la propriété de variation relative constante de la fonction P entre ces deux instants (bien que non entiers) distants de une heure, est à la charge des élèves s'ils arrivent à établir des liens par eux-mêmes, ou bien à la charge de l'enseignant.
Ce lien permet une transition avec la partie B.

La partie B : « *application* ».
Il s'agit plus d'une généralisation que d'une application : la situation est celle d'une population qui a une variation relative constante t entre deux instants x et $x + 1$, x étant exprimé en unité de temps. $f(x)$ désigne la population à l'instant x. Le nom de la variable peut suggérer qu'il s'agit d'un réel.
Il est spécifié que t est en écriture décimale. Est-ce pour s'assurer que les élèves ne prennent pas la valeur en pourcentage (donc $100t$ au lieu de t) ? Cela constitue cependant un amalgame entre un nombre et ses différents registres de représentation. De plus, c'est suggérer que tout nombre réel admet un développement décimal limité.
Le vocabulaire peut être source de difficulté : $\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$, en Sciences Economiques et Sociales, porte indifféremment le nom de « variation relative », de « taux d'évolution », de « taux de variation » et de « taux d'accroissement ». L'énoncé de la partie B utilise dans un premier temps les expressions « variation relative constante » (comme dans le titre) et « taux de variation » ; dans l'énoncé de la question 2.a. il est question de « taux d'accroissement ». Or les élèves ont rencontré en mathématiques, lors de l'introduction au nombre dérivé, des taux de variation aussi appelés taux d'accroissement. Ainsi, au sens mathématique du terme, le taux d'accroissement de f entre x et $x + 1$ est $\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f(x+1) - f(x)$; c'est l'accroissement absolu de f entre x et $x + 1$ … Les élèves ont de quoi y perdre leur latin si l'enseignant n'est pas averti !

La première question consiste à démontrer l'égalité $f(x + 1) = (1 + t)f(x)$. Les transformations algébriques de l'égalité $t = \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$ peuvent poser d'autant plus de difficultés à des élèves de Terminale ES qu'elles comportent deux « lettres », dont une variable x et un paramètre t.
Puis « *pour $x = n$ entier* », via l'expression du terme général d'une suite géométrique en fonction de n, les élèves doivent en déduire que $f(n) = f(0) \times (1 + t)^n$. Ce passage par les suites n'est pas explicite, l'adaptation est à la charge des élèves. Cependant il est convoqué par l'utilisation de la lettre n. Une autre adaptation pour les élèves est de reconnaitre la raison de la suite géométrique, qui est une somme $(1 + t)$.

L'énoncé fait admettre explicitement, dans la question 2, qu'on peut remplacer n par x dans l'expression trouvée précédemment. Ce qui permet d'obtenir une expression de $f(x)$ « *à tout instant*

x ». Dans la partie A, le passage de variable entière à variable réelle est fait graduellement, ce n'est pas le cas dans la partie B. Pour le motiver, le concepteur se repose-t-il sur la partie A, sur les questions éventuelles des élèves, sur le discours de l'enseignant ?

Le but des deux sous questions de la question 2. est de déterminer dans deux situations différentes l'expression algébrique de $f(x)$ connaissant le taux t et d'en déduire « *une prévision* ».
Deux remarques :

- L'unité de temps est l'année. Le temps écoulé entre l'origine du temps, fin 2011, et la fin du premier trimestre 2014, est donc de $2+\frac{3}{12}$ années (donc 2,25 années). Pour éviter une étape intermédiaire à la charge des élèves, l'énoncé marque que $3+\frac{3}{12}$ serait le temps écoulé entre début 2011 et la fin du premier trimestre 2014. Une erreur de décompte ou de frappe ?
- Le manuel a été édité en 2012, pour une durée de plusieurs années. A partir d'avril 2014, le calcul de la population à la fin du premier trimestre de l'année 2014 selon le modèle ne peut donner lieu qu'à une critique du modèle si les données réelles sont connues, ou une interpolation, mais pas à une prévision.

Le Taux d'Accroissement Naturel annuel (TAN) dans deux pays différents est donné, en pourcentage. L'un est positif, l'autre est négatif. Les élèves reconnaissent-ils que TAN=t ?

Conclusion :
Le titre de cette « activité » d'introduction annonce dès le début qu'il s'agit d' « *étudier à tout instant une population* ». Le temps qui s'écoule est donc utilisé comme support de l'intuition du continu. Discrétisé en heures dans la partie A et en années dans la partie B, il va permettre de passer du continu au discret pour revenir au continu.

D'emblée, la population étudiée dans la partie A est modélisée par une fonction P d'une variable nommée x. Selon les habitudes des élèves, les notations adoptées sont celles d'une fonction d'une variable réelle.
L'utilisation de la lettre n permet, tout en gardant la notation fonctionnelle, de passer à l'étude de l'évolution « *à tout instant* » à son étude heure après heure, donc de passer du continu au discret. La suite correspondante étant géométrique, les élèves peuvent en déduire l'expression de $P(n)$ en fonction de n.
La forme algébrique du terme général de la suite est alors prolongée, conjointement, de deux façons :

- Par le basculement inverse, de l'utilisation de la lettre n à celle de la lettre x ;
- Par l'utilisation de la calculatrice dans laquelle les élèves entrent la fonction : $x \mapsto 3 \times 8^x$.

L'auteur tâche d'effectuer dans le cadre numérique deux allers-retours entre le contexte de la situation et sa modélisation par la fonction P :

- Il demande la population au bout de 1h20 en « espérant » que les élèves vont le faire avec des coefficients multiplicateurs. Il demande de calculer $P\left(\frac{4}{3}\right)$ en « espérant » qu'ils vont le faire à la calculatrice. Puis il demande de comparer.
- Il demande de calculer $P(-2)$ et $P\left(-\frac{5}{3}\right)$ en « espérant » que les élèves vont le faire à la calculatrice. Puis il demande une interprétation des résultats dans le contexte de la population de bactéries.

Nous utilisons le mot « espérant » car nous pouvons deviner les intentions du concepteur de cet exercice. Néanmoins, par manque d'explicitation, les élèves peuvent prendre d'autres chemins que ceux souhaités par l'auteur. D'autant plus que le prolongement de la forme algébrique qui a servi de « définition » à la fonction P est présenté comme allant de soi.
Quoi qu'il en soit, pourquoi le concepteur fait-il ces allers-retours ? Est-ce pour essayer de donner une légitimité à cette fonction qui n'est aucunement construite ?

Remarquons que dans cette partie, la nouvelle fonction est mobilisée avec des valeurs numériques de la variable qui sont entières positives puis négatives et rationnelles non décimales, puis décimales : le domaine de définition de P s'étend « en acte » pour les élèves de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

Nous avons constaté que la notion de variation relative joue un rôle de fil conducteur dans ce manuel entre les suites géométriques et les fonctions exponentielles. En l'occurrence, sur un exemple numérique, l'auteur fait calculer la variation relative de la population de bactéries sur un intervalle de temps égal à 1 (heure) entre deux valeurs non entières. Il est possible que les élèves fassent le constat (ou que l'enseignant les y invite) de ce que cette variation relative est égale à la même constante qu'entre deux termes consécutifs de la suite de terme général $P(n)$.

La partie B prend le chemin inverse : elle part d'une population à variation relative constante entre deux instants x séparés d'une unité de temps, qui est un paramètre t. En remplaçant x par n, la situation est modélisée par une suite géométrique dont on admet que l'écriture du terme général en fonction de n se généralise aux nombres réels en remplaçant n par x. Le changement de nom de la variable est le moyen utilisé par l'auteur pour passer du continu au discret et vice versa. Le prolongement de la forme algébrique est à nouveau mobilisé par l'auteur, cette fois avec la précaution de dire qu'il est admis.

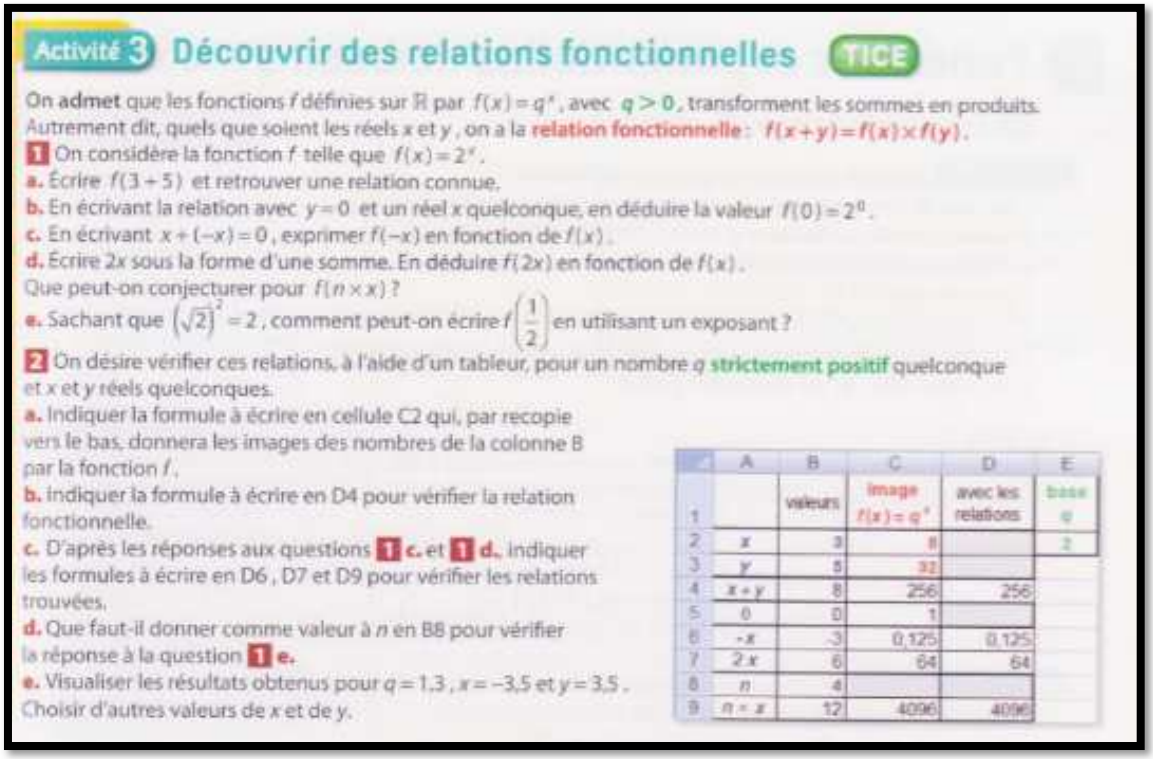
Cette activité n'utilise pas de tableau de valeur ni de représentation graphique. Les cadres algébrique et numérique sont mobilisés, que ce soit dans des tâches papier-crayon ou instrumentées par la calculatrice.

Il est difficile pour les élèves (et peut-être un peu long pour les enseignants) de faire la part entre ce qui y relève de la démonstration et ce qui y relève de ce qui est admis. Le but des tâches est parfois sibyllin. Les enjeux de cette introduction sont donc en grande partie cachés. Nous avons aussi constaté que les sciences économiques et les mathématiques utilisent un vocabulaire commun pour des notions de taux et de variation parfois différentes.
D'où un besoin important d'explicitations aux élèves de la part de l'enseignant.

L' « activité » d'introduction 2 intitulée « Lire le sens de variation de $x \mapsto q^x$:

Elle a pour but de lire graphiquement le sens de variation de $x \mapsto q^x$ (q>0) par l'intermédiaire de GeoGebra ou de la TI-Nspire via un curseur, ou via un tableau de valeurs obtenu sur tableur.
Un lien explicite avec le sens de variation des suites géométriques est demandé.

L' « activité » d'introduction 3 intitulée « Découvrir des relations fonctionnelles ».



Activité 3 Découvrir des relations fonctionnelles TICE

On **admet** que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=q^x$, avec $q>0$, transforment les sommes en produits. Autrement dit, quels que soient les réels x et y, on a la **relation fonctionnelle** : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

1 On considère la fonction f telle que $f(x)=2^x$.

a. Écrire $f(3+5)$ et retrouver une relation connue.

b. En écrivant la relation avec $y=0$ et un réel x quelconque, en déduire la valeur $f(0)=2^0$.

c. En écrivant $x+(-x)=0$, exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

d. Écrire $2x$ sous la forme d'une somme. En déduire $f(2x)$ en fonction de $f(x)$.
Que peut-on conjecturer pour $f(n\times x)$?

e. Sachant que $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, comment peut-on écrire $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant un exposant ?

2 On désire vérifier ces relations, à l'aide d'un tableur, pour un nombre q **strictement positif** quelconque et x et y réels quelconques.

a. Indiquer la formule à écrire en cellule C2 qui, par recopie vers le bas, donnera les images des nombres de la colonne B par la fonction f.

b. Indiquer la formule à écrire en D4 pour vérifier la relation fonctionnelle.

c. D'après les réponses aux questions **1 c.** et **1 d.**, indiquer les formules à écrire en D6, D7 et D9 pour vérifier les relations trouvées.

d. Que faut-il donner comme valeur à n en B8 pour vérifier la réponse à la question **1 e.**

e. Visualiser les résultats obtenus pour $q=1{,}3$, $x=-3{,}5$ et $y=3{,}5$. Choisir d'autres valeurs de x et de y.

	A	B	C	D	E
1		valeurs	image $f(x)=q^x$	avec les relations	base q
2	x	3	8		2
3	y	5	32		
4	$x+y$	8	256	256	
5	0	0	1		
6	$-x$	-3	0,125	0,125	
7	$2x$	6	64	64	
8	n	4			
9	$n\times x$	12	4096	4096	

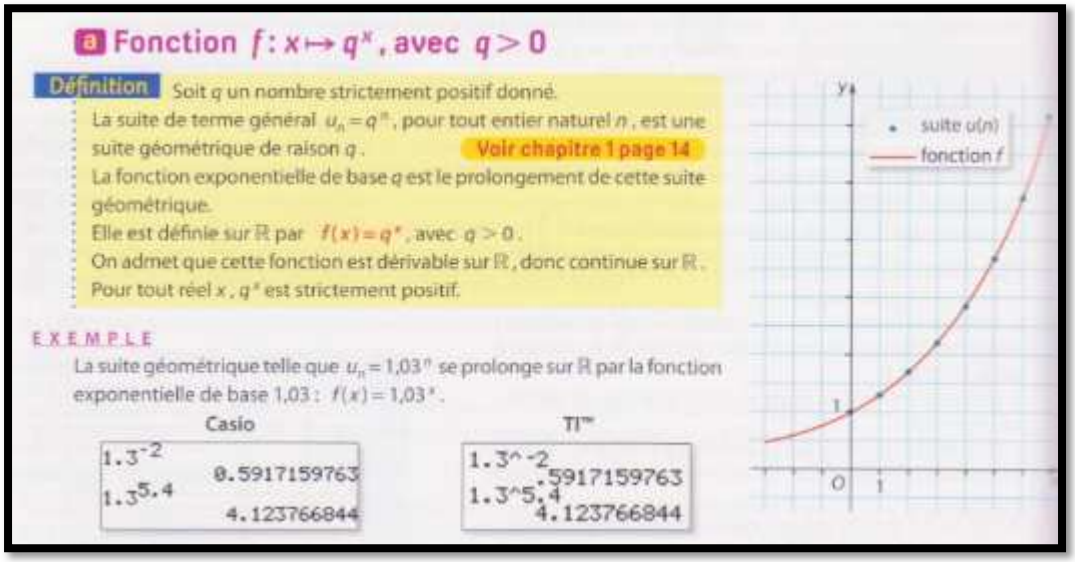
L'énoncé de l' « activité » commence par écrire que la relation fonctionnelle de transformation des sommes en produits des fonctions exponentielles est admise.
Dans la question 1, cette relation est mise en fonctionnement avec la fonction $f: x \mapsto 2^x$.
L'écriture de $f(3+5)$ fait le lien avec la formule correspondante vue en classe de 4e (avec exposants entiers).
La question 1.b. a pour but de démontrer la relation $f(0)=1$. On peut remarquer que la relation $2^0=1$ est une conséquence d'une convention connue des élèves depuis la 4e. Le statut de cette démonstration est donc pour le moins bancal.
La question 1.c. a pour but de démontrer que $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$. Le lien avec la propriété connue des élèves depuis le collège pour les exposants entiers n'est pas demandé.
La question 1.d. a pour but de démontrer la relation $f(2x)=(f(x))^2$. Une expression de $f(nx)$ en fonction de $f(x)$ est alors conjecturée. Le lien avec ces propriétés lorsque les exposants sont entiers, connues des élèves depuis le collège, n'est pas demandé non plus.
Enfin, il est demandé d'écrire $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant un exposant. Il s'agit probablement d'une erreur, la question est probablement « en utilisant une racine carrée ».

Dans la question 2 l'énoncé demande une vérification des propriétés vue dans la question 1, via le tableur, avec les mêmes valeurs numériques dans un premier temps. Or à part une conjecture, les propriétés de la question 1 sont démontrées voire connues depuis la 4e ; quelle est alors l'utilité de les vérifier au tableur ?
La question 2.d. n'est pas claire.
La dernière question propose de tester les propriétés avec q=1,3, x=-3,5 et y=3,5 puis avec d'autres valeurs de x et y. Les valeurs proposées sont décimales. Les élèves sont implicitement invités à élargir le domaine d'application des formules algébriques aux exposants non entiers.

L' « activité » 4 intitulée « Découvrir un nouveau nombre » :

Cette « activité » a pour but d'introduire le nombre e.
L'énoncé rappelle explicitement le lien entre dérivabilité et existence d'une tangente.
A nouveau par l'intermédiaire de GeoGebra ou de la calculatrice TI-Nspire, via un curseur, le graphe de la fonction $x \mapsto q^x$ (q>0) est tracé, ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.
La lecture de la capture des écrans sur le manuel est une source d'information des élèves. Les cas représentés sont $q = 2$ et q=3. L'utilisation de ces outils numériques est donc nécessaire afin d'investiguer d'autres valeurs de q.
La convexité des fonctions exponentielles est conjecturée à la question 1.
Puis dans la question 2 les lectures de nombre dérivé sont faites sur les deux captures d'écran. Celle de GeoGebra permet une lecture du nombre dérivé aussi bien graphique qu'algébrique puisque la fenêtre algébrique est présente et qu'un quadrillage permet une lecture graphique. Celle de la TI-Nspire ne permet qu'une lecture algébrique.
A la fin de cette question, une conjecture du « *sens de variation du nombre dérivé de la fonction f en $x = 0$* » est demandée. Il y manque « en fonction de q ». Il n'est pas demandé d'admettre la conjecture avant de justifier l'existence d'une valeur de q telle que $f'(0) = 1$. Il n'est pas question de l'unicité de cette valeur. L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires est facilitée par le fait que dans la capture d'écran sous GeoGebra f'(0)>1 et dans l'autre f'(0)<1.

L'exposition de connaissances :



La fonction exponentielle de base q (q>0) est décrite comme « le prolongement » de la suite (q^n).
Elle est « définie par $f(x) = q^x$ ».
Cette soi-disant « définition » comporte des messages implicites :

- il n'y aurait qu'une façon de prolonger une suite à l'ensemble des réels (autrement dit, graphiquement, de relier des points isolés) ;
- une notation définirait un objet mathématique.

La dérivabilité et le signe sont admis dans la « définition ».

Un exemple est donné en prenant pour base $q = 1{,}3$. Il est décliné dans le cadre algébrique (avec une erreur dans la base), dans le cadre graphique et dans le cadre instrumenté de la calculatrice.

Le sens de variation est admis avec une référence aux suites : « en continuité avec les suites ». Le mot « continuité » est pris dans son sens commun.

La relation fonctionnelle est énoncée en tant que théorème admis. Les autres propriétés sont listées en tant que conséquences de ce théorème et ne sont pas démontrées.
Une particularité de ce manuel est la définition de la racine $n^{\text{ième}}$ de q.

En remarque, dans la marge à droite, pour tout réel x, la variation relative entre x et x+1 est calculée. La conclusion en est « *on retrouve le taux d'évolution « par glissement » d'une croissance exponentielle* ». Par « taux d'évolution » le concepteur entend probablement « variation relative », qu'il a aussi nommée à la façon des économistes « taux de variation » et « taux d'accroissement » dans la première « activité ». En effet, le « taux d'évolution en glissement » est une quatrième façon qu'ont les économistes de nommer le même rapport. Il conviendrait de le dire explicitement aux élèves plutôt que d'écrire qu'on « *retrouve* » une dénomination qu'ils n'ont pas encore rencontrée.

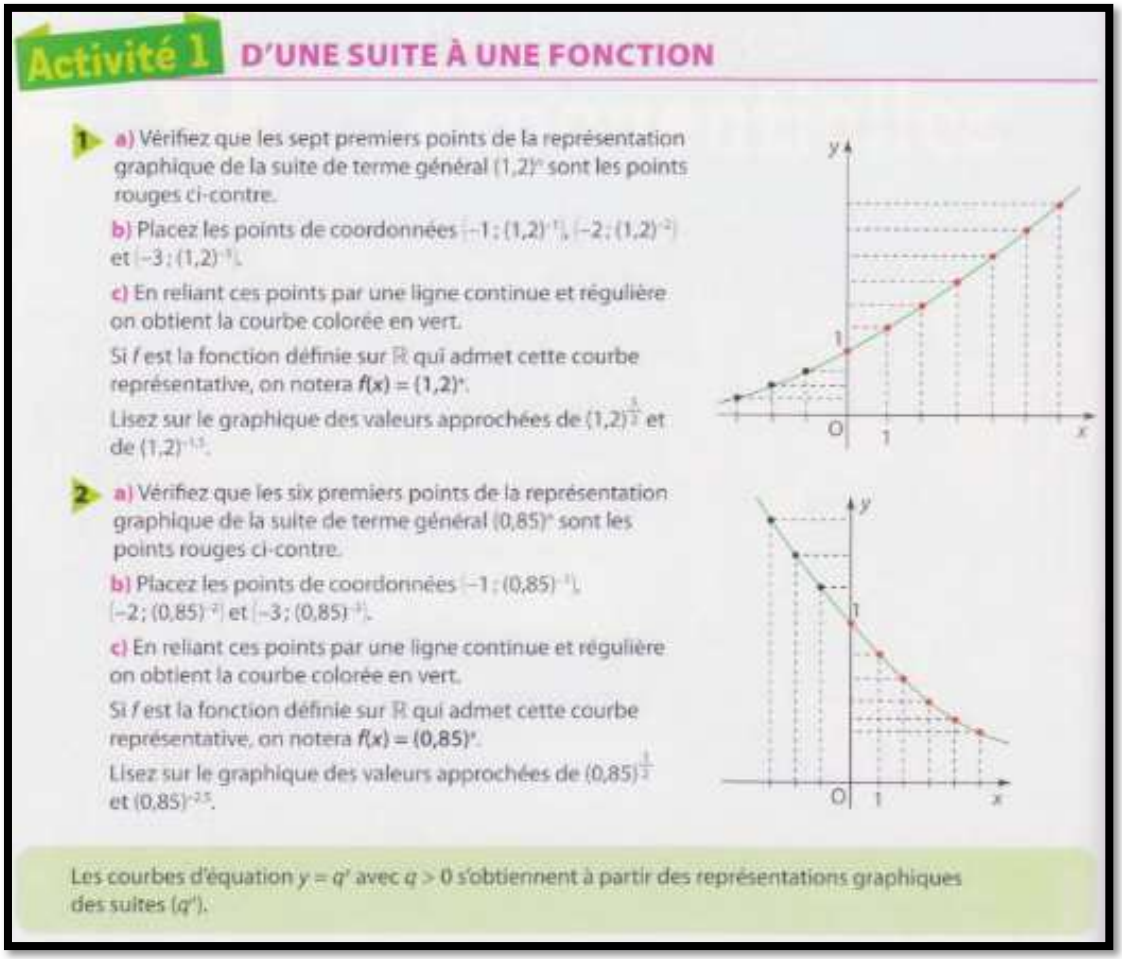
Annexe 12 : Analyse de l'introduction aux fonctions exponentielles du manuel « Transmath », Terminales ES et L, édition Nathan, 2012

Le chapitre concernant les fonctions exponentielles figure en 3e position dans ce manuel, après un chapitre sur les suites et un autre intitulé « Continuité sur un intervalle ».

Chaque chapitre de ce manuel débute par une page de révisions organisée à la manière d'un tableau à double entrée : la colonne de gauche est celles des « *rappels* », la colonne de droite celle des « *questions-tests* ».
Dans le chapitre 3, « *fonctions exponentielles* », cette page comporte deux « *rappels* ».
Le premier est la propriété énonçant le sens de variation des suites géométriques de raison strictement supérieure à 1, agrémentée d'un exemple : la suite définie par son terme général $\left(\frac{4}{3}\right)^n$, et la représentation graphique de ses cinq premiers termes. Implicitement, la suite est définie sur $\mathbb{N}$. L'exercice correspondant a pour tâche de représenter graphiquement trois suites géométriques, de raisons strictement supérieures à 1, définies par la donnée de leur terme général en fonction de n, de la forme q^n. Comme dans l'exemple, elles sont implicitement définies sur $\mathbb{N}$ et leurs premiers termes sont égaux à 1

Le deuxième rappel et le deuxième exercice sont sur le même modèle, pour des suites géométriques de raisons strictement comprises entre 0 et 1.
Cette page de préliminaires a donc pour unique objectif de passer de l'expression du terme général q^n d'une suite dans le cadre algébrique (q étant donné numériquement), à la représentation graphique de la suite.

L' « activité » 1 intitulée « *D'une suite à une fonction* » :



Activité 1 D'UNE SUITE À UNE FONCTION

1 a) Vérifiez que les sept premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(1,2)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1;(1,2)^{-1})$, $(-2;(1,2)^{-2})$ et $(-3;(1,2)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (1,2)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(1,2)^{\frac{5}{2}}$ et de $(1,2)^{-1,5}$.

2 a) Vérifiez que les six premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(0,85)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1;(0,85)^{-1})$, $(-2;(0,85)^{-2})$ et $(-3;(0,85)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (0,85)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(0,85)^{\frac{1}{2}}$ et $(0,85)^{2,5}$.

Les courbes d'équation $y = q^x$ avec $q > 0$ s'obtiennent à partir des représentations graphiques des suites (q^n).

La question 1 consiste à vérifier que les sept premiers points représentant la suite de terme général $(1,2)^n$ sont ceux représentés sur un graphique qui est donné dans l'énoncé. Plusieurs difficultés se présentent :

- L'absence de quadrillage rend la lecture des ordonnées difficiles. De plus, l'unité sur l'axe des ordonnées est de 0,9 cm, ce qui ne facilite pas la tâche !
- L'écriture décimale de l'ordonnée du $n^{\text{ième}}$ point comporte $n-1$ chiffres après la virgule.

Deux raisons pour lesquelles il est impossible de vérifier qu'il s'agit des « bons » points. Tout au plus peut-on affirmer que les points semblent proches de ceux de la représentation graphique de la suite de terme général $(1,2)^n$.

Il est peu probable que le concepteur ou qu'un enseignant attende des élèves qu'ils effectuent les calculs des puissances successives de 1,2 à la main. Les élèves mobilisent donc l'utilisation de la touche « puissance » de la calculatrice pour cette question.

Puis la consigne est de placer « *les points de coordonnées* $(-1;(1,2)^{-1})$, $(-2;(1,2)^{-2})$ *et* $(-3;(1,2)^{-3})$ ». Il n'est pas demandé de placer les points de la question précédente, et la réponse est fournie à droite de la question sur un graphique semblable au précédent. En quoi consiste donc la tâche des élèves ?

Pour le moins, s'ils ne font pas eux-mêmes de graphique, les élèves devraient effectuer les calculs des ordonnées des trois points. Ils peuvent utiliser en étape intermédiaire la définition connue depuis le collège : « pour tout réel a et tout entier naturel n, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ » puis terminer le calcul à la calculatrice, ou mobiliser directement la touche « puissance » de la calculatrice en entrant un exposant négatif entier. La première procédure, plus longue, présente un intérêt limité.

Puis l'énoncé affirme : « *En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert* ». L'unicité d'une telle courbe n'est pas questionnée.
Puis « *Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (1{,}2)^x$* »

Pour finir, les élèves doivent effectuer la lecture graphique de valeurs approchées de $(1{,}2)^{\frac{5}{2}}$ et $(1{,}2)^{-1{,}5}$. Ils ont besoin de l'étape intermédiaire consistant à reconnaitre qu'il s'agit des images des nombres $\frac{5}{2}$ et $-1{,}5$ par f. Notons qu'il s'agit d'images de nombres non entiers.

Les tâches de la question 2 sont presque identiques à celles de la question 1, avec la suite de terme général $(0{,}85)^n$: la raison est cette fois inférieure à 1.

Cette activité semble d'une simplicité déconcertante. Comment, de quoi, procède-t-elle ?

Le prolongement de la suite aux puissance à exposants négatifs est fait, comme dans la théorie, par l'utilisation de la définition « pour tout réel a et tout entier naturel n, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ » donnée en collège ; en pratique dans cette « activité » 1, si l'enseignant ne sollicite pas des élèves qu'ils rappellent cette définition, la nature de ce prolongement risque de passer inaperçue puisque les élèves utilisent probablement la calculatrice pour calculer les puissances à exposants négatifs.

Le cadre graphique sert à prolonger la représentation graphique de l'ensemble des points à abscisses entières à « toutes » les abscisses (sous-entendu à $\mathbb{R}$). Les abscisses décimales ou rationnelles ne font l'objet d'une question qu'une fois la courbe « définie », afin de trouver des ordonnées correspondantes.

Ce prolongement est présenté comme allant de soi, donc unique et parfaitement défini par le fait que la courbe est continue et régulière. Notons que dans ce manuel la notion de régularité ne fait pas l'objet d'une définition ni même d'une « approche graphique », comme c'est le cas de la continuité.

Cette dernière est une notion qui est au programme de la Terminale, ce n'est pas le cas de la régularité. De plus, le mot « régularité » est pris ici dans un sens intuitif qui inclue certainement la monotonie en plus de la dérivabilité, ce qui n'est pas le cas de la définition mathématique de la régularité d'une fonction.

La notation « $f(x) = (1{,}2)^x$ » est introduite sans commentaire (donc sans référence à la relation fonctionnelle ni même au fait que la notation est prolongée de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$), puis mise en application numériquement par l'intermédiaire d'une lecture graphique.

Le cadre graphique joue donc le rôle essentiel dans cette « activité », cependant de façon moins visible, la calculatrice donne une légitimité supplémentaire à la nouvelle fonction.

On notera la présence des parenthèses autour de la raison. Cette pratique se retrouve jusqu'à la partie cours.

L' « activité » 2 intitulée « *A la recherche d'une courbe* » :

Elle se propose de, « *parmi toutes les courbes d'équation $y = q^x$ avec q>0, d'en trouver une dont la pente de la tangente au point A d'abscisse 0, c'est-à-dire au point A(0 ; 1) est égale à 1*. »

L'énoncé est donc en termes d'équation de courbe et non en termes de fonction. Aussi, le mot « pente » est utilisé plutôt que « coefficient directeur », plus utilisé à l'heure actuelle.

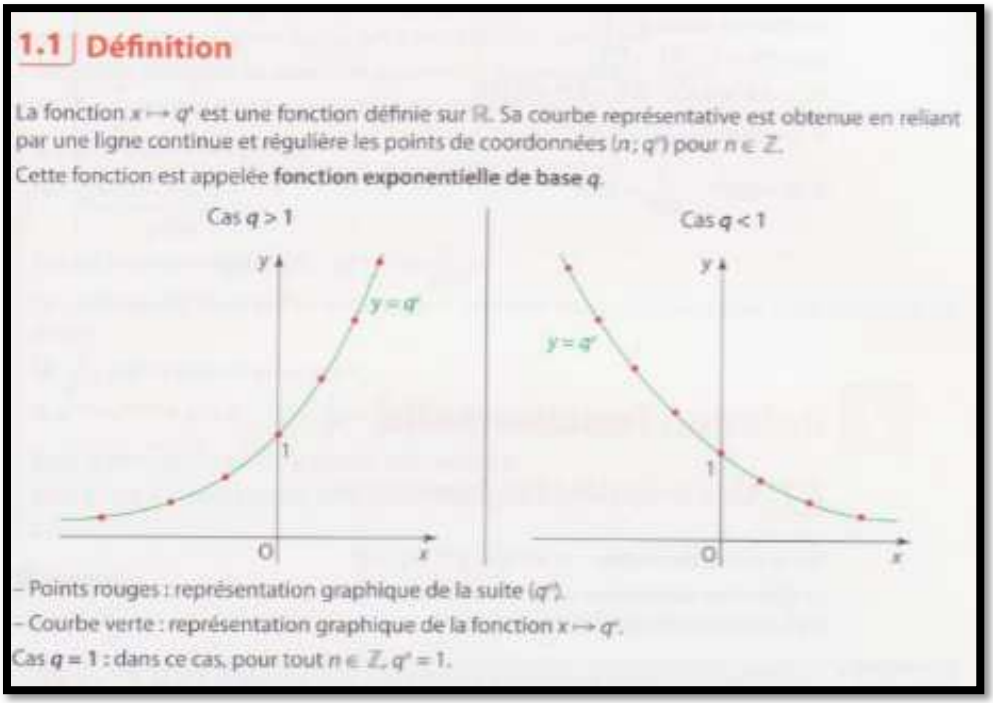
La question 1 demande une équation de la tangente en A à une telle courbe. Bien que la fonction $f: x \mapsto q^x$ (q>0) ne soit pas explicitée, les élèves peuvent être tentés de chercher son nombre dérivé en 0. Mais ils ne disposent pas de moyen de la dériver. Au mieux, ils peuvent répondre « $y = f'(0) \times x + 1$ ». Le fait que toute équation répondant à la question comporte un paramètre, $f'(0)$, ne peut que les gêner.

Puis, la question 2 commence ainsi : *« à l'aide d'un logiciel, vérifiez que parmi toutes les courbes d'équation $y = q^x$ une seule semble avoir en A une tangente de pente 1.* » Le logiciel est laissé au choix des élèves et la façon de tester cette conjecture aussi. Il reste donc de nombreuses prises d'initiatives à sa charge.
« *La valeur correspondant à une telle courbe* » est notée q_0 et pour finir e.

- L'existence et l'unicité de la courbe sont donc admises sans que ce ne soit dit.
- Quelle est l'utilité de l'introduction de la notation q_0 ? Le fait de trouver une valeur approchée d'une inconnue ne change pas son nom.

L'exposé de connaissances :

Parmi les quatre manuels, c'est le seul dont les pages de l'exposition de connaissances s'enchainent sans les pages, habituellement situées à droite, qui présentent des méthodes pour les résolutions d'exercices.



La fonction $x \mapsto q^x$ (q>0) y est « définie » par l'intermédiaire de sa courbe : celle-ci est « *obtenue en reliant par une ligne continue et régulière les points de coordonnées* $(n; q^n)$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$ ». Cette « définition » est conforme à celle de l' « activité » 1 : la fonction est définie pas sa courbe, elle-même présentée comme l'unique prolongement « continu » et « régulier » de l'ensemble discret de points de coordonnées $(n; q^n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Les points en rouge constituent (contrairement à la légende proposée par le manuel) le prolongement de la représentation graphique de la suite (q^n) aux points précités.

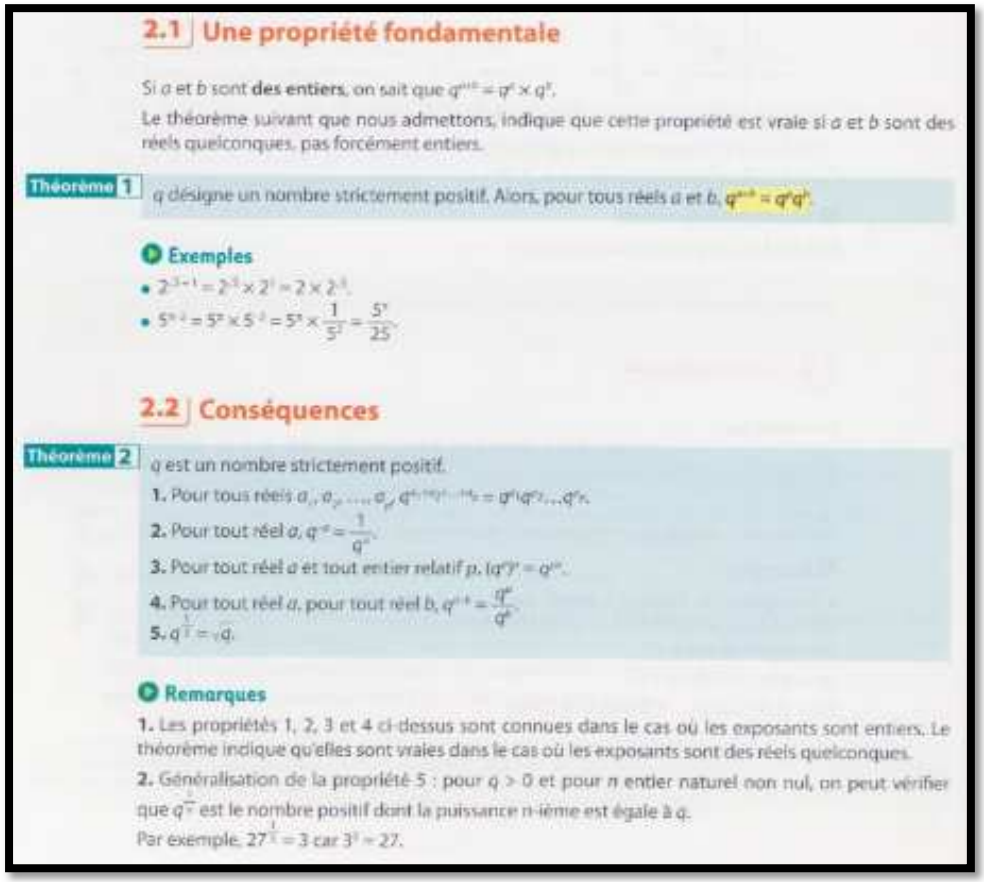
L'exposé de connaissance ne fait mention à aucun endroit de l'utilisation de la calculatrice.

La dérivabilité des fonctions exponentielles est énoncée conformément au programme officiel.

Enfin la relation fonctionnelle est énoncée en tant que théorème admis, avec pour remarque introductive le fait que la propriété, connue des élèves pour des exposants entiers, est vraie pour des exposants « *pas forcément entiers* ».
Les deux exemples utilisent des exposants soit entiers, soit irrationnels - $\sqrt{3}$ et π.

C'est une particularité de ce manuel, les autres utilisent des exposants rationnels – écrits en notation décimale ou fractionnaire.

La relation fonctionnelle n'avait fait l'objet d'aucune « activité » d'introduction ; par contre elle est largement développée dans le cadre algébrique puisqu'un nombre important de propriétés algébriques sont énoncées en tant que conséquences de la relation fonctionnelle, puis démontrées. Le concepteur de ce manuel fait un effort pour souligner le fait que les propriétés algébriques énoncées sont des extensions de propriétés connues des élèves lorsque les exposants sont entiers.



2.1 Une propriété fondamentale

Si a et b sont **des entiers**, on sait que $q^{a+b} = q^a \times q^b$.
Le théorème suivant que nous admettons, indique que cette propriété est vraie si a et b sont des réels quelconques, pas forcément entiers.

Théorème 1 q désigne un nombre strictement positif. Alors, pour tous réels a et b, $q^{a+b} = q^a q^b$.

Exemples

- $2^{3+1} = 2^3 \times 2^1 = 2 \times 2^3$.
- $5^{2-3} = 5^2 \times 5^{-3} = 5^2 \times \frac{1}{5^3} = \frac{5^2}{25}$.

2.2 Conséquences

Théorème 2 q est un nombre strictement positif.

1. Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $q^{a_1+a_2+\cdots+a_p} = q^{a_1} q^{a_2} \ldots q^{a_p}$.
2. Pour tout réel a, $q^{-a} = \frac{1}{q^a}$.
3. Pour tout réel a et tout entier relatif p, $(q^a)^p = q^{ap}$.
4. Pour tout réel a, pour tout réel b, $q^{a-b} = \frac{q^a}{q^b}$.
5. $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.

Remarques

1. Les propriétés 1, 2, 3 et 4 ci-dessus sont connues dans le cas où les exposants sont entiers. Le théorème indique qu'elles sont vraies dans le cas où les exposants sont des réels quelconques.
2. Généralisation de la propriété 5 : pour $q > 0$ et pour n entier naturel non nul, on peut vérifier que $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre positif dont la puissance n-ième est égale à q.
Par exemple, $27^{\frac{1}{3}} = 3$ car $3^3 = 27$.

La propriété 1 est démontrée par un raisonnement « *de proche en proche* », c'est-à-dire une récurrence non explicite. Elle est rarement citée dans les manuels.
Les propriétés 2, 4 et 5 sont démontrées algébriquement.
La propriété 3 est démontrée en montrant les « p fois » en jeu lorsque p est positif et en utilisant la propriété 2 lorsque p est négatif.

Conclusion :
Ce manuel adopte une approche graphique qui repose sur une intuition du continu largement partagée – le tracé sans lever le crayon - et une intuition de la régularité qui pourrait être explicitée, même

succinctement, vis-à-vis des élèves. Le fait que l'unicité d'un tel prolongement puisse être questionné est passé sous silence, comme si « tout se passe bien puisqu'on est en math » !

Le silence qui entoure les enjeux de ce prolongement contraste avec le soin apporté à l'énoncé et aux démonstrations des propriétés algébriques des fonctions exponentielles.

Les exemples y incluent des exposants irrationnels mais (et peut-être parce que), finalement, les fonctions exponentielles y ont un côté « désincarné » :

- Les élèves ne tracent pas eux-mêmes de courbe. D'ailleurs, s'ils avaient à le faire, certains se poseraient peut-être des questions sur l'unicité du prolongement à partir des points de coordonnées $(n; q^n)$ pour $\in \mathbb{Z}$.
- Les élèves n'entrevoient pas la façon dont le calcul numérique avec des exposants différents de demi entiers pourrait se faire ou du moins être approché. Mais alors que fait donc la calculatrice ?
- Les fonctions exponentielles ne s'intègrent pas dans une situation, qu'elle soit intra ou extra-mathématique. Les abscisses des points sont considérées directement dans $\mathbb{R}$ après $\mathbb{Z}$, en se basant sur le fait qu'on peut lire l'ordonnée de n'importe quel nombre sur l'axe des abscisses : nul besoin de passer par des intermédiaires décimaux, rationnels. Pourtant, ils donnent de la substance à tout ce qu'il y a entre deux entiers.
-

Ce ne peut qu'amplifier l'attitude vis-à-vis des mathématiques, courante chez les élèves, notamment en filières ES et L, du type « il n'y a rien à comprendre, j'apprends par cœur et j'applique ». La calculatrice apparait comme une boîte noire.

Annexe 13 : Analyse des réponses des élèves de Terminale ES au questionnaire sur les fonctions exponentielles

i. Question A 1

1. $5^{0,25} > 1$ □ Vrai □ Faux

Justification :

Analyse *a priori* de la question A 1 :

La propriété de croissance de la fonction exponentielle de base 5, dans le programme de Terminale ES de 2012 en vigueur en 2016, est induite par la croissance de la suite géométrique de raison 5 et de premier terme 1. Les élèves étudient cette propriété en classe de Première dans le cadre des suites, elle est reprise en début de classe de Terminale.

Cette question a pour but de vérifier si les élèves ont effectivement étendu cette propriété à la fonction exponentielle de base 5. Pour répondre correctement à la question, ils ont aussi besoin de savoir que $5^0 = 1$ ou de façon équivalente que la courbe représentative de cette fonction exponentielle passe (comme toutes les autres) par le point de coordonnées (0 ;1).

Une difficulté de cette question est que l'exposant est strictement compris entre 0 et 1 et que par conséquent les élèves peuvent plus difficilement s'appuyer sur une procédure numérique.

Examinons les procédures correctes ou partielles :

« $5^0 = 1$. Or 0,25>0 et la fonction exponentielle de base 5 est strictement croissante puisque 5>1. D'où $5^{0,25} > 1$ est vrai. »

Les élèves ont été entrainés à résoudre des inéquations du type $5^x > 1$ en utilisant les arguments ci-dessus. Cette procédure est donc disponible. Cependant, elle demande des adaptations : un changement de cadre (d'algébrique à numérique) ; et la tâche même est différente puisque la question n'est pas de résoudre une inéquation mais de comparer deux nombres, tâche à laquelle ces élèves sont peu entraînés. Cette procédure n'est donc pas mobilisable.

Il se peut que les élèves justifient leur réponse par le seul argument « 5>1 ». Il est alors difficile de savoir s'ils mobilisent la croissance de la fonction exponentielle de base 5 ou pas.

S'ils justifient par le seul argument que cette fonction est croissante, on peut légitimement penser que le reste de la justification est simplement passé sous silence.

Une variante de cette procédure est : « $0<0,25<1$. Or la fonction exponentielle de base 5 est strictement croissante. Donc $5^0<5^{0,25}<5^1$. Comme $5^0 = 1$, l'affirmation est vraie ». L'argument de croissance de la fonction peut être d'autant plus facilement omis que les valeurs de 5^0 et de 5^1 (respectivement 1 et 5) sont reconnues par les élèves. Cette reconnaissance est peut-être l'adaptation qui pourrait freiner l'utilisation de cette procédure par les élèves. Un autre frein étant, comme nous l'avons écrit plus haut, que les comparaisons sont peu travaillées en filière ES.

Les procédures erronées :

Les élèves peuvent multiplier l'exposant et la base : $5 \times 0,25 = 1,25$. Et répondre que l'affirmation est vraie.

Ils peuvent inverser la propriété sur les sens de variation entre base et exposant : $0<0,25<1$ donc « la fonction » (laquelle exactement ?) est décroissante donc l'affirmation serait fausse.

Ils peuvent s'appuyer sur le fait que l'exposant est proche de 0 pour conclure que l'affirmation est fausse (soit parce que le résultat serait par conséquent proche de 0, soit pour la raison qui précède).

Analyse *a posteriori* de la question A 1 :
25% des élèves répondent « vrai » en justifiant de façon soit correcte, soit partielle tout en comportant un argument de croissance. 16% répondent « vrai » en justifiant seulement par le fait que 5>1. Donc 41% de réponses sont justes et au moins partiellement argumentées.

Deux élèves répondent « vrai » en tâchant de justifier leur réponse dans le cadre numérique : « $\sqrt{\sqrt{5}} > \sqrt{2{,}5} > 1$ » pour l'un ; « $5^{0{,}25} \approx 1{,}3333 > 1$ » pour l'autre. Bien que l'intermédiaire $\sqrt{2{,}5}$ ainsi que la valeur approchée 1,3333 soient faux, ces élèves font preuve d'initiatives intéressantes. Rappelons que les élèves de Terminale ES ont très peu de connaissances sur les nombres : ils sont bien souvent encouragés par les enseignants à utiliser leur calculatrice à tout moment pour pouvoir se concentrer sur les nouvelles connaissances et tâches pendant les cours, et pour ne pas perdre de points à cause d'erreurs de calcul en contrôle.

12,5% des élèves n'ont pas justifié leur réponse**.** Ceci rend compte de la difficulté de cette question pour les élèves.
Seulement 6% (soit deux élèves) répondent « faux » et ont multiplié la base et l'exposant.
16% répondent « faux » et ont argumenté sur le fait que l'exposant est inférieur à 1.

Les autres élèves, soit 21%, ont justifié de façons différentes et uniques : « vrai car 5>0 » ; « faux car $5^{0,25}$ = -20 » ; « faux car $5^{0,25} = \frac{1}{5^{0,25}} < 1$ » ; « faux car 0,25<5 » ; « vrai car $5^{0,25} = 5^{0,5} > 1$ ». Enfin, l'un d'eux a écrit une justification incompréhensible.

ii. Question A 2



Analyse *a priori* de la question A 2 :
La propriété de décroissance de la fonction exponentielles de base 0,3, dans le programme de Terminale ES de 2012 en vigueur en 2016, est induite par la décroissance de la suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme 1. Les élèves étudient cette propriété en classe de Première dans le cadre des suites, elle est reprise en début de classe de Terminale.
De même que pour la question précédente, cette question a pour but de vérifier si les élèves ont effectivement étendu la décroissance de la suite à celle de la fonction exponentielle de base 0,3. Pour répondre correctement à la question, ils ont aussi besoin de savoir que $0{,}3^0 = 1$ ou de façon équivalente que la courbe représentative de cette fonction exponentielle passe (comme toutes les autres) par le point de coordonnées (0 ;1).

Les procédures correctes ou partielles :
« $0{,}3^0 = 1$. Or 10,9>0 et la fonction exponentielle de base 0,3 est strictement décroissante puisque 0<0,3<1. D'où $0{,}3^{10{,}9} > 1$ est faux. »
De même que pour la question précédente, les élèves ont été entrainés à résoudre des inéquations du type $0{,}3^x > 1$ en utilisant les arguments ci-dessus. Cette procédure est donc disponible. Cependant, elle demande des adaptations : un changement de cadre (d'algébrique à numérique) ; et la tâche même

est différente puisque la question n'est pas de résoudre une inéquation mais de comparer deux nombres. Cette procédure n'est donc pas mobilisable.
Il se peut que les élèves justifient leur réponse par le seul argument $0<0,3<1$. Il est alors difficile de savoir s'ils mobilisent la décroissance de la fonction exponentielle de base 0,3.
S'ils justifient par le seul argument que cette fonction est décroissante, on peut légitimement penser que le reste de la justification est simplement passé sous silence.

Une procédure peut consister à encadrer l'exposant par deux entiers consécutifs : « $10<10,9<11$. Or la fonction exponentielle de base 0,3 est strictement décroissante. Donc $0,3^{10}>0,3^{10,9}>0,3^{11}$. Comme $0,3^{10}$ est inférieur à 0,3 pour la même raison, l'affirmation est fausse ». L'argument de décroissance de la fonction peut être remplacé par un argument moins rigoureux, du type : « quand on multiplie par 0,3, le résultat devient plus petit ». Celui de « $0,3^{10}$ est inférieur à 0,3 » par « $0,3^{10}$ est très proche de 0 ».
Rappelons que les comparaisons de nombres sont peu travaillées en filière ES et que ces procédures ne sont donc pas mobilisables par ces élèves.

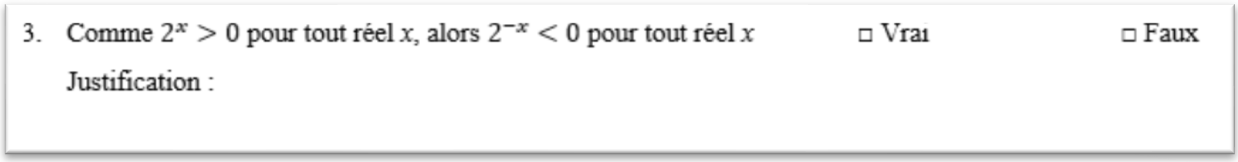
Les procédures erronées :
Les élèves peuvent multiplier l'exposant et la base : $0,3\times10,9=3,27$ (ou $0,3\times10,9\approx3$ ou encore $0,3\times10=3$). Et répondre que l'affirmation est vraie.
Ils peuvent inverser la propriété sur les sens de variation entre base et exposant : $10,9>1$ donc « la fonction » (laquelle exactement ?) est croissante donc l'affirmation serait vraie.
Ils peuvent s'appuyer sur le fait que l'exposant est « grand » pour conclure que l'affirmation est vraie par une propriété erronée telle que « un nombre élevé à un grand exposant est grand ».

Analyse *a posteriori* de la question A 2 :
13% des élèves répondent « faux » en justifiant de façon soit correcte, soit partielle mais comportant un argument de décroissance. 19% répondent « faux » en justifiant seulement par le fait que $0<0,3<1$ ou encore $0,3<1$. Enfin, 28% répondent « faux » avec un argument du type « multiplier par 0,3 rend plus petit ». Au total, 60% des élèves répondent correctement en argumentant de façon au moins partielle.

Seuls 6% des élèves (soit deux élèves) n'ont pas justifié leur réponse. L'un a répondu « vrai » et l'autre « faux ».
Seulement 3% (soit un élève) répondent « vrai » et ont multiplié la base et une valeur approchée de l'exposant (10).
25% ont argumenté sur le fait que l'exposant est « grand ».

Les autres élèves, soit 6%, ont justifié de façons différentes et uniques : « faux car $0,3^{10}$ est positif et pas forcément supérieur à 1» ; « faux car $0,3<0$ » sans doute une confusion avec « $0,3<1$ ».

iii. Question A 3


3. Comme $2^x > 0$ pour tout réel x, alors $2^{-x} < 0$ pour tout réel x □ Vrai □ Faux
Justification :

Analyse *a priori* de la question A 3 :

Les élèves de Terminale ES n'étudient pas le raisonnement logique comme le font leurs congénères de filière S ; par conséquent, leurs justifications devraient porter sur la véracité ou non de l'affirmation « $2^{-x} < 0$ pour tout réel x » davantage que sur le lien logique entre « $2^x > 0$ pour tout réel *x* » et « $2^{-x} < 0$ pour tout réel x ».
Par ailleurs, une erreur classique pour ces élèves est de considérer que x est positif et que $-x$ est négatif, à cause du signe « - »…

Les procédures correctes ou partielles :
Les élèves peuvent répondre que cette affirmation est fausse en justifiant de plusieurs manières :

- D'abord en utilisant la propriété énoncée en cours : les fonctions exponentielles sont strictement positives. Ils l'utilisent à répétition pour chercher le signe de la dérivée de fonctions comportant une exponentielle de base *e* ; cette propriété est cependant peu sollicitée ce qui concerne d'autres fonctions exponentielles.
- Ils peuvent aussi écrire que « $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ pour tout réel x ». Et comme $2^x > 0$ pour tout réel x, $2^{-x} > 0$ pour tout réel x. La propriété « $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ pour tout réel x » fait partie des propriétés du cours de Terminale ES ; c'est une extension dans le monde du continu de celle qu'ils ont rencontrée avec des exposants entiers dès le collège.
- Ils peuvent aussi fournir un contre-exemple. Ils ont revu en début d'année scolaire que pour montrer qu'une suite n'est pas monotone, il suffit d'exhiber un contre-exemple. Le contre-exemple est donc disponible, mais demande une double adaptation : le contexte mathématique est différent (les suites/les fonctions) et le type de tâche aussi (montrer qu'une suite n'est pas croissante ou n'est pas décroissante / montrer qu'une exponentielle de base 2 n'est pas strictement négative). Dans le cas où les élèves exhiberaient un contre-exemple, ils utiliseraient certainement un exposant entier et resteraient dans le monde discret.
- Ils peuvent enfin repérer que le « piège » qui leur est tendu est d'utiliser la règle des signes pour la multiplication ou la division de nombres relatifs et répondre qu'il ne s'agit pas là d'un produit ou d'un quotient.

Les procédures erronées :
Les élèves peuvent répondre que l'affirmation est fausse car $2^{-x} < 0$ n'est vrai que pour tout réel x positif. Ces élèves ne font par l'erreur de considérer que $-x$ est négatif, à cause du signe « - ». Par contre, ils appliquent de façon erronée une extension de la règle des signes.
Malgré le rappel en début de l'énoncé : « $2^x > 0$ pour tout réel x », ils peuvent répondre que l'affirmation est vraie :

- Ils peuvent justifier par une règle des signes qui serait étendue à l'exponentiation, avec l'erreur de considérer que $-x$ est négatif, à cause du signe « - ».
- Ils peuvent aussi exhiber un exemple qui aurait valeur de généricité, qui sera faux.

Analyse *a posteriori* de la question A 3 :
Pour ce qui sont des réponses correctes – i.e. l'affirmation est fausse – argumentées de façon correcte ou partiellement correcte :

- 9% des élèves justifient par un argument de positivité des fonctions exponentielles.
- 3% (soit un élève) répond que l'affirmation est fausse car 2 est positif. Cet élève semble raisonner correctement sur l'exponentiation, peut-être seulement avec des exposants entiers donc en termes de suites.
- 6% justifient par un argument du type : $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$.

- 6% fournissent un contre-exemple correct.
- 3% (soit un élève) répondent qu'« ici on ne divise pas par un chiffre négatif ».

Au total, 27% des élèves répondent correctement en argumentant de façon correcte ou partiellement correcte.

Tous les élèves répondent au vrai/faux, mais 12,5% d'entre eux ne justifient pas. Cela rend probablement compte des difficultés que soulève cette question pour les élèves.

9% des élèves répondent que l'affirmation est fausse en fournissant un argument du type « $2^{-x} < 0$ n'est vrai que pour tout réel x positif ».
3% des élèves répondent que l'affirmation est fausse en fournissant un contre-exemple faux en ce sens que l'élève utilise le fait que 2^{-2}=-4.
44% des élèves répondent que l'affirmation est vraie. Parmi eux, 22% justifient par le fait que 2 à un exposant négatif serait négatif. 12,5% justifient explicitement par une règle des signes.
Donc au total, 46,5% des élèves étendent de façon erronée la règle des signes à l'exponentiation.

Parmi les élèves qui répondent que l'affirmation est vraie :
- 3% disent que 2^{-x} n'existe pas ;
- 3% disent que « la dérivée de que 2^{-x} est -2^{-x} ;
- 6% donnent un argument incompréhensible ;
- 6% ne justifient pas leur réponse.

iv. Question A 4

4. La fonction $x \to 0{,}5^x$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ □ Vrai □ Faux

   Justification :

Analyse *a priori* de la question A 4 :
Les justifications de la réponse correcte « faux » peuvent être les suivantes :
- Les élèves peuvent exhiber un contre-exemple. Comme nous l'avons vu plus haut, cette procédure demanderait une adaptation puisque le contexte mathématique est celui des fonctions dans la question A 4.
- Les élèves peuvent utiliser le résultat de cours concernant le sens de variation des fonctions exponentielles : la base de la fonction est strictement comprise entre 0 et 1. La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Il se peut qu'ils n'écrivent que « 0<0,5<1 » ou même « 0,5<1 ».

Les justifications de la réponse incorrecte « vrai » peuvent être les suivantes :
- « Car la fonction est positive ». En effet, les élèves confondent souvent croissance et positivité. Un critère erroné de positivité peut être que x est positif.
- « Car les fonctions exponentielles sont strictement croissantes » : les élèves côtoient essentiellement la fonction exponentielle de base *e* qui est strictement croissante et pourraient occulter l'autre cas.

Analyse *a posteriori* de la question A 4 :
Examinons les réponses correctes assorties de justifications correctes ou partielles :

3% des élèves, soit un élève, justifient par un contre-exemple.
37,5% des élèves justifient en remarquant que 0<0,5<1 et/ou que la fonction exponentielle de base 0,5 est strictement décroissante.
6% des élèves justifient par le fait que $0,5^2=0,25$. On peut y détecter un contre-exemple. Une démarche empruntée à l'étude de la monotonie des suites ?

Examinons les réponses incorrectes :
3% des élèves (soit un élève) ne répond pas au vrai/faux. 12,5% des élèves ne justifient pas leur réponse.
16% des élèves confondent manifestement croissance et positivité. 3% (soit un élève) argumente du fait que x est positif ou nul ; il est probable que l'élève applique une règle des signes erronée d'autant plus que c'est ce qu'il a fait dans les autres questions. Au total, 19% des élèves répondent en confondant croissance et positivité.
3% des élèves (soit un élève) répondent que la fonction est croissante puisque x>1. Une confusion entre base et exposant… doublée du fait que les nombres positifs « commenceraient » à 1 ?
6% des élèves argumentent de la croissance de la fonction par le fait que la base est positive. L'un des deux avait pourtant bien marqué, à la question A 2, que « $0,3^{10,9}$>1 » est faux puisque multiplier par 0,3 donne un nombre plus petit. 3% des élèves justifient par le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante. Au total, 9% des élèves ne distinguent pas les deux types de monotonie des fonctions exponentielles en fonction de leur base, qui pourtant sont une extension de la monotonie des suites géométriques de raison strictement positive.
3% des élèves justifient par le fait que $f'(x) = 0,5$. Une confusion avec la fonction $x \to 0,5x$. Une conséquence d'une conception de l'exposant comme une multiplication qui n'est pourtant pas confirmée dans les autres questions.
6% des élèves justifient par le fait que cela dépend du signe de x. Il est difficile de savoir si l'élève applique une règle des signes erronée ou s'il confond avec autre chose, par exemple les fonctions $x \to e^{-kx^2}$ étudiées en cours.

v. Question A 5

5. La fonction $x \to 0,5^x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ □ Vrai □ Faux

Justification :

Analyse *a priori* de la question A 5 :
La réponse correcte « vrai » peut être justifiée en utilisant le résultat de cours : « les fonctions exponentielles sont strictement positives sur $\mathbb{R}$. »

Les élèves peuvent répondre « faux » en justifiant de différentes manières :

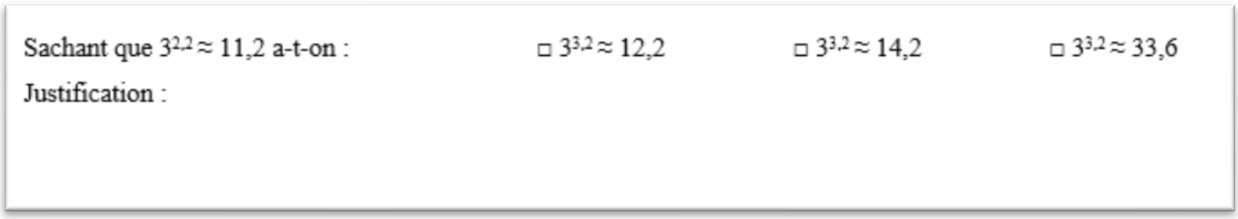
- En exhibant un contre-exemple faux, comportant un exposant négatif et une utilisation erronée de la règle des signes ;
- En écrivant que cela dépend du signe de x (ce qui sous-entend une utilisation erronée de la règle des signes aussi) ;
- De même que pour la question A4, les élèves peuvent confondre croissance et positivité.

Analyse *a posteriori* de la question A 5 :

Examinons les réponses correctes « vrai » assorties de justifications correctes ou partielles :
28% des élèves justifient en remarquant qu'il s'agit d'une fonction exponentielle, ou expliquent que la fonction décroit tout en restant positive.
6% des élèves justifient par le fait que 0,5>0. Ces élèves raisonneraient-ils en termes de suite géométrique ?
3% des élèves, soit un élève, justifient par « $0 < 0{,}5^x < 1$ ». Cet élève ne semble considérer que les exposants positifs ; le prolongement de la suite géométrique de terme général $0{,}5^n$ à la fonction exponentielle de base 0,5 définie pour les réels négatifs n'est peut-être pas conceptualisé par cet élève.

Les réponses incorrectes :
3% des élèves (soit un élève) ne répond pas au vrai/faux. 16% des élèves ne justifient pas leur réponse.
6% des élèves confondent manifestement croissance et positivité.
6% des élèves répondent « faux » en justifiant par le fait que cela dépendrait de si $x > 1$ ou si $x < 1$. Ces élèves font une double confusion : entre base et exposant, entre croissance et positivité.
28% répondent « faux » en argumentant autour du fait que si x est négatif, alors $0{,}5^x$ est négatif.
3% soit un élève, répondent « vrai car $\mathbb{R}$ ne comprend que les positifs ». Il s'agit certainement une confusion entre $\mathbb{R}$ et l'ensemble des entiers naturel.
Au total, 31% des élèves appliquent une règle des signes erronée.
Reste un élève qui répond « faux car cela dépend de si x>0,5 ou pas ».

vi. Question B



Analyse *a priori* de la question B :
Cette question se situe dans le cadre numérique.
La réponse « $3^{3,2} \approx 12{,}2$ » pourrait être choisie si les élèves répercutent l'incrément de 1 sur l'exposant en un incrément de 1 à la réponse.
La réponse « $3^{3,2} \approx 14{,}2$ » peut être choisie si les élèves répercutent l'incrément de 1 sur l'exposant en un incrément de 3 (égal à la base) à la réponse.
La réponse « $3^{3,2} \approx 33{,}6$ » peut être choisie si les élèves répercutent l'incrément de 1 sur l'exposant en une multiplication par 3 à la réponse. Cette procédure montre une bonne appropriation de l'extension de la propriété $a^n \times a^p = a^{n+p}$ aux exposants non entiers.
Une autre procédure peut être de calculer 3^3 qui est égal à 27, puis de constater que la seule valeur proposée supérieure à 27 si l'élève raisonne en termes de comparaison - ou la valeur la plus proche de 27 qui est proposée si l'élève raisonne en termes de valeur approchée - est 33,6.

Analyse *a posteriori* de la question B :
81% des élèves répondent que « $3^{3,2} \approx 33{,}6$ », 3% répond que « $3^{3,2} \approx 12{,}2$ », 16% répondent que « $3^{3,2} \approx 14{,}2$ » et 3% ne répondent pas.

L'élève qui répond que « $3^{3,2} \approx 12{,}2$ » justifie par le fait que 3×3=9 et 9+3,2=12,2. L'élève a essayé de reconstituer une suite de calculs utilisant les chiffres en présence et menant à 12,2. Au détriment du sens de l'exponentiation.

Parmi ceux qui répondent que « $3^{3,2} \approx 14,2$ », deux ne justifient pas, un justifie par le fait que $3^3=27$ (pourquoi n'est-il pas allé au bout du raisonnement ?), un autre que $3^3 =12$ (erreur de calcul) et un dernier par le fait qu'on multiplie par 3,2 (confusion entre exponentiation et multiplication).

Parmi ceux qui répondent correctement, 50% justifient par le fait que $3^3=27$. Et 13% justifient par le fait que le résultat est multiplié par 3. Ces derniers ne confondent pas exponentiation et multiplication alors qu'ils le font dans le cadre algébrique ! Au total, 63% des élèves répondent correctement en justifiant correctement leur réponse.

vii. Question C

C. Calculer : $\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ $\qquad\qquad$ $4^{\frac{1}{2}} =$

Analyse *a priori* de la question C :

Elle se place dans le cadre numérique.

Un des buts de cette question est d'identifier comment les élèves gèrent l'interversion entre base et exposant. Un autre est de voir si les élèves donnent un sens à l'expression numérique $4^{\frac{1}{2}}$, sachant que l'exposant un-demi a été travaillé dans les cadres algébrique et numérique. En effet, l'égalité $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ pour tout nombre réel q strictement positif a été vue en cours et mobilisée à plusieurs reprises dans les exercices.

$\left(\frac{1}{2}\right)^4$ risque d'être calculé par le produit de $\frac{1}{2}$ et de 4, soit 2.

Il se peut que certains élèves arrivent à écrire $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ sans arriver à effectuer le produit. Leur réponse sera considérée comme correcte.

Pour $4^{\frac{1}{2}}$: les réponses $\sqrt{4}$ et 2 seront considérées comme correctes. Néanmoins, si la réponse est 2 sans calcul intermédiaire, il est difficile de savoir si l'élève a procédé de façon correcte ou s'il a procédé par multiplication par l'exposant.

Analyse *a posteriori* de la question C :

78% des élèves répondent correctement au calcul de $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

3% des élèves (soit un élève) ne répondent pas.

19% répondent faux. Les réponses sont très variées et pour la plupart inattendues :

3% répondent 4, 6% répondent 2.

3% répondent 0,0125 (qui est égal à 0,5 : 4 avec une erreur de décalage de virgule). Cet élève avait dans la question A3 déjà une conception de l'exponentiation assez unique, de « division par l'exposant ».

3% répondent 2^0 et 3% répondent $1,75^2$.

Notons que deux élèves confondent systématiquement exponentiation et multiplication dans ce test, sauf dans cette question, qui est certainement plus proche de leurs connaissances anciennes.

66% des élèves répondent correctement au calcul de $4^{\frac{1}{2}}$.

13% des élèves ne répondent pas.

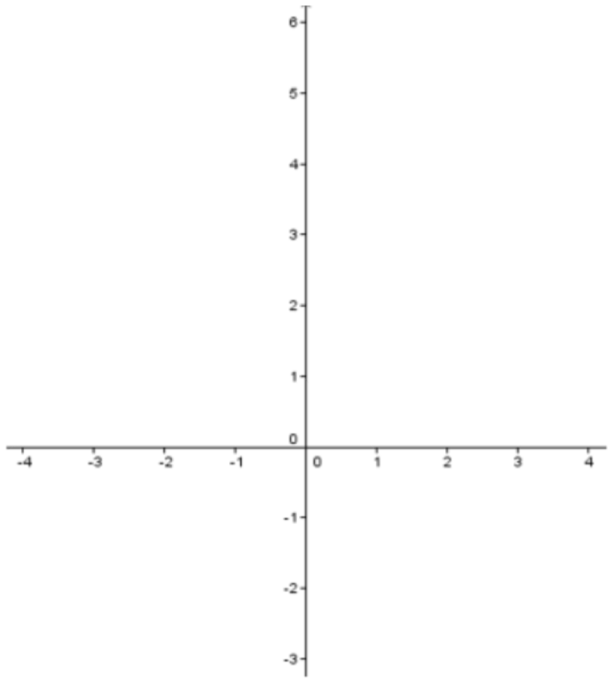
22% des élèves répondent faux. De même que précédemment, les réponses sont très variées et pour la plupart inattendues :

3% répondent $\frac{1}{16}$, et 3% répondent 4^{-2}.
3% répondent 3, 3% répondent -2, 3% répondent $\frac{5}{3}$, 3% répondent 3,5 et 3% répondent « $4^{0,25}$ donc entre 1 et 2 ».

Le taux de réponses correctes est élevé.
Cependant, dans chaque sous question, environ un élève sur cinq applique une procédure erronée, de façon presque individuelle.
Remarquons la quasi-absence de procédures multiplicatives dans la première partie de la question.

viii. Question D

D. En vert, donner l'allure de la fonction $x \to 0{,}25^x$ et en rouge celle de la fonction $x \to e^x$



Analyse *a priori* :
La question se situe dans le cadre graphique.
La tâche demandée aux élèves est inhabituelle pour eux. La présence de logiciels traceurs (le plus souvent GeoGebra sur ordinateur, le traceur de leur calculatrice graphique) la rend même obsolète du point de vue des programmes.

Les questions qui se posent sont :

- Les élèves tracent-ils des courbes qui respectent le sens de variation de ces deux fonctions ? Font-ils bien la différence entre les deux sens de variation ?
- Les courbes passent-elles par le point de coordonnées (0 ;1) ? Passent-elles par le point de coordonnées (0 ;0) ? Si l'élève trace une courbe qui ne passe pas par le point de coordonnées (0 ;1), il se peut qu'il n'ait retenu que l'allure grossière de la courbe. S'il trace une courbe qui passe par l'origine, l'allure de la courbe est fausse ; de plus, soit cela révèle une conception erronée de l'exponentiation remplacée par une multiplication, soit l'élève ne transfère pas sa connaissance de l'exponentiation par 0 dans les cadres numérique et algébrique au cadre graphique.
- L'asymptote horizontale est-elle respectée (au voisinage de $+\infty$ pour la courbe de $x \to 0{,}25^x$, au voisinage de $-\infty$ pour la courbe de $x \to e^x$) ?

- La branche infinie (au voisinage de $-\infty$ pour la courbe de $\rightarrow 0{,}25^x$, au voisinage de $+\infty$ pour la courbe de $x \rightarrow e^x$) est-elle présente de façon correcte ?
- La courbe se trouve-t-elle bien au-dessus de l'axe des abscisses ? la question se pose en rapport avec les questions sur la positivité des fonctions exponentielles (questions A 3 et A 5).
- La prédominance des droites et des paraboles dans le programme en classes de Seconde et de Première ES devrait avoir pour conséquence que certains élèves tracent une droite ou une parabole, malgré le travail fait au moment de l'introduction aux fonctions exponentielles qui disqualifiait ce type de fonction. Qu'en est-il ?
- Enfin, les élèves tracent-ils une courbe pour des valeurs de x exclusivement positives ? Dans ce cas, le prolongement des suites géométriques aux fonctions exponentielles ne s'est pas fait pour des valeurs d'exposants négatifs.

Analyse *a posteriori* de la question D :
Concernant la fonction $x \rightarrow 0{,}25^x$:
22% des élèves ne tracent pas cette courbe.
38% des élèves font une courbe qui correspond à une fonction décroissante. 38% font une courbe dont l'axe des abscisses est une asymptote au voisinage de $+\infty$. Ce sont les mêmes élèves pour les trois quarts d'entre eux.
19% tracent une courbe qui passe par le point de coordonnées (0 ;1).
16% des élèves tracent une courbe qui passe par l'origine.
41% des élèves tracent une courbe ayant une branche infinie correcte au voisinage de $-\infty$.
25% des élèves tracent une courbe dont une partie est sous l'axe des abscisses.
6% tracent une droite et 9% une parabole « tournée vers le haut ».
6% des élèves tracent une courbe uniquement pour des valeurs de x positives, soit environ un élève sur 10 parmi ceux qui ont tracé une courbe.

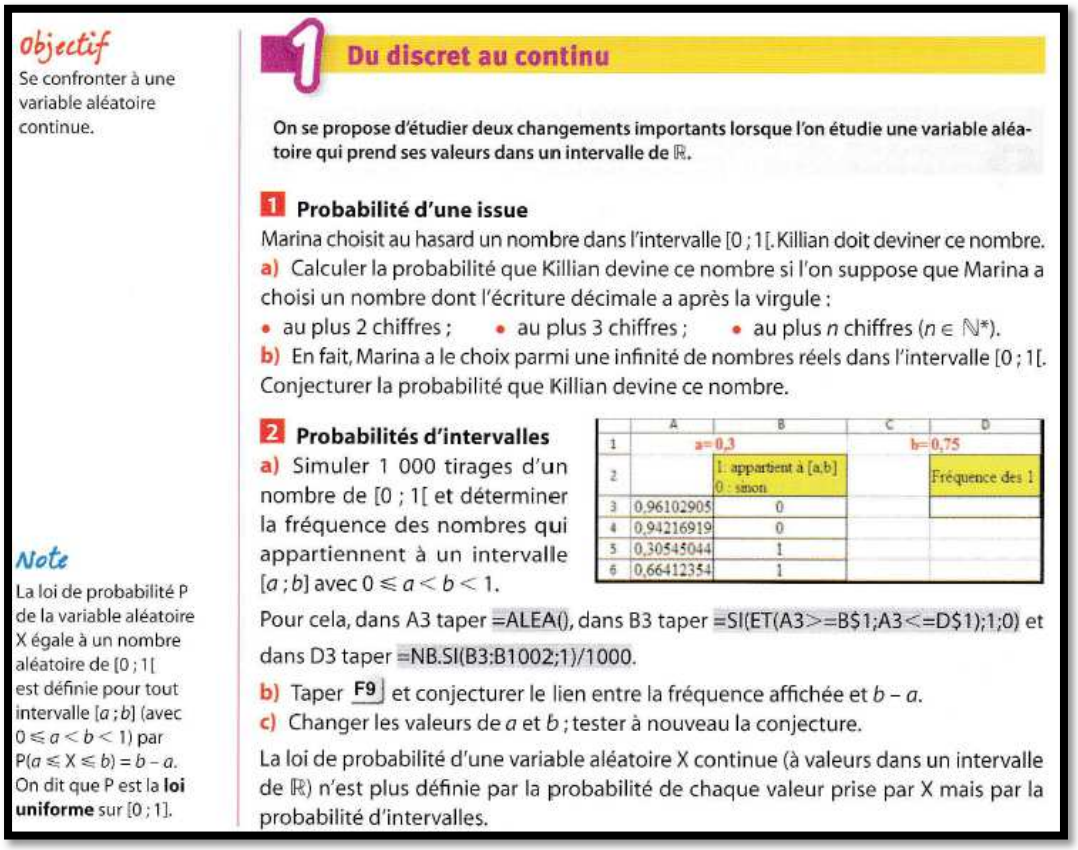
Concernant la fonction $x \rightarrow e^x$:
13% des élèves ne tracent pas cette courbe.
72% des élèves font une courbe qui correspond à une fonction croissante. 63% font une courbe dont l'axe des abscisses est une asymptote au voisinage de $-\infty$. Ce sont les mêmes élèves pour un peu plus de la moitié de ceux qui ont le bon sens de variation.
31% tracent une courbe qui passe par le point de coordonnées (0 ;1).
16% des élèves tracent une courbe qui passe par l'origine. Pour près des deux tiers, ce sont les mêmes élèves que ceux qui l'ont fait pour la première fonction.
62,5% des élèves tracent une courbe ayant une branche infinie correcte au voisinage de $+\infty$.
16% des élèves tracent une courbe dont une partie est sous l'axe des abscisses.
13% tracent une droite et 13% une parabole « tournée vers le haut ».
16% des élèves tracent une courbe uniquement pour des valeurs de x positives soit environ un élève sur cinq parmi ceux qui ont tracé une courbe.

La courbe de la fonction exponentielle est donc plus connue que celle de la fonction $x \rightarrow 0{,}25^x$ des points de vue : du sens de variation, du comportement asymptotique, du point fixe de coordonnées (0 ;1), de la positivité.
Cependant, davantage d'élèves la représentent par une droite ou une parabole. Et, en proportion, deux fois plus d'élèves ne la tracent que sur $[0; +\infty[$.

Annexe 14 : Analyse de l'introduction aux probabilités continues de quatre manuels de Terminale S

a) Manuel Hyperbole, Nathan, édition de 2012

Parmi les quatre manuels, le seul qui introduit les lois à densité via la loi uniforme et par la génération d'un « nombre aléatoire » de $[0; 1[$ est le manuel Hyperbole, Nathan, édition de 2012. Il intitule son « activité » d'introduction : « *du discret au continu* ». Son préambule indique d'emblée que deux « *changements importants* » y sont étudiés (il s'agit de deux ruptures que nous avons déjà soulignées). En voici l'énoncé :



Objectif
Se confronter à une variable aléatoire continue.

1 Du discret au continu

On se propose d'étudier deux changements importants lorsque l'on étudie une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Probabilité d'une issue

Marina choisit au hasard un nombre dans l'intervalle [0 ; 1[. Killian doit deviner ce nombre.

a) Calculer la probabilité que Killian devine ce nombre si l'on suppose que Marina a choisi un nombre dont l'écriture décimale a après la virgule :

- au plus 2 chiffres ;
- au plus 3 chiffres ;
- au plus n chiffres ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) En fait, Marina a le choix parmi une infinité de nombres réels dans l'intervalle [0 ; 1[. Conjecturer la probabilité que Killian devine ce nombre.

2 Probabilités d'intervalles

a) Simuler 1 000 tirages d'un nombre de [0 ; 1[et déterminer la fréquence des nombres qui appartiennent à un intervalle $[a ; b]$ avec $0 \leqslant a < b < 1$.

	A	B	C	D
1	a=0,3		b=0,75	
2		1 : appartient à [a;b] 0 : sinon		Fréquence des 1
3	0,96102905	0		
4	0,94216919	0		
5	0,30545044	1		
6	0,66412354	1		

Pour cela, dans A3 taper =ALEA(), dans B3 taper =SI(ET(A3>=B$1;A3<=D$1);1;0) et dans D3 taper =NB.SI(B3:B1002;1)/1000.

b) Taper F9 et conjecturer le lien entre la fréquence affichée et $b - a$.

c) Changer les valeurs de a et b ; tester à nouveau la conjecture.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X continue (à valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$) n'est plus définie par la probabilité de chaque valeur prise par X mais par la probabilité d'intervalles.

Note
La loi de probabilité P de la variable aléatoire X égale à un nombre aléatoire de [0 ; 1[est définie pour tout intervalle $[a ; b]$ (avec $0 \leqslant a < b < 1$) par $P(a \leqslant X \leqslant b) = b - a$. On dit que P est la **loi uniforme** sur [0 ; 1].

Extrait du manuel Hyperbole, Nathan, édition de 2012 page 377

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire est, dès le départ, un intervalle ; cependant, l' « activité » restreint dans un premier temps l'univers des possibles aux sous-ensembles des décimaux à n décimales de $[0; 1[$ qui, eux, sont discrets car finis.

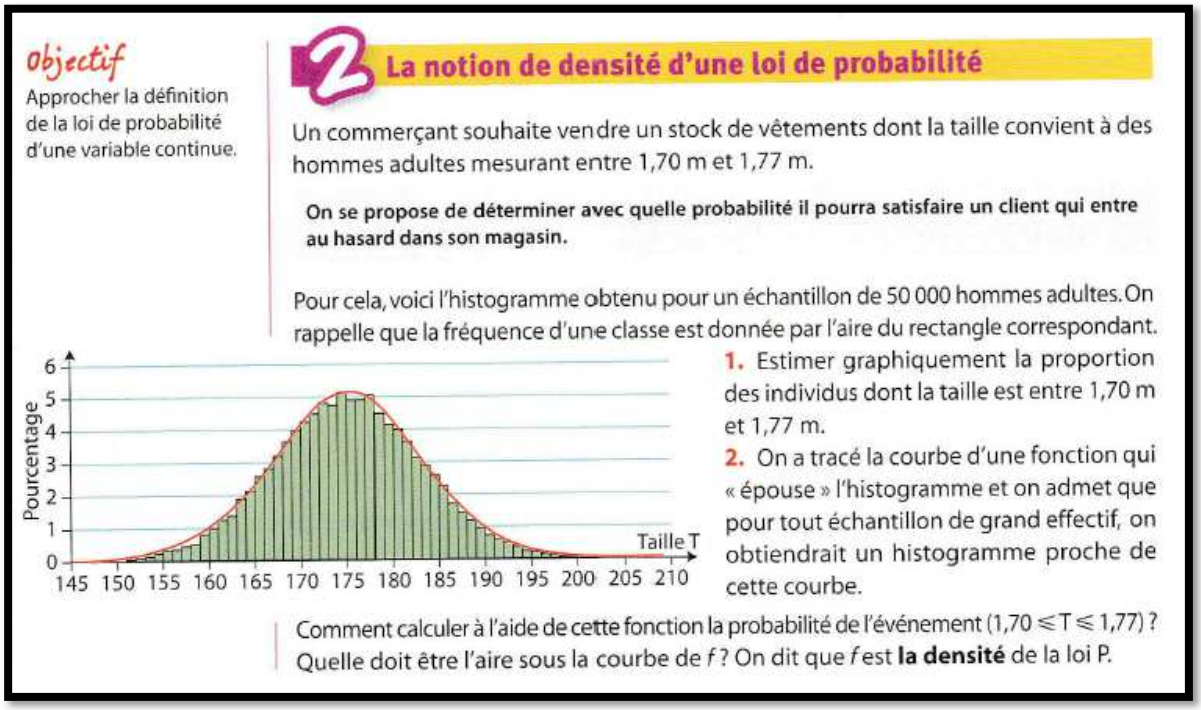
Le premier « *changement* » qui est visé est la propriété $P(X = a) = 0$ pour tout réel a. C'est l'objet de la questions 1. Dans la question 1.a), un nombre est choisi « *au hasard* » dans les ensembles finis des nombres décimaux de $[0; 1[$ à deux chiffres après la virgule, puis à trois chiffres, puis à n chiffres (où n est un entier strictement positif) après la virgule : le modèle d'équiprobabilité sur des ensembles finis est convoqué.

Puis la question b) invoque l'« *infinité des nombres réels dans l'intervalle* $[0; 1[$ » pour que les élèves conjecturent la propriété visée. Une analogie avec les cas de la question a), et un calcul de limite du type « $\frac{1}{\infty}$ » permettent la conjecture. Seule la propriété de l'infinité du nombre d'éléments des sous-ensembles continus de $\mathbb{R}$ que sont les intervalles, est utilisée.

Le deuxième « *changement* » est l'objet de la question 2. Pour le faire émerger, l'auteur du manuel demande de procéder à des simulations sur tableur de nombres de l'intervalle $[0; 1[$ – rappelons que le programme officiel les préconise. Cependant rien n'est dit sur les caractères aléatoire et équiprobable de ces tirages simulés, et sur le fait que les nombres qui résultent de l'instruction ALEA() sont des décimaux à 14 chiffres après la virgule.
Un calcul des fréquences des nombres appartenant à des intervalle $[a; b]$ où $0 \leq a < b < 1$ doit mener les élèves à conjecturer les *« probabilités d'intervalles* ».

L'énoncé se termine par : « *la loi de probabilité d'une variable continue X n'est plus définie par la probabilité de chaque valeur prise par X mais par la probabilité d'intervalles* » : une concaténation des deux « changements ».
Les auteurs de Vivier et al. (2017) estiment que les aspects techniques des simulations de la question 2 risquent de masquer leur objectif et que la conjecture visée est suffisamment naturelle pour les élèves pour ne pas nécessiter de simulations.

L' « activité » 2 de ce manuel annonce son objectif ainsi : « *Approcher la définition de la loi de probabilité d'une variable continue* ». Il s'agit d'y introduire la notion de fonction de densité :



objectif
Approcher la définition de la loi de probabilité d'une variable continue.

2 La notion de densité d'une loi de probabilité

Un commerçant souhaite vendre un stock de vêtements dont la taille convient à des hommes adultes mesurant entre 1,70 m et 1,77 m.

On se propose de déterminer avec quelle probabilité il pourra satisfaire un client qui entre au hasard dans son magasin.

Pour cela, voici l'histogramme obtenu pour un échantillon de 50 000 hommes adultes. On rappelle que la fréquence d'une classe est donnée par l'aire du rectangle correspondant.

1. Estimer graphiquement la proportion des individus dont la taille est entre 1,70 m et 1,77 m.

2. On a tracé la courbe d'une fonction qui « épouse » l'histogramme et on admet que pour tout échantillon de grand effectif, on obtiendrait un histogramme proche de cette courbe.

Comment calculer à l'aide de cette fonction la probabilité de l'événement $(1{,}70 \leqslant T \leqslant 1{,}77)$?
Quelle doit être l'aire sous la courbe de f ? On dit que f est **la densité** de la loi P.

Extrait du manuel Hyperbole, Nathan, édition de 2012, page 377

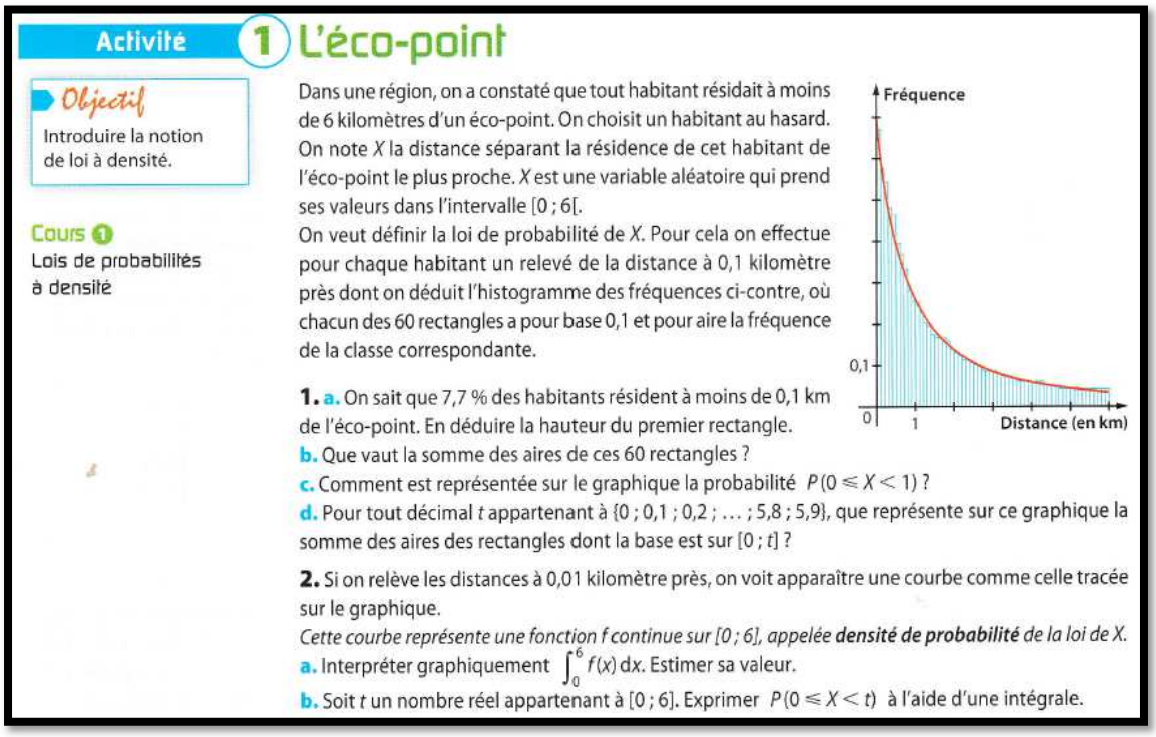
Cette « activité » se positionne comme une « Réponse À un Problème ». Elle évolue dans le registre graphique.
Un histogramme des tailles d'un échantillon de 50000 hommes est donné.
La variable « taille d'un individu » étant une longueur, elle peut théoriquement être considérée comme continue. Dans la vie courante, elle est discrétisée en centimètres. Bien que ce ne soit pas indiqué, l'axe des abscisses de cet histogramme est gradué en centimètres.
L'énoncé « *rappelle que la fréquence d'une classe est donnée par l'aire du rectangle correspondant* ». Le rappel est opportun, mais les classes sont d'amplitude 1 cm ; les valeurs en ordonnée sont donc à la fois des fréquences et des densités de fréquence. Il est indiqué que l'axe des ordonnées est celui des

« *pourcentages* », ce qui signifie généralement des fréquences. Alors que c'est celui des fréquences par cm. Il y a de quoi semer le trouble dans les esprits des élèves (et des enseignants s'ils ne sont pas avertis), et les éloigner du sens du mot « densité ». Remarquons que cette « activité » ne tente pas d'interroger la grandeur représentée sur l'axe des ordonnées.

La première question requiert une lecture graphique qui est mal aisée. Elle pourrait permettre de faire effectuer un calcul de fréquence par celui d'une aire « d'une partie d'histogramme » si le message n'était pas brouillé comme nous venons de le montrer : les classes étant d'amplitude 1, il suffit d'additionner des valeurs trouvées en ordonnées.
Puis il serait nécessaire d'introduire l'expérience aléatoire : « un homme pris au hasard entre dans le magasin ». Ainsi que la variable aléatoire T donnant sa taille en mètres. Ce qui n'est pas fait.
L'énoncé fait paraître la courbe qui « épouse » l'histogramme comme s'imposant et non comme résultant du choix d'un modèle. La fonction se nomme f, on le devine par la suite.
La question du calcul de la probabilité de l'événement $\{1{,}70 \leq \mathrm{T} \leq 1{,}77\}$ « *à l'aide de cette fonction* » dont on ne connait que la courbe a pour but d'amener les élèves à répondre en termes d'aire sous la courbe et donc d'intégrale.
Il y a confusion entre la variable aléatoire qui prend pour valeur la taille réelle (en cm) de l'homme qui entre dans le magasin et la variable aléatoire de densité f qui modélise l'expérience aléatoire.

b) Manuel Indice de Terminale S, Bordas, édition de 2012

Ce manuel propose une première « activité » d'introduction qui affiche le même objectif que l'« activité » 2 du manuel Hyperbole analysée ci-dessus : « *Introduire la notion de densité* ». Comme le manuel Hyperbole, celui-ci propose un exercice de type « Réponse À un Problème », faisant intervenir un histogramme. La variable choisie est aussi une longueur, ici une distance mesurée en km.



Activité 1 L'éco-point

Objectif
Introduire la notion de loi à densité.

Cours 1
Lois de probabilités à densité

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de 6 kilomètres d'un éco-point. On choisit un habitant au hasard. On note X la distance séparant la résidence de cet habitant de l'éco-point le plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;6[$.
On veut définir la loi de probabilité de X. Pour cela on effectue pour chaque habitant un relevé de la distance à 0,1 kilomètre près dont on déduit l'histogramme des fréquences ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.

1. a. On sait que 7,7 % des habitants résident à moins de 0,1 km de l'éco-point. En déduire la hauteur du premier rectangle.
b. Que vaut la somme des aires de ces 60 rectangles ?
c. Comment est représentée sur le graphique la probabilité $P(0 \leqslant X < 1)$?
d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0\,;0{,}1\,;0{,}2\,;\ldots\,;5{,}8\,;5{,}9\}$, que représente sur ce graphique la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0\,;t]$?

2. Si on relève les distances à 0,01 kilomètre près, on voit apparaître une courbe comme celle tracée sur le graphique.
Cette courbe représente une fonction f continue sur [0 ; 6], appelée ***densité de probabilité*** *de la loi de X.*
a. Interpréter graphiquement $\int_0^6 f(x)\,dx$. Estimer sa valeur.
b. Soit t un nombre réel appartenant à $[0\,;6]$. Exprimer $P(0 \leqslant X < t)$ à l'aide d'une intégrale.

Extrait du manuel Indice, Bordas, édition de 2012, page 322

Une différence majeure est que l'histogramme représente les données de la population dans son ensemble.

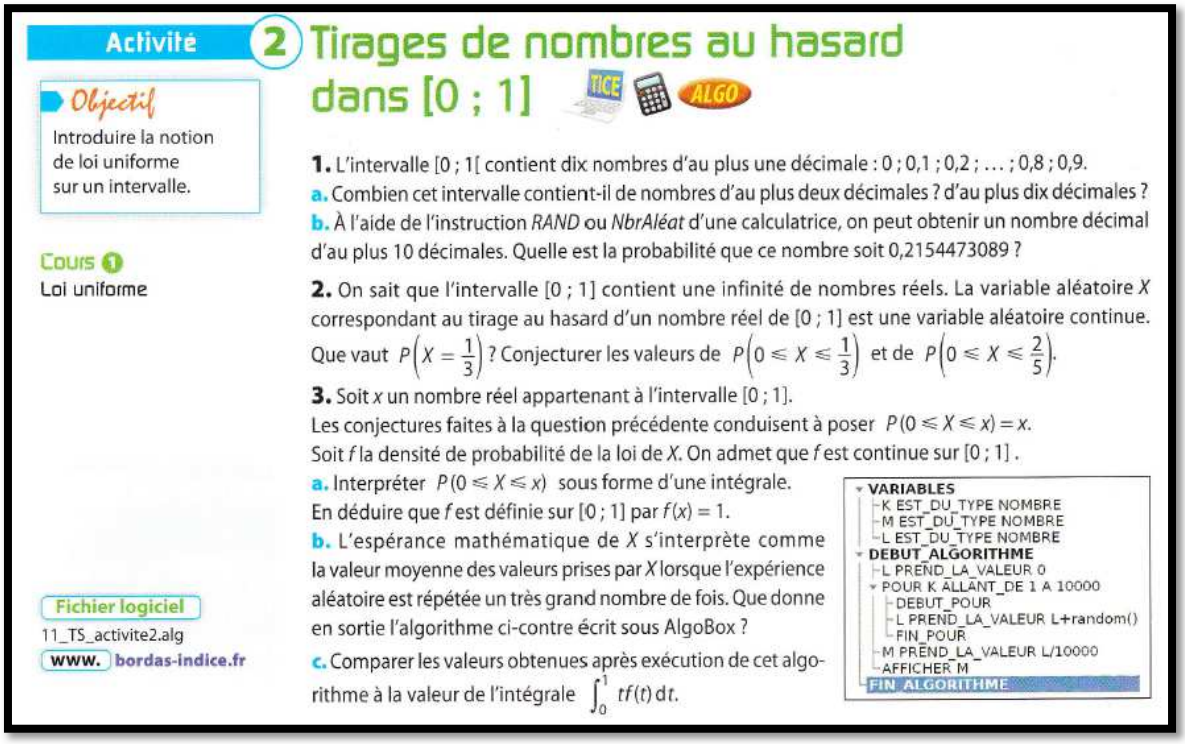
Une expérience aléatoire est décrite et une variable aléatoire définie, elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; 6[$.
Les distances sont relevées à 0,1 km près ; un regroupement par classes d'amplitude égales à 0,1 n'a donc pas de sens et une représentation par un histogramme dont les classes ont une amplitude égale à 0,1 n'a pas de sens non plus. Pour que ce regroupement puisse en avoir un, il aurait fallu des relevés d'une plus grande précision, à 0,01 près par exemple.
Par ailleurs, puisque l'histogramme représente des classes d'amplitudes différentes de 1, contrairement à ce qui est indiqué, les valeurs en ordonnée ne sont pas des fréquences mais des densités de fréquence. Il est pourtant rappelé que l'aire de chaque rectangle est la fréquence de la classe correspondante.

La première question mobilise ce rappel afin de calculer, connaissant la fréquence de la « première » classe, la hauteur du « premier » rectangle. Celle-ci est de 0,77 ; l'axe des ordonnées est donc convenablement gradué.
La suite de la question 1 a pour but d'associer les probabilités du type $P(0 \leq X < t)$ où t est un décimal de $[0; 6[$ à, au plus, une décimale aux sommes des aires des rectangles correspondants. Le modèle d'équiprobabilité est implicitement convoqué.
Remarquons le flou qui entoure ce qui se « joue » lorsque $X = t$: les intervalles mobilisés jusqu'à la question 1.d. sont tous semi-ouverts, du type $[0; t[$. Ce qui correspond aux usages en statistiques lorsque les données d'une variable dite « continue » sont regroupées par classes. Soudainement, à la question 1.d., l'intervalle est fermé.

Dans la deuxième question, les relevés sont discrétisés plus finement, à 0,01 km près.
Quelle que soit la finesse de la discrétisation, la population étant finie, les fréquences (associées par exemple à des intervalles du type $[0; t[$, $t \in [0; 6[$), prennent leurs valeurs dans un ensemble fini donc discret ; les données ne peuvent « *faire apparaitre* » qu'une fonction en escalier. L' « apparition » d'une courbe de fonction continue dont il est question n'est pas un « miracle », elle est le fruit d'une modélisation.
La probabilité $P(0 \leq X < t)$ où t est un réel de $[0; 6]$ est par conséquent approximée par l'intégrale $\int_0^t f(x)dx$; il n'y a pas égalité entre les deux. La variable aléatoire qui modélise la distance de l'habitant pris au hasard via le modèle d'équiprobabilité (question 1) est confondue avec celle qui modélise cette distance via la fonction de densité donnée par sa courbe (question 2).

Tout comme dans la question 1, soudainement, l'intervalle $[0; 6[$ est fermé dans la dernière question.
En tout état de cause, la propriété : « pour tout réel a, $P(\{X = a\}) = 0$ » n'est pas abordée. Elle aurait pu être conjecturée si les questions avaient porté sur des calculs de probabilité du type $P(a \leq X < b)$ où $[a; b] \subset [0; 6]$.
Le mot « densité » est marqué comme définissant la fonction dont la courbe est « apparue ». Il ne fait pas l'objet d'explications, que ce soit dans une « activité » ou dans l'exposition de connaissances.

La deuxième « activité » d'introduction de ce manuel a pour but d'introduire la loi uniforme sur $[0; 1[$, (ou sur $[0; 1]$, un certain flou subsiste) :



Activité 2 Tirages de nombres au hasard dans [0 ; 1]

Objectif
Introduire la notion de loi uniforme sur un intervalle.

Cours 1
Loi uniforme

Fichier logiciel
11_TS_activite2.alg
www. bordas-indice.fr

1. L'intervalle [0 ; 1[contient dix nombres d'au plus une décimale : 0 ; 0,1 ; 0,2 ; … ; 0,8 ; 0,9.
a. Combien cet intervalle contient-il de nombres d'au plus deux décimales ? d'au plus dix décimales ?
b. À l'aide de l'instruction *RAND* ou *NbrAléat* d'une calculatrice, on peut obtenir un nombre décimal d'au plus 10 décimales. Quelle est la probabilité que ce nombre soit 0,2154473089 ?

2. On sait que l'intervalle [0 ; 1] contient une infinité de nombres réels. La variable aléatoire X correspondant au tirage au hasard d'un nombre réel de [0 ; 1] est une variable aléatoire continue. Que vaut $P\left(X = \frac{1}{3}\right)$? Conjecturer les valeurs de $P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right)$ et de $P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{2}{5}\right)$.

3. Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].
Les conjectures faites à la question précédente conduisent à poser $P(0 \leqslant X \leqslant x) = x$.
Soit f la densité de probabilité de la loi de X. On admet que f est continue sur [0 ; 1].
a. Interpréter $P(0 \leqslant X \leqslant x)$ sous forme d'une intégrale.
En déduire que f est définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 1$.
b. L'espérance mathématique de X s'interprète comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois. Que donne en sortie l'algorithme ci-contre écrit sous AlgoBox ?
c. Comparer les valeurs obtenues après exécution de cet algorithme à la valeur de l'intégrale $\int_0^1 tf(t)\,dt$.

```
VARIABLES
  K EST_DU_TYPE NOMBRE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  L PREND_LA_VALEUR 0
  POUR K ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    L PREND_LA_VALEUR L+random()
    FIN_POUR
  M PREND_LA_VALEUR L/10000
  AFFICHER M
FIN_ALGORITHME
```

Extrait du manuel Indice, Bordas, édition de 2012, page 322

Conformément au programme officiel, cette « activité » est basée sur l'utilisation de l'instruction « nombre aléatoire », cette fois sur calculatrice. L'énoncé rappelle qu'ainsi « *on peut obtenir un nombre décimal d'au plus 10 décimales* ». Le caractère (pseudo)aléatoire de l'instruction n'est pas dit, l'auteur compte peut-être sur son nom - RAND ou NbrAléat – pour y suppléer. La probabilité qu'un nombre particulier soit généré est donc de 10^{-10}.
L'énoncé de la deuxième question souligne l'infinité des nombres réels de $[0; 1]$ afin que les élèves, préparés par le calcul de probabilité précédent, conjecturent que $P\left(\left\{X = \frac{1}{3}\right\}\right) = 0$. L'infinité du nombre de décimales de $\frac{1}{3}$ peut aussi servir d'argument. La propriété « pour tout réel $a \in [0; 1]$, $P(\{X = a\}) = 0$ » peut alors être obtenue par généralisation. Cet énoncé peut laisser entendre qu'une variable aléatoire continue est une variable aléatoire qui prend un nombre infini de valeurs.
Les conjectures respectivement de $P(0 \leq X \leq \frac{1}{3})$ et de $P(0 \leq X \leq \frac{2}{5})$ peuvent découler de l'idée d'égale vraisemblance des intervalles de longueurs respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ et donc de la loi uniforme continue « naturelle » comme la qualifie Henry (2003).

Dans la question 3, la densité de la loi uniforme sur $[0; 1]$ découle :

- Des conjectures de la question 2, admises sans que ce ne soit dit et généralisées à tout réel x de $[0; 1]$;
- De l'expression de $P(0 \leq X < t)$ à l'aide d'une intégrale, qui fait l'objet de la dernière question de l' « activité » précédente.
-

Dans ces deux « activités », la variable aléatoire est à valeurs positives ; l'auteur passe donc par la fonction de répartition de la variable aléatoire (sans le dire) pour faire émerger la fonction de densité et le calcul d'une probabilité (uniquement du type $P(0 \leq X < t)$) par une intégrale. La généralisation au calcul de $P(a \leq X \leq b)$ est faite dans l'exposition de connaissances.

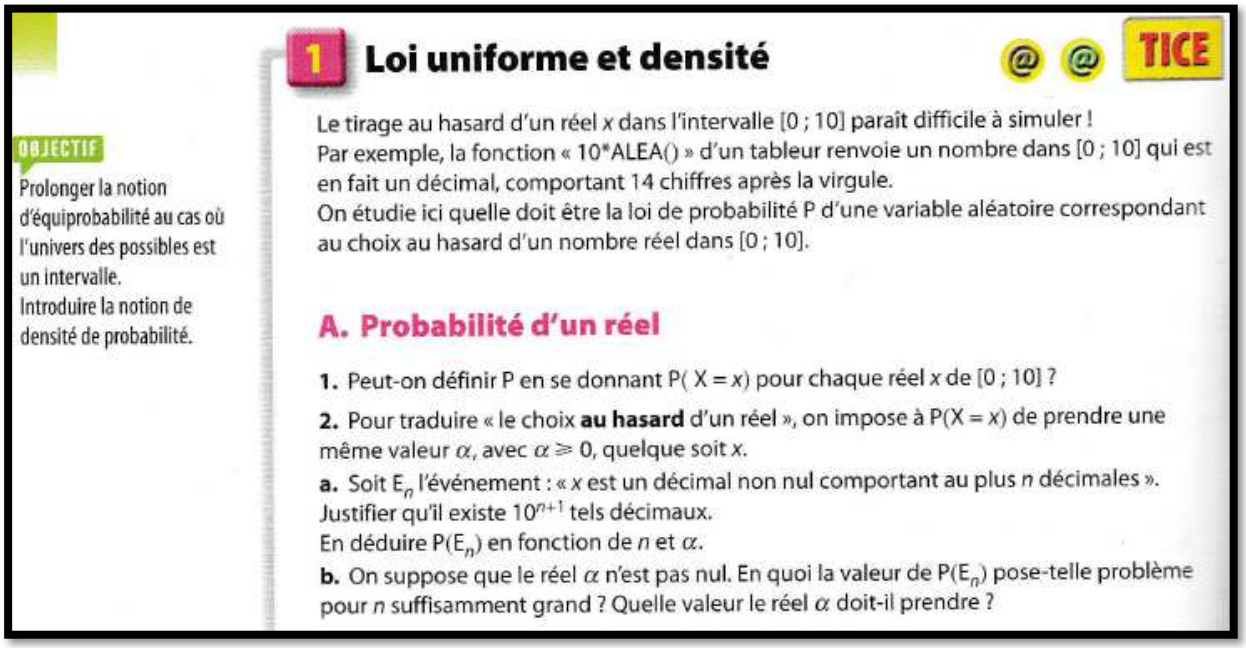
La fin de la question 3. a pour but d'introduire la définition de l'espérance d'une variable aléatoire. Pour cela, l'auteur s'appuie sur sa signification fréquentiste, « *valeur moyenne des valeurs prises par X*

lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois ». Un algorithme qui génère 10000 simulations permet de comparer la valeur théorique obtenue par un calcul intégral donné par l'énoncé et la valeur moyenne des résultats de ces 10000 simulations.

Le manuel Indice est le seul des quatre manuels à ne pas introduire les lois à densité par la loi uniforme, qui arrive dans un deuxième temps. Analysons le manuel Math'x.

c) Manuel Math'x de Terminale S, Didier, édition de 2012

Le manuel Math'x de Terminale S, Didier, édition de 2012, propose une première « activité » dont le double objectif annoncé est : « *Prolonger la notion d'équiprobabilité au cas où l'univers des possibles est un intervalle. Introduire la notion de densité de probabilité* ». L'intervalle choisi est $[0; 10]$:



1 Loi uniforme et densité TICE

OBJECTIF
Prolonger la notion d'équiprobabilité au cas où l'univers des possibles est un intervalle.
Introduire la notion de densité de probabilité.

Le tirage au hasard d'un réel x dans l'intervalle [0 ; 10] paraît difficile à simuler !
Par exemple, la fonction « 10*ALEA() » d'un tableur renvoie un nombre dans [0 ; 10] qui est en fait un décimal, comportant 14 chiffres après la virgule.
On étudie ici quelle doit être la loi de probabilité P d'une variable aléatoire correspondant au choix au hasard d'un nombre réel dans [0 ; 10].

A. Probabilité d'un réel

1. Peut-on définir P en se donnant $P(X = x)$ pour chaque réel x de [0 ; 10] ?

2. Pour traduire « le choix **au hasard** d'un réel », on impose à $P(X = x)$ de prendre une même valeur α, avec $\alpha \geqslant 0$, quelque soit x.

a. Soit E_n l'événement : « x est un décimal non nul comportant au plus n décimales ».
Justifier qu'il existe 10^{n+1} tels décimaux.
En déduire $P(E_n)$ en fonction de n et α.

b. On suppose que le réel α n'est pas nul. En quoi la valeur de $P(E_n)$ pose-telle problème pour n suffisamment grand ? Quelle valeur le réel α doit-il prendre ?

Extrait du manuel Math'x de Terminale S, Didier, édition de 2012, page 398

Son préambule énonce d'emblée l'impossibilité de simuler avec un tableur un nombre au hasard de $[0; 10]$ comportant plus de 14 chiffres après la virgule. En conséquence, la partie A envisage la question d'un point de vue théorique. La démarche a quelques similarités avec celle des manuels Hyperbole et Indice. Elle est cependant plus rigoureuse – et aussi plus difficile : un raisonnement par l'absurde est conclu par le fait que la suite $(\alpha 10^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée (donc pas majorée par 1). Dans toute cette partie, l'univers est l'intervalle continu $[0; 10]$; cependant, les événements E_n ont un cardinal fini et sont donc des ensembles discrets.

B. Probabilité d'un intervalle

On simule sur un tableur 10 000 tirages d'un nombre x dans [0 ; 10[, à l'aide de la fonction « 10*ALEA() » et on fait afficher les fréquences des événements « $x \in \left[\sqrt{2} ; \pi\right]$ » et « $x \in \left[3+\sqrt{2} ; 3+\pi\right]$ ».

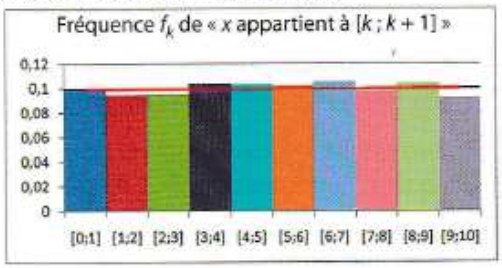
	A	B	C	D
1	événement	fréquence	événement	fréquence
2	rac2 <= x <= pi	0,17402	3+rac2 <= x <= 3+ pi	0,16790

a. Quelle observation peut-on faire sur les deux fréquences affichées ?

b. Quelle similitude des intervalles $\left[\sqrt{2} ; \pi\right]$ et $\left[3+\sqrt{2} ; 3+\pi\right]$ peut expliquer cela ?

C. Probabilité et calcul d'aire

L'histogramme ci-dessous représente les fréquences f_k des dix événements « $x \in [k ; k+1]$ » pour 10 000 réalisations de la fonction « 10*ALEA() ».



1. Conjecturer $P(X \in [k ; k+1])$, pour k entier, $0 \leqslant k \leqslant 9$.

2. Le tableur affiche une courbe rouge, appelée « courbe de tendance », qui « lisse » l'histogramme. Préciser quelle fonction f elle représente.

3. a. Que vaut nécessairement $P(X \in [0 ; 10])$? Comparer avec $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

Deuxième extrait du manuel Math'x de Terminale S, Didier, édition de 2012, page 398

Les parties B et C utilisent la simulation sur tableur de nombres pseudo aléatoires de $[0; 10[$. L'énoncé exprime clairement que la fonction 10*ALEA() génère des décimaux de [0 ;10] (en fait de [0 ; 10[) comportant 14 chiffres après la virgule. Ce sont donc des nombres d'un sous ensemble discret de [0 ; 10]. Mais il peut être dit en classe que, par le nombre de décimales élevé, il constitue une bonne « approximation » de [0 ; 10].

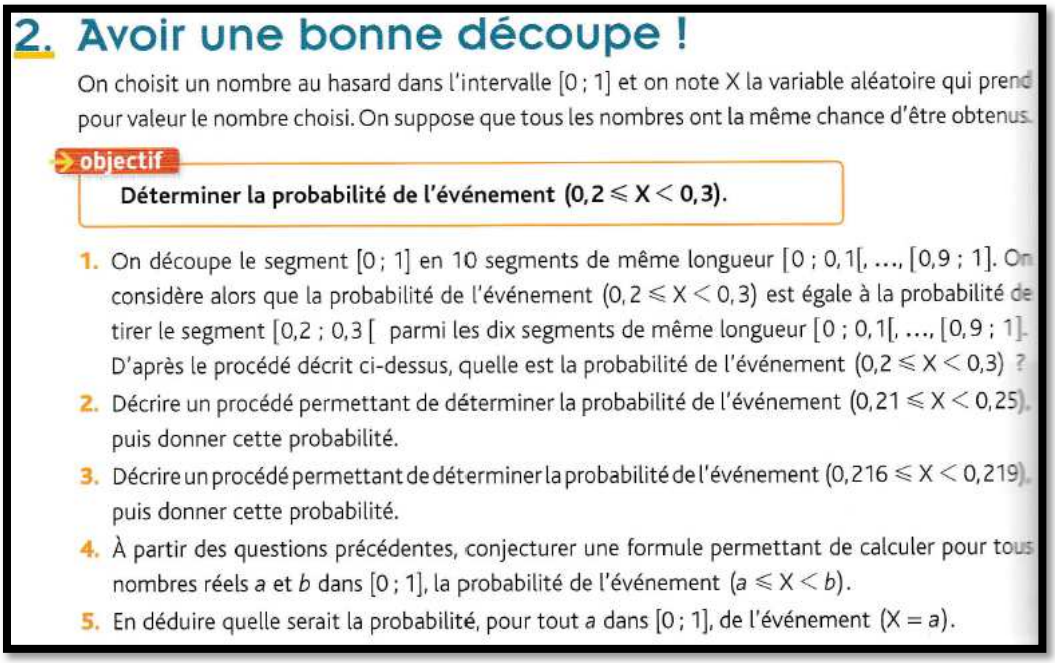
La partie B se situe dans le domaine des statistiques (bien que son titre annonce qu'elle se situe dans celui des probabilités). Elle doit permettre aux élèves de conjecturer que la fréquence de $\{X \in [a; b]\}$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle $[a; b]$. Le discours qui entoure la correction de cette « activité » peut permettre de basculer des fréquences aux probabilités. Sinon, la fin de la partie C s'en charge.

L'effectif de l'échantillon simulé dans la partie C est de 10000. L'approche fréquentiste des probabilités permet aux élèves de répondre à la première question par une lecture de l'histogramme. Les élèves peuvent aussi procéder par égale vraisemblance des 10 intervalles, faisant appel à la loi uniforme continue que Henry (2003) qualifie de « naturelle » - et d'autant plus proche de la loi uniforme discrète que les 10 intervalles sont de même amplitude et forment une partition de l'univers.
La deuxième question de la partie C fait apparaitre la fonction de densité en tant que « *courbe de tendance qui lisse l'histogramme* » et fait le lien entre calcul de probabilités et calcul d'aire. Les classes

de l'histogramme sont toutes de même amplitude égale à 1 ; la grandeur en ordonnée est la densité de fréquence (ce qui n'est pas indiqué), cependant les valeurs sont à la fois les fréquences et leurs densités. Dans ces conditions, l'émergence du mot « densité » parait difficile. Finalement, ce mot n'est pas mentionné dans cette « activité » et ne fera l'objet d'aucune explication dans l'exposition de connaissances.
La question 3. b. convoque l'idée qui peut paraitre naturelle, développée en amont de ces analyses de manuel : les événements $\{X \in [c; d]\}$ ont « une vraisemblance proportionnelle à la longueur $d - c$ ».
Le lien entre calcul de probabilité et calcul intégral est fait par comparaison des valeurs obtenues dans les deux modes de calcul. Aucune mention n'est faite de l'aspect « sommation » de l'intégrale.

d) Manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012

L'approche utilisée par le manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012, repose sur l'idée intuitive d'égale vraisemblance.



2. Avoir une bonne découpe !

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1] et on note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre choisi. On suppose que tous les nombres ont la même chance d'être obtenus.

objectif

Déterminer la probabilité de l'événement $(0,2 \leqslant X < 0,3)$.

1. On découpe le segment [0 ; 1] en 10 segments de même longueur [0 ; 0,1[, ..., [0,9 ; 1]. On considère alors que la probabilité de l'événement $(0,2 \leqslant X < 0,3)$ est égale à la probabilité de tirer le segment [0,2 ; 0,3[parmi les dix segments de même longueur [0 ; 0,1[, ..., [0,9 ; 1]. D'après le procédé décrit ci-dessus, quelle est la probabilité de l'événement $(0,2 \leqslant X < 0,3)$?
2. Décrire un procédé permettant de déterminer la probabilité de l'événement $(0,21 \leqslant X < 0,25)$, puis donner cette probabilité.
3. Décrire un procédé permettant de déterminer la probabilité de l'événement $(0,216 \leqslant X < 0,219)$, puis donner cette probabilité.
4. À partir des questions précédentes, conjecturer une formule permettant de calculer pour tous nombres réels a et b dans [0 ; 1], la probabilité de l'événement $(a \leqslant X < b)$.
5. En déduire quelle serait la probabilité, pour tout a dans [0 ; 1], de l'événement $(X = a)$.

Extrait du manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012, page 328

Cette « activité » est la première approche des lois à densité de ce manuel. Elle s'appuie sur le cas discret que les élèves connaissent bien. Le continu de l'intervalle $[0; 1]$ est approché en le subdivisant par des intervalles de longueur 10^{-1}, puis 10^{-2}, puis 10^{-3}.
La loi uniforme continue sur $[0; 1]$ est explicitement approchée par la loi uniforme discrète sur les 10 intervalles de longueur 10^{-1}. Puis elle permet de raisonner de la même façon sur les 100 intervalles de longueur 10^{-2} et les 1000 intervalles de longueur 10^{-3}.
Ces subdivisions successives sont censées inviter les élèves à conjecturer que $P(a \leq X < b) = b - a$.
Un passage à la limite (lorsque b tend vers a) permet d'en déduire la probabilité $P(X = a)$.

Le problème que cette « activité » soulève est souligné dans Vivier et al. (2017) : « *il faut admettre d'emblée que les probabilités associées aux dix intervalles* $[0; 0,1[, [0,1; 0,2[\ldots [0,9; 1]$ *sont égales. Ainsi la probabilité associée à l'intervalle fermé* $[0,9; 1]$ *est égale à la probabilité associée à l'intervalle semi-ouvert* $[0,8; 0,9[$. *Faut-il alors avoir la réponse à la dernière question* $P(X = a) = 0$ *pour justifier l'hypothèse initiale ?* ».

La question est d'autant plus importante que la propriété « $P(X = a) = 0$ pour tout réel a » devrait faire l'objet d'une attention particulière, compte tenu de la rupture importante qu'elle véhicule entre lois discrètes et lois à densité.
Ce travers peut aisément être évité en travaillant sur l'intervalle $[0; 1[$ au lieu de l'intervalle $[0; 1]$.

L' « activité » suivante recourt à la simulation de la loi uniforme sur $[0; 1]$. Une variable aléatoire S est définie en tant que somme de deux variables aléatoire indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$.
Trois parties sont clairement définies : une partie « simulation », une autre « modélisation » et une dernière « utilisation du modèle ».

3. TICE Vers la densité d'une loi de probabilité

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant des valeurs uniformément réparties dans l'intervalle [0 ; 1]. Soit S la variable aléatoire associant au couple (X ; Y) la somme X + Y.
On se propose de déterminer la probabilité des événements ($S \leqslant 1$), ($S < 0{,}5$).
Pour répondre à ces questions, nous allons utiliser une démarche expérimentale, puis un nouvel outil : la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue.

1. **Partie *Simulation***
   a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire S ?
   b. À l'aide du logiciel *XCAS*, utiliser la commande **EchX :=randvector(1000,0..1)** pour simuler un échantillon, appelé EchX, de 1 000 valeurs suivant la loi de X. Répéter l'opération pour simuler un échantillon de 1 000 valeurs suivant la loi de Y. Enfin, créer un échantillon de 1 000 valeurs suivant la loi de S en utilisant la commande **EchS :=EchX+EchY**.
   c. Utiliser la fonction « classes » pour déterminer les effectifs d'une classe. En déduire les fréquences correspondantes pour compléter le tableau ci-dessous :

Événement	$S \leqslant 1$	$S < 0{,}5$	$S > 1{,}2$	$0{,}6 \leqslant S \leqslant 1{,}2$	$S \leqslant 2$
Fréquence					

   d. Comparer ses résultats avec ceux de son voisin. Que remarque-t-on ?

Extrait du manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012, page 329

La simulation d'un échantillon de taille 1000 est faite avec le logiciel XCAS. Rien n'est dit sur le nombre de décimales des nombres simulés. Ni sur le fait que les nombres simulés appartiennent à $[0; 1[$. Cependant, le cas de l'événement $\{X = a\}$ (et donc $\{X = 1\}$) a déjà fait l'objet de la dernière question de l'activité précédente.

2. Partie *Modélisation*

On souhaite approcher la loi de S graphiquement à l'aide d'un histogramme. Le programme *dec3()* ci-contre permet de représenter l'histogramme des fréquences d'un échantillon simulé par l'ordinateur.

a. Recopier ce programme et le tester pour des tailles d'échantillon de 1 000, 10 000, 100 000. Que remarque-t-on ?

b. Modifier le programme précédent en remplaçant la ligne « G := ... », par « G :=histogram (S,0,0.1),plot(x,x=0..1),plot(2-x,x=1..2) ; » pour qu'il affiche en même temps l'histogramme et la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}.$$

c. Que penser de cette courbe ?

RAPPEL
Dans un histogramme, l'aire est proportionnelle à l'effectif des classes.

Prog Edit Ajouter

```
dec3():= {
local taille,X,Y,S,G;
saisir(taille);
X:=randvector(taille,0..1);
Y:=randvector(taille,0..1);
S:=X+Y;
G:=histogram(S,0,0.1);
return(G);
}
:;
```

Extrait du manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012, page 329

La partie « modélisation » consiste à représenter les données d'échantillons de tailles 1000, 10000 puis 100000 sous forme d'histogramme. Les classes sont toutes d'amplitude 0,1. Puis la courbe d'une fonction affine par morceaux (qui est la fonction de densité de S) est superposée aux histogrammes. À la fin de cette partie, la question posée aux élèves est : « *Que penser ce cette courbe ?* ». Le mot « modèle » étant convoqué par l'énoncé, il est possible qu'il apparaisse dans la réponse des élèves.

3. Utilisation du modèle

D'après la partie 2., il paraît légitime d'utiliser la fonction f, appelée **densité** de la variable aléatoire S, pour calculer la probabilité de certains événements.

a. Calculer l'aire en unités d'aires, située sous cette courbe $\mathscr{C}_f$.

b. Rappeler l'interprétation géométrique de $\int_0^{0,5} f(t)\,dt$. En déduire un lien entre $\int_0^{0,5} f(t)\,dt$ et le calcul des fréquences de la partie 1. pour $S < 0,5$.
On admet que pour tous réels a et b de l'intervalle $[0 ; 2]$, $p(a \leqslant S \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

c. Compléter le tableau suivant en utilisant l'égalité ci-dessus.

Événement	$S \leqslant 1$	$S < 0,5$	$S > 1,2$	$0,6 \leqslant S \leqslant 1,2$	$S \leqslant 2$
Probabilité					

d. Comparer les tableaux des questions 1. d. et 3.c. Conclure.

Extrait du manuel Repères de Terminale S, Hachette, édition de 2012, page 329

Comment le « glissement » d'histogrammes de fréquences à la courbe d'une fonction continue permettant des calculs de probabilités est-il effectué par l'auteur de cette « activité » ? Celui-ci énonce au début de la partie « Utilisation du modèle » que : « *D'après la partie 2, il parait légitime d'utiliser la fonction f, appelée densité de la variable aléatoire S, pour calculer la probabilité de certains événements* ».

La légitimité de la modélisation par cette fonction peut être renforcée par le calcul de l'aire sous la courbe (égale à 1 unité d'aire), si elle fait l'objet d'un discours plus « méta » avec les élèves. Ce calcul peut être fait par un calcul élémentaire sur les aires de triangles rectangles ou par le calcul intégral.

Puis un lien entre « *l'interprétation géométrique* » de $\int_0^{0,5} f(t)dt$ et les fréquences calculées pour S < 0,5 dans la partie A est demandé ; compte tenu de la définition d'une intégrale en Terminale S, les aires sont ainsi convoquées. C'est là que le mode de construction de l'histogramme (dans lequel une

fréquence est une mesure d'aire) intervient, bien qu'il ne soit rappelé à aucun moment. Ce travail sur les histogrammes ne permet cependant pas l'émergence du sens du mot « densité ».
Une comparaison entre des tableaux de fréquences et de probabilités calculées via la fonction de densité est demandée à la fin. La distinction et le lien entre les calculs statistiques et les calculs de probabilités via une fonction de densité qui modélise la variable aléatoire peuvent être alors explicités.

Annexe 15 : Vidéo d'une séance d'introduction aux probabilités continues en Terminale S - Déroulement de la séance incluant la transcription de la première heure

La séance a eu lieu le 6 mai 2015 au lycée d'Achères dans les Yvelines.
Il s'agit d'une séance de deux heures, dans une classe de Terminale S à petit effectif (16 élèves).
L'enseignante est un professeur agrégé qui a plus de 20 ans de carrière.
Une caméra fixe est placée de telle sorte que le tableau blanc soit visible en entier.

La partie transcrite est découpée en plusieurs épisodes, auxquels nous avons donné un titre, pour faciliter la lecture du texte.
Dans le corps de la transcription, nous avons mis en italique les quelques phrases qui décrivent ce qui se passe dans la classe, par opposition à ce qui y est dit par les protagonistes. Alors que dans les parties non retranscrites, les paroles rapportées sont en italique.

Déroulement des premières minutes :
Épisode 1 : En préambule, l'enseignante explique aux élèves que la présence d'une autre enseignante et de la caméra ne constituent aucun enjeu pour eux, qu'ils ne seront pas évalués sur cette séance.
Elle leur précise qu'il s'agit du dernier chapitre de l'année scolaire, puis note le titre de celui-ci au tableau : « *Lois continues ou lois de probabilité à densité* ».
Elle explique qu'elle utilisera la partie droite du tableau en tant que brouillon.

Transcription des 54 minutes suivantes :
Épisode 2 : autour du vocabulaire du titre du chapitre : continu ; probabilité (à 3'45'')
Enseignante : Alors déjà quand vous lisez le titre est-ce que quelque chose vous parle ou pas ? Le titre du chapitre.
Un élève : Probabilité.
Enseignante : Oui probabilité, on connait, d'accord ? Est-ce qu'il y a autre chose dans ce qui est écrit ici qu'on connait plutôt que probabilité tout seul ?
Un élève : Densité, c'est les aires.
Enseignante : Alors, densité c'est les aires. Alors attention dans cette classe on a deux élèves qui en ont entendu un petit peu parler. Donc ce qui m'intéresse c'est on ne tient compte que du programme de terminale S qu'on a déjà vu ensemble cette année pour tout le monde. Et si pour les doublants, il y en deux dans la classe, on oublie.
Un élève : Il y en a quatre.
Enseignante : Il y en a quatre. Donc pour ceux-là il faut faire abstraction de ce que vous avez retenu de l'année dernière. Et il faut vraiment partir de seulement on s'arrête au dernier chapitre qu'on a vu sur les probabilités. Donc là ce que vous me dites je sais que vous avez pas inventé ça tout seul. Alors ? Oui, Florian ?
L'élève Florian : Continu, on a vu continu.
Enseignante : Alors on a vu continu. Quand est-ce qu'on a entendu parler de continu. En probabilités ?
Les élèves : Non, sur les fonctions.
Enseignante : Sur les fonctions. Quand est-ce qu'on parle d'une fonction continue ?
Un élève : Euh une fonction continue c'est une fonction qu'on peut tracer tout du long.
Enseignante : Qu'on peut tracer tout du long. Soyez plus précis. Vous avez fait le geste mais comme vous êtes dos à la caméra, la caméra elle ne vous a pas vu.
Un autre élève : Quand on trace la fonction on ne lève pas le, le crayon.
Enseignante : Voilà alors une fonction continue sur un intervalle ça veut dire que sur un intervalle donné on peut tracer la courbe sans trou, sans moment d'arrêt, sans lâcher le crayon. D'accord ? Sur tout l'intervalle. Il n'y a pas de trou. Oui mais alors nous en probabilité on n'a jamais vu ça. Bon ben on va voir ce que ça veut dire. Est-ce que ça a un rapport avec le continu, ce mot qu'on a déjà vu sur les

fonctions, qu'est-ce que ça veut dire. D'accord. Donc là c'est sur la première partie du titre. J'ai fait exprès de mettre en deux parties parce que on n'a pas les mêmes informations dans les deux écritures. Alors, dans la deuxième on a parlé de probabilité. Euh, qui peut me donner un exemple de situation où on calculerait des probabilités ?
6'50''
Un élève : Pour un vaccin dans le temps.
Enseignante : Pour un vaccin, c'est-à-dire ?
Le même élève : Ben par exemple pour voir l'efficacité du vaccin. Voir si une personne est malade ou…
Enseignante : D'accord, ça veut dire, sur quoi on travaille, définissez la situation parce que c'est un peu flou votre idée. De quoi on a besoin pour définir une probabilité et peut-être dans mon titre il n'y a pas écrit que probabilité. Alors essayez d'affiner votre idée. La probabilité c'était quoi ? On choisit une personne au hasard…
Le même élève : Qui a été vaccinée. C'est par rapport à malade ou non et si elle été vaccinée ou pas.
Enseignante : D'accord. Donc là ça veut dire que on a une population. Comment on appelle toutes les personnes de la population ?
Un élève : L'univers
Enseignante : Comment on le note, l'univers ?
Un élève : Oméga.
Enseignante : Oméga, d'accord. Et puis donc en fait la situation c'était… (*elle écrit sur la partie droite du tableau en parlant*) Exemple de probabilité. Donc oméga c'est une population donnée. On choisit une personne au hasard. Et est-ce que la personne est malade ou non, c'est ça ? Donc là en effet on définit une probabilité. Alors c'est quoi la probabilité de quelque chose c'est… par exemple donnez moi une situation. Je fais la probabilité de quoi ?
Un élève : De M et de M barre.
Enseignante : Donc p de M comment je vais le calculer. Si j'appelle M malade… et pourquoi on dit M barre ? J'ai entendu inverse, j'ai entendu contraire, quel est le mot juste ?
Les élèves : Contraire.
Enseignante : Contraire. Inverse c'est sur les nombres. D'accord ? Donc p de M ce serait quoi, comment je le calculerais ?
Un élève : Un moins p de M barre.
Enseignante : Oui mais j'ai pas p de M barre donc euh…
Autre élève : M sur oméga.
Enseignante : M sur oméga, je l'écris comme ça ? (*Elle écrit* $p(M) = \frac{M}{\Omega}$.)
Plusieurs élèves : Non ; nombre de cas favorables sur nombre de cas total.
Enseignante : Nombre de cas favorables sur nombre de cas total, c'est-à-dire possible. Quand est-ce qu'on utilise cette formule ? Donc ici faites attention ça n'a pas de sens d'écrire ça. Quand est-ce qu'on utilise cette formule de dire nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ?
Un élève : Quand y a équiprobabilité.
Enseignante : Quand y a équiprobabilité. D'accord. Donc ici faudrait le dire dans l'énoncé. On suppose, on modélise quelque chose, pour être dans une situation très simple on suppose qu'on est en situation d'équiprobabilité c'est-à-dire qu'on choisit une personne au hasard et donc ici on va avoir nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles. D'accord OK. Donc je calcule la probabilité d'un évènement. Et la probabilité de l'évènement contraire vous avez rappelé la formule, quelqu'un la redonne, quelqu'un d'autre que Raphaël ?
Un élève : Un moins p de M.

<u>Épisode 3 : autour du vocabulaire du titre : loi de probabilité ; devient une révision sur la loi binomiale</u> (à 11'16'')
Enseignante : Un moins p de M. D'accord. Les évènements sont contraires. On va revenir sur le pourquoi, vous avez retenu cette formule c'est bien. Est-ce qu'ici j'ai défini ce que j'appelle une loi de probabilité ? C'était quoi une loi de probabilité ? Ici j'ai un exercice d'une situation où je définis donc

un univers, deux évènements et je sais calculer la probabilité de chacun de ces évènements ; Est-ce que j'ai défini une loi de probabilité oui ou non ?
Une élève : Non.
Enseignante : Non. Alors quand est-ce qu'on aurait, est-ce qu'on a déjà rencontré des lois de probabilité. Alors Laila vous dites oui, est-ce que vous pourriez me donner un exemple de loi de probabilité qu'on ait déjà rencontrée.
L'élève Laila : la loi binomiale. Avec par exemple les naissances
Enseignante : Alors donc cet exemple-là, j'avais demandé un exemple de situation de probabilité. Ça répondait à cette question (*elle efface la partie droite du tableau*) mais maintenant j'affine, moi c'est pas seulement probabilité que j'ai écrit ici, mais loi de probabilité. Alors je voudrais un exemple de loi de probabilité. Donc vous m'avez dit comme exemple la loi binomiale (*elle partage le tableau « brouillon » en deux et écrit dans la partie de gauche*). Est-ce que tout le monde se souvient d'une loi que vous aviez vue en Première, qu'on a revue en Terminale, qui s'appelle la loi binomiale ? Qui s'en rappelle ? (*Elle compte*). Onze sur seize. D'accord. Ben Maeva, est-ce que vous vous rappelez ce que c'était cette loi binomiale. Est-ce que vous pourriez nous donner une situation ou un exemple d'une situation où on serait avec une loi de probabilité qui serait une loi binomiale.
L'élève Maeva : Non
Enseignante : Non. Florian ?
L'élève Florian : Une pièce avec pile ou face.
Enseignante : Une pièce avec pile ou face, d'accord. Et après.
Le même élève : Ben ensuite, tout dépend de combien de fois on a lancé la pièce. On n'a que deux issues possibles.
Enseignante : Alors on la lance combien de fois ? Vous choisissez.
Le même élève : Deux fois.
Enseignante : Euh, deux fois, j'aurais peut-être pas besoin d'une modélisation comme celle-là. Souvent la loi binomiale c'était quand on répétait donc comme vous dites plusieurs fois de suite la même expérience. Combien elle a d'issues possibles cette expérience ?
Un élève : Deux.
Enseignante : Deux, d'accord et c'est ça qui nous intéresse. Ici vous vous rappelez quand on prend une expérience toute seule avec deux issues possibles succès ou échec, ça s'appelle le schéma de…
Des élèves : De Bernoulli.
Enseignante : Bien ! Bon, alors on répète combien de fois, un petit peu plus que deux, bon 10 fois si vous voulez, 10 fois de suite, de façon indépendante, d'accord, je l'écris pas. Et on s'intéresse à quoi ?
Une élève : On va calculer la probabilité de pile. Par exemple on prend l'évènement p tirer pile que la pièce ait sorti et l'évènement inverse c'est face. Donc les deux évènements ils sont contraires.
Enseignante : Ben quand on répète dix fois de suite c'est pas ça qui va nous intéresser, pour définir notre loi binomiale. Je vous laisse réfléchir un petit peu. Si on veut définir dans cette situation-là, donc on a une pièce, alors on nous a pas dit, elle est truquée, elle est pas truquée votre pièce ?
Les élèves : Non, non…
Enseignante : Elle est pas truquée, elle peut être truquée pas truquée on s'en moque. On a une probabilité de pile, donc si elle est pas truquée la probabilité de pile vaut combien, Myriam ?
L'élève : Un sur 10.
Enseignante : Attention, là quand je dis la probabilité de pile c'est sur un lancer. La probabilité de pile c'est combien ?
La même élève : Un sur deux.
L'enseignante : Un demi. Et ici le contraire, face, ou le contraire de pile, c'est aussi un demi. D'accord ? Bon. Après je m'intéresse à quoi ensuite ? Raphaël ?
L'élève Raphaël : on cherche sur 10 fois combien de fois (inaudible) il y ait au moins cinq fois pile on va calculer la probabilité sur les 10 fois.
L'enseignante : D'accord, alors vous voyez ici on cherche par exemple vous voudriez la probabilité d'avoir…
Le même élève : Au moins cinq fois pile.

L'enseignante : D'accord, peut-être au lieu de dire pour l'instant au moins, je reprendrai après, d'accord, donnez-moi seulement un nombre exact, pas de au moins, pour l'instant on va prendre un exemple plus simple.
Le même élève : Quatre
L'enseignante : Ah, probabilité d'avoir quatre pile sur les 10 lancers, d'accord ? Est-ce que quelqu'un sait calculer cette probabilité-là ? Est-ce que quelqu'un sait calculer cette probabilité-là ? Oui, (nom de l'élève) ? Venez l'écrire s'il vous plait.
L'élève qui va au tableau : J'écris tout ?
L'enseignante : Ben vous écrivez ce que vous avez à écrire pour répondre à la question ! S'il y a des choses que vous ne voulez pas écrire vous nous les direz oralement ! Pas OK, oui Madame. Vous l'écrivez sur le tableau ici dans le petit espace que j'ai laissé, est-ce que ça va vous suffire.
L'élève au tableau : Ben déjà on nomme X la variable aléatoire qui…
L'enseignante : Alors écrivez-le à gauche s'il vous plait. Vous dites on appelle X la variable aléatoire…
L'élève au tableau : X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois qu'on obtient pile… Quand on tire la pièce. Et on sait que la probabilité que on obtient pile c'est un sur deux. Donc elle suit le paramètre p un sur deux et n égale 10 parce qu'on lance la pièce 10 fois.
L'enseignante : Alors, elle suit… Donc vous nous dites que… qui suit…
L'élève au tableau : La loi binomiale.
L'enseignante : C'est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale, c'est ça que vous dites.
L'élève : Oui, de paramètres n et p, n égale 10 et p égale 1 sur 2.
L'enseignante : OK, donc vos camarades font remarquer, Charlotte, les paramètres sont généralement dans l'ordre n, p, mais pour autant n'effacez pas, votre camarade a bien écrit n égal, p égal, donc dans l'absolu même s'il a écrit dans l'ordre contraire de d'habitude, moi ça me va, il se rappelle que p c'est la probabilité d'un seul euh du succès pour un lancer et que on a le nombre total. Par contre, est-ce que j'écris comme ça la loi binomiale. Il a mis le petit symbole, mais qu'est-ce qui manque, Inès allez l'aider pour rajouter ce qui manque.
Inès : C'est un grand B
L'enseignante : C'est un grand B comme binomiale alors, oui bon ben faites-le. Mettez plutôt un B majuscule ronde, vous vous rappelez ? D'accord, ça c'est presque un béta mais ça va aller. Alors maintenant, est-ce que vous êtes capable de me donner la probabilité d'avoir quatre fois pile sur les 10 lancers. C'est quel évènement ?
L'élève au tableau : On cherche p de grand x égale 4, ce qui est égale à 4 parmi 10 multiplié par un sur deux à la puissance n, c'est-à-dire puissance 10 multiplié par un moins un sur deux, la probabilité p, à la puissance n moins 10. Non 1 moins 10. Non non attendez… à la puissance…
L'enseignante : *Aux autres élèves.* Vous, vous cherchez tous dans vos têtes.
L'élève au tableau : n moins 1, c'est ça ?
L'enseignante : Écrivez-le !
L'élève au tableau : *Il efface son exposant 10*. Ah voilà c'est à la puissance k.
L'enseignante : Mais y pas de k.
L'élève au tableau : C'est 4… à la puissance 10 moins 4 c'est 6.
L'enseignante : Très bien. Donc vous voyez, en effet, il s'est trompé au départ, mais il a trouvé son erreur. Alors c'est pour ça que tout à l'heure j'aurais préféré un exemple où on n'ait pas forcément équiprobabilité parce que en fait ici on a un demi et ici on a 1 moins un demi, ça va faire aussi un-demi. Bon, très bien, la valeur je m'en moque. Par contre, ce qui m'intéresse dans ce qu'a dit votre camarade ici c'est que j'ai défini, alors je vais effacer ici, alors on n'a pas donné, ça je vais le laisser de côté quand-même (*elle désigne : proba d'obtenir au moins cinq fois*) euh je vais demander à quelqu'un d'autre de m'écrire ici la probabilité d'avoir au moins 5, qui serait capable de me dire la probabilité de au moins 5. Je me réveille, votre camarade a répondu à la première question, la probabilité d'avoir quatre fois pile sur les 10 lancers et euh, Raphaël avait dit, au moins 5. Oui, venez le faire au tableau s'il vous plait, on va changer de couleur, venez Ines. On est d'accord, dans les autorisations pour la vidéo, personne n'a dit non hein ? Alors au moins 5, c'est cette deuxième question.

L'élève Inès au tableau : *elle écrit* $(P \geq 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$. Ah non c'est dans le mauvais sens. (*Elle commence à effacer*).
L'enseignante : C'est plus.
L'élève au tableau : Oui, au moins.
L'enseignante : Alors laissez laissez ! Regardez ici elle a marqué la probabilité d'avoir X égale 1 ou 2 ou 3 ou 4, est-ce que c'est la probabilité d'avoir au moins 5. Ce serait 1 moins cette probabilité-là, très bien Charlotte ! Ici ça devrait faire quoi ? (*Elle efface 1, 2, 3, 4*).
L'élève au tableau : 5, 6, 7… (*Elle remplace 1, 2, 3…)*
L'enseignante : Alors on y va, au moins 5 ça veut dire 5, 6, 7, 8, OK, 9 et 10. Prenez le temps de vous reculer, regardez ce que vous avez écrit la probabilité au départ. Est-ce que l'écriture est correcte ? Ce qui est à droite est correct, ce qui est à gauche ne me plait pas tout à fait. Quelle est la probabilité que vous cherchez ?
L'élève au tableau : Ah oui. (*Elle va rectifier :* $P(X \geq 5)$).

Épisode 4 : autour du vocabulaire du titre : loi de probabilité. Variable aléatoire discrète (à 23'45'')
L'enseignante : Très bien ! Quand on ouvre une parenthèse, on la ferme. Bon d'accord, merci beaucoup. Alors on sait qu'avec la calculatrice on peut calculer ça, le résultat numérique on s'en moque. Maintenant, qu'est-ce que je retiens ici ? Alors ici, c'est une loi particulière sur laquelle on a travaillé, c'est une loi binomiale. Mais ce qui va m'intéresser ici c'est que j'ai défini un objet, (nom de l'élève) vous nous avez dit X c'était quoi (*nom de l'élève*)
L'élève : La variable aléatoire.
L'enseignante : Variable aléatoire, donc ici je peux définir des variables aléatoires. (*Elle efface le tableau de droite et écrit « variables aléatoires »*). La variable aléatoire X, dans ce cas-là, pour mes 10 lancers, combien prend-elle de valeurs ? Toutes les valeurs, vous vous rappelez on notait X de omega, si omega est l'univers sur lequel on travaille, X de omega c'est toutes les valeurs prises par la variable aléatoire grand X. X c'était le nombre de fois où pile était sorti quand on lançait 10 fois de suite la pièce. Quelles sont les valeurs possibles pour grand X. Raphaël ?
L'élève Raphaël : de 0 à 10.
L'enseignante : de 0 à 10 (*elle écrit au tableau*). Combien j'ai de valeurs ?
Des élèves : 11.
L'enseignante : 11 valeurs, d'accord ? Ici, j'ai un nombre fini de valeurs. Et je vais définir ma loi de probabilité (*elle écrit « loi de probabilité »*), comment on faisait pour définir la loi de probabilité ? Donc ici j'appelle grand x ma variable aléatoire, mais qu'est-ce qu'elle a de particulier, elle ne prend qu'un nombre fini, fini de valeurs (elle écrit en même temps). Eh bien ça ça s'appelle une variable aléatoire, je vais rajouter « v », « a », je vais l'appeler discrète. Est-ce que vous avez déjà vu ce mot là en mathématiques, quelque chose de discret ?
Les élèves : (*certains disent oui, certains non*)
L'enseignante : Oui, quand ça ?
Un élève : euh, loi continue et loi à densité
L'enseignante : oui, François, c'est très bien, avant ! D'accord, très bien. Sauf que discret c'était pas écrit discret. On se doute que François est inclus dans les quatre dont on a parlé tout là l'heure, OK. En dehors de ce chapitre, est-ce que dans un autre chapitre on a entendu parler de quelque chose de discret ? Alors Inès dit oui.
L'élève Inès : en spé math on fait ça.
L'enseignante : Eh ben très bien, donnez-nous l'exemple !
L'élève : Je pourrai pas donner d'exemple.
L'enseignante : D'accord, bon. Alors, le contraire de discret. Pourquoi, donc, j'appelle ça discret ? Le contraire de discret, à votre avis ça va être quoi ?
Un élève : voyant
L'enseignante : Voyant, d'accord, très bien. Donc en effet quand on dit une personne est discrète, c'est un adjectif courant de la langue française, ça veut dire que peut-être, c'est peut-être pas Mme (*elle dit son nom de famille*) aujourd'hui. Donc quelqu'un de discret va pas, peut-être, être habillé avec des

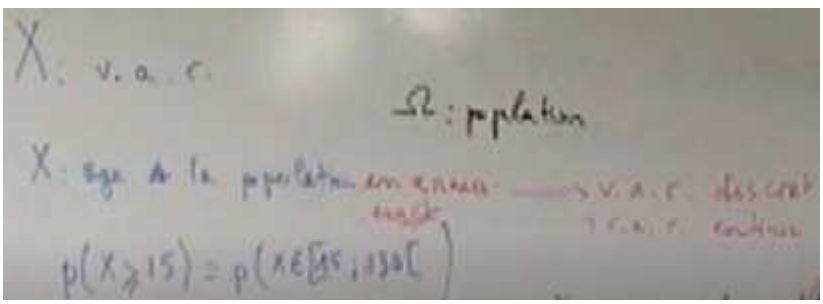
couleurs voyantes, c'est quelqu'un de réservé, mais quand je parle d'une variable discrète, mais moi je dis que vous vous en rappelez pas mais il y a déjà un chapitre où j'avais déjà donné ce mot-là. Oui ?
Un élève : Une variable remarquable.
L'enseignante : Une variable remarquable. Alors discret c'est le contraire de remarquable vous voulez dire. Oh, je dirais pas forcément ça, dans le langage courant, mais en l'occurrence, non. Bon, si vous n'avez pas d'idée, vous n'allez pas forcément la trouver tous seuls, moi je voudrais vous faire penser à la représentation graphique des suites. Et alors, Laila, qui se rappelle ce qu'on faisait dans la représentation graphique des suites ? Une suite, c'est à un entier n j'associe un réel u indice n et quand je faisais la représentation graphique, qu'est-ce qui se passait ?
Les élèves : (*inaudible*)
L'enseignante : Pas toujours, parfois on pouvait dire qu'il existait une fonction f telle que u indice n soit f de n, parfois, pas toujours. Mais si je voulais faire la représentation graphique de la suite, qu'est-ce qui se passait ?
Une élève : c'était un nuage de points.
29'15''
L'enseignante : C'était, oui, Ines, c'était un nuage de points. Qu'est-ce qui se passe, y avait des trous ! Ça c'était discret parce que vous voyez on avait euh (*3 secondes*) en mathématiques, le contraire de discret ça veut dire je prends des valeurs ponctuelles, précises, mais entre deux valeurs il y a un trou, d'accord, et ici, j'ai un nombre fini de valeurs. Donc pour mes suites, quand je faisais la représentation graphique des suites, je mettais, sur l'axe des abscisses, qu'est-ce qu'on mettait ?
Un élève : on mettait x.
L'enseignante (*tout en faisant un graphique au tableau*) : On mettait les indices. Sur l'axe des ordonnées, qu'est-ce qu'on mettait ? Les valeurs de la suite d'accord. Et supposons que la suite soit définie à partir de n égal 0, bon supposons, je mets n'importe quoi, voilà ma suite, j'avais des croix comme ça. D'accord ? Eh bien est-ce que je peux dire que ces points qui me donnaient la représentation graphique de ma suite, est-ce qu'on peut dire en termes mathématiques que j'avais une représentation continue. La représentation continue, ça veut dire y a pas de trou, d'accord ? Parfois dans ce chapitre-là, spontanément, soit vous reliez avec des segments, soit pour certains vous faisiez des courbes représentatives qui passaient par ces points-là mais je vous avais expliqué qu'on n'avait pas le droit parce qu'ici les valeurs prises c'était seulement les valeurs entières. Eh bien ici, en fait ce qui va se passer c'est que, avant les variables aléatoires dont on parlait, on n'avait pas dit qu'elles étaient discrètes, mais toutes celles qu'on a rencontrées, elles ne travaillaient que sur un nombre fini de valeurs et c'est ça qu'on va appeler une variable aléatoire discrète. Alors du coup, une variable aléatoire qui ne va pas être discrète, je vais prendre la négation, elle ne fait pas ça (*l'enseignante montre la phrase au tableau « qui prend un nombre fini de valeurs »*). Le contraire de cette phrase-là en français ça va me donner quoi ? Si je définis une variable aléatoire continue.
Un élève : Qui prend plusieurs nombres finis de valeurs.
L'enseignante : Plusieurs nombres finis de valeurs…
Deux autres élèves répondent (inaudible)
L'enseignante : Alors, ce que vous avez dit, Raphaël, pour rebondir sur les trois réponses. Raphaël, vous nous avez dit elle prend qu'un nombre fini euh… vous avez dit la même chose. Par contre, j'ai entendu elle prend un nombre infini de valeurs par Ines, et Naila vous avez dit elle prend toutes les valeurs. Ça veut dire quoi ? Toutes les valeurs dans R ?
L'élève Naila : Dans un intervalle

<u>Épisode 5 : recherche d'un exemple de variable aléatoire continue</u> (à 32'08'')
L'enseignante : Dans un intervalle donné. D'accord ? Donc ici, une variable aléatoire continue, elle va prendre (*elle écrit*) qui prend un nombre infini de valeurs. Bon ben moi j'aimerais que vous cherchiez un exemple concret. Est-ce que vous pourriez me définir, me trouver un exemple d'une variable aléatoire qui prend un nombre infini de valeurs. Est-ce que vous pourriez m'en trouver un ? Alors je laisse réfléchir tout le monde parce que là c'est un petit peu toujours les mêmes. Mais tout le monde dans l'absolu pourrait me trouver un exemple. Essayez de fabriquer un exemple de variable aléatoire

(*13 secondes*). Alors bon ben on va laisser Ines vous proposer un exemple et puis après j'interrogerai au hasard d'autres élèves que je n'ai pas encore entendus. Donc Ines proposez votre exemple. On va voir.
L'élève Ines : Par exemple on prend une population. On va prendre le nombre de personnes au-dessus de 15 ans. Entre 15 et plus l'infini, on prend la probabilité de toutes ces personnes.
L'enseignante : Oui mais cette population, qu'est-ce qui se passe, vous travaillez sur une population.
La même élève : Par exemple on va prendre les filles qui ont plus de 15 ans. Dans la population totale.
L'enseignante : Alors, en fait, moi ce que j'aimerais savoir, c'est votre variable aléatoire, si je l'appelle toujours X, votre variable aléatoire (*elle écrit « X v. a. r. »*) variable aléatoire réelle ça veut dire à valeur dans R. (*Elle revient à la partie du tableau qui décrit les variables aléatoires discrètes*). Les précédentes elles étaient aussi à valeurs dans R. Ça, on a fait l'exemple particulier, donc ici cas particulier, je le réécris ici, de la loi binomiale, mais on a d'autres situations, on va en donner avec la loi de probabilité, que la loi binomiale, ici. Alors ici vous nous dites X c'est l'âge, c'est ça ? de la population ? (*Elle écrit : « X : âge de la population »*). Et vous vous intéressez à p de x supérieur à 15. (*Elle écrit* $P(X \geq 15)$). Donc ici qu'est-ce que ça veut dire, ça veut dire p de X appartient à quel intervalle ? Je pourrais dire l'intervalle 15 hein vous avez dit 15 inclus, jusqu'à combien ?
La même élève : 100.
L'enseignante : Alors 100, ben, objectivement, objectivement, voilà on pourrait chercher l'âge de la personne au monde la plus âgée pour euh… Bon si je mettais 200, je suis sûre que c'est bon là je suis large. Si je mets 150, c'est bon aussi. Si je mets 130 je crois que ça doit aller. D'accord ? Alors, dans l'absolu, je peux écrire ça. Et si j'écrivais ça (*elle écrit* $+\infty$), est-ce que je pourrais le faire aussi ? Je pourrais, d'accord ? Bon alors soyons raisonnable euh qu'est ce que vous voulez, si je mets pas plus l'infini quand même parce qu'on sait qu'on ne vit pas…
Une élève : 130.
L'enseignante : Par exemple 130. Allez j'ai mis ouvert. Au jour d'aujourd'hui on va dire que c'est comme ça. Est-ce que, donc ici, ma variable aléatoire, les valeurs possibles de cette variable aléatoire, elle est définie sur quel ensemble au total ? Alors quand on dit l'âge de la population, euh (*5 secondes*) il faudrait affiner un petit peu quand même, quel univers on a finalement, donc on travaille sur une population et euh par exemple euh (*4 secondes*) oui donc oméga ce serait la population. Pour définir une expérience aléatoire faut qu'on ait au départ euh… un univers qui soit défini et qu'on soit en mesure de définir notre probabilité. Alors ici on dit on va être capable de compter le nombre de personnes. Est-ce que j'ai bien quelque chose, pourquoi ce serait pas discret ça ? Pourquoi ce serait pas, est-ce que c'est discret comme tout à l'heure ou alors est-ce que c'est pas discret ? Qu'est-ce que vous en pensez ?

<u>Épisode 6 : la variable aléatoire est-elle discrète ou continue ?</u> (à 37'15'')
Une élève : C'est pas discret
Enseignante : Pourquoi ?
Les élèves ensemble : C'est pas discret c'est infini… … Non c'est discret pour moi!
Enseignante : Alors c'est discret, c'est pas discret, comment on sait ? Alors ou c'est discret ou c'est continu, moi je veux savoir oui, non, pourquoi.
Un élève : Selon moi c'est discret parce que le nombre il n'est pas infini, ou j'ai mal compris.
L'enseignante : le nombre, quel nombre. La population est finie, la population est finie. D'accord ? Bon. Mais x ici qu'est-ce qui se passe. C'est l'âge de la personne. Quelles sont les valeurs, on s'intéresse aux valeurs prises par la population, à l'âge de la population. Ici dans le cas discret tout à l'heure, qui se rappelle comment on faisait, on mettait nos résultats dans un tableau. Qu'est-ce qu'on mettait en première ligne ?
Un élève : Grand x.
Enseignante : Grand x ? On mettait plutôt x i, d'accord, donc c'était la première valeur possible, la deuxième valeur possible, (*dans la colonne gauche dédiée aux variables aléatoires discrètes, elle trace et remplit un tableau tout en parlant*) et comme on en avait un nombre fini, supposons n, la nième valeur possible. D'accord ? Et ici, la variable grand x prend ses valeurs dans l'intervalle que je vais

appeler x 1, x 2 jusqu'à x n. (*Elle écrit X prend ses valeurs dans* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$). J'ai un nombre fini de valeurs. Ici (elle montre le denier exemple), si je prends ma variable aléatoire, elle prend ses valeurs… où ?
Un élève : 15, 16, 17, jusqu'à 130. Ça fait…
Enseignante : Attendez, là elle cherche la probabilité que x soit supérieur ou égal à 15, mais dans l'absolu…
Une élève : Zéro, cent trente.
Enseignante : alors on va dire, zéro on va le prendre comment (*elle écrit un intervalle*) ?
Un élève : Inclus
Enseignante : Oui… ça a pas beaucoup de sens de prendre 0 inclus peut-être, parce que on va s'intéresser à la population non pas in utero mais déjà née, d'accord, donc on pourrait mettre un zéro ouvert ici, peu importe. (*Elle écrit au tableau X prend ses valeurs dans* $[0; 130[$). Alors, du coup, est-ce que ce serait discret, ou est-ce que ce serait continu, ça ?
Un élève : discret. (*6 secondes pendant lesquelles les élèves chuchotent*)… Non discret !
Enseignante : Alors, pourquoi ?
L'élève : Parce que ben déjà, là c'est en année, donc il y a que des nombres entiers. Et… c'est-à-dire il y aura 129 valeurs au total.
Enseignante : Ah, d'accord. Voilà ! Ici on dit c'est discret parce que dans cet intervalle là il y a un nombre fini de valeurs et il y en a 129.
Les élèves : 130… 131
L'enseignante : Romain, 130 exclu. Donc j'entends ici 131, j'entends 129, j'entends 130. Il y aurait en l'occurrence combien de valeurs ? 130. Est-ce qu'ici les valeurs, x de oméga, sont tous les entiers de 0 à 129 ?
Des élèves : Non
Enseignante : Alors, Laila !
L'élève Laila : On peut avoir 15 ans et demi, 15 ans trois quarts.
Enseignante : Ben, alors, imaginez, au lieu de rire, comme ça Ines. Imaginez tout simplement qu'on prenne l'âge des petits enfants. Un enfant qui vient de naitre. Ben il va avoir un jour, deux jours etc. Après on compte en mois quand il grandit un petit peu. Et puis jusqu'à longtemps on compte en mois. Après on va compter évidemment en années mais même certains ados évidemment vont donner que des âges entiers mais jusqu'à un certain âge on va dire j'ai, je sais pas moi, 10 ans et demi et en l'occurrence c'est pas tout à fait 10 ans et demi, c'est 10 ans et tant de mois et tant de jours etc. Donc du coup qu'est-ce qui se passe, est-ce que ma variable aléatoire, elle est discrète, ou elle est continue, c'est-à-dire est-ce que j'ai un nombre fini de valeurs ou est-ce que j'ai un nombre infini de valeurs possibles ?
Un élève : Ça dépend de comment on compte, en années ou en jours, ou en mois. Ça dépend. On peut pas compter à la fois en années et en jours. On choisit une valeur, on choisit une unité de, de mesure !
Enseignante : Très bien donc (nom de l'élève) nous dit ben ça dépend. Si je dis que x c'est l'âge de la population en année, alors ça va être discret. On est d'accord ? Si par contre, je dis pas, je donne la valeur de l'âge exact, donc ça veut dire que moi j'ai en années, les mois, éventuellement les jours etc., à ce moment là j'ai n'importe quelle valeur de l'intervalle qui peut être prise mais au sens tous les nombres qui vont être décimaux. D'accord ? Entre 0 et 1 y a une infinité de valeurs, est-ce qu'on est d'accord ? Donc a fortiori dans n'importe quel intervalle, dans un intervalle on a une infinité de valeurs réelles, d'accord ? Donc dans ce cas-là, si je prends l'âge exact, à ce moment-là, je vais parler de variable aléatoire réelle mais cette fois continue. Et ici ce serait à valeurs dans un intervalle que j'appelle i qui serait l'intervalle zéro trente, zéro cent trente excusez-moi, je fais mourir les gens un peu jeunes !

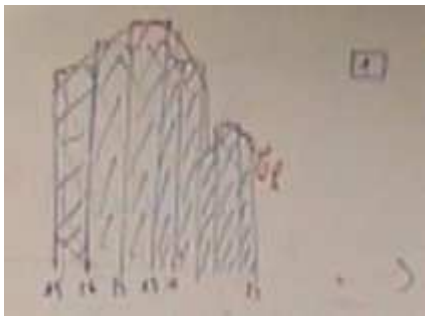


D'accord, alors est-ce qu'on aurait un autre exemple que celui-là ? Maintenant on s'est mis d'accord un petit peu. Alors c'est vrai parfois certains exemples peuvent être ambigus hein, faut être très clair. (*Pas de réaction d'élève*).

Épisode 7 : loi de probabilité, cas continu : aire sous une courbe (à 43'35'')
Alors juste on termine, parce que, comme d'habitude on passe plus de temps que ce que j'avais prévu, mais c'est pas grave, l'objectif c'est que vous compreniez. Si ici je voulais noter la loi de probabilité, quel était dans mon tableau, je faisais un tableau pour mettre la loi de probabilité, qui vient me compléter ce qu'on mettait dans la deuxième ligne ici ? Qui se rappelle ce qu'on mettait dans la deuxième ligne ici ?
Un élève : p de x i
L'enseignante : p de x i, très bien, ou grand p de grand x égale x i. Très bien, et on avait des valeurs p 1, etc., p n. D'accord ? Bon, ben, le problème ça va être... (*un élève retardataire frappe et rentre*). Alors, je reprends ici, donc notre loi de probabilité on avait défini, on avait des valeurs p 1, etc., p n. Qu'est-ce qu'on sait sur les probabilités quand je définis une loi de probabilité ? Quand je prends un p i quelconque, qu'est-ce que je sais sur une probabilité. Allez, quand vous avez une variable aléatoire comme vous aviez avant. Oui.
Un élève : Elle est inférieure à 1.
Enseignante : Au sens strict ou au sens large ?
L'élève : Au sens large.
Enseignante : Au sens large. C'est tout ce qu'on sait sur un nombre qui est une probabilité ? Florian réveillez-vous s'il vous plait, et tenez-vous correctement, pensez à votre dos. Qu'est-ce qu'on sait d'autre sur une probabilité ? Est-ce que moins cinq ça peut être une probabilité ?
Un élève : Non
Enseignante : Pourquoi ? Oui ?
Un élève : Ça peut pas être négatif
Enseignante : Donc une probabilité c'est un nombre compris entre 0 et 1. Qu'est-ce qu'on sait d'autre quand on avait une loi de probabilité ?
Une élève : La somme des probabilités est égale à 1, de 0 à n !
Enseignante : La somme des probabilités, de i égale 0, non 1, à n (*elle écrit* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Très bien. Alors la question c'est : ça va être quoi ma loi de probabilité continue, pour une variable aléatoire continue.
Un élève : C'est une surface.
Enseignante : C'est une surface, alors y en a qui ont visiblement eu des… pourquoi ce serait une surface ?
L'élève : Parce qu'il y a un nombre infini de valeurs. Mais quand même, l'intervalle ben il est défini. Par exemple là comme c'est entre 15 et 130, on sait que le minimum ce sera 15 et le maximum c'est 130. Donc on pourra quand même délimiter le nombre de valeurs. Mais… c'est comme une fonction quoi. Une fonction elle prend plein de valeurs mais on peut délimiter son intervalle.
Enseignante : Alors, juste, on va terminer ici. C'est toujours mon brouillon, j'ai pas la place. (*Elle trace les axes d'un repère au tableau*). Supposons justement que je m'intéresse à mettre les âges, d'accord ? A partir de 15 et donc ici jusque 130. Supposons que je trace sous forme d'un histogramme, d'accord ? Donc un histogramme ça veut dire d'abord y a pas d'axe vertical. (*Elle efface l'axe des ordonnées*). Comment est-ce qu'on fait pour construire un histogramme ?
Un élève : C'est proportionnel, euh la…
Enseignante : Qu'est-ce qui est proportionnel ?
L'élève : La longueur des…
Enseignante : Voilà, ici, je mets une unité d'aire, supposons je mets 1 comme ça ici (*elle dessine un rectangle et marque 1 dedans*), et donc je vais construire un rectangle donc ici, je me débrouille pour faire par exemple un centimètre de largeur, et puis ici je vais mettre, alors on avait fait ça avec les fréquences, d'accord ? (*On frappe*). Oui entrez ! (*Elle ouvre la porte*). Alors, je pourrais représenter ici mon effectif entre 15 et 30, je pourrais représenter, voilà, voilà, voilà, (*elle dessine des rectangles*),

voilà supposons, voilà, OK ? Et, euh, alors excusez-moi parce que du coup j'ai été interrompue, j'ai perdu le fil, ici, j'ai fait tous des largeurs 1 (*elle retouche pour faire apparaitre des classes d'amplitudes diverses*), 18… 130 vous vous doutez c'est beaucoup plus loin. Moi je me débrouille pour que du coup ici, (*elle hachure*), ça ça me fasse la probabilité d'avoir entre 15 et 16 personnes, d'accord ? ici entre 16 et 17. Donc en fait ici j'ai une aire. D'accord ? Mais on est d'accord que entre 15 et 16 je pourrais affiner davantage. Sur l'histogramme, je peux penser à une histoire d'aire et donc du coup qu'est-ce qu'on va avoir comme idée pour passer à la loi continue ?
Un élève : Une intégrale
Enseignante : On va penser à une intégrale. Pourquoi y a un lien entre intégrale et aire ?
Un élève : Parce que l'intégrale c'est l'aire sous la courbe.
Enseignante : C'est l'aire sous la courbe. Il y a une courbe ici ?
Plusieurs élèves : On peut la tracer…

Épisode 8 : loi de probabilité, cas continu : fonction de densité *(à 49'40'')*



Enseignante : Voilà. Alors il va falloir définir un objet qui s'appelle la densité, qui va être une fonction, et la densité ici ce serait une fonction qui, globalement alors vous voyez ici au lieu de prendre entre 15 et 16 je peux me débrouiller pour prendre un intervalle encore un peu plus petit, encore un peu plus petit (elle trace des verticales dans le rectangle) et je pourrais, en prenant des intervalles beaucoup plus petits, faire apparaitre ici un semblant de courbe qui peut-être serait, bon là je fais un petit peu voilà. Et donc supposons alors que là je fais entre 15 et 20, 21, 22, 23, l'aire entre 15 et 23, ça correspondrait, si j'avais défini une fonction que j'appelle f dont j'ai la courbe représentative, f ce serait la densité. Quelles propriétés graphiquement vous donneriez à cette fonction s'il fallait donner des propriétés vous diriez quoi sur cette fonction ?
Un élève : Continue.
Enseignante : Alors, on se doute, oui la fonction elle est continue c'est-à-dire que j'ai pas de saut, ici, sur l'axe des abscisses, je peux prendre toutes les valeurs possibles, et ma courbe, elle ne va pas s'arrêter pour repartir ailleurs. Donc, OK, ma fonction est continue, est-ce que vous voyez d'autres propriétés.
Un élève : Positive
Enseignante : Positive, très bien, eh donc du coup ben oui en effet si j'ai une fonction continue et positive, je dirai que la probabilité ici que grand x soit dans l'intervalle alors je vais mettre 15 et 30, et 23 excusez-moi, ça va être égal à quoi ?
Un élève : L'intégrale de 15 à 23
Enseignante : L'intégrale sur cet intervalle, donc mes bornes sont données, entre 15 et 23, de la fonction que j'ai définie, f de t d t ou f de x d x. Mais, magique ! (*Elle laisse passer 2 secondes*). D'accord ? Alors, ce que je voulais vous dire ici, c'est que la loi de probabilité, elle nécessite, donc continu, ici si j'ai du discret et ici j'ai du continu, donc à chaque fois dans mon tableau ici j'ai mis discret, ici j'ai mis continu, eh bien je vais définir une fonction qu'on va appeler de densité, et la probabilité, si grand x c'est ma variable aléatoire continue, que grand x soit dans un intervalle J donné, ce sera l'intégrale sur cet intervalle de cette fonction continue, donc ça correspondra à l'aire sous la courbe. Est-ce que globalement vous avez compris ce que j'ai expliqué ? Alors juste une remarque, ici tout à l'heure, il faut quand même vérifier quelque chose que j'ai oublié de dire, c'est que sur tout l'intervalle I où ma fonction est définie…
Un élève : L'intégrale égal à 1.
Enseignante : Voilà, très bien. Vous voyez ici qu'est-ce qu'on a dit. Donc mes probabilités ici elles vont être toujours comprises entre 0 et 1. Et il faudra que l'intervalle, grand x est une variable continue, définie sur un intervalle I, J sera un intervalle plus petit que I (*elle écrit* $J \subset I$). Donc qu'est-ce qui va se passer si je prends l'intégrale de ma fonction de densité, sur tout l'intervalle I, pour que ce soit cohérent avec la définition d'une probabilité ? Qu'est-ce qu'on a dit ici ? la somme des probabilités

doit être égale à 1 sur, si je les prends toutes les valeurs discrètes. Donc là si je prends la probabilité de ma densité sur tout mon intervalle, ça veut dire si j'allais de zéro à cent trente, ça doit être égal à ? à 1. D'accord ? Alors j'ai marqué I ici ; dans mon intervalle ici ce serait l'intervalle qu'on avait donnée tout à l'heure, zéro, cent trente. Et ici, J c'était l'intervalle quinze, vingt-trois. Ici, j'avais fait bien sûr cet intervalle-là, ici ce que j'aurais, c'est que l'intégrale de 0 à 130 de la fonction en question doit être égale à 1. D'accord ? Alors, ça fait beaucoup de choses. Qu'est-ce qu'on va retenir bien sûr, si on fait la synthèse de ce que je viens de définir sur une loi continue, ben maintenant on a compris ce que c'était qu'une loi de probabilité à densité. Qui me résume la situation ? Oui, Inès.

54'34''- récapitulatif
L'élève Ines : Faut qu'on prenne une suite qui est définie par exemple par une fonction f sur un intervalle I.
L'enseignante : Qu'on prenne une suite…
La même élève : Non, non, on va prendre un évènement. En fait, il faut que la fonction elle soit positive et continue.
Enseignante : Alors il faut qu'on ait une fonction continue, positive sur un intervalle I et telle que… (*elle montre la propriété écrite au tableau*) …
La même élève : telle que l'intégrale de f de x d x, par exemple, si I c'est a, b, est égale à 1.
Enseignante : Très bien, (*elle rajoute au tableau « f continue et positive sur I »*). Et qu'est-ce qu'on a dit d'autre ? C'est quoi une variable continue ?
La même élève : Qui prend une infinité de valeurs dans un intervalle.
Enseignante : Voilà. Et quelle est la probabilité d'un évènement ? (*Elle montre la formule déjà écrite au tableau*). La probabilité d'un évènement c'est quoi ?
La même élève : L'intégrale de a à b de f de x d x.
Enseignante : Alors si je travaille sur a, b ! J'aurais pu prendre un intervalle c, d inclus dans a, b. Qui n'a pas compris quelque chose ? Qui pense avoir compris quelque chose ? Levez bien la main, ça fait bien ! Ok, on va voir concrètement, non non mais vous savez bien, vous me connaissez, je sais manier l'ironie.
56'10''

Fin de la retranscription. Narration de la suite de la séance :
L'enseignante fait prendre le cours en note aux élèves. Elle dicte les définitions et propriétés, tout en en écrivant une version abrégée au tableau.
Sa définition de variable aléatoire continue, dictée aux élèves, est : « *soit oméga l'univers d'une variable aléatoire. Une variable aléatoire grand X définie sur oméga, qui peut prendre comme valeurs tout nombre d'un intervalle grand I de R, est dite continue.* »
1er exemple - elle reprend l'exemple qui a servi précédemment : âge d'une population.
(Fin de la vidéo n°1)
Exemple n°2 imaginé par un élève : le nombre de tours que la terre fait autour du soleil. L'enseignante dit qu'il faut fixer une période de temps. Il répond un an. Elle exclut cet exemple en disant qu'il n'y aura pas une infinité de possibilités.
Elle donne d'autres ex : durée de vie de vos téléphones portables ; temps passé sur un jeu (téléphone ou ordi…)
Sa définition de fonction de densité, dictée aux élèves, est : « *une fonction f définie sur un intervalle I est appelée fonction de densité, ou densité, lorsque : f est continue sur I ; f est positive sur I ;* $\int_I f(x)dx = 1$*, c'est-à-dire, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses,* C_f *sur I vaut 1u.a.* »
9'30'' : Elle demande aux élèves de chercher une fonction qui soit une fonction de densité sur un intervalle de leur choix.
15'40'' : fin de la recherche, mise en commun des exemples et contre exemples.
22'30'' : définition d'une loi de probabilité qu'elle dicte : « *Soit oméga l'univers d'une expérience aléatoire et grand X une variable aléatoire continue définie sur oméga, de densité f. La probabilité de*

l'évènement « $X \in J$ » est définie par : $P(X \in J) = \int_J f(t)dt$. C'est l'aire sous la courbe de la densité C_f sur J. »
27'25'' : l'espérance mathématique est abordée, c'est un élève qui en parle spontanément.
34'30'' : elle fait marquer trois remarques. La troisième : $P(X \in \bar{J}) = 1 - P(X \in J)$. Les preuves sont évoquées, par le calcul intégral et par le graphique.
39'13'' : elle demande « *quand est-ce que ça fait zéro ?* » Réponse d'élève : quand J c'est un nombre ; la propriété est prouvée par un calcul d'intégrale. En tant que conséquence, elle énonce $P(X \in [\propto, \beta] = P(X \in [\propto, \beta[)$

Annexe 16 : « Activité » d'introduction aux lois à densité en Terminale ES

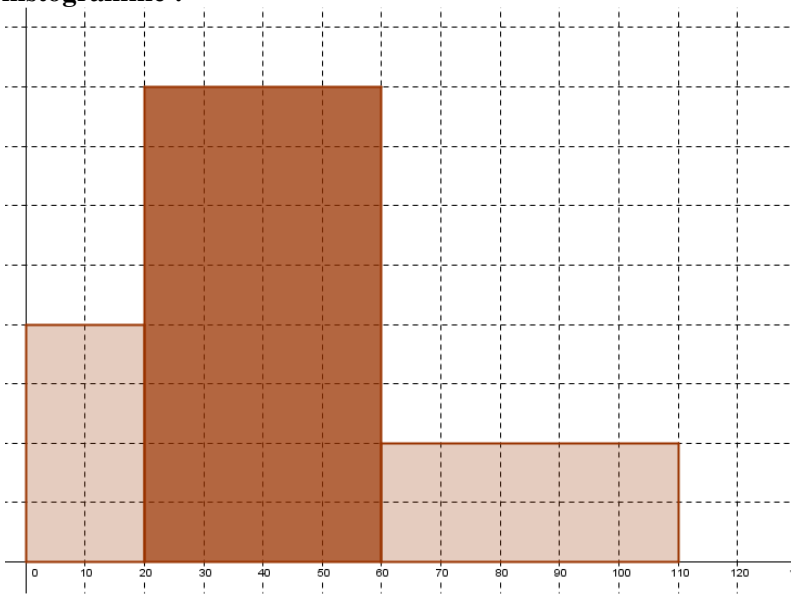
I. Un peu de statistiques :

Les statistiques étudient un caractère (ou **variable**) d'une population.
Exemple :
……
La variable est soit **quantitative** (si elle s'exprime par un nombre), soit **qualitative**.
Exemples de variable qualitative : ……
Exemples de type de diagramme représentant une variable qualitative : ……
……

Quand la variable est quantitative, elle peut être :

- **Discrète**, c'est-à-dire qu'on peut énumérer les valeurs qu'elle prend.
  Exemples de variable statistique discrète : ……..…
  Exemples de types de diagrammes associés : …….
- **Continue**, c'est-à-dire qu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Exemples de variable statistique continue : …….
  Exemples de types de diagrammes associés …….

II. Lecture d'un histogramme :

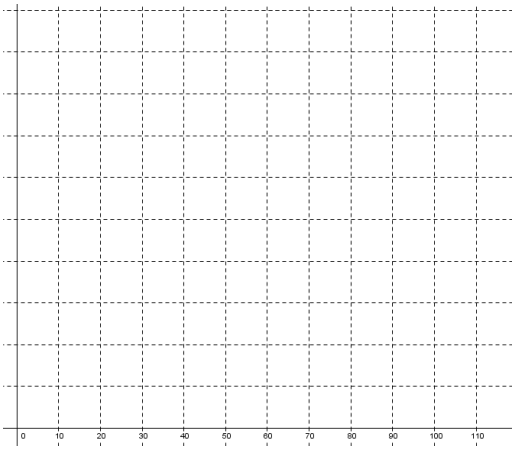


Partie A :
Les populations de trois pays sont réparties de façon semblable. L'histogramme ci-dessus représente cette répartition selon l'âge en années.

1. Au vu de ce graphique, diriez-vous que dans ces pays :
   a) il y a moins d'habitants âgés de plus de 60 ans que de jeunes de moins de 20 ans ?
   b) il y a deux fois plus d'habitants âgés de 20 à 60 ans que de jeunes de moins de 20 ans ?
   c) il y a autant d'habitants âgés de 20 à 40 ans que d'habitants âgés de 40 à 60 ans ?
2. Dans le pays n°1, il y a 16 millions d'habitants de moins de 20 ans. Combien y en a-t-il âgés de 20 à 60 ans ? Combien y en a-t-il âgés de plus de 60 ans ?
3. Dans le pays n°2, il y a au total 75 millions d'habitants. Quel est le nombre d'habitants par tranche d'âge ?
4. Concernant le pays n°3, on ne connait aucun des effectifs par tranche d'âge, ni l'effectif total. Peut-on malgré tout calculer le pourcentage de chaque classe d'âge par rapport à la population totale ?
5. a) Mettez des légendes à ce graphique.
   b) Calculer l'aire de l'histogramme en unité d'aire.

Partie B :

On interroge 100 personnes du pays n°3 au hasard.
Sur ces 100 personnes, 17 ont moins de 20 ans ; 56 ont entre 20 et 60 ans ; 27 ont plus de 60 ans.
Représenter ces données par un histogramme ci-dessous. Comparer à l'histogramme ci-dessus et commenter.



Partie C :
On choisit une personne de ce pays au hasard. Soit *X* la variable aléatoire donnant son âge en années.
Déterminer $P(20 \leq X \leq 60), P(X \geq 60), P(X \leq 20), P(X \geq 20)$
Pourquoi pas à condition de parler de modélisation : $P(10 \leq X \leq 15)$, $P(10 \leq X \leq 10{,}5)$, $P(10 \leq X \leq 10{,}001)$. Ce qui conduit à $P(X = 20)$.

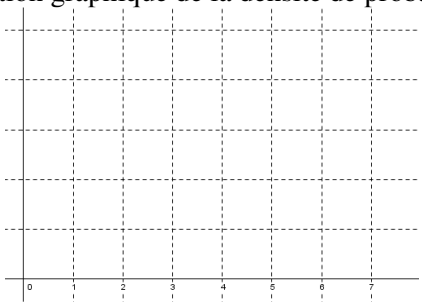
III. Loi uniforme sur un intervalle

Dans le cas d'une expérience aléatoire comportant un nombre fini d'issues, l'équiprobabilité modélise le fait que chaque issue a une égale vraisemblance. Mais que se passe-t-il si les issues peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle borné ?

Étudions le cas où un nombre est choisi au hasard dans l'intervalle [2 ; 6]. Observons l'histogramme des fréquences d'un échantillon aléatoire de 1000 réalisations de cette expérience aléatoire.

On note *X* la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre choisi.

1. Conjecturer la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire *X*.



2. Chaque intervalle de même longueur inclus dans l'intervalle [2 ; 6] a une égale vraisemblance. Quelle valeur attribuer à $P(2 \leq X \leq 4), P(X \geq 5), P(X \in]4{,}23; 5{,}23]), P(X \geq 0), P(X = 2{,}5)$?

Définition : la fonction définie sur …….. par $f(x) =$…… est la fonction de densité de la variable aléatoire *X*. On dit que *X* suit la loi uniforme sur …….

Propriété : pour tout intervalle $[c; d]$ inclus dans l'intervalle [2 ; 6], $P(X \in [c; d]) =$……..
C'est l'aire en unité d'aire du domaine ……
C'est donc $\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots \ldots \ldots$.
En particulier, pour tout réel *c* de l'intervalle [2 ; 6], $P(X = c)$=…….