Université Sorbonne Paris Cité

Université Paris VII - Denis Diderot

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)

Thèse de Doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Benjamin Wagener

Pour le grade de Docteur de l'Université Paris VII

Spécialité : **Mathématiques Pures**

Géométrie Arithmétique sur les Variétés Abéliennes : Minoration Explicite de la Hauteur de Faltings et Borne sur la Torsion

---

dirigée par le Professeur **Marc Hindry**

Thèse soutenue le 22 Novembre 2016,
devant le Jury constitué de :

Pascal Autissier	Professeur	Université de Bordeaux
Antoine Chambert-Loir	Professeur	Université Paris Diderot[Président]
Carlo Gasbarri	Professeur	Université de Strasbourg
Walter Gubler	Professeur	Université de Regensburg [Rapporteur, non présent]
Marc Hindry	Professeur	Université Paris Diderot [Directeur]
Gael Rémond	Directeur de Recherches	CNRS [Rapporteur]

In memory of my Father,
Jacques Wagener,
Everyday friend in my quest.

Résumé-Abstract

Résumé

Ce travail comporte essentiellement deux conclusions. D'une part nous déterminons une minoration de la hauteur de Faltings d'une variété abélienne quelconque sur un corps de nombres faisant intervenir de nouveaux invariants non archimédiens. Il s'agit de la première partie de ce travail dans lequel nous introduisons systématiquement ces invariants. Ils sont liés à la géométrie non archimédienne aux places de mauvaise réduction des variétés abéliennes.

Dans une deuxième partie nous donnons une évaluation approximative de ces invariants nous permettant d'établir une minoration de la hauteur de Faltings faisant intervenir le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron des variétés abéliennes aux places de mauvaise réduction.

On déduit de ces estimations un corollaire qui fournit une borne sur le cardinal du groupe des points rationnels de torsion des variétés abéliennes faisant essentiellement intervenir la hauteur de Faltings. Cette borne est jusqu'à présent la meilleur connue.

Mots clés : géométrie arithmétique, géométrie d'Arakelov, variétés abéliennes, hauteur de Faltings, géométrie non archimédienne, hauteur de Néron-Tate, hauteurs canoniques, hauteurs locales, modèle de Moret-Bailly, modèle de Néron, géométrie des nombres, torsion des variétés abéliennes.

Abstract

This thesis leads essentially to two conclusions. On the one hand we determine a lower bound for the Faltings height of abelian varieties over number fields in which enter new non-archimedean invariants. It consists in the first part of this work in which we introduce systematically this invariants. They are directly linked to the non-archimedean geometry of abelian varities at places of bad reduction.

In a second part we provides an approximative evaluation of this invariants which leads to a lower bound on the Faltings heights in terms of the number of components of the special fiber of the Néron model of abelian varieties at places of bad reduction.

We deduce from this estimates a corollary that provides an upper bound on the cardinality of the group of rational torsion points of abelian varieties essentially in terms of the Falting height. This bound is the best bound known till now.

Keywords : arithmetic geometry, Arakelov geometry, abelian varieties, Faltings height, non-archimedean geometry, Néron-Tate heights, canonical heights, local heights, Moret-Bailly models, Néron model, geometry of numbers, torsion of abelian varieties.

Remerciements

Je dédicace ce travail à tous les jeunes et enfants défavorisés ainsi qu'aux étudiants de l'Université Française.

Si il y a bien une personne qui aurait été particulièrement heureuse de voir ce travail et d'assister à cette soutenance de thèse, c'est bien mon Papa. Que de chemin parcouru depuis mon HLM du 94... Du Collège Le Sacré Coeur à Ablon-sur-Seine au Lycée Stanislas de Paris à 12 ans en passant par le Concours Général de Physique, le Concours Général de Mathématiques et les Olympiades Internationales de Mathématiques et ce jusqu'au Doctorat.

Mon Papa est décédé en Septembre 2008 alors qu'après de nombreuses années déjà difficiles je commençais ma thèse. Bien que j'avais clairement des prédispositions il fut celui qui m'éveilla, tout enfant que j'étais, aux Sciences et, quand bien même, je pris rapidement les devants, il fut aussi celui qui m'encouragea et me soutenut pendant longtemps et sans lequel, sans aucun doute, je n'aurais jamais appris tout ce que j'ai appris et je ne serais jamais allé aussi loin.

Je me souviendrai toujours des longues discussions que nous avions où sa gentillesse et sa bienveillance à mon égard n'avait d'équivalent que dans ma propre passion. Lui qui n'avait pas connu son propre Père, ce fut un dialogue et une relation Père-Fils d'une rare intensité et d'un rare niveau. Bien que je ne puisse plus prononcer "Papa" en ayant une réponse présente de cet être qui m'a été si cher, l'important c'est qu'à travers moi la Vie continue et qu'aujourd'hui une certaine justice soit rétablie en me voyant Docteur.

"MERCI PAPA, ∞^∞ !"

Comme, trop hors norme pour être ce que l'on appelle "un bon élève", je ne suis jamais rentré dans le cadre du système éducatif Français. J'ai cependant un bon souvenir de certains enseignants. Comme par exemple Madame Porrot du Sacré-Coeur qui me connu enfant mais aussi Madame Fauque du Lycée Stanislas qui ne cru pas, sur le coup, qu'en classe de $1^{\text{ère}}$ je fus capable de résoudre intégralement un sujet du Coucours Général de Physique sur de la Mécanique Quantique en 38 pages très détaillées. Mais aussi Madame Escarffe, enseignante de Biologie et enseignante principale de ma classe de Terminale à Stanislas, qui remarqua particulièrement mon potentiel. Et puis, bien sûr, Monsieur Grimaux, mon enseignant de Mathématiques en classe de Terminale, qui bien que je ne suivais pas ses cours, pour travailler de mon côté, connaissait ma valeur. Je l'avoue enfin, je n'ai jamais acheté de livres de Terminale et je n'ai jamais pris aucun cours en Terminale... J'ai aussi un souvenir particulier pour Madame Quieck, enseignante de Latin, qui m'apprit à apprendre... Ainsi que pour Monsieur Clavere, mon enseignant de Philosophie en Terminale, car même si mon travail n'était pas académique, il y reconnu une véritable réflexion.

En revanche, et si il y a d'autres personnes que j'oublie, il y a aussi des gens qui m'ont profondément nui et je tiens à le signaler car il n'est véritablement pas normal qu'on empêche un jeune ayant un potentiel et une passion d'apprentissage de réussir ses études. Je pense en particulier au Lycée Louis Le Grand et à ses enseignants. J'ai vu, dans ce Lycée, et cela vaut la peine de le signaler, le pire de ce qui peut se faire en matière d'enseignement en France. Les gens de Louis Le Grand ne se revendiquent pas du premier Lycée de France pour rien, dans un système éducatif où règne les statu quo de l'Inégalité et de l'Injustice et dont la corrélation avec les taux de criminalités ne fait aucun doute, c'est sans aucun doute le Lycée qui concentre le maximum d'aberrations, d'inégalités et d'injustices ; sans même parler des moeurs diverses qui y courent quand il s'agit de faire tout, n'importe quoi et à n'importe quel prix pour la réussite à tel ou tel examen. Il m'aura fallu presque 16 ans pour rattraper les conséquences de la mauvaise influence de ces enseignants et quand bien même je sois à présent particulièrement fier du parcours que j'ai eu, ma vie et mon parcours aurait pu être beaucoup plus simples et moins douloureux sans eux. Ces gens ont détruit toute une partie de ce qui aurait pu être ma vie et ma carrière, je suis content de constater qu'à présent, j'ai fait encore mieux. C'est un zéro pointé absolu que je met à ces "enseignants" et à ce Lycée, ils ont fait un Mal considérable.

J'aurai passé quasiment douze années de ma vie entre l'Universités Paris Diderot et l'Université Pierre et Marie Curie. Je tiens à remercier tous les membres de l'Institut de Mathématique IMJ-PRG qu'ils soient Mathématiciens ou membres du personnels, ils m'ont très bien accueilli. Je remercie aussi les membres de l'UFR de Physique de l'Université Paris Diderot pour m'avoir permi de continuer à pratiquer ce qui fut l'un de mes grands amours, la Physique. J'ai un très bon souvenir de ces années même si il est absolument lamentable, en fait dramatique pour la société Française, que cette dernière témoigne d'un tel mépris pour ses Universités et en particulier pour ses étudiants. Ce mépris et plus généralement le mépris de la société Françaises pour ce qu'elle nomme, comme étant une race à part, "les jeunes" ou encore pour "les chercheurs" ont des conséquences socio-économiques calamiteuses.

Je ne peux continuer ces remerciements sans avoir une pensée très tendre pour ma Grand-Mère, Margueritte, décédée pendant cette thèse, elle m'a soutenu pendant toutes mes études. C'était une "Mome" d'une époque à présent disparue et dont la chaleur humaine était d'une rare bonté.

Je tiens à remercier ma chère Maman, elle sait bien ce que représente mon parcours qu'il ait été brillant ou particulièrement difficile, elle seule sait bien ce que représente cette thèse où, depuis ma plus tendre enfance, au travers d'années de travail intensif, en passant par de très belles réussites et en accompagnant ma douleur pendant une longue période difficile, je n'ai presque jamais abandonné malgré des doutes, malgré un immense mépris et peu de valorisation pour mon travail ou ma personne. Elle seule sait bien ce que signifie cette réussite.

J'ai aussi une pensée toute particulière pour ma Soeur, ma chère Élodie et pour mon Beau-Frère, mon cher Christophe. Ils ont été témoins de ce qu'à été ma quête et mon calvaire dans ce système éducatif, leur affection a toujours été d'un grand soutient.

Et, bien entendu, j'ai une pensée très chaleureuse pour mes nièces et mon neveu, Marion, 17 ans, Louise, 6 ans, et Pierre, 15 ans. Louise est à l'École Primaire, Pierre est en Seconde et Marion passe son Baccalauréat cette année. Je leur souhaite que leurs chemins soient les plus satisfaisants possibles.

Je pense aussi à ma Marraine, qui vient de fêter ses 90ans, et à mon Parrain, solides tenants et témoins d'une autre époque et d'une autre France, ils attestent de ce qu'est le coeur de la France.

Je remercie ma cousine Sylvie, ancienne enseignante de Mathématiques, pour sa compréhension et son soutient, cette thèse est un témoignage particulier que je lui fait de ce qu'est notre famille.

Et puis bien entendu Jean-René... ! Fraîchement officier de la Légion d'honneur avec une carrière, honorée d'éthique, au service du Peuple et de la Nation Française qui est admirable. Merci Jean-René pour ta considération et pour les échanges, à la fois amicaux et sérieux, que nous avons eu pendant toute la dernière année de ma thèse. Merci d'avoir remis de "l'air dans les roues du vélo" quand j'étais un peu déprimé par la situation...

Je remercie mon ami Dominique de m'avoir soutenu pendant les premières années de cette thèse.

Je remercie mes amis Francesco et Emy, ils sont de ceux qui restent.

Je remercie sincèrement Bodo Lass, à la fois pour son soutient pendant une période difficile et pour le travail admirable qu'il fait au près des jeunes Mathématiciens Français.

Je remercie tout particulièrement Martine, ou encore Martienne, médecin hors normes et amie de tous les jours sans qui, sans aucun doute, ce travail n'aurait jamais abouti. Contrairement à beaucoup d'autres, elle a vu tout de suite quel était mon potentiel et mes capacité et n'a pas hésité à investir beaucoup d'elle-même pour que je puisse réussir. Elle m'a témoigné une amitié hors du commun, cette réussite est aussi la sienne. Je ne la remercierai jamais assez....

Merci Martienne ! !

Aurais-je oublié quelqu'un ? Ah non, celui-là il est absolument inoubliable... Mon cher directeur de thèse, mon cher Professeur, mon cher Marc, mon cher ami, cela fait 9 ans que je te connais et, quand bien même ce travail n'a pas toujours été facile, mon opinion n'a fait que se confirmer depuis le début. Je t'ai rencontré un peu par hasard, il paraît qu'il fait bien les choses, comme enseignant en Master et j'ai remarqué immédiatement ton humanité et tes compétences, lesquelles en plus de nos centres d'intérêt communs, t'ont désigné pour me prendre comme élève. Tes compétences humaines et tes compétences de Mathématicien sont hors normes, je n'aurais pas rêvé mieux comme directeur de thèse. Malheureusement ou heureusement, tu as eu en charge de rattraper ma situation de jeune Mathématicien qui avait été détruite. Je regrette toujours un peu de ne pas avoir pu me montrer face à toi au mieux de ma forme mathématique mais ta compréhension et ton intelligence réelles ont été d'un soutient inestimable. J'ai faillit abandonner, comme tu le sais, il n'y a que tes immenses compétences de Professeur qui ont été à la hauteur pour m'apporter la confiance et le soutient qui m'ont permis d'aller au bout. Cette thèse est certes une réussite pour moi mais c'est aussi une très belle réussite pour toi. Tous ces moments passés à tes côtés en tant qu'élève sont à la fois inoubliables et inestimables. Grâce à toi, cher Marc, ma vie et ma carrière reprennent forme et je compte bien confirmer la valeur de l'investissement conséquent que tu as eu pour moi et pour ce travail en confirmant par la suite.

Je remercie sincèrement les rapporteurs de cette thèse, Gael Rémond et Walteur Gubler, pour leur relecture attentive et sérieuse ainsi que pour leurs remarques précieuses.

Je remercie les membres du Jury, Pascal Autissier, Antoine Chambert-Loir, Carlo Gasbarri et Gael Rémond, ils apportent une conclusion et une fin à ce travail.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Version française

Les variétés abéliennes sont des schémas en groupes intègres, commutatifs et projectifs. Ce sont des objets d'étude fondamentaux de la Géométrie Diophantienne. L'une des notions devenue ces dernières décennies à la fois centrale et fondamentale en Géométrie Arithmétique est celle de hauteur. La hauteur d'un objet arithmético-géométrique est en quelque sorte une complexité arithmético-géométrique représentant de manière quantifiable leur nature à la fois arithmétique et géométrique.

Les estimations de ces hauteurs sont souvent des outils fondamentaux d'étude des objets de la géométrie arithmétique. Dans cette thèse nous obtenons une minoration d'un invariant fondamental des variétés abéliennes définies sur un corps de nombres, la hauteur de Faltings, et nous en déduisons une borne complètement effective sur le cardinal du groupe des points rationnels de torsion.

1.1.1 Cadre général

Une notion de hauteur intrinsèque d'une variété abélienne sur un corps de fonctions de caractéristique positive a été utilisée par Parshin [45]. Suivant une inspiration arakelovienne, la hauteur de Faltings est introduite dans le célèbre article de Faltings [16] démontrant, entre autres, la conjecture de Mordell. Le séminaire Bourbaki de Deligne [14] détaille la définition, en changeant la normalisation essentiellement par une constante.

Soit K un corps de nombres. Masser a montré dans [32] une minoration, connue sous le nom de "Matrix Lemma" ou "Lemme Matriciel", de la hauteur d'une variété abélienne A sur K en termes de matrices des périodes de A pour les différents plongements de $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Il montre que si, dans l'uniformisation usuelle de la variété abélienne en une place $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, on écrit $A_\sigma(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/(D\mathbb{Z}^g + \tau_\sigma\mathbb{Z}^g)$, alors il existe une constante c telle que

$$\|\mathrm{Im}(\tau_\sigma)\| \leq ch(A),$$

où $h(A)$ est une certaine hauteur de la variété abélienne. Ce résultat est l'un des ingrédients utilisés par Masser et Wüstholz [33] pour prouver leur fameux théorème des périodes.

Cet énoncé a été successivement précisé par Bost et David puis par Gaudron-Rémond et Autissier [3].

Le calcul de cette hauteur pour une courbe elliptique E/K est implicite dans [17] et peut s'écrire

$$h(E/K) = \frac{1}{12[K:\mathbb{Q}]}\left\{\log N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{E/K} - \sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \log\left|\Delta(\tau_\sigma)\mathrm{Im}\tau_\sigma^6\right|\right\},$$

où $[K:\mathbb{Q}]$ est le degré du corps de nombres, $N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{E/K}$ désigne la norme sur $\mathbb{Q}$ de l'idéal discriminant minimal $\Delta_{E/K}$ de E/K et où les τ_σ représentent les périodes dans l'isomorphisme $A_\sigma(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau_\sigma\mathbb{Z})$ et enfin $\Delta(\tau)$ désigne la forme modulaire de poids 12 usuelle.

La hauteur de Faltings elle-même étant définie en toute généralité comme un degré d'Arakelov convenablement normalisé du fibré des formes différentielles relatives du modèle de Néron de A/K (voir chapitre 3). Il s'agit donc d'un invariant tout à fait fondamental.

La décomposition en termes locaux, selon les places archimédiennes et selon les places de mauvaise réduction est très utile. On ne dispose pas de formule de ce type en dimension supérieure. Un certain nombre de formules sont néanmoins connues.

Moret-Bailly, complétant un travail de Faltings, établit dans [36] la formule de Noether suivante, valable pour la jacobienne d'une courbe X, notée $A = Jac(X)$, elle s'écrit

$$h(A/K) = \frac{1}{12[K:\mathbb{Q}]}\left\{\omega_{X/K}\cdot\omega_{X/K} + \sum_v \delta_v \log N(v) + \sum_\sigma \delta(X_\sigma)\right\},$$

$N(v)$ étant la norme sur $\mathbb{Q}$ de la place v, c'est-à-dire la norme sur $\mathbb{Q}$ d'un idéal premier définissant la place v.

Notons la présence d'un terme global $\omega_{X/K}\cdot\omega_{X/K} \geq 0$, il s'agit de l'auto-intersection du fibré dualisant des formes différentielles relatives, et la somme de termes locaux. Les δ_v étant très explicitement le nombre de points singuliers de la fibre en v du modèle minimal et $\delta(X_\sigma)$ étant la fonction δ de Faltings introduite dans [17].

La formule permet d'écrire

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v \delta_v \log N(v) + \sum_\sigma \delta(X_\sigma) \leq 12h(A/K).$$

C'est ce type d'inégalité que nous allons généraliser.

On peut citer la formule de Ueno [53], concernant une courbe de genre 2 (on garde la notation $A = Jac(X)$) :

$$h(A/K) = \frac{1}{10[K:\mathbb{Q}]}\left\{\sum_v \mathrm{ord}_v(\Delta_v)\log N(v) - \sum_\sigma \log\left|J_{10}(\tau_\sigma)\det \mathrm{Im}\tau_\sigma^5\right|\right\},$$

où J_{10} est une forme modulaire de Siegel de poids 10, et Δ_v est le discriminant de Ueno (défini dans loc. cit. par Ueno).

La hauteur de Faltings peut-être normalisée de diférentes manières en fonction de la métrique que l'on choisit à l'infini (voir Chapitre 3, remarque de la section 3.2.). Étant donné que la normalisation la plus comunément admise est celle due à Pierre Deligne, nous définissons :

$$\tilde{h}(A/K) = h(A/K) + \frac{g}{2}\log(2\pi),$$

et pour la hauteur stable :

$$\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A/K) = h_{\mathrm{st}}(A/K) + \frac{g}{2}\log(2\pi).$$

Le travail d'Autissier [2] contient deux résultats : une formule pour la hauteur d'une variété abélienne principalement polarisée (A, L) de dimension g, possédant bonne réduction partout :

$$\tilde{h}(A/K) = 2gh(\Theta) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma I(A_\sigma, L_\sigma),$$

où $h(\Theta)$ est la hauteur de Philippon du diviseur Θ (diviseur symétrique définissant la polarisation principale) et $I(A_\sigma, \lambda_\sigma)$ est un certain invariant archimédien qui interviendra aussi dans notre travail, ainsi qu'une formule pour une jacobienne, A, d'une courbe de genre 2 semi-stable

$$\tilde{h}(A/K) = 2gh(\Theta) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v \alpha_v \log N(v) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma I(A_\sigma, L_\sigma),$$

où les α_v sont certaines constantes précisées dans l'article en question qui dépendent du type de réduction en v et qui sont notamment nulles aux places de bonne réduction.

La hauteur du diviseur Theta étant positive, on peut en déduire une inégalité

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v \alpha_v \log N(v) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma I(A_\sigma, L_\sigma) \leq h(A/K)$$

Nous allons démontrer dans cette thèse une inégalité de ce type pour une variété abélienne principalement polarisée sur un corps de nombres et en déduire quelques corollaires d'une part pour une variété abélienne admettant une polarisation quelconque et d'autre part sur le cardinal du groupe des points K-rationnels de torsion.

On peut noter au passage que Autissier dans [3] donne une minoration effective des invariants $I(\cdot,\cdot)$, si (A, L) est une variété abélienne principalement polarisée de dimension g sur $\mathbb{C}$, notant $\rho(A, L)$ le diamètre d'injectivité de (A, L) et $\rho = \min\left(\rho(A, L), \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$; le théorème 2.1 d'Autissier dans [3] stipule que

$$I(A, L) \geq \frac{\pi}{12\rho^2} + \frac{g}{2}\log\rho + \frac{g}{4}\log\frac{3g}{\pi e}.$$

Autissier montre, toujours dans [3], une minoration de la forme :

$$I(A, L) \geq c_g \mathrm{Tr}(\mathrm{Im}(H)) - \epsilon_g,$$

où c_g et ϵ_g sont des constantes qui ne dépendent que de la dimension g et où H est la forme de Riemann de A.

C'est notamment une version non archimédienne de ces invariants que nous fournissons ainsi qu'une minoration effective faisant intervenir essentiellement le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron.

Remarquons que l'hypothèse "principalement polarisée" est en général peu restrictive et peut souvent être contournée en utilisant l'astuce de Zarhin [59] qui démontre que la variété abélienne $A^4 \times \check{A}^4$ est toujours principalement polarisée, $\check{A}$ étant la variété abélienne duale de A.

Notons que notre travail reprend le travail de Bost concernant une minoration de la hauteur de Faltings via l'utilisation d'une certaine formule de degré mais que, outre les résultats concrets, il a ceci de particulièrement intéressant que nous obtenons des estimations non triviales des termes non archimédiens ce qui est relativement nouveau et amène à la question d'un travail ultérieur possible concernant ces évaluations non archimédiennes.

Concernant la torsion, assez peu de choses sont connues sur les variétés abéliennes de dimension quelconque, on connaît le théorème de Mazur-Merel pour les courbes elliptiques, voir [34], qui dit que pour toute courbe elliptique E/K sur un corps de nombres K il existe $c(d)$ ne dépendant que du degré $d = [K:\mathbb{Q}]$ tel que le cardinal du groupe des points K-rationnels de torsion satisfasse :

$$\mathrm{Card}(E(K)_{\mathrm{tors}}) \leq c(d).$$

Il existe aussi un résultat de Masser dans une lettre à Bertrand [31] , où cette fois la variété abélienne A/K est fixée et on considère les points $L-$rationnels de torsion pour des extensions L/K, il existe alors une constante c_A ne dépendant que de A telle que :

$$\mathrm{Card}(A_{\mathrm{tors}}(L)) \leq c_A \cdot ([L:\mathbb{Q}]\log[L:\mathbb{Q}])^g,$$

et le résultat suivant dû à Hindry-Ratazzi [24] :

$$\mathrm{Card}(A_{\mathrm{tors}}(L)) \leq [L:\mathbb{Q}]^{\gamma(A)} \exp\left(\frac{c\log[L:\mathbb{Q}]}{\log\log[L:\mathbb{Q}]}\right),$$

où la valeur optimale de $\gamma(A)$ est calculée pour les variétés abéliennes de type I et II et les produits de celles-ci, dans un travail non encore publié.

Dans notre travail nous obtenons une borne uniforme dépendant du degré du corps de définition, de son discriminant, de la dimension de A et de la hauteur de Faltings de la variété abélienne.

De manière complètement indépendante Rémond dans un travail sur les isogénies obtenait un résultat du type suivant :

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K. Si c est un réel tel que, pour toute variété abélienne A' sur K isogène à A sur K, il existe une K-isogénie $\phi : A \to A'$ avec deg $\phi \leq c$, alors

$$\mathrm{Card}(A(K)_{\mathrm{tors}}) \leq 2^{4g^2 4^g} c^{4g^2+1}[K:\mathbb{Q}].$$

Il est ensuite possible de spécifier c grâce au travail de Rémond et Gaudron [18, 19], dans un texte non encore publié Rémond obtient ainsi une constante explicitée de la forme :

$$\mathrm{Card}(A(K)_{\mathrm{tors}}) \leq c(g,[K:\mathbb{Q}])h(A/K)^{2^{11}g^3(4g^2+1)},$$

dans notre travail nous montrons notamment comme dernier résultat une borne explicite où l'exposant de la hauteur de Faltings est en

$$\tilde{h}(A/K)^g,$$

c'est le meilleur exposant que notre méthode fournit et c'est une amélioration notable du résultat précédent.

1.1.2 Résultats et arguments de démonstration

L'une des principales originalités de ce travail, est qu'étant donnée une variété abélienne principalement polarisée $(A/K, L)$ par un fibré en droites symétrique et un modèle entier hermitien convenable (un modèle de Moret-Bailly) $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ nous reprenons une formule de degrés déjà utilisée par Bost en prenant en compte de manière non triviale les places non archimédiennes de mauvaise réduction. Inégalité qui en incluant la "Formule Clé" de Bost et après avoir convenablement normalisé la hauteur de Faltings s'écrit :

$$-\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) = h_L(P) + \sum_v [K_v:\mathbb{Q}_v]\log\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}},$$

P étant un point rationnel, $h_L(P)$ étant la hauteur de Néron-Tate du point P et $\tilde{h}_{\mathrm{st}}$ étant la hauteur de Faltings stable que nous avons convenablement normalisée, la somme ayant lieu sur toutes les places de K.

Jusqu'à présent, dans toutes les utilisations de cette formule, les termes non archimédiens étaient négligés :

$$\text{Pour toute } v \text{ place non archimédienne, } \log \frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}} \leq 0,$$

ce qui revient à dire que si une section est entière, elle reste entière le long de la section étendant le point P, ce qui est trivialement toujours vrai.

En faisant une moyenne sur les points de torsion, pour lesquels $h_L(P) = 0$, Bost obtenait alors une inégalité du type :

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma),$$

les invariants $I(A_\sigma, L_\sigma)$ associés à une place archimédienne étant obtenus comme une intégrale, limite des sommes de Riemann égales à la moyenne sur les points de torsion. La formule est bien connue, au moins depuis Moret-Bailly, pour les normes archimédiennes de ces sections. La preuve de ce dernier résultat est rappelée dans l'appendice 8 de l'article [18] de Gaudron et Rémond.

Nous obtenons alors comme résultat principal, théorème 5.32, un résultat faisant intervenir de nouveaux invariants que nous notons $J(\cdot,\cdot)$ aux places non archimédiennes de mauvaise réduction, résultat qui prend la forme :

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:\, K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in \mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v) \log\, N(v) \tag{1.1}$$

$N(v)$ étant la norme sur $\mathbb{Q}$ de la place v et, $\mathrm{Bad}(A/K)$, désignant l'ensemble des places de mauvaise réduction de A.

La principale originalité de ce travail est alors l'occurrence des termes $J(A_v, L_v)$ associés à des places non archimédiennes de mauvaise réduction. Nous allons brièvement décrire ici ces termes, pour cela nous avons besoin de faire quelques rappels de la théorie de dégénérescence des variétés abéliennes sur un corps non archimédien.

Un tel calcul des termes non archimédiens est nouveau, nous le fondons essentiellement sur la comparaison entre hauteur locale de Néron-Tate, pour lesquelles des formules dues à Hindry [22] et à Werner [55, 57] sont connues, et normes non archimédiennes. Remarquons que de ce point de vue nous réunissons deux approches a priori différentes, d'un côté le formalisme des hauteurs locales, de l'autre le formalisme des normes de sections de fibrés hermitiens. Ces deux approches sont apparues en théorie des nombres selon un ordre historique et un contexte très différent, il se trouve qu'il s'agit essentiellement du même objet.

Soit A_v/K_v une variété abélienne semi-stable sur un corps non archimédien K_v la théorie de Raynaud que nous décrivons plus précisément dans le deuxième chapitre nous dit, qu'en un sens que nous allons préciser, $A_v(K_v)$ s'écrit comme quotient analytique rigide $A_v(K_v) = G_v/M_v$ où G_v est un certain groupe algébrique commutatif et M_v est un réseau, le tout s'inscrivant dans un diagramme d'espaces analytiques rigides :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & M_v \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T_v \arrow[r] & G_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & C_v \arrow[r] & 0 \\
 & & A_v \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où T_v est un tore déployé et où C_v est une variété abélienne sur K_v admettant bonne réduction. Notons $X(T_v)$ le groupe des caractères de T_v alors l'extension G_v est décrite par un homomorphisme $\tau : X(T_v) \to \mathrm{Pic}^0(C_v)$, ce dernier étant le groupe des fibrés en droites de degré 0.

Soit D le diviseur ample que l'on veut étudier, alors il existe une fonction Θ_v méromorphe sur G_v (une fonction thêta généralisée) et un diviseur E sur C_v tels que

$$q^*D = \mathrm{div}(\Theta_v) + \pi^*E$$

et de plus si l'on définit

$$\Phi_E : \qquad C_v \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C_v)$$

$$a \longrightarrow t_a^*E - E$$

où t_a est la translation par a, alors il existe un homomorphisme $\phi : M_v \to X(T_v)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_v \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"] & G_v(K_v) \arrow[r, "\pi"] & C_v \arrow[d, "\Phi_E"] \\
X(T_v) \arrow[rr, "\tau"] & & \mathrm{Pic}^0(C_v).
\end{tikzcd}$$

Si l'on note $G_v(\mathcal{O}_{K_v})$ le groupe des points K_v-entiers de G_v, en un sens que nous précisons dans le chapitre 2, alors il existe une application de tropicalisation :

$$\mathrm{Trop} : \ G_v(K_v) \longrightarrow \frac{G_v(K_v)}{G(\mathcal{O}_{K_v})} \cong \frac{T_v(K_v)}{T_v(\mathcal{O}_{K_v})} \cong \mathrm{Hom}(X(T_v), K_v^*/\mathcal{O}_v^*) \xrightarrow{-\log|\cdot|_v} \mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R})$$

et alors le fait que M_v soit un réseau est défini en disant que cette application est injective sur M_v et que $\mathrm{Trop}(M_v)$ est un réseau au sens usuel dans l'espace vectoriel réel $\mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r_v}$.

L'équivalent des conditions de Riemann du cas complexe revient alors à dire que A_v/K_v est une variété abélienne si et seulement si la forme bilinéaire $M_v \times M_v \to \mathbb{R}$ définie par

$$(m_1, m_2) \to \mathrm{Trop}(m_1)(\phi(m_2)),$$

est symétrique et définie positive.

On voit ainsi appraître une fois passé au tropicalisé, une certaine forme quadratique, notée $Q_v : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, qui est symétrique et définie positive. On peut la voir comme l'équivalent tropical de la forme de Riemann d'une variété abélienne complexe.

On peut associer à Q_v un certain domaine fondamental qui se trouve être un domaine fondamental naturel associé à Q_v et au réseau $\mathrm{Trop}(M_v)$

$$\mathcal{F}_{Q_v,M_v} = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \forall m \in \mathrm{Trop}(M_v),\ Q_v[x] \leq Q_v[x+m]\}.$$

C'est un polyèdre convexe symétrique.

L'invariant $J(A_v, L_v)$ pour $L = \mathcal{O}(D)$ qui apparaît alors assez naturellement est :

$$J(A_v, L_v) := \int_{\mathcal{F}_{Q_v,M_v}} Q_v[x]dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue bien entendu.

Dans notre chapitre 5, nous considérons d'abord le cas non archimédien torique qui est assez proche du cas complexe et correspond au cas où la variété abélienne ayant bonne réduction C_v dans l'extension est triviale, puis nous traitons le cas général précédemment décrit. L'idée est de travailler comme dans le cas complexe initié par Bost en faisant une moyenne sur les points de torsion, remarquons cependant que dans ce cas de variété abélienne sur un corps non archimédien les calculs sont un peu plus compliqués.

En particulier les normes prennent la forme des hauteurs locales suivantes :

$$\hat{\lambda}_{D,v}(q(t)) = -\log|\Theta_v(t)|_v + \hat{\lambda}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v, \tag{1.2}$$

où $\hat{\lambda}_{E,v}$ est la hauteur locale canonique associée au diviseur E sur C_v, où $H(\cdot,\cdot)$ est la forme bilinéaire qui correspond à Q_v (c'est-à-dire $H_v(t,t) = Q_v(Trop(t))$, et où κ_v est une constante. Il faut alors mener le calcul convenablement pour pouvoir obtenir un résultat substantiel.

Nous obtenons ainsi dans notre chapitre 5, après avoir fait des rappels dans les chapitres précédents concernant les variétés abéliennes, la théorie d'Arakelov ainsi que la théorie des hauteurs, le théorème suivant :

Théorème A. (Théorème 5.32, Chapitre 5) *Soit A/K une variété abélienne semi-stable sur un corps de nombres K principalement polarisée par une polarisation associée à un fibré symétrique L, notons $Bad(A/K)$ les places non archimédiennes de mauvaise réduction de A/K et soient $I(A_., L_.)$ et $J(A_., L_.)$ les invariants précédemment introduits, alors :*

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\ N(v) \tag{1.3}$$

où $\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)$ désigne la hauteur de Faltings stable que nous avons normalisée à notre convenance.

Dans le chapitre 6 nous faisons quelques estimations des invariants non archimédiens. En particulier après avoir montré que l'on peut toujours supposer que les matrices Q_v sont réduites au sens de Minkowski on montre qu'avec cette hypothèse il existe une constante $C(r)$ ne dépendant que de la dimension r_v de T_v telle que

$$\frac{\mathrm{Tr}(Q_v)}{12} \geq J(A_v, L_v) \geq C(r_v)\mathrm{Tr}(Q_v),$$

il s'agit de notre lemme 6.5 du chapitre 6 où nous donnons de plus une forme complètement explicite, mais il est vrai non optimisée, de $C(r)$ et nous donnons de plus comme lemme 6.5 une version plus fine de la constante pour quelques petits r. On en déduit alors, grâce à un résultat devenu classique, qui nous dit que le déterminant $\det(Q_v)$ vérifie :

$$\det(Q_v) = c_v(A, K),$$

la quantité $c_v(A, K)$ étant le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de A/K une inégalité du type :

$$J(A_v, L_v) \geq \tilde{C}(r_v) c_v(A, K)^{1/r_v},$$

r étant la dimension de T_v. Il s'agit de notre proposition 6.8 où nous donnons de plus une forme complètement explicite, certes toujours non optimisée, de la constante $\tilde{C}(r)$.

On déduit alors de ce qui précède une version complètement explicite d'un résultat suggéré par Hindry et Pacheco dans [23] que l'on obtient d'une autre manière :

Théorème B. (Corollaire 6.10, Chapitre 6) *Soit A/K une variété abélienne semi-stable sur un corps de nombres K, notons $\mathrm{Bad}(A/K)$ l'ensemble des places de K en lesquelles A a mauvaise réduction, pour chaque $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$ notons $c_v(A, K)$ le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$ et $N(v)$ la norme sur $\mathbb{Q}$ de l'idéal premier associé à v, alors il existe une constante $c_2(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que :*

$$c_2(g)\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} c_v(A, K)^{1/g} \log\ N(v),$$

où l'on peut prendre

$$c_2(g) = \frac{6\left(\frac{4}{\pi}\right)^{8g} \Gamma\left(\frac{8g+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(8g-1)(8g-2)} \left(\frac{8g+1}{2}\right)^{8g-1}}{g}.$$

où Γ est la fonction d'Euler.

Pour cette valeur particulière de $c_2(g)$ on a

$$c_2(g) \leq 2^{64g^2}$$

On obtient ce dernier résultat à l'aide des estimations précédemment exposées et en écrivant d'abord un équivalent dans le cas principalement polarisé. Autant l'hypothèse de polarisation principale est assez facile à contourner grâce à l'astuce de Zarhin rappelée plus haut autant l'hypothèse de semi-stabilité est beaucoup plus délicate. En particulier on ne sait pas encore comment obtenir un résultat aussi général que le précédent dans le cas d'une variété non semi-stable.

Cependant on obtient une version un peu plus faible dans le cas général qui va nous permettre d'obtenir une borne relativement satisfaisante sur le cardinal du groupe de torsion.

Pour cela définissons l'entier $c'_v(A, K)$ comme égal à $c_v(A, K)$ si la réduction en v est semi-stable ou bien si la caractéristique résiduelle en v vérifie $p_v > 2g + 1$ et comme la partie première à la caractéristique résiduelle de v de $c_v(A, K)$ sinon.

Nous obtenons ainsi une version un peu affaiblie mais plus générale du théorème précédent qui cependant dans sa généralité va nous être très utile :

Théorème C. (Théorème 6.14, Chapitre 6) *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombre K, $\tilde{h}(A/K)$ notre hauteur de Faltings convenablement normalisée,* $\mathrm{Bad}(A/K)$ *l'ensemble des places de mauvaise réduction de A/K, notons pour chaque $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$, $c'_v(A,K)$ l'entier précedemment introduit, $N(v)$ la norme sur $\mathbb{Q}$ de l'idéal correspondant à v, alors il existe une constante $c_3(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que :*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} c'_v(A,K)^{1/g} \log\ N(v) \leq c_3(g)\tilde{h}(A/K),$$

on peut prendre,

$$c_3(g) = \frac{24\left(\frac{4}{\pi}\right)^{8g} \Gamma\left(\frac{8g+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(8g-1)(8g-2)} \left(\frac{8g+1}{2}\right)^{8g-1} \cdot 15^{g(2g-1)} \prod_{i=1}^{2g} (3^i-1)(5^i-1)}{g}.$$

Pour cette valeur particulière de $c_3(g)$ on a :

$$c_3(g) \leq 2^{80g^2}$$

On en déduit alors trivialement le corollaire suivant :

Corollaire D. (Corollaire 6.15, Chapitre 6) *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K et* $\mathrm{Bad}(A/K)$ *l'ensemble de ses places de mauvaise réduction et pour pour une place non archimédienne v, $N(v)$ la norme sur $\mathbb{Q}$ de v, alors il existe une constante $c_3(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} \log\ N(v) \leq c_3(g)\tilde{h}(A/K),$$

$c_3(g)$ étant la constante du théorème précédent.

Nous n'avons pas cherché dans ce texte à optimiser ces constantes, il y a une partie difficile dans l'optimisation de ces constantes qui repose sur de la Géométrie des Nombres et une partie a priori plus abordable qui revient à optimiser certains de nos calcul mais qui cependant compliquerait probablement beaucoup le texte. Nous nous contentons d'expliciter une valeur admissible de ces constantes.

En l'occurrence le corollaire précédent nous permet d'obtenir dans le dernier chapitre une borne sur la torsion. Cela repose sur le théorème des nombres premiers et un lemme nous disant que l'on peut borner la torsion si l'on connaît une place de bonne réduction.

On obtient en particulier une forme complètement explicite sur $\mathbb{Q}$:

Théorème E. (Théorème 7.5, Chapitre 7) *Soit $A/\mathbb{Q}$ une variété abélienne de dimension g et notons $\tilde{h}(A/\mathbb{Q})$ notre hauteur de Faltings normalisée, alors il existe une constante $C_1(g)$ ne dépendant que de g telle que si l'on note $A(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ le groupe des points $\mathbb{Q}-$rationnels de torsion de A :*

$$\mathrm{Card}(A(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}) \leq C_1(g) \max\{1, \tilde{h}(A/\mathbb{Q})\}^g.$$

On peut prendre pour $C_1(g)$,

$$C_1(g) = 2^{3g} c_3(g)^g,$$

où $c_3(g)$ est la constante du théorème précédent.

Pour cette valeur particulière de $C_1(g)$ on a :

$$C_1(g) \leq 2^{81g^3}$$

Dans ce dernier, et dans le suivant, résultat l'exposant de la hauteur de Faltings est le meilleur connu et est optimal avec notre méthode.

Nous déduisons de même grâce à l'existence de formes complètement effectives du théorème des nombres premiers sur un corps de nombres, qu'il existe une version complètement explicite sur les corps de nombres, c'est notre dernier théorème.

Théorème F. (Théorème 7.6, Chapitre 7) *Soit A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K de degré d et de discriminant Δ_K. Notons $\tilde{h}(A/K)$ notre hauteur de Faltings normalisée, alors il existe une constante explicitable $C_2(d, \Delta_K, g)$ ne dépendant que de d, de Δ_K et de g telle que si l'on note $A(K)_{\text{tors}}$ le groupe des points K-rationnels de torsion de A :*

$$\operatorname{Card}(A(K)_{\text{tors}}) \leq C_2(d, \Delta_K, g) \max\{1, \tilde{h}(A/K)\}^g.$$

Le plan de ce mémoire est le suivant. Après ce premier chapitre tenant lieu d'introduction, suivi de la traduction en anglais, le chapitre 2 contient divers préliminaires classiques sur les variétés abéliennes. Le chapitre 3 contient des rappels sur la géométrie d'Arakelov : fibrés hermitiens, modèles de Moret-Bailly, définition de la hauteur de Faltings d'une variété abélienne et sa variante stable et enfin la formule clé reliant la hauteur de Faltings et le degré du fibré hermitien des sections (formule due à Bost). Le chapitre 4 introduit les outils essentiels pour notre étude p-adique : les hauteurs locales de Néron et la théorie de l'uniformisation non archimédienne (due à Raynaud). Le chapitre 5 contient la démonstration du théorème principal, la minoration de la hauteur de Faltings par des termes locaux archimédiens et non archimédiens (formule 1.1). Le chapitre 6 contient la preuve de l'inégalité reliant les termes $J(A_v, L_v)$ et le cardinal du groupe des composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron. Le chapitre 7 contient l'application des théorèmes précédents donnant une borne explicite pour le groupe de torsion en termes de la hauteur de Faltings.

1.2 English introduction

Abelian varieties are integral commutative group schemes. They are fundamental objects of study in Diophantine Geometry. The notion of heights has become during those last decades both central and fundamental in Arithmetic Geometry. The height of an arithmetic-geometric object is a kind of arithmetic-geometric complexity that represents in a quantifiable way both the arithmetic and the geometric nature of that object.

Height estimates are often fundamental tools for the study of objects in arithmetic geometry. In this thesis, we obtain a lower bound for a fundamental invariant of abelian varieties over number fields, the Faltings height, and we deduce from this a bound on the cardinality of the group of rational torsion points that is completely explicit.

1.2.1 General framework

A notion of intrinsic height of an abelian variety over a function field was introduced by Parshin in [45]. After an arakelovian inspiration, the Faltings height was introduced in a celebrated paper of Faltings [16] in which he proved also the Mordell conjecture. In the Bourbaki seminar [14], Deligne details the definition and changes the normalisation just by a constant.

Let K be a number field. Masser in [31] proved a lower bound, known as the "Matrix Lemma", of the height of an abelian variety A over K in terms of the period matrix of A for the embedings $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. He shows that if, in the usual uniformization of an abelian variety with respect to some embeding $K \hookrightarrow \mathbb{C}$, we write $A_\sigma(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/(D\mathbb{Z}^g + \tau_\sigma \mathbb{Z}^g)$, then there exists a constant c such that

$$\|\mathrm{Im}(\tau_\sigma)\| \leq ch(A),$$

where $h(A)$ is some height of the abelian variety A. This result is one of the ingredients used by Masser and Wüstholz in [33] to prove their famous period theorem.

This result has been successively made more precise by Bost and David and then by Gaudron-Rémond and Autissier [3].

In the case of an elliptic curve E/K, the height takes quite an explicit form which appeared first in [17] :

$$h(E/K) = \frac{1}{12[K:\mathbb{Q}]} \left\{ \log N_{K/\mathbb{Q}} \Delta_{E/K} - \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \left| \Delta(\tau_\sigma) \mathrm{Im} \tau_\sigma^6 \right| \right\},$$

where $[K : \mathbb{Q}]$ is the degree of the number field, $N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{E/K}$ is the norm over $\mathbb{Q}$ of the minimal discriminant of E/K and where the τ_σ represents the periods in the isomorphisms $A_\sigma(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau_\sigma \mathbb{Z})$ and $\Delta(\tau)$ denotes the classical weight 12 modular form.

The Faltings height itself is defined in full generality as a suitably normalized Arakelov degree of the bundle of relative differential forms on the Néron model of A/K (see chapter 3.). Hence the Faltings' height is a fundamental invariant of an abelian variety.

A decomposition in local terms, in terms of archimedean places and non-archimedean places of bad reduction, is very useful. We do not know any formula of this kind for abelian varieties of higher dimensions. Nevertheless some formulas are known.

Moret-Bailly, completing previous work of Faltings, established in [36] the following Noether formula, which is true for the Jacobian of a curve X, denoted $A = \mathrm{Jac}(X)$:

$$h(A/K) = \frac{1}{12[K:\mathbb{Q}]} \left\{ \omega_{X/K} \cdot \omega_{X/K} + \sum_v \delta_v \log N(v) + \sum_\sigma \delta(X_\sigma) \right\},$$

$N(v)$ denoting the norm over $\mathbb{Q}$ of the place v, i.e. the norm over $\mathbb{Q}$ of a prime ideal definning the place v.

In this last equation we can see the presence of a global term $\omega_{X/K} \cdot \omega_{X/K} \geq 0$, this is the self-intersection of the dualizing bundle of relative differential forms, as well as the presence of local terms. The terms δ_v being very explicitly the number of singular points of the fibre at v of the minimal model of X, while $\delta(X_\sigma)$ is the $\delta-$function defined by Faltings in [17].

This formula provides :

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v \delta_v \log N(v) + \sum_\sigma \delta(X_\sigma) \leq 12h(A/K).$$

We are going to generalize this kind of inequality.

We can cite also the formula of Ueno in [53], for curves of genus 2 (we keep the notation $A = \mathrm{Jac}(X)$) :

$$h(A/K) = \frac{1}{10[K:\mathbb{Q}]}\left\{\sum_v \mathrm{ord}_v(\Delta_v)\log N(v) - \sum_\sigma \log\left|J_{10}(\tau_\sigma)\det \mathrm{Im}\tau_\sigma^5\right|\right\},$$

Here J_{10} is a Siegel modular form of weight ten and Δ_v is the discriminant (both defined in *loc. cit.* by Ueno).

The Faltings height depends on some normalization of the metrics at infinity (see chapter 3, remark of the section 3.2.). As the most common normalization is due to Pierre Deligne, we define :

$$\tilde{h}(A/K) = h(A/K) + \frac{g}{2}\log(2\pi),$$

and for the stable height :

$$\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A/K) = h_{\mathrm{st}}(A/K) + \frac{g}{2}\log(2\pi).$$

The work of Autissier in [2] contains two results : a formula for the height of a principally polarized abelian variety (A, L) of dimension g which admits good reduction everywhere :

$$\tilde{h}(A/K) = 2gh(\Theta) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma I(A_\sigma, L_\sigma),$$

where $h(\Theta)$ is the Philippon's height of the theta divisor (symmetric divisor defining the principal polarisation) and the $I(A_\sigma, L_\sigma)$ are some archimedean invariants which will also intervene in our own work, and moreover a formula for the Jacobian, A, of a genus 2 semi-stable curve :

$$\tilde{h}(A/K) = 2gh(\Theta) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v \alpha_v \log N(v) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma I(A_\sigma, L_\sigma),$$

where the α_v are some constants made precise in his paper which depends of the reduction type at v and which are zero at places of good reduction.

As the height of the theta divisor is positive, one can deduce the inequality :

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v \alpha_v \log N(v) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma I(A_\sigma, L_\sigma) \leq h(A/K)$$

In this thesis we prove an inequality of this kind, first for a semi-stable principally polarized abelian variety over a number field. We then modify the inequality, dropping the condition of existence of a principal polarization and the condition of semi-stability. We deduce from this some corollaries, one of the most interesting being an explicit bound for the cardinality of the group of rational torsion points.

We can note moreover that Autissier in [3] gives an effective lower bound for the invariants $I(\cdot,\cdot)$, if (A, L) is a pricipally polarized abelian variety of dimension g over $\mathbb{C}$, denoting $\rho(A, L)$ the injectivity radius of (A, L) and $\rho = \min\left(\rho(A, L), \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$, the theorem 2.1 of Autissier in [3] provides :

$$I(A, L) \geq \frac{\pi}{12\rho^2} + \frac{g}{2}\log\rho + \frac{g}{4}\log\frac{3g}{\pi e}.$$

Autissier proves, also in [3], a lower bound of the form :

$$I(A, L) \geq c_g \mathrm{Tr}(\mathrm{Im}(H)) - \epsilon_g,$$

where c_g and ϵ_g are some constants depending only on the dimension g and where H is the Riemann form of A.

In our work we provide non-archimedean invariants of this kind and suitable lower bounds depending essentially on the number of components of the Néron model.

Let us make the remark that the hypothesis of being "principally polarized" can often be by-passed by using the well known Zarhin trick [59] which says that the abelian variety $A^4 \times \check{A}^4$ is always principally polarized, $\check{A}$ being as usual the dual abelian variety of A.

Our work follows the previous work of Bost providing a lower bound for the Faltings height using some formula of degree, but what is specially interesting is that we provide non-trivial estimates of the non-archimedean terms, something that is new and rises the question of future possible works in the direction of these non-archimedean estimates.

About the torsion, very little is known for abelian varieties of arbitrary dimensions. We know the famous Mazur-Merel theorem for elliptic curves, see [34], which says that for any elliptic curve E/K over a number field K there exists $c(d)$ depending only on the degree $d := [K : \mathbb{Q}]$ such that :

$$\mathrm{Card}(E(K)_{\mathrm{tors}}) \leq c(d).$$

There also exists a results of Masser in a letter [31] to Bertrand, where the abelian variety A/K is fixed and where one consider $L-$torsion points for extensions L/K, then there exists a constant c_A only depending on A such that :

$$\mathrm{Card}(A_{\mathrm{tors}}(L)) \leq c_A \cdot ([L : \mathbb{Q}]\log[L : \mathbb{Q}])^g,$$

and we know also the result of Hindry-Ratazzi [24] :

$$\mathrm{Card}(A_{\mathrm{tors}}(L)) \leq [L : \mathbb{Q}]^{\gamma(A)} \exp\left(\frac{c\log[L : \mathbb{Q}]}{\log\log[L : \mathbb{Q}]}\right),$$

where the optimal value of $\gamma(A)$ is computed for an abelian variety of type I or II and products of these, in a paper still unpublished.

In our work we obtain a uniform bound depending, on the degree of the field of definition, on its discriminant, on the dimension of A and the Faltings height.

Independently, in a work about the degree of isogenies, Rémond obtained a result of the following type :

Let A be an abelian variety over a number field K. If c is a real number such that, for any abelian variety A' which is K-isogenous to A, there exists an isogeny $\phi : A \to A'$ with $\deg \phi \leq c$ then :

$$\mathrm{Card}(A(K)_{\mathrm{tors}}) \leq 2^{4g^2 4^g} c^{4g^2+1}[K : \mathbb{Q}].$$

It is then possible to specify c after a work of Rémond and Gaudron [18, 19], in an unpublished paper, Rémond obtains a bound like :

$$\mathrm{Card}(A(K)_{\mathrm{tors}}) \leq c(g, [K : \mathbb{Q}]) h(A/K)^{2^{11} g^3 (4g^2+1)},$$

in our work we obtain as a last result an upper bound on torsion where the exponent in the Faltings height is of the form

$$\tilde{h}(A/K)^g,$$

this is the best exponent that our method provides and this is a good improvement of the previous result.

1.2.2 Results and the corresponding arguments

One of the main originalities of our thesis is that being given a principally polarized abelian variety $(A/K, L)$ with a symmetric polarization L and a suitable hermitian integral model (a Moret-Bailly model) $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ we use what is essentially a degree formula also used by of Bost and take into account in a completely non-trivial manner the non-archimedean places with bad reduction. This inequality, after including in it the "Key Formula" of Bost, and after having suitably normalized the Faltings height reads :

$$-\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) = h_L(P) + \sum_v [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^* \mathcal{L}, v}}{\|s\|_{\mathcal{L}, v}},$$

where P is a rational point, $h_L(P)$ its Néron-Tate height and $\tilde{h}_{\mathrm{st}}$ is the Faltings height after some normalisation, the sum itself is over all places of K.

Till now, each time this formula had been used, the non-archimedean terms were neglected :

$$\text{For all non-archimedean } v, \ \log \frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^* \mathcal{L}, v}}{\|s\|_{\mathcal{L}, v}} \leq 0,$$

which is due to the fact that if a section is integral, it remains integral along the section extending the point P, which is trivially always true.

By performing an average over torsion points, for which $h_L(P) = 0$, Bost has deduced the following inequality :

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma),$$

the invariants $I(A_\sigma, L_\sigma)$ being defined by an integral obtained as limit of the Riemann sums corresponding to the average over torsion points. The formula for the archimedean norms of those sections, is well known at least since Moret-Bailly. The proof of this last result is reproduced as appendix 8 in the paper [18] of Gaudron and Rémond.

We obtain then as a main result, theorem 5.32, an inequality in which new invariants, that we denotes $J(\cdot, \cdot)$, at non-archimedean places with bad reduction, occur ; the inequality has the following form :

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in \mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\ N(v) \tag{1.4}$$

where $N(v)$ is the norm over $\mathbb{Q}$ of a place v and $\mathrm{Bad}(A/K)$ being the set of all non-archimedean places with bad reduction.

The main originality of our work is then the occurrence of the terms $J(\cdot,\cdot)$, which we are going to briefly describe a little bit more precisely.

Such a computation of the non-archimedean terms of this equality is new, it relies essentially on the comparison between Néron-Tate local heights, for which formulas due to Hindry [22] and Werner [55, 57] are known, with non-archimedean norms of sections. We remark that those are two points of view that appeared in number theory in different contexts and diffent chronological order but that represent fundamentally the same objects.

Let A_v/K_v be a semi-stable abelian variety over a non-archimedean field K_v, Raynaud theory, which we describe more precisely in chapter 2, says that $A(K_v)$ can be written as a rigid analytic quotient $A_v(K_v) = G_v/M_v$ where G_v is some commutative algebraic group and where M_v is a lattice, such that we have a diagram of rigid analytic spaces :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & M_v \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T_v \arrow[r] & G_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & C_v \arrow[r] & 0 \\
 & & A_v \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

where T_v is a torus and where C_v is an abelian variety over K_v with good reduction. Denoting by $X(T_v)$ the group of characters of T_v then the extension G_v is described by some homomorphism $\tau : X(T_v) \to \mathrm{Pic}^0(C_v)$, this last group being the group of line bundles of degree 0.

Let D be the ample divisor that we want to study, then there exists a meromorphic function Θ_v (a generalized theta function) and a divisor E on C_v such that :

$$q^*D = \mathrm{div}(\Theta_v) + \pi^*E,$$

if, moreover, one defines

$$\begin{aligned} \Phi_E : \qquad C_v &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C_v) \\ a &\longrightarrow t_a^*E - E \end{aligned}$$

where t_a is the translation by a, then there exist a homomorphism $\phi : M_v \to X(T_v)$ that gives rise to a commutative diagram :

$$
\begin{tikzcd}
M_v \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & G_v(K_v) \arrow[r, "\pi"] & C_v \arrow[d, "\Phi_E"] \\
X(T_v) \arrow[rr, "\tau"] & & \mathrm{Pic}^0(C_v).
\end{tikzcd}
$$

If now we denote $G_v(\mathcal{O}_{K_v})$ the group of K_v-integral points of G_v, in a sense that we make precise in chapter 2, then there exists a tropicalisation map :

$$\mathrm{Trop}: \ G_v(K_v) \longrightarrow \frac{G_v(K_v)}{G(\mathcal{O}_{K_v})} \cong \frac{T_v(K_v)}{T_v(\mathcal{O}_{K_v})} \cong \mathrm{Hom}(X(T_v), K_v^*/\mathcal{O}_v^*) \xrightarrow{-\log|\cdot|_v} \mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R})$$

and then the fact that M_v is a lattice is properly defined by saying that this map is injective on M_v and that $\mathrm{Trop}(M_v)$ is a lattice in the usual sense in $\mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r_v}$.

The equivalent of the Riemann condition in the complex case is then that A_v/K_v is an abelian variety if and only if the bilinear map $M_v \times M_v \to \mathbb{R}$:

$$(m_1, m_2) \to \mathrm{Trop}(m_1)(\phi(m_2)),$$

is positive definite.

We then see, after tropicalization, that some positive definite quadratic form, which we will denote $Q_v : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, appears.

We can then associate to Q_v a fundamental domain which turns to be a natural fundamental domain associated to Q_v and to $\mathrm{Trop}(M_v)$.

$$\mathcal{F}_{Q_v,M} = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \forall m \in \mathrm{Trop}(M_v), \ Q_v[x] \leq Q_v[x+m]\}.$$

This is a convex symmetric polyhedron.

The invariant $J(A_v, L_v)$ for $L_v = \mathcal{O}(D)$ which appears then quite naturally is then :

$$J(A_v, L_v) := \int_{\mathcal{F}_{Q_v,M_v}} Q_v[x]dx,$$

where dx is the usual Lebesgue measure.

In our chapter 5, we first consider the non-archimedean toric case which is close to the complex case and corresponds to the situation where the abelian variety with good reduction C_v is trivial, we then treat the general case. Our idea was to work as Bost did, by performing an average over torsion points, but we remark that in the non-archimedean case the computations are a little bit more complicated.

Especially, the norms takes the form of the following local heights :

$$\hat{\lambda}_{D,v}(q(t)) = -\log|\Theta_v(t)|_v + \hat{\lambda}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v, \tag{1.5}$$

where $\hat{\lambda}_{E,v}$ is the local canonical height associated to E on C_v, where $H_v(\cdot,\cdot)$ is a bilinear form and corresponds to Q_v (i.e. $H_v(t,t) = Q_v(Trop(t))$ and where κ_v is some constant. The computation has then to be performed carefully in order to provide the proper result.

We then obtain in our chapter 5, after some reminders in the previous chapter about abelian varieties, Arakelov theory and the theory of heights, the following result :

Theorem A. (Théorème 5.32, Chapter 5) *Let A/K be a semi-stable abelian variety over a number field K which is principally polarized by a symmetric line bundle L, let* $\mathrm{Bad}(A/K)$ *be the set of non-archimedean places of K at which A admits bad reduction and let $I(\cdot,\cdot)$ and $J(\cdot,\cdot)$ be the previously defined invariants, then :*

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\ N(v) \tag{1.6}$$

where $\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)$ is the Faltings height that we have normalized for convenience.

In the chapter 6, we make some estimations of those non-archimedean invariants. Especially after having shown that we can always suppose that the matrices Q_v are reduced in the sense of Minkowski we show that with this hypothesis there exists some constant $C(r)$ depending only on the dimension r_v of T_v such that :

$$\frac{\mathrm{Tr}(Q_v)}{12} \geq J(A_v, L_v) \geq C(r_v)\mathrm{Tr}(Q_v),$$

it is our lemma 6.5 of chapter 6 where we provide an explicit, yet not optimal, admissible value for $C(r)$, and better estimations for $r = 2,3,4,5$. We then deduce thanks to a result that has become classical which says that :

$$\det(Q_v) = c_v(A,K),$$

this last integer being the number of components in the special fibre of the Néron model of A/K that :

$$J(A_v, L_v) \geq \tilde{C}(r_v)c_v(A,K)^{1/r_v},$$

where r_v is the dimension of T_v. This is our proposition 6.8 of chapter 6, where we moreover provide an explicit yet non-optimal admissible value for $\tilde{C}(r)$.

We deduce from this a version of a theorem that was first suggested by Hindry and Pacheco in [23] but that we make completely explicit and that we obtain in an other way :

Theorem B. (Theorem 6.14, Chapter 6) *Let A/K be a semi-stable abelian variety over a number field K, let* $\mathrm{Bad}(A/K)$ *be the set of non-archimedean places of K where A admits bad reduction, for each $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$ let $c_v(A,K)$ be the number of components of the special fibre of the Néron model of $A \times_K K_v$ and $N(v)$ the norm over $\mathbb{Q}$ of v, then there exists a constant $c_2(g)$ depending only on the dimension g of A such that :*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)} c_v(A,K)^{1/g}\log\ N(v) \leq c_2(g)\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A),$$

we can take,

$$c_2(g) = \frac{6\left(\frac{4}{\pi}\right)^{8g}\Gamma\left(\frac{8g+1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^{(8g-1)(8g-2)}\left(\frac{8g+1}{2}\right)^{8g-1}}{g}.$$

For this special value of $c_2(g)$ we have :

$$c_2(g) \leq 2^{64g^2}.$$

We obtain this result with the previous estimations and by writing first the case of a principally polarized abelian variety. The hypothesis of being "principally polarized" is quite easy to by-pass thanks to Zarhin's trick reminded earlier but the hypothesis of semi-stability is much more subtle. In particular we do not know how to obtain such a result in full generality, in the case when the variety is not semi-stable.

However we can obtain a weaker result in the general case, and this generality is sufficient to obtain quite a good upper bound on the cardinality of the group of rational torsion points.

For this purpose we first define $c'_v(A,K)$ for a place v of K, either as being equal to $c_v(A,K)$ when the residual characteristic of v satisfies $p_v > 2g+1$ or when the reduction at v is semi-stable, or as the part of $c_v(A,K)$ that is prime to the residual characteristic of v in other cases.

We then obtain a slightly weaker but more general version of the previous theorem that takes the following form :

Theorem C. (Théorème 6.14, Chapter 6) *Let A/K be an abelian variety over a number field K, let $\tilde{h}(A/K)$ our suitably normalized Faltings' height, denote by $\mathrm{Bad}(A/K)$ the set of non-archimedean places of K at which A admits bad reduction, $c'_v(A,K)$ the previously introduced integer, $N(v)$ the norm over $\mathbb{Q}$ of the place v, then there exists a constant $c_3(g)$ depending only on the dimension g of A such that :*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)} c'_v(A,K)^{1/g}\log\ N(v) \leq c_3(g)\tilde{h}(A/K),$$

one can take,

$$c_3(g) = \frac{24\left(\frac{4}{\pi}\right)^{8g}\Gamma\left(\frac{8g+1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^{(8g-1)(8g-2)}\left(\frac{8g+1}{2}\right)^{8g-1}\cdot 15^{g(2g-1)}\prod_{i=1}^{2g}(3^i-1)(5^i-1)}{g}.$$

For this special value of $c_3(g)$ we have :

$$c_3(g) \leq 2^{80g^2}.$$

From this we can deduce trivially the following corollary :

Corollary D. (Corollaire 6.15, Chapter 6) *Let A/K be an abelian variety over a number field K, $\mathrm{Bad}(A/K)$ the set of non-archimedean places of K at which A admits bad reduction and $N(v)$ the norm over $\mathbb{Q}$ of a place v, then there exists a constant $c_3(g)$ depending only on the dimension g of A such that :*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)}\log\ N(v) \leq c_3(g)\tilde{h}(A/K),$$

one can take for $c_3(g)$ the constant of the preceeding theorem.

We haven't really tried in this text to optimize the constants, there is a difficult part of Geometry of Numbers in it and perhaps an easier part that rely on optimizing our computations nevertheless such optimization would make the text more complicated. We compute explicit admissible values for the constants and this is already enough for us.

Especially the previous corollary allows us in our chapter 7 to write a bound on the cardinality of the group of rational torsion points. This is a consequence of the prime number theorem and of a lemma that permits to bound torsion once we know a suitable place of good reduction.

Thus we obtain the following theorem over $\mathbb{Q}$:

Theorem E. (Théorème 7.5, Chapter 7) *Let $A/\mathbb{Q}$ be an abelian variety of dimension g and $\tilde{h}(A/\mathbb{Q})$ our Faltings height suitably normalized then there exists an explicit constant $C_1(g)$ depending only on g such that if we denote $A(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ the group of $\mathbb{Q}-$rational torsion points we have :*

$$\text{Card}(A(\mathbb{Q})_{\text{tors}}) \leq C_1(g) \max\{1, \tilde{h}(A/\mathbb{Q})\}^g.$$

Where we can take for $C_1(g)$,

$$C_1(g) = 2^{3g} c_3(g)^g,$$

$c_3(g)$ being the term of the previous theorem.

For this special value of $C_1(g)$ we have :

$$C_1(g) \leq 2^{81g^3}.$$

In this previous theorem, and in the following, the exponent of the Faltings height is the best known.

We then finally deduce from the existence of effective versions of the prime number theorem over number fields that there exists an explicit form with quite a good exponent over number fields. This is our last theorem.

Théorème F. (Théorème 7.6, Chapitre 7) *Let A/K be an abelian variety of dimension g over a number field K of degree d and of discriminant Δ_K. Denote $\tilde{h}(A/K)$ our suitably normalized Faltings height, then there exists a constant $C_2(d, \Delta_K, g)$, that can be made explicit, depending only on d, on Δ_K and on g such that if we denote $A(K)_{\text{tors}}$ the group of K-rationnal torsion points of A :*

$$\text{Card}(A(K)_{\text{tors}}) \leq C_2(d, \Delta_K, g) \max\{1, \tilde{h}(A/K)\}^g.$$

The plan of this memoir is the following. After the first introductory chapter, chapter 2 contains various preliminaries on abelian varieties. Chapter 3 reviews some aspect of Arakelov geometry : hermitian bundles, Moret-Bailly models, the definition of the Faltings height of an abelian variety and its stable variant and finally the key formula linking the Faltings height with the degree of the hermitian bundle of sections (formula due to Bost). Chapter 4 introduces the crucial tools for our p-adic study : local Néron heights and the theory of p-adic uniformisation (due to Raynaud). Chapter 5 contains the proof of the main theorem, the lower bound for the Faltings heights by local terms both archimedean and non archimedean. (formula 1.4). Chapter 6 contains the proof of the inequality connecting the terms $J(A_v, L_v)$ with the cardinality of the group of components of the special fibre of the Néron model. Chapter 7 contains the application of the previous results to give an explicit bound for the torsion group, in terms of the Faltings height.

Chapitre 2

Préliminaires

L'objectif de cette thèse est la minoration d'un invariant arithmetico-géométrique essentiel, la hauteur de Faltings, sur les variétés abéliennes. Dans ce chapitre nous présentons donc les objets sur lesquels nous allons travailler, c'est-à-dire les variétés abéliennes.

La théorie des variétés abéliennes remonte au moins à Abel et Jacobi avec l'étude des intégrales dites, à présent, abéliennes et qui est en lien avec la résolution des équations polynômiales. Les premières variétés abéliennes qui apparurent sont connues maintenant sous le nom de variétés Jacobiennes associées à une courbe.

La généralisation de ceci a conduit au dévelopement de l'étude de ces objets qui fut largement dévelopée au cours des XIXième et XXième siècle. Pour une introduction historique on peut conseiller de lire l'introduction de [5].

Dans ce chapitre nous présentons assez brièvement la théorie des variétés abéliennes définies sur $\mathbb{C}$ puis nous présentons les bases de la géométrie rigide et ce qu'il nous faut concernant les variétés abéliennes sur un corps non archimédien.

La théorie sur $\mathbb{C}$ est à présent bien connue et à été largement exposée dans divers ouvrages (Cf. [28, 40, 51]...).

En revanche la théorie sur un corps non archimédien n'a été développée que plus tard notamment sous l'influence de John Tate pour la Géométrie Rigide et de celle de Michel Raynaud pour la théorie d'uniformisation correspondante [46, 41, 6, 48].

2.1 Les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$

Une variété abélienne A définie sur un corps K est par définition un schéma en groupes intègre, commutatif et projectif. Il est bien connu que demander à ce qu'un schéma en groupe soit projectif implique automatiquement qu'il est commutatif (cela est prouvé par exemple dans [40] ou voir par exemple [28] Ch. II Théorème 1).

Sur $\mathbb{C}$, il est naturel de rechercher les variétés abéliennes parmi les tores $\mathbb{C}^g/\Lambda$ où Λ est un réseau dans $\mathbb{C}^g$, c'est-à-dire un sous-groupe libre et discret de rang maximal.

En général, un tore quelconque n'est pas nécessairement projectif, et donc un tore n'est pas nécessairement une variété abélienne.

Pour qu'un tore $\mathbb{C}^g/\Lambda$ soit une variété abélienne il faut et il suffit qu'il existe une forme hermitienne $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ qui soit définie positive et telle que $(\mathrm{Im}\ H)(\Lambda \times \Lambda)$ soit inclus dans $\mathbb{Z}$ (C'est le Théorème de Lefschetz, c.f. [40]).

Dans le cadre de ce travail, la situation intéressante est celle des variétés abéliennes définie sur un corps à valuation non archimédienne. Nous les présenterons plus tard dans ce chapitre. En attendant nous présentons dans cette section l'essentiel de ce qui concerne les tores complexes et les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ dans le but d'établir un parallèle.

2.1.1 Les tores complexes et les variétés abéliennes

Concernant les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$, il est naturel de rechercher de tels objets parmi les tores complexes $\mathbb{C}^g/\Lambda$ présentés précédemment. La première question qui peut se poser est alors de savoir si une telle variété est nécessairement un tore. Les propriétés particulières de $\mathbb{C}$ font que dans ce cas la réponse est oui. Plus précisément une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ est, entre autres, un groupe de Lie complexe, connexe et compact (car projectif) et le lemme 1.1.1. de [5] ch.1 énonce justement qu'un tel groupe de Lie est nécessairement un tore. Dans le cas d'une variété abélienne définie sur un corps non archimédien, la réponse à cette question est beaucoup plus délicate comme nous le verrons dans ce chapitre.

La question naturelle qui suit est alors de savoir parmi tous ces tores quelles sont les variétés abéliennes. C'est une question plus délicate qui fut résolue par Lefschetz.

Généralités sur les tores complexes

On peut montrer (Cf. [5, Ch1]), cela fait partie des propriétés agréables de ce genre d'objets, qu'une application holomorphe $h : X = \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}^{g'}/\Lambda'$ s'écrit de manière unique comme $h(x) = f(x) + h(0)$ où f est un homomorphisme de groupe induit par une application $\mathbb{C}-$linéaire $F : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^{g'}$ telle que $F(\Lambda) \subset \Lambda'$. Alors, l'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-tore de X' et $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe fermé de X.

Parmi les morphismes entre tores complexes, on peut distinguer les isogénies. Ce sont des homomorphismes surjectifs à noyau fini. Ceci pouvant être pris comme définition. On peut aussi remarquer qu'une isogénie est toujours, à isomorphisme près, de la forme d'une application quotient $X \to X/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe fini de X.

Si $[n]$ désigne la multiplication par un entier n non nul, dans le sens que $[n]P = \underbrace{P + P + P + \cdots + P}_{\text{nfois}}$, $[-n]P = -[n]P$ pour un point P de X, on peut vérifier que l'application $[n] : X \to X$ est une isogénie.

Plus précisément,

$$\mathrm{Ker}[n] = \frac{1}{n}\Lambda/\Lambda \cong \Lambda/n\Lambda \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

Comme variété réelle, $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ est topologiquement isomorphe au produit de $2g$ cercles, $(\mathbb{S}^1)^{2g}$. On peut en déduire notamment que les groupes d'homologie et de cohomologie singulière $H_n(X, \mathbb{Z})$ et $H^n(X, \mathbb{Z})$ sont des groupes abéliens de type fini.

Nous voyons de plus que :

$$\pi_1(X) = H_1(X, \mathbb{Z}) = \Lambda.$$

On peut de plus montrer par l'isomorphisme de Künneth que :

$$\bigwedge^n H^1(X, \mathbb{Z}) \cong H^n(X, \mathbb{Z}),$$

on peut en déduire notamment que $H_n(X, \mathbb{Z})$ et $H^n(X, \mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}-$modules libres de rang $\begin{pmatrix} 2g \\ n \end{pmatrix}$.

De plus, le théorème des coefficents universels nous donne :

$$H^n(X, \mathbb{C}) = H^n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

On peut également montrer que

$$H^n(X,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Alt}^n_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) := \bigwedge^n \mathrm{Hom}_{\Re}(V,\mathbb{C}) \cong \bigwedge^n H^1(X,\mathbb{C}).$$

Finalement, le fameux théorème de de Rham :

$$H^n(X,\mathbb{C}) \cong H^n_{dR}(X),$$

permet d'une part, d'identifier $H^n(X,\mathbb{C})$ avec les n-formes formes différentielles sur X qui sont invariantes par translation et d'autre part, la théorie de Hodge permet une décomposition

$$H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^{p,q},$$

où les $\mathcal{H}^{p,q}$ désignent l'espace des formes harmoniques sur X qui sont p-fois $\mathbb{C}-$linéaires et q-fois $\mathbb{C}-$antilinéaires.

Entre autres un tel tore est une variété Kählerienne et dans le cas des tores nous avons l'identification :

$$\mathcal{H}^{p,q} \cong \bigwedge^p \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C}) \otimes \bigwedge^q \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V,\mathbb{C}),$$

où $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}$ désigne les homomorphismes $\mathbb{C}$-antilinéaires.

Si on choisit des coordonnées $z_1,\dots,z_g$ sur $\mathbb{C}^g$ dont on note $dz_1, dz_2,\dots,dz_g$ leurs différentielles considérée comme forme constantes de type $(1,0)$ on peut définir les $1-$formes réelles $dx_1, dx_2,\dots,dx_g$ et $dy_1, dy_2,\dots,dy_g$ définies par $dz_j = dx_j + idy_j$.

Si ω est une forme différentielle de type (p,q) sur un tore complexe (plus généralement sur une variété complexe), $d\omega$ se décompose en $\partial\omega + \bar{\partial}\omega$ où $\partial\omega$ est de type $(p+1,q)$ et $\bar{\partial}\omega$ est de type $(p,q+1)$: si

$$\omega = \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le g\\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le g}} \omega_{i_1,i_2,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge d\bar{z}_{j_2}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q}$$

,

$$\partial\omega = \sum_{k=1}^{g} \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le g\\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le g}} \frac{\partial\omega_{i_1,\dots i_p,j_1,\dots,j_q}}{\partial z_k} dz_k\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge dz_{j_1}\cdots\wedge dz_{j_q},$$

et

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{k=1}^{g} \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le g\\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le g}} \frac{\partial\omega_{i_0,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge dz_{j_1}\cdots\wedge dz_{j_q}.$$

Étant donné un tore complexe X, on peut définir l'intégrale d'une forme comme l'intégrale de la forme réelle associée, une forme différentielle est alors dite entière sur X si son intégrale par rapport à toute sous-variété de dimension appropriée de X est un entier.

On peut alors montrer, qu'un tore complexe X est une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe une forme de Kähler entière sur X (voir [13] pour le lien avec la formulation qui suit).

Fibrés en droites sur les Tores complexes

Le groupe de Picard, noté $\mathrm{Pic}(X)$ et constitué des classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur X est canoniquement isomorphe au premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ où $\mathcal{O}_X^*$ est le faisceau des fonctions inversibles sur X.

Un outil classique (voir par exemple [4]) est alors la suite exacte de l'exponentielle :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2i\pi\cdot)} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1 \ ,$$

où $\mathbb{Z}_X$ est le faisceau des fonctions localement constantes sur X à valeur dans $\mathbb{Z}$. Cela donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie :

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X).$$

Pour $L \in \mathrm{Pic}(X)$, la classe $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z}) = H^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ est appelée la première classe de Chern de L.

Un résultat classique nous dit que tout fibré en droite sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trivial. L'idée alors pour construire un fibré en droite sur $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ est de tirer en arrière le fibré par le revêtement universel $\pi : \mathbb{C}^g \to X$.

Pour L un fibré sur X nous disposons alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi^*L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ V \arrow[r, "\pi"] & T \end{tikzcd} .$$

Alors l'action de Λ sur $\mathbb{C}^g$ se relève en une action sur π^*L. Nous savons que π^*L est trivial, on peut donc choisir une trivialisation $\pi^*L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$. On obtient une action de Λ sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ de sorte que L est le quotient de $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ par cette action. On voit alors qu'un élément de Λ agit linéairement dans les fibres, de sorte que pour $\gamma \in \Lambda$,

$$\gamma(z,t) = (z+\gamma, a_\gamma(z)t),$$

où a_γ est une fonction holomorphe inversible sur $\mathbb{C}^g$. Ceci définit une action de groupe de Λ sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ si et seulement les a_γ satisfont la condition de cocycle :

$$\forall \gamma, \delta \in \Lambda, \forall z \in \mathbb{C}^g,\ a_{\gamma+\delta}(z) = a_\gamma(z+\delta)a_\delta(z).$$

Une famille $(a_l)_{l\in\Lambda}$ de fonctions holomorphes inversibles satisfaisant cette condition est appelée un système de multiplicateurs.

Définition 2.1. Étant donné un système de multiplicateur $(a_l)_{l\in\Lambda}$ on appelle fonction thêta associée à celui-ci toute fonction holomorphe $\theta : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall l \in \Lambda, \forall z \in \mathbb{C},\ \theta(z+l) = a_l(z)\theta(z).$$

Chaque a_l étant alors appelé un facteur d'automorphie.

On peut alors vérifier assez facilement que si $(a_l)_{l\in\Lambda}$ est un système de multiplicateurs et si L est le fibré associé, l'espace des sections $H^0(X,L)$ s'identifie canoniquement à l'espace des fonctions thêta pour les facteurs d'automorphie $(a_l)_{l\in\Lambda}$.

Nous allons voir, c'est le théorème d'Appell-Humbert, que ces facteurs que l'on peut définir de manière naturelle et relativement explicite comme des facteurs d'automorphie représentent d'une certaine manière l'ensemble de tous les fibrés en droites sur un tore complexe.

Commençons par une définition :

Définition 2.2. On appelle donnée d'Appell-Humbert tout couple (α, H) où H est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^g$ dont la partie imaginaire $E = \text{Im } H$ prend des valeurs entières sur $\Lambda \times \Lambda$ et α est une application qui va de $\mathbb{C}^g$ dans $U(1) = \{x \in \mathbb{C}^* | |x| = 1\}$ et qui vérifie :

$$\forall l_1, l_2 \in \Lambda,\ \alpha(l_1 + l_2) = \alpha(l_1)\alpha(l_2)(-1)^{E(l_1,l_2)}$$

On peut vérifier facilement que si (α, H) est une donnée d'Appell-Humbert alors les fonctions définies par :

$$A_l(z) = \alpha(l)e^{\pi H(z,l) + \frac{\pi}{2}H(l,l)},$$

sont des facteurs d'automorphies. On note $L(\alpha, H)$ le fibré en droites associé.

Théorème 2.3. *(Théorème d'Appell-Humbert) Tout faisceau inversible sur $\mathbb{C}^g/\Lambda$ est de la forme $L(\alpha, H)$ pour une unique donnée d'Appell-Humbert (α, H).*

Démonstration. C'est un théorème désormais très classique, voir par exemple [26, Ch. 3]. □

Cette forme alternée, E, est reliée directement à la première classe de Chern du fibré L. Plus précisément il existe un unique représentant invariant par translation de $c_1(L)$, cela définit une 2-forme alternée $E(\lambda_1, \lambda_2)$ sur Λ à valeur dans $\mathbb{Z}$ telle que $E(ix, iy) = E(x, y)$ et $E = \text{Im } H$ où H est une forme hermitienne sur l'espace tangent de X.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de L, $\chi(X, L)$, est définie comme la somme alternée des dimensions des $H^i(X, L)$. Le degré de X par rapport à L est défini comme le nombre d'intersection de $c_1(L)$ g-fois avec lui-même. Le théorème de Riemann-Roch nous donne alors la relation :

$$\chi(X, L) = \frac{1}{g!}\deg_L(X).$$

Si L est un fibré en droites ample alors les groupes de cohomologie s'annulent pour $i \neq 0$ de sorte que $\chi(X, L) = \dim H^0(X, L)$.

On dit que le couple (A, L) est une variété abélienne polarisée si A est une variété abélienne et si L est un fibré en droite ample sur A. On dit de plus que (A, L) est principalement polarisée si $\dim H^0(A, L) = 1$.

Terminons cette section par deux caractérisations équivalentes des variétés abéliennes parmi les tores complexes :

Théorème 2.4. *(Conditions de Riemann I)Un tore complexe $X = V/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe une forme hermitienne $H : V \times V \to \mathbb{C}$ positive et non dégénérée telle que* $\text{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda)$ *soit inclu dans $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Théorème très classique, voir par exemple [5]. □

Théorème 2.5. *(Conditions de Riemann II) Pour qu'il existe une forme de Kähler entière sur un tore complexe $X = V/\Lambda$, autrement dit pour que X soit une variété abélienne, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel complexe V, des entiers strictement positifs $d_1, \ldots, d_g$ vérifiant $d_1 | \cdots | d_g$ et une matrice complexe carrée τ d'ordre g symétrique et de partie imaginaire définie positive tels que, dans la base $\mathcal{B}$, on ait*

$$\Lambda = \tau\mathbb{Z}^g + \Delta\mathbb{Z}^g,$$

où Δ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_g$.

Démonstration. Théorème très classique voir par exemple [13]. □

2.2 Rappels de géométrie rigide

Ici K désigne un corps valué ultramétrique complet.

La géométrie rigide est la solution théorique que John Tate a trouvé pour pouvoir construire des objets analytiques raisonnables sur un corps non archimédien. Le problème pour appliquer directement les théories usuelles sur des objets géométriques définis sur un corps non archimédien provient du fait que la topologie ultramétrique d'un tel corps est totalement discontinue et, par exemple, les boules fermées de la topologie réelle usuelle deviennent à la fois ouvertes et fermées sur un corps non archimédien.

Pour plus de détails concernant la géométrie rigide on renvoie le lecteur au livre de référence [49].

Concernant ce qui est présent ici, c'est essentiellement une traduction des excellentes notes de Mihran Papikian [44].

L'idée de base de John Tate est de suivre la construction usuelle de la géométrie algébrique (variété affine, recollements...) mais avec des objets plus adaptés au caractère ultra métrique des corps en question.

Ainsi on définit l'algèbre de Tate $T_n(K)$ qui sert d'analogue à l'algèbre de polynômes $K[z_1, z_2, ..., z_n]$:

Définition 2.6. L'algèbre de Tate, $T_n(K)$, notée encore $K < X_1, X_2, \ldots, X_n >$ est l'algèbre des séries formelles à coefficients dans K dont le coefficient tend vers 0 :

$$T_n(K) = K < X_1, X_2, \ldots, X_n >= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n} \mid \lim_{k_1+k_2+\cdots+k_n \to \infty} |a_k| = 0 \right\}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n} \right\| = \max \{ |a_k| \mid k \in \mathbb{N}^n \}$$

On peut vérifier qu'avec cette norme, $T_n(K)$, est entre autres une algèbre de Banach.

Ce qui fait l'analogie avec un anneau de polynômes est la proposition suivante :

Proposition 2.7.
- *Tout idéal dans T_n est fermé.*
- *T_n est un anneau Noethérien.*
- *Si $I \subset T_n$ est un idéal, alors il existe un morphisme injectif $T_d \to T_n/I$ où d est la dimension de Krull de I.*
- *Si $I \subset T_n$ est un idéal maximal alors T_n/I est une extension finie de K et la valuation de K s'étend de manière unique en une valuation de T_n/I.*
- *T_n est un anneau de Jacobson, c'est-à-dire que le radical d'un idéal I est l'intersection de tous les idéaux maximaux contenant I.*

Désignant par $\mathrm{Max}(A)$ le spectre maximal d'un certain anneau A, pour $f \in T_n$ et $x \in \mathrm{Max}(T_n(K))$ soit $f(x)$ l'image de f dans le corps résiduel T_n/x. Comme, par la proposition précédente on peut uniquement étendre la valuation de K à T_n/x on peut définir la norme spectrale

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \sup \{ |f(x)| \mid x \in \mathrm{Max}(T_n(K)) \} .$$

Nous avons alors le théorème suivant qui provient essentiellement du principe du maximum :

Théorème 2.8. *Pour tout $f \in T_n$, $\|f\| = \|f\|_{\mathrm{sp}}$.*

Ce qui est au fond ce que l'on attendait d'une telle norme non archimédienne.

Continuons de développer cette théorie non archimédienne dans le sens de la géométrie algébrique usuelle.

Définition 2.9. Soit $I \subset T_n$ un idéal. L'algèbre $A = T_n/I$ est appelée une algèbre affinoïde.

Comme I est fermé dans T_n, l'algèbre A est Noethérienne et est une algèbre de Banach pour la norme quotient, $\|\bar{f}\| = \inf\{\|f + g\| | g \in I\}$.

Soit $Z(I) \subset \mathrm{Max}(T_n)$ l'ensemble des zéros communs des éléments de I. Par restriction, les éléments de T_n peuvent être vues comme des fonctions sur $Z(I)$. Comme T_n est Jacobson et T_n/I est supposée réduite, un élément $f \in T_n$ est nul sur $Z(I)$ si et seulement si $f \in I$. En particulier les éléments de T_n/I peuvent être vus comme des fonctions (holomorphes) sur $Z(I)$.

La surjection canonique $T_n \to T_n/I$ induit une application $\mathrm{Max}(T_n/I) \to \mathrm{Max}(T_n)$. Cette application identifie $Z(I)$ avec $\mathrm{Max}(T_n/I)$ comme dans le cas de la géométrie algébrique usuelle.

Il s'en suit que les éléments de T_n/I peuvent être vus comme des fonctions sur $\mathrm{Max}(T_n/I)$.

L'ensemble, $\mathrm{Max}(T_n/I)$, est muni de la topologie engendrée par les $U \subset \mathrm{Max}(T_n/I)$ tels qu'il existe un homomorphisme d'algèbre affinoïdes $\phi : T_n/I \to T_n/J$ avec $U = \phi^*(\mathrm{Max}(T_n/J))$. Les sous-ensembles de $Z(I)$ de ce type sont appelés sous-ensembles ouverts affinoïdes.

Définition 2.10. Soient $f_0, f_1, \dots f_n \in T_n/I$ des éléments tels que $T_n/I = f_0 T_n/I + f_1 T_n/I + \cdots + f_n T_n/I$. L'ensemble

$$X(f_0, f_1, ..., f_n) = \{x \in Z(I) | \forall i,\ |f_i(x)| \leq |f_0(x)|\}$$

est appellé un sous-ensemble rationnel.

La bonne notion, à présent, pour pouvoir considérer des espaces annelés comme en géométrie algébrique usuelle, est celle de topologie de Grothendieck.

Définition 2.11. Une topologie de Grothendieck sur un espace topologique X consiste en les données suivantes :

- Une famille $\mathcal{G}$ de sous-ensembles ouverts de X satisfaisant les conditions suivantes :
  - $\emptyset, X \in \mathcal{G}$
  - Pour tous $U, V \in \mathcal{G}$, $U \cap V \in \mathcal{G}$.
- Pour tout $U \in \mathcal{G}$ un ensemble $\mathrm{Cov}(U)$ de recouvrements de U satisfaisants :
  - Pour tout $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$, $V \in \mathcal{U} \implies V \in \mathcal{G}$.
  - $\{U\} \in \mathrm{Cov}(U)$.
  - Si $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ et si $V \subset U$ avec $V \in \mathcal{G}$ alors

$$\mathcal{U} \cap V = \{U' \cap V | U' \in \mathcal{U}\} \in \mathrm{Cov}(V)$$

  - si $(U_i)_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ et si pour tout $i \in I$, $\mathcal{U}_i \in \mathrm{Cov}(U_i)$ alors

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = \{U' | \exists i \in I, U' \in \mathcal{U}_i\} \in \mathrm{Cov}(U).$$

Les éléments de $\mathcal{G}$ sont appelés sous-ensembles admissibles de X, les élements de $\mathrm{Cov}(U)$ sont appelés recouvrements admissibles de U.

Étant donné un espace topologique muni d'une topologie de Grothendieck, on peut définir, en utilisant les ouverts admissibles et les recouvrements admissibles, des préfaisceaux et des faisceaux associés ainsi qu'une cohomologie de Cech.

Soit A une algèbre affinoïde alors on peut munir $\mathrm{Max}(A)$ d'une topologie de Grothendieck où les ouverts admissibles sont les sous-ensembles rationnels et où les recouvrements admissibles sont les recouvrements finis par des sous-ensembles rationnels.

Si on note $\mathcal{O}(U)$ l'algèbre affinoïde d'un sous-ensemble rationnel $U \subset X$ alors la K-algèbre $\mathcal{O}(U)$ munie des applications naturelles de restriction est un préfaisceau dont Tate a prouvé qu'il s'agit en fait d'un faisceau.

Définition 2.12. Un espace affinoïde est un espace topologique $X = \mathrm{Max}(A)$ où A est une algèbre affinoïde, munie d'une topologie de Grothendieck fournie par les sous-ensembles rationnels et dont le faisceau structural est le faisceau $\mathcal{O}$ qui précède.

Définition 2.13. Un espace analytique rigide est un triplet $(X, \mathcal{G}, \mathcal{O})$ où X est un espace topologique muni de sa topologie de Grothendieck fournie par $\mathcal{G}$ et d'un faisceau de K-algèbre $\mathcal{O}$ tels qu'il existe un recouvrement $(X_i)_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ avec $(X_i, \mathcal{G}|_{X_i}, \mathcal{O}|_{X_i})$ un espace affinoïde.

De même que l'on a considéé les algèbres de Tate $K < x_1, \ldots, x_n >$ on peut considérer comme précédemment l'algèbre de Banach $K < r_1^{-1}x_1, \ldots, r_n x_n^{-1} >$ pour des nombres réels strictement positifs $r_1, r_2, \ldots, r_n$, qui est la complétion de $K[x_1, \ldots, x_n]$ par rapport à la norme de Gauss suivante :

$$\|f(x)\|_{r_1,\ldots,r_n} = \max_{\mathbf{m}} |a_{\mathbf{m}}| r_1^{m_1} \cdots r_n^{m_n},$$

puis faire les mêmes constructions que précédemment.

Analytification :

Considérant $X = \mathrm{Spec}\, K[Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]/(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ un schéma affine réduit et de type fini sur K, on peut en donner une version analytique que l'on notera X^{an}.

La topologie sur X peut-être identifiée avec le fermé de Zariski de K^n :

$$X = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in K^n | 0 = f_1(z) = f_2(z) = \cdots = f_s(z)\}.$$

On choisit $\pi \in K^\times$ avec $|\pi| < 1$, alors pour $m \geq 1$ définissons :

$$X_m = \{z \in X | \forall\ 1 \leq i \leq n, |z_i| \leq |\pi|^{-m}\}.$$

Alors X_m a une structure naturelle d'espace affinoïde :

$$X_m = \mathrm{Sp}\, K < \pi^m Z_1, \pi^m Z_2, \ldots, \pi^m Z_n > /(f_1, \ldots, f_s).$$

Les affinoïdes X_m peuvent être recollés d'une manière évidente où X_m est rationnel dans X_{m+1}. Cela fournit un espace analytique rigide X^{an} dont le faisceau structural $\mathcal{O}(X^{\mathrm{an}})$ n'est autre que $\varprojlim(\mathcal{O}(X_m))$.

L'une des choses les plus importantes concernant la géométrie rigide et qui montre bien qu'il s'agit d'une bonne construction, c'est que l'analogue des théorèmes GAGA restent vrai dans ce contexte, c'est une résultat notamment prouvé par Kiehl.

Le tore en géométrie rigide

Un tore T défini sur un corps K est un schéma en groupes tel que sur la clôture algébrique $\bar{K}$ de K on ait :

$$T \times \mathrm{Spec}\, \bar{K} \cong \mathbb{G}_{m,\bar{K}}^{\dim(T)},$$

où $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif.

On dit que le tore T/K est déployé, sur une extension finie K'/K, si

$$T \times \text{Spec } K' \cong \mathbb{G}_{m,K'}^{\dim(T)}.$$

Par exemple pour un entier d qui n'est pas un carré, le tore représenté par l'équation de Pell-Fermat :

$$T/\mathbb{Q} : x^2 - dy^2 = 1,$$

est un tore déployé sur l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ en effet :

$$T \times \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$$

comme le montre l'équation :

$$(x + y\sqrt{d}y)(x - \sqrt{d}y) = 1.$$

L'un des objets les plus importants de la géométrie rigide demeure le simple tore. Cela est lié à des notions plus modernes d'espaces de Berkovitch et de Géométrie tropicale qui apportent un regard à la fois plus précis et plus profond sur ces questions mais dont nous n'aurons pas besoin dans cette thèse.

Soit $T = \mathbb{G}_{m,K}^g = \text{Spec } K[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_g, x_g^{-1}]$ le tore algébrique. On lui associe par le procédé d'analytification sa version analytique rigide T^{an}. Il y a un homomorphisme de groupe naturel $l : T^{\text{an}} \to \mathbb{R}^g$ donné par $l(z) = (-\log|z_1|, \ldots, -\log|z_n|)$.

Un réseau, Λ, est un sous-groupe libre sans torsion de rang maximal de $T(K)$ qui est discret dans T^{an}. De manière équivalente, $l(\Lambda)$ est un réseau de rang g dans $\mathbb{R}^g$.

On voudrait donner à $G = T^{\text{an}}/\Lambda$ la structure d'un espace analytique rigide.

Dans le cadre de la théorie des nombres, on peut supposer que la valuation sur K est discrète et on peut choisir une base de T^{an} telle que $l(\Lambda) = \mathbb{Z}^g$.

Considérons le cube standard $S := \{(x_1, ..., x_g) | |x_i| \leq \frac{1}{2}\}$ dans $\mathbb{R}^g$. Alors $\mathbb{R}^g$ est recouvert par les $\{a + S\}$ où $a \in \mathbb{Z}^g$. L'ensemble $U := l^{-1}(S)$ est un sous-espace affinoïde de T^{an}.

Les translatés par des éléments de Λ, les λU pour $\lambda \in \Lambda$ sont encore des sous-espaces affinoïdes et $T^{\text{an}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda U$.

On utilise alors le recouvrement de G par les images obtenues par projection $V_\lambda = \text{pr}(\lambda U)$ pour le munir d'une structure d'espace analytique rigide.

2.3 Dégénérescence des variétés abéliennes

On peut légitimement se demander dans quelles circonstances le quotient d'un tore analytique rigide T^{an} par un réseau Λ est une variété abélienne et, si oui, est ce que toutes les variétés abéliennes sur un corps non archimédien sont de ce type. La réponse à la première question est en analogie complète avec le cas complexe comme nous allons juste le voir, par contre la deuxième question est beaucoup plus délicate.

En fait le cas complexe a son analogue non archimédien dans le cas de réduction complètement dégénérée. C'est comme si le cas complexe constituait un cas de mauvaise réduction ; même si bien entendu nous ne pouvons parler de réduction dans ce cadre.

Cependant le cas non archimédien est beaucoup plus riche et, en toute généralité, le revêtement universel d'une variété abélienne sur un corps non archimédien n'est plus systématiquement le tore comme dans le cas complexe mais est un certain groupe algébrique.

Commençons par le cas le plus naturel pour nous du quotient d'un tore par un réseau.

Réduction totalement dégénérée, analogie avec le cas complexe

Le cas de réduction totalement dégénérée ou encore de réduction torique est un cas très particulier de réduction. Il correspond au cas où la composante neutre de la fibre spéciale du modèle de Néron de la variété abélienne est un tore. On peut mieux voir la situation dans le cadre général des réductions mixtes qui englobe tous les types de réduction possible d'une variété abélienne en une place non archimédienne.

Soit $G = T^{\mathrm{an}}/\Lambda$ le quotient d'un tore analytique rigide par un réseau au sens défini précédemment.

Nous avons alors l'analogue du théorème d'Appell-Humbert, voir [44] p. 10. Le cas de dimension 1 est due à Tate, le cas de dimension plus grande est dû à Mumford dans [41].

Théorème 2.14. *(Appell-Humbert en Géométrie Rigide, cas torique)*
Il existe un isomorphisme fonctoriel de groupe :

$$\mathrm{Pic}(G) \cong H^1(\Lambda, \mathcal{O}(T^{\mathrm{an}})^\times),$$

où $\mathcal{O}(T^{\mathrm{an}})^\times = \{\beta \cdot z_1^{\alpha_1} \cdots z_g^{\alpha_g} | \beta \in K^\times \text{ et } \underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^g\}$ *est le groupe mulitplicatif des fonctions ne s'annulant jamais sur* T^{an}*, et* $\Lambda \subset T^{\mathrm{an}}(K)$ *agit par son action de translation. De plus, tout élément de* $H^1(\Lambda, \mathcal{O}(T^{\mathrm{an}})^\times)$ *peut être uniquement représenté par* $Z_\lambda(z) = d(\lambda)H(\lambda)(z)$ *où*

$$H : \Lambda \to \{z_1^{\alpha_1} \cdots z_g^{\alpha_h} | \underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^g\}$$

est un homomorphisme de groupe et où $d : \Lambda \to K^\times$ *satisfait :*

$$d(\lambda_1\lambda_2)d(\lambda_1)^{-1}d(\lambda_2)^{-1} = H(\lambda_2)(\lambda_1).$$

Démonstration. Voir [44] pour des références. □

Avec ceci, on a l'analogue du théorème de Riemann :

Théorème 2.15. *(Conditions de Riemann, cas non archimédien torique)* G *est une variété abélienne si et seulement si il y a un homomorphisme de groupe*

$$H : \Lambda \to \mathrm{Hom}(T^{\mathrm{an}}, \mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}})$$

tel que $H(\lambda)(\lambda') = H(\lambda')(\lambda)$ *et telle que la forme bilinéaire symétrique sur* $\Lambda \times \Lambda$ *définie par*

$$< \lambda, \lambda' >= -\log |H(\lambda, \lambda')|$$

soit définie positive.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que dans le cas complexe une fois que l'on connaît l'équivalent du théorème d'Appell-Humbert. □

Cas Général

Le cas général est dû à Raynaud dans [46] mais le texte ne contient pas de preuve. Le cas complètement dégénéré, de réduction torique, que nous venons de présenter est prouvé dans [41] et contient l'essentiel des idées. Le cas général est traité par Chai et Faltings dans leur livre de référence [11]. L'article [48] est en particulier très éclairant et nous aurons l'occasion d'y faire souvent référence.

En toute généralité si A/K est une variété abélienne sur un corps à valuation discrète, il existe une extension de groupes analytiques rigides :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

où T est un tore non archimédien, C est une variété abélienne ayant bonne réduction et G est un groupe algébrique commutatif défini sur K tels que :

$$A = G/M,$$

où M est un réseau dans G, en un sens que nous allons préciser, de rang la dimension de T.

L'idée est d'utiliser le théorème de réduction semi-stable, voir [7] théorème 1.1, sur la fibre spéciale et de relever sur le corps.

La théorie complète est plutôt très élaborée et n'est pas le sujet principal de ce travail. Le lecteur intéressé peut consulter [11] ou encore [41, 46, 7, 6, 20, 27, 39, 44, 48].

Le théorème de réduction semi-stable, nous dit qu'après une éventuelle extension finie de K, où A acquiert réduction semi-stable, la composante neutre $\mathcal{A}_v^0$ de A devient extension d'une variété abélienne $\mathcal{C}_v$ ayant bonne réduction, de dimension $(g-r)$, par un tore déployé $\mathbb{G}_m^r$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m^r \longrightarrow \mathcal{A}_v^0 \longrightarrow \mathcal{C}_v \longrightarrow 0.$$

Le théorème de Raynaud ([46, 6, 7]), nous dit alors que cette suite se relève en une extension dite de Raynaud :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & \\ & & M \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & T \arrow[r] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[d] & & \\ & & 0 & & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

En particulier, le cas de réduction torique correspond au cas où dans le diagramme précédent la variété C est triviale.

Il y a une description utile et très concrète de G dans [48] : si l'on note $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères du tore déployé T, l'extension G est décrite par un homomorphisme $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}^0(C)$.

Soit D le diviseur ample sur A que l'on veut étudier, alors il existe une fonction Θ méromorphe sur G et un diviseur E sur C tels que :

$$q^*(D) = (\Theta) + \pi^* E.$$

De plus, si l'on définit

$$\Phi_E : \qquad C \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C)$$

$$a \longrightarrow t_a^* E - E$$

où t_a est la translation par a, alors il existe un homomorphisme $\phi : M \to X(T)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & G(K_v) \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[d, "\Phi_E"] \\ X(T) \arrow[rr, "\tau"] & & \mathrm{Pic}^0(C). \end{tikzcd}$$

Nous noterons $G(\mathcal{O}_{K_v})$ le sous-groupe correspondant aux points entiers de G, plus précisément, C étant projective, les points entiers de C sont ses points rationnels tandis que les points entiers de T sont les points de $(\mathcal{O}_{K_v}^*)^r$, les points de $G(\mathcal{O}_{K_v})$ sont les points obtenus à partir des précédents lors de l'extension. Plus précisément les points de $G(\mathcal{O}_{K_v})$ sont les points du sous-groupe rigide ouvert de $G(K_v)$ obtenus par complétion formelle de $\mathcal{A}_v^0$ le long de sa fibre spéciale.

Le fait que M soit un réseau dans G signifie que l'application suivante, que l'on peut appeler application de tropicalisation,

$$\mathrm{Trop}: \ G(K_v) \longrightarrow \frac{G(K_v)}{G(\mathcal{O}_{K_v})} \cong \frac{T(K_v)}{T(\mathcal{O}_{K_v})} \cong \mathrm{Hom}(X(T), K_v^*/\mathcal{O}_{K_v}^*) \xrightarrow{-\log|\cdot|_v} \mathrm{Hom}(X(T), \mathbb{R})$$

est injective sur M et que l'image de M est un réseau usuel dans $\mathrm{Hom}(X(T), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^r$.

Théorème 2.16. *(Conditions de Riemann, cas non archimédien général) Un schéma en groupe A/K sur un corps non archimédien K à valuation discrète est une variété abélienne si et seulement si il existe une uniformisation de Raynaud de A/K comme précédemment et si et seulement si la forme bilinéaire $M \times M \to \mathbb{R}$:*

$$(m_1, m_2) \mapsto \mathrm{Trop}(m_1)(\phi(m_2))$$

est symétrique définie positive.

Démonstration. Cf. [46, 6, 7] □

Chapitre 3

Rappels de Théorie d'Arakelov

Jusqu'à encore très récemment la Théorie d'Arakelov ou encore Théorie de l'intersection arithmétique était une théorie de l'intersection complétant le cadre de la théorie de l'intersection sur des anneaux d'entiers de corps de nombres en y incluant les places à l'infini.

Récemment Antoine Chambert-Loir en collaboration avec Antoine Ducros, suivis de Walter Gubler et Klaus Künnemann, on introduit une approche via la géométrie tropicale qui tend à unifier les deux points de vue. C'est-à-dire qu'ils ont construit un espace théorique commun pour traiter l'intersection aux places archimédiennes et aux places non archimédiennes notamment via la géométrie de Berkovitch et la géométrie tropicale.

Bien qu'il soit plutôt clair que ce travail qui concerne principalement le cas non archimédien pourrait trouver un milieu plus approprié dans ce cadre, il nous est apparu que le cadre précédent de la géométrie rigide est suffisant pour nous.

Nous présentons ici quelques aspects de la théorie d'Arakelov usuelle, c'est une théorie qui est à présent très développée mais dont nous n'avons besoin que de quelques outils de base dans le cadre de ce travail.

Je note en passant, que la théorie d'Arakelov, de Suren Yurievitch Arakelov, a représenté une avancée vraiment révolutionnaire mais qu'il ne lui a jamais vraiment été rendu justice au regard de l'importance de ces idées et de son travail.

3.1 Fibrés hermitiens et degrés d'Arakelov

Nous rappelons que notre cadre de travail pour cette thèse est celui des variétés abéliennes, variétés pour lesquelles après le travail d'André Néron nous savons qu'il existe un modèle entier approprié, le modèle de Néron.

Définition 3.1. Une variété arithmétique $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{O}_K$ est un schéma sur Spec $\mathcal{O}_K$ dont le morphisme structural $\pi : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est plat et quasi-projectif. De plus on requiert qu'il existe une section $\epsilon : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \to \mathcal{X}$ et que la fibre générique soit lisse et propre.

Le produit fibré $\mathcal{X}_{\mathbb{C}} = \mathcal{X} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ est bien défini, de plus l'ensemble des points complexes $\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \{\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} \mathbb{C}, \mathcal{X})\}$ s'identifie à l'union disjointe $\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \coprod_{\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$.

Définition 3.2. Soit $\mathcal{X}$ une variété arithmétique sur Spec $\mathcal{O}_K$, un fibré vectoriel hermitien $\bar{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{X}$ est une paire $(\bar{\mathcal{E}}, h)$ où $\mathcal{E}$ est un faisceau localement libre de rang fini sur $\mathcal{X}$ et où $(\mathcal{E}(\mathbb{C}), h)$ est un fibré hermitien sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ invariant par conjugaison complexe. Dans le cas de rang 1, on parle de fibré hermitien en droites.

L'une des notions essentielles de la théorie d'Arakelov, outre la théorie de l'intersection, est celle qui généralise la notion de degré de la géométrie algébrique usuelle.

Pour cela, et c'est là tout l'intérêt a priori d'avoir un fibré hermitien, on veut introduire une métrique sur le fibré vectoriel sur Spec $\mathcal{O}_K$, $E := H^0(\text{Spec } \mathcal{O}_K, \pi_*\mathcal{E}) = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ sachant que d'après Moret-Bailly [38] lemme 1.4.2 $\pi_*\mathcal{E}$ est encore un fibré localement libre.

Pour chaque section $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ on définit :

$$\|s\|_\sigma^2 = \int_{\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|_{\mathcal{E}_\sigma}^2 d\mu_\sigma(x),$$

où $d\mu_\sigma$ est une mesure sur $\mathcal{X}_\sigma$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_\sigma}^2 = h_{\sigma,x}(\cdot,\cdot)$.

En particulier, pour le cas qui nous intéresse dans cette thèse, dans le cas d'une variété abélienne, $d\mu_\sigma$ sera la mesure de Haar normalisée.

Définition 3.3. (Degré d'Arakelov)

Soit $\bar{E}$ un fibré hermitien en droites sur Spec $\mathcal{O}_K$. Pour toute section rationnelle s non nulle de E, on définit après avoir convenablement normalisé les valeurs absolues et donc les normes (voir chapitre suivant).

$$\widehat{\deg}\bar{E} = \log\ \text{Card}(E/s\mathcal{O}_K) - \sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \log\|s\|_\sigma,$$

tandis que si $\bar{E}$ est un fibré hermitien de rank r, on définit :

$$\widehat{\deg}\ \bar{E} = \widehat{\deg} \bigwedge^r \bar{E}.$$

On peut montrer que ce degré est bien défini, c'est-à-dire que la définition est indépendante de la section rationnelle s.

Définition 3.4. (Degré Normalisé et Pentes) On peut montrer, suivant les notations précédentes, que le nombre réel définit par

$$\widehat{\deg}_n\ \bar{E} := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\widehat{\deg}\ \bar{E}$$

est invariant par extension des scalaires, on l'appelle le degré d'Arakelov normalisé de $\bar{E}$.

On appelle pente normalisée d'un fibré vectoriel $\bar{E}$ le nombre réel :

$$\hat{\mu}(\bar{E}) := \frac{1}{\text{rg } E}\widehat{\deg}_n\ \bar{E},$$

rg E étant bien entendu le rang du module E.

Si, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$, on peut montrer que l'on peut définir, à une unité près, un unique isomorphisme $j_\mathfrak{p} : E_\mathfrak{p} \to \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ entre les localisations en $\mathfrak{p}$.

Nous considérons alors l'ordre en $\mathfrak{p}$ d'une section $s \in E$ comme :

$$\text{ord}_\mathfrak{p}(s) = \text{ord}_\mathfrak{p}(j_\mathfrak{p}(s)),$$

où $\text{ord}_\mathfrak{p}$ est la fonction définie au début de notre chapitre 4 dans le cadre de la définition des valeurs absolues.

De même que dans le chapitre 4, et nous renvoyons le lecteur à ce chapitre pour plus d'explications, nous définissons alors :

$$\|s\|_{\mathfrak{p}} = p^{-\frac{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(s)}{e_{\mathfrak{p}}}},$$

où $e_{\mathfrak{p}}$ est l'indice de ramification de l'idéal $\mathfrak{p}$ au dessus du premier p sachant qu'il existe un unique nombre premier positif tel que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Dans ce cadre, voir par exemple [54], pour toute section rationnelle s de $\mathcal{E}$,

$$\widehat{\deg}\ \bar{E} = -\sum_v [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s\|_v, \tag{3.1}$$

où la somme est prise sur toutes les places.

3.2 Hauteur de Faltings, modèles de Moret-Bailly et formule clé

L'idée d'utiliser des modèles entiers de variétés est assez ancienne, elle fut éclaircie par la preuve par André Néron lui-même de l'existence des modèles de Néron qui portent à présent son nom.

Un modèle de Néron d'une variété abélienne A/K est un schéma en groupes plat et lisse $\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ dont la fibre générique est A/K et tel que tout point rationnel $P \in A(K)$ s'étend en une section entière $\epsilon_P : \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K \to \mathcal{N}$ et qui possède la propriété d'universalité rappelée dans le théorème ci-dessous.

André Néron les appellent modèles minimaux dans son texte [42] où il prouve le théorème suivant :

Théorème 3.5. *(Néron) Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, il existe un unique schéma en groupes $\mathcal{A}$ défini sur* Spec $\mathcal{O}_K$ *vérifiant la propriété universelle suivante :*

Pour tout schéma en groupe $\mathcal{X}$ lisse sur Spec $\mathcal{O}_K$ *de fibre générique X, tout K-morphisme $X \to A$ s'étend de manière unique en un morphisme de $\mathcal{O}_K$-schémas $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$.*

On aurait tendance à penser qu'un tel modèle nous offre déjà tout ce qu'il faut pour pouvoir faire de la géométrie arithmétique sur une variété abélienne. Ce fut Néron en premier lieu qui eut l'idée de la possibilité de l'existence et de la construction de tels modèles notamment en étudiant des modèles non propres. Le problème dans le cas plus général vient de la nécessité d'étendre aussi des fibrés sur K en des fibrés sur Spec $\mathcal{O}_K$.

En particulier si on a une variété abélienne polarisée $(A/K, L)$ on aimerait avoir un bon modèle entier de cette variété polarisée. La solution à ce problème conduit a réduire encore les hypothèses sur le modèle entier notamment pour que le théorème du cube puisse être satisfait par le fibré. La bonne solution à cette question, ce sont ce que l'on appelle les modèles de Moret-Bailly après un travail initié par Laurent Moret-Bailly et développé notamment par Jean-Benoît Bost (voir [35, 9]).

Définition 3.6. Un schéma semi-abélien $\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ est un schéma en groupes lisse séparé et de type fini tel que les composantes neutres de chaque fibre sont des extensions de variétés abéliennes par des tores.

Un schéma semi-abélien est en particulier une variété arithmétique, ainsi pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$, l'image directe $\pi_*\mathcal{L}$ est un fibré localement libre sur Spec $\mathcal{O}_K$.

Si $\bar{\mathcal{L}}$ est un fibré hermitien, on peut munir $\pi_*\mathcal{L}$ de la métrique L^2 suivante :

$$\|s\|^2_{\mathcal{L},\sigma} = \int\limits_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2_{\mathcal{L}} d\mu_\sigma(x),$$

où la mesure est la mesure de Haar normalisée.

Le fibré en droites $\pi_*\bar{\mathcal{L}} := (\pi_*\mathcal{L}, \|s\|^2_{\mathcal{L}})$ est alors un fibré hermitien sur Spec $\mathcal{O}_K$ de rang égal à dim $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L})$.

On note $\Omega_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}$ le faisceau des différentielles relatives sur $\mathcal{A}$ et par $\Omega^g_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K} := \bigwedge^g \Omega_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}$ les g-formes relatives.

Le faisceau $\Omega^g_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}$ admet une structure hermitienne naturelle fournie par :

$$\|\omega\|^2_\sigma = \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int\limits_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \omega \wedge \bar{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^g} \int\limits_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} |\omega \wedge \bar{\omega}|_\sigma$$

pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Remarquons que la constante qui apparaît dans la définition est relativement arbitraire (voir la remarque ci-après).

Comme les formes globales sont invariantes par translations il s'ensuit que nous avons l'identification suivante :

$$\omega_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K} := \pi_*\Omega_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K} \cong 0^*_{\mathcal{A}}\Omega^g_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K},$$

où $0_{\mathcal{A}}$ est la section neutre de $\mathcal{A}$.

Dans le cas d'une variété abélienne, on peut définir une hauteur de Faltings de la manière suivante.

Ceci se fait en prenant le degré d'Arakelov du fibré des formes différentielles invariantes du modèle de Néron. Cependant le modèle de Néron n'est pas en général un schéma semi-abélien, et on perd alors l'invariance de la hauteur de Faltings par extension du corps de base. Il faut prendre une extension du corps de base sur laquelle la varétété abélienne devient semis-stable pour définir une hauteur de Faltings, dite stable, qui alors ne dépend plus d'une éventuelle extension du corps.

Ainsi, si A/K est une variété abélienne sur un corps de nombres K dont on note le modèle de Néron $\pi : \mathcal{N} \to$ Spec $\mathcal{O}_K$, nous considérons alors le faisceau $\Omega^g_{\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}$ qui admet le même type de structure hermitienne naturelle fournie par :

$$\|\omega\|^2_\sigma = \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int\limits_{A_\sigma(\mathbb{C})} \omega \wedge \bar{\omega},$$

pour $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement.

Nous avons de plus naturellement, comme dans le cas semi-stable, l'identification :

$$\omega_{\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K} := \pi_*\Omega_{\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K} = 0^*_{\mathcal{N}}\Omega_{\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}.$$

Définition 3.7. (Hauteur de Faltings sur le corps de base) Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K, de modèle de Néron $\mathcal{N}/$Spec $\mathcal{O}_K$, soit $\omega_{\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}$ la forme définie précédemment, on appelle hauteur de Faltings sur K et on note, $h(A/K)$ le nombre réel :

$$h(A/K) = \widehat{\deg}_n \omega_{\mathcal{N}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K}.$$

Et pour la hauteur de Faltings stable :

Définition 3.8. (Hauteur de Faltings stable d'une variété abélienne)
Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K, considérons une extension finie K' sur laquelle $A \times_K \text{Spec } K'$ devient semi-stable. On définit alors la hauteur de Faltings stable de A/K comme la hauteur de Faltings stable du modéle de Néron de $A \times_K \text{Spec } K'$, ce dernier modèle de Néron étant un schéma semi-abélien. On la note $h_{\text{st}}(A)$.

Si K'/K est une extension finie on a entre autres que :

$$h(A/K') \leq h(A/K),$$

et si A/K est semi-stable on a notamment que

$$h_{\text{st}}(A) = h(A/K).$$

Remarque sur la normalisation de la hauteur de Faltings Il existe différentes manières possibles de normaliser à une constante près la hauteur de Faltings. Cette normalisation dépend essentiellement du facteur que l'on met dans les métriques à l'infini.

La normalisation que nous utilisons est celle de Pierre Deligne, Lucien Szpiro, Jean-Benoît Bost, Gaël Rémond, Éric Gaudron,... etc, alors que dans l'article original de Gerd Faltings la métrique était définie par :

$$\|\omega\|_\sigma^2 = \frac{i^{g^2}}{2^g} \int_{\cdot} \omega \wedge \bar{\omega}.$$

La hauteur de Faltings ainsi définie en prenant le degré normalisé diffère alors de la notre d'une différence de $\frac{g}{2}\log(\pi)$ mais les propriétés de la hauteur de Faltings, c'est-à-dire aussi bien les propriétés géométriques que diophantiennes, restent les mêmes.

En toute généralité on peut définir des normes de la forme :

$$\|\omega\|_\sigma^2 = \frac{i^{g^2} c^g}{(2\pi)^g} \int_{\cdot} \omega \wedge \bar{\omega},$$

alors en prenant le $-\log \|\cdot\|_\sigma$ en accord avec la relation de la première section, on voit que la hauteur $h_c(A)$ ainsi définie vérifie :

$$h_c(A/K) = h(A/K) - \frac{g}{2} \log\ c,$$

et

$$h_{c,\text{st}}(A) = h_{\text{st}}(A) - \frac{g}{2} \log\ c.$$

En particulier, on verra dans les chapitres 4 et 5, que, dans le cadre de notre travail, il est plus intéressant de considérer les hauteurs :

$$\tilde{h}(A/K) = h(A/K) + \frac{g}{2} \log(2\pi),$$

et

$$\tilde{h}_{\text{st}}(A) = h_{\text{st}}(A) + \frac{g}{2} \log(2\pi).$$

On verra notamment que cela rend la hauteur de Faltings positive, mais la raison profonde de cette normalisation particulière qui réside notamment dans la "formule clé" que nous présentons ci-après reste mystérieuse.

Fin de la remarque

Nous avons la comparaison suivante entre hauteur de Faltings stable et hauteur de Faltings sur le corps de base :

Proposition 3.9. *(Dû à Deligne, voir aussi Hindry-Pacheco [23])*

Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K et $\mathrm{Ust}_{A/K}$ *l'ensemble des places de K où A n'a pas réduction semi-stable, alors :*

$$h_{\mathrm{st}}(A) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Ust}_{A/K}} \log\ N(v) \leq h(A/K).$$

Démonstration. La preuve est esquissée dans un séminaire Bourbaki de Pierre Deligne et écrite en preuve du lemme 3.4. de [23] par Marc Hindry et Amilcar Pacheco. Il y a néanmoins une petite différence par rapport la preuve de Marc Hindry et de Amilcar Pacheco dans le fait que nous sommes sur un corps de nombres et non sur un corps de fonctions ce qui fait apparaître un degré au numérateur lorsque l'on prend le degré d'Arakelov normalisé. □

Nous avons aussi le résultat suivant dû à Raynaud :

Proposition 3.10. *(Raynaud)*

Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K et $\check{A}$ sa variété abélienne duale, alors

$$h(A/K) = h(\check{A}/K),$$

en particulier

$$h_{\mathrm{st}}(A) = h_{\mathrm{st}}(\check{A}).$$

Démonstration. Il s'agit du corollaire 2.1.3 du chapitre de Raynaud dans [52]. □

D'autre part, il est bien connu qu'un fibré en droites L sur une variété abélienne A/K définie sur un corps de nombres vérifie le théorème du cube. C'est-à-dire que si pour tout sous-ensemble I de $\{1,2,3\}$ on note

$$s_I : A \times A \times A \to A,\ s_I(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i \in I} x_i,$$

alors le fibré :

$$\bigotimes_{I \subset \{1,2,3\}} s_I^* L^{\otimes(-1)^{\mathrm{Card}(I)}} \cong \mathcal{O}_{A^3}$$

est trivial.

Mais en général ce n'est plus vrai sur un modèle entier. Il se trouve qu'imposer à un fibré sur un modèle entier de vérifier la propriété du cube est une propriété particulièrement intéressante. On peut préciser, dans le cadre qui nous intéresse, que c'est une propriété particulièrement intéressante pour définir des hauteurs satisfaisantes.

Définition 3.11. Soit $\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un schéma semi-abélien et $\mathcal{L}$ un fibré hermitien en droites sur $\mathcal{A}$.

On dit que $\mathcal{L}$ est un fibré hermitien cubiste, encore satisfait la propriété du cube, si il satisfait la propriété suivante :

$$\bigotimes_{I \subset \{1,2,3\}} s_I^* \mathcal{L}^{\otimes(-1)^{\mathrm{Card}(I)}} \cong \bar{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}^3},$$

est un fibré hermitien trivial sur $\mathcal{A}^3$.

En toute généralité, on ne peut pas trouver un modèle de Néron muni d'un fibré entier $\mathcal{L}$ d'une variété abélienne polarisée (A, L) qui à la fois étende tous les points et qui soit un modèle cubiste. Cependant on peut presque le faire, c'est-à-dire qu'on peut toujours trouver un modèle qui soit cubiste et qui étende un nombre fini de points. Un tel modèle est appelé après Jean-Benoît Bost un modèle de Moret-Bailly.

Définition 3.12. (Modèles de Moret-Bailly) Soit A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, L un fibré en droites ample et symétrique sur A, Σ un ensemble fini de points de $A(\bar{\mathbb{Q}})$.

Un modèle de Moret-Bailly de (A, L, Σ) sur un corps de nombres K est défini par les données suivantes :

1. Un schéma semi-abélien $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$,
2. Un isomorphisme $i : A \cong \mathcal{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de variétés abéliennes sur $\bar{\mathbb{Q}}$,
3. Un fibré hermitien en droites cubiste $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$.
4. Un isomorphisme $L \cong \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Q}}}$
5. Pour chaque point $P \in \Sigma$ une section $\epsilon_P : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \to \mathcal{A}$ de π tel que le point géométrique $\epsilon_{P,\bar{\mathbb{Q}}}$ coïncide avec $i(P)$,

qui de plus satisfait la condition suivante : Il existe un sous-schéma $\mathcal{K}$ de $\mathcal{A}$ plat et de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ tel que $i^{-1}(\mathcal{K}_{\bar{\mathbb{Q}}})$ coïncide avec le groupe de Mumford $K(L^{\otimes 2})$.

Le groupe de Mumford d'un fibré L étant le sous-groupe des points rationnels laissant le fibré invariant par translation à isomorphisme près.

Nous avons alors le théorème suivant qui est essentiellement dû à Jean-Benoît Bost dans [9] après les travaux de Laurent Moret-Bailly.

Pour une définition de la hauteur de Néron-Tate dans le théorème qui suit, l'auteur renvoie au chapitre suivant.

Théorème 3.13. *(Existence et Formule Clé, J.-B. Bost [9])*

1. *(Existence) Il existe un modèle de Moret-Bailly pour toute donnée (A, L, Σ), comme précédemment défini sur une extension finie K' du corps de définition de A et Σ et dont le degré relatif ne dépend que de la dimension de A.*
2. *(Hauteur de Néron-Tate) Pour tout modèle de Moret-Bailly et pour tout $P \in \Sigma$ le degré d'Arakelov $\widehat{\deg}_n \epsilon_P^* \mathcal{L}$ coïncide avec la hauteur de Néron-Tate de P associée à L.*
3. *(Formule clé)*
$$\hat{\mu}(\pi_* \mathcal{L}) = -\frac{1}{2} h_{\mathrm{st}}(A) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{\chi(A, L)}{(2\pi)^g} \right).$$
4. *(Extension des scalaires) Si on a un modèle de Moret-Bailly pour (A, L, Σ) défini sur un corps de nombres K et si K' est une extension finie de K, alors le modèle obtenu par extension des scalaires de $\mathcal{O}_K$ à $\mathcal{O}_{K'}$ est un modèle de Moret-Bailly pour (A, L, Σ) défini sur K'.*

Remarque : Nous voyons ainsi que si la polarisation est principale, $\chi(A, L) = 1$ et donc avec notre normalisation, la formule clé s'écrit :

$$\hat{\mu}(\pi_* \mathcal{L}) = -\frac{1}{2} \tilde{h}_{\mathrm{st}}(A).$$

Fin de la remarque.

Chapitre 4

Les Hauteurs Locales Canoniques

Les hauteurs locales sont les fonctions intervenant dans une décomposition local/global de la hauteur de Néron-Tate sur une variété abélienne. Cette dernière possède des propriétés tout-à-fait remarquables notamment celles d'être une mesure de complexité arithmético-géométrique des points rationnels d'une variété abélienne tout en définissant une semi norme euclidienne qui s'annule précisément aux points de torsion.

Nous avons vu dans le théorème 3.13 du chapitre 3 qu'il existe une définition complètement géométrique de ces hauteurs locales en termes de métriques associées à un fibré hermitien cubiste (c.f. [35, Ch. III]). Mais pour le moment contentons-nous de rappeler la théorie principale telle qu'elle apparue en premier. Ce fut notamment Arakelov qui développa les prémisses de la théorie géométrique que nous avons déjà vue et qui engendra ainsi une vraie petite révolution en géométrie arithmétique.

La première remarque que nous pouvons faire est que ces hauteurs locales sont associées à des distances logarithmiques d'un point à un diviseur. D'une certaine manière elles généralisent la notion de valuation définie sur un corps à un objet géométrique tel qu'une variété abélienne.

Nous avons donc besoin d'avoir une notion cohérente de valuation et de valeur absolue, c'est ce que nous faisons dans la première section de ce chapitre. Nous rappelons ensuite les principales propriétés des hauteurs : construction, existence, pseudo-unicité, propriété local/global. Enfin, et c'est le but de ce chapitre, nous donnons des expressions explicites de ces hauteurs lorsqu'elles sont associées à une polarisation principale d'une variété abélienne.

4.1 Normalisation

Soit K un corps, une valeur absolue sur K est une application $|\cdot| : K \to [0, +\infty[$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

De plus la valeur absolue est dite ultra-métrique ou dans le cas d'un corps de nombres, non archimédienne, si

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Soit K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ définit une valuation :

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} : K^* \to \mathbb{Z},$$

caractérisée par :

$$x\mathcal{O}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)},$$

$\mathcal{O}_K$ étant un anneau de Dedekind, le produit a lieu sur tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$.

Nous définissons alors la valeur absolue normalisée,

$$|x|_{\mathfrak{p}} = p^{-\frac{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}{e_{\mathfrak{p}}}}, \tag{4.1}$$

où $e_{\mathfrak{p}}$ est l'indice de ramification de l'idéal $\mathfrak{p}$ par rapport au nombre premier p tel que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. On pose naturellement par définition $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(0) = \infty$. Cela définit une valeur absolue ultramétrique sur $\bar{K}$.

D'autre part, pour chaque plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ nous pouvons définir la valeur absolue (archimédienne) :

$$|x|_\sigma = |\sigma(x)|,$$

où dans le membre de droite le $|\cdot|$ désigne le module usuel sur $\mathbb{C}$.

Ces valeurs absolues vérifient la formule du produit :

$$\forall q \in K^\times, \prod_v |q|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = 1,$$

où le produit a lieu sur toutes les places et étant entendu entendu que pour une place archimédienne v, $[K_v : \mathbb{Q}_v] := [K_v : \mathbb{R}]$.

Remarque :

1. Comme on utilisera le plus souvent les plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ plus tôt que les places archimédiennes, il sera utile de remarquer que :

$$\forall\, x \in K, \prod_{v \text{ place archimédienne}} |x|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = \prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} |\sigma(x)| = \prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} |x|_\sigma.$$

2. La normalisation des valeurs absolues non archimédienne que nous avons choisie va nous être utile.

   Elle vérifie notamment que pour toute place non archimédienne v de K et pour toute place w d'une certaine extension F/K alors si w étend v :

$$\forall x \in K,\ |x|_w = |x|_v$$

Notamment nous définissons, ce qui apparaîtra souvent dans la suite de ce texte, la norme d'une place non archimédienne :

Définition 4.1. Soit K un corps de nombres et v une place non archimédienne de K nous notons et définissons pour toute la suite de ce texte, $N(v)$, comme la norme sur $\mathbb{Q}$ d'un idéal premier définissant la place v.

Si $\mathfrak{p}_v$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ définissant la place v, cette norme peut être définie comme :

$$N(v) = \mathrm{Card}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_v).$$

Si p_v est la caractéristique résiduelle de $\mathfrak{p}_v$, i.e. le nombre premier p_v tel que $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{Z} = p_v$, la norme $N(v)$ prend la forme :

$$N(v) = p_v^{f_v},$$

où f_v est appelé degré résiduel de v.

On a entre autres que :

$$[K_v : \mathbb{Q}_v] = e_v f_v,$$

où l'on a posé $e_v = e_{\mathfrak{p}_v}$, et donc pour les valeurs absolues précédemment définies :

$$|x|_v = N(v)^{-\frac{\mathrm{ord}_v(x)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}},$$

étant bien sûr entendu que $|\cdot|_v = |\cdot|_{\mathfrak{p}_v}$ et $\mathrm{ord}_v = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_v}$.

En particulier, si $w|v$ est une place au-dessus de v :

$$\mathrm{ord}_w = e_{w|v}\mathrm{ord}_v,$$

où $e_{w|v}$ est l'indice de ramification relatif.

Les propriétés précédentes de cette valeur absolue sont essentielles pour notre travail. C'est un point qui pourrait paraître secondaire pourtant dans notre travail il a semblé essentiel de considérer cette normalisation. Voir la remarque si après.

Le théorème d'Ostrowski nous garantit alors que chaque valeur absolue sur K est équivalente au sens de la topologie qu'elle définit soit archimédienne du type précédant soit non archimédienne du type $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$.

Dans toute la suite nous noterons σ un plongement comme précédemment, le complété correspondant K_σ (étant soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$), et pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, $K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K pour la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ définie précédemment.

Nous noterons pour toute la suite de ce texte, v, comme une place générique, archimédienne ou non archimédienne, K_v le complété correspondant et nous préciserons au besoin.

Soit $P = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$ un point de l'espace projectif à coordonnées dans K. On définit la hauteur logarithmique de P comme

$$h(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_v [K_v : \mathbb{Q}_v] \log\left(\max\{|x_0|_v, |x_1|_v, \ldots, |x_n|_v\}\right)\right),$$

où la somme a lieu sur toutes les valeurs absolues.

Les propriétés usuelles sont alors que $h(P)$ est bien définie, c'est-à-dire que $h(P)$ est à la fois indépendante des coordonnées projectives choisies pour P et est indépendant d'une éventuelle extension finie K'/K sur laquelle on considère P et de plus pour tout $P \in \mathbb{P}^n(K)$, $h(P) \geq 0$. h est ainsi définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

Si maintenant $\phi : V \to \mathbb{P}^n$ est un morphisme, on peut définir la hauteur sur V relative à ϕ comme :

$$h_\phi : V(\bar{\mathbb{Q}}) \to [0, +\infty[, \qquad h_\phi(P) = h(\phi(P)).$$

Ce qui est tout à fait remarquable c'est qu'alors, pour les variétés projectives, on obtient des objets qui retranscrivent très bien les propriétés arithmético-géométriques des variétés.

Comme nous travaillons dans cette thèse sur des variétés lisses, nous définissons $\mathrm{Div}(V)$ le groupe des diviseurs d'une variété lisse V sachant qu'il s'agit de manière équivalente de diviseurs de Weil ou de Cartier. Remarquons cependant que même si nous présentons la machinerie des hauteurs pour des variétés lisses, il existe aussi une construction équivalente pour des variétés singulières mais il faut bien entendu systématiquement considérer les diviseurs de Cartier dans ce cas.

En particulier :

Théorème 4.2. *(Machinerie des Hauteurs de Weil) Soit K un corps de nombres. Pour toute variété projective lisse V/K il existe une application*

$$h_V : \mathrm{Div}(V) \to \{\text{fonctions } V(\bar{K}) \to \mathbb{R}\},$$

ayant les propriétés suivantes :

1. *(Normalisation) Soit $H \subset \mathbb{P}^n$ un hyperplan et soit $h(P)$ la hauteur logarithmique normalisée définie précédemment alors*

$$\forall P \in \mathbb{P}^n(K),\ h_{\mathbb{P}^n,H}(P) = h(P) + O(1).$$

2. *(Fonctorialité) Soit $\phi : V \to W$ un morphisme et soit $D \in \mathrm{Div}(W)$ alors*

$$\forall P \in V(\bar{K}),\ h_{V,\phi * D}(P) = h_{W,D}(\phi(P)) + O(1).$$

3. *(Additivité) Soit $D, E \in \mathrm{Div}(V)$, alors*

$$\forall P \in V(\bar{K}),\ h_{V,D+E}(P) = h_{V,D}(P) + h_{V,E}(P) + O(1).$$

4. *(Equivalence linéaire) Soient deux diviseurs linéairement équivalents $D, E \in \mathrm{Div}(V)$, alors*

$$\forall P \in V(\bar{K}),\ h_{V,D}(P) = h_{V,E}(P) + O(1).$$

5. *(Positivité) Soit D un diviseur effectif et soit B le lieu des points base de $|D|$, alors*

$$\forall P \in (V \setminus B)(\bar{K}),\ h_{V,D}(P) \geq O(1).$$

6. *(Equivalence algébrique) Soient $D, E \in \mathrm{Div}(V)$ avec D ample et E algébriquement équivalent à 0, alors*

$$\lim_{\substack{P \in V(\bar{K}) \\ h_{V,D}(P) \to \infty}} \frac{h_{V,E}(P)}{h_{V,D}(P)} = 0.$$

7. *(Finitude) Soit $D \in \mathrm{Div}(V)$ un diviseur ample, alors pour toute extension finie K'/K et pour toute constante B, l'ensemble*

$$\left\{P \in V(K') \mid h_{V,D}(P) \leq B\right\},$$

   est fini.

8. *(Unicité) Les fonctions hauteurs sont déterminées, à fonctions dans $O(1)$ près par les conditions de normalisation, de fonctorialité (juste pour les plongements $\phi : V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$) et par l'additivité.*

Démonstration. C'est le théorème B.3.2 de [25] prouvé dans loc. cit. □

Ce fut déjà un pas immense en géométrie Diophantienne d'arriver au résultat précédent. Mais ces fonctions hauteurs semblent ne pas être parfaitement définies puisque le théorème ne fixe l'unicité qu'à une fonction bornée près.

André Néron et John Tate ont néanmoins trouvé un moyen d'obtenir une hauteur, dite canonique, qui soit bien déterminée dans certaines situations.

Théorème 4.3. *Soit V/K une variété projective lisse définie sur un corps de nombres. Soit $D \in \mathrm{Div}(V)$ un diviseur et soit $\phi : V \to V$ un morphisme.*

On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que dans $\mathrm{Div}(V) \otimes \mathbb{R}$:

$$\phi^* D \sim \alpha D.$$

Alors il existe une unique fonction, appelée la hauteur canonique relative à ϕ et à D,

$$\hat{h}_{V,\phi,D} : V(\bar{K}) \to \mathbb{R},$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall\, P \in V(\bar{K}),\ \hat{h}_{V,\phi,D}(P) = h_{V,D}(P) + O(1)$.
2. $\forall\, P \in V(\bar{K}),\ \hat{h}_{V,\phi,D}(\phi(P)) = \alpha \hat{h}_{V,\phi,D}(P)$

La hauteur canonique ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D et de plus on peut la calculer comme la limite

$$\hat{h}_{V,\phi,D}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^n} h_{V,D}(\phi^n(P)),$$

où $\phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}$ est le $n-$ième itéré de ϕ.

Démonstration. C'est le théorème B.4.1 de [25] prouvé page 195-196. □

En particulier on a le théorème suivant qui est dû au résultat de David Mumford selon lequel dans le cas d'un diviseur symétrique $[m]^* D \sim m^2 D$.

Théorème 4.4. *(Néron, Tate) Soit A/K une variété abélienne définie sur un corps de nombres et soit $D \in \mathrm{Div}(A)$ un diviseur symétrique, c'est-à-dire que $[-1]^* D \sim D$.*

Alors il existe une fonction hauteur,

$$\hat{h}_{A,D} : A(\bar{K}) \to \mathbb{R},$$

appelée la hauteur canonique relative à D, possédant les propriétés suivantes

1. $\forall P \in A(\bar{K}),\ \hat{h}_{A,D}(P) = h_{A,D}(P) + O(1)$.
2. *Pour tout entier m,* $\forall P \in A(\bar{K}),\ \hat{h}_{A,D}([m]P) = m^2 \hat{h}_{A,D}(P)$.
3. $\forall P, Q \in A(\bar{K})$,
$$\hat{h}_{A,D}(P+Q) + \hat{h}_{A,D}(P-Q) = 2\hat{h}_{A,D}(P) + 2\hat{h}_{A,D}(Q).$$
4. *La hauteur canonique $\hat{h}_{A,D} : A(\bar{K}) \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique et qui est définie positive si D est ample.*
5. *(Unicité) La hauteur canonique $\hat{h}_{A,D}$ dépend uniquement de la classe d'équivalence linéaire de D, les conditions 1. et 2. la détermine de manière unique.*
6. *Si D est effectif alors, pour tout point $P \in A(\bar{K})$, $\hat{h}_{A,D}(P) \geq 0$ avec, dans le cas où de plus D est ample, égalité si et seulement si P est un point de torsion.*

Démonstration. C'est le théorème B.5.1 de [25] prouvé page 200 et pour le point 6. il s'agit de la proposition B.5.3 de [25] prouvée page 202. □

4.2 Hauteurs Locales : définition et propriétés

L'idée de base est d'exprimer les hauteurs comme des sommes de fonctions décomposées suivant chaque place de notre corps de nombres suivant un principe local/global. Nous allons alors voir qu'une machinerie des hauteurs locales de Weil existe ainsi que l'équivalent pour les hauteurs canoniques.

Nous suivons toujours la présentation faite dans [25] par Joseph Silverman et Marc Hindry car il s'agit d'une exposition très claire. Pour la preuve originelle nous renvoyons à André Néron dans [43].

Soit D un diviseur défini sur une variété projective lisse V/K définie sur un corps de nombres K. Nous définissons

$$V_D = V \setminus \mathrm{supp}(D),$$

où $\mathrm{supp}(D)$ est bien entendu le support du diviseur D.

On voudrait attacher à chaque place v de K une fonction

$$\lambda_{D,v} : V_D(K_v) \to \mathbb{R},$$

telle que la somme

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_v [K_v : \mathbb{Q}_v] \lambda_{D,v},$$

soit une hauteur de Weil h_D associée au diviseur D.

L'idée sous-jacente est que cette hauteur locale doit définir une forme de distance logarithmique v-adique de P à D : " Plus P devient v-adiquement proche de D plus cette hauteur locale sera grande".

Comme le nombre de places est infini on va bien évidemment demander à ce que cette hauteur locale soit nulle sauf pour un nombre fini de places.

On définit alors une M_K-constante comme une application qui à chaque place de K associe un nombre réel positif qui est nul sauf pour un nombre fini de places. On dira qu'une suite de fonctions $(f_v)_{\{v\}}$ est M_K-bornée si il existe une M_K-constante qui borne, pour chaque place, la famille de fonctions.

Théorème 4.5. *(Machinerie des hauteurs locales) Soit V/K une variété lisse projective. Pour chaque $D \in \mathrm{Div}(V)$ il est possible de définir une fonction*

$$\lambda_D : \coprod_v V_D(K_v) \to \mathbb{R},$$

appelée la hauteur locale par rapport à D telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. *(Normalisation) Soit $f \in K(V)^*$ une fonction rationnelle sur V et soit $D = \mathrm{div}(f)$ le diviseur associé à f. Alors la fonction définie pour chaque place v par :*

$$\lambda_{D,v}(P) + \log |f(P)|_v$$

est une M_K-fonction bornée sur chaque sous-ensemble M_K-borné de $V_D(K) \times M_K$.

2. *(Additivité) Pour tout $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(V)$,*

$$\lambda_{D_1+D_2,v} = \lambda_{D_1,v} + \lambda_{D_2,v} + O_v(1).$$

3. *(Fonctorialité) Soit $\phi : V \to W$ un morphisme de variétés projectives lisses. Alors*

$$\lambda_{\phi^* D,v} = \lambda_{D,v} \circ \phi + O_v(1).$$

4. *(Positivité) Soit $D \geq 0$ un diviseur effectif. Alors*

$$\lambda_{D,v} \geq O_v(1).$$

5. *(Propriété Local/Global) Soit $D \in \mathrm{Div}(V)$ et soit h_D une hauteur de Weil associé à D. Alors*

$$\forall P \in V_D(K),\ h_D(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v [K_v:\mathbb{Q}_v]\lambda_{D,v}(P) + O(1).$$

Démonstration. C'est le théorème B.8.1 page 239 de [25]. □

Nous en venons au théorème important pour nous qui est dû à André Néron dans [43].

Théorème 4.6. *(Néron) Pour toute variété abélienne A/K définie sur un corps de nombres et pour chaque diviseur $D \in \mathrm{Div}(A)$ il existe une hauteur locale :*

$$\hat{\lambda}_D : \coprod_v A_D(K_v) \to \mathbb{R},$$

appelée la hauteur locale canonique sur A associée à D, satisfaisant les propriétés suivantes où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ représentent des M_K-constantes :

1. $\hat{\lambda}_{D,v} = \lambda_{D,v} + O_v(1)$.
2. $\hat{\lambda}_{D_1+D_2,v} = \hat{\lambda}_{D_1,v} + \hat{\lambda}_{D_2,v} + \gamma_1(v)$.
3. *Si $D = \mathrm{div}(f)$, alors $\hat{\lambda}_{D,v} = -\log|f|_v + \gamma_2(v)$.*
4. *Si $\phi : A \to B$ est un homomorphisme de variétés abéliennes, alors $\hat{\lambda}_{\phi^*D,v} = \hat{\lambda}_{D,v} \circ \phi + \gamma_3(v)$.*
5. *Soit $\hat{h}_D$ la hauteur canonique sur A associée à D comme précédemment alors il existe une constante c telle que*

$$\forall P \in A_D(K), \hat{h}_D(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_v [K_v:\mathbb{Q}_v]\hat{\lambda}_D(P) + c.$$

Remarque C'est en particulier les propriétés de normalisation, 1. Th. 3.4 et 3. Th. 3.5, qui font qu'il est judicieux de choisir la normalisation 4.1 de la valeur absolue telle que présentée plus haut.

En effet avec cette normalisation nous aurons que si $w|v$ est une place w au-dessus de v et si $P \in A(K_v)$ alors $\hat{\lambda}_w(P) = \hat{\lambda}_v(P)$. Ce qui s'avérera être une propriété particulièrement utile pour nous bien qu'une telle normalisation puisse paraître secondaire.

En particulier avec cette normalisation de la valeur absolue, la hauteur locale canonique s'étend en une fonction définie pour chaque place v sur la clôture algébrique $\bar{K}_v$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.3 Formules explicites pour les hauteurs locales sur une variété abélienne

4.3.1 Cas de bonne réduction

Le cas de bonne réduction a été calculé explicitement par André Néron dans [43] dans le cadre de son travail sur les hauteurs locales. Nous écrivons ici le résultat et renvoyons le lecteur au travail de Néron lui-même.

Soit A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres et v une place de K où A admet bonne réduction. Nous considérons un point P dans $A(\bar{K}_v)$ et comme dans [10] une extension finie $K_v \subset M \subset \bar{K}_v$ une extension sur laquelle le point P est défini. Notons $\mathcal{O}_M$ l'anneau de valuation de M et e_M l'indice de ramification de M sur $\mathbb{Q}_{p_v}$. Si $\mathcal{A}_M$ désigne le modèle de Néron de A sur M, nous savons d'après les propriétés fondamentales du modèle de Néron qu'il existe une section entière ϵ_P : Spec $\mathcal{O}_M \to \mathcal{A}_M$ qui étend le point P. De même le diviseur D qui nous intéresse s'étend par clôture de Zariski en un diviseur $\mathcal{D}_M$ sur $\mathcal{A}_M$.

Si π_M désigne une uniformisante de M et si ϵ_P ne rencontre pas le support du diviseur défini par D, il existe alors un unique entier positif ou nul $\mathrm{mult}_{D,M}(P)$ tel que

$$\epsilon_P^* \mathcal{D}_M = \pi_M^{\mathrm{mult}_{D,M}(P)} \mathcal{O}_M.$$

Comme de plus il existe une unité u telle que si π_v est une uniformisante de K_v,

$$\pi_M = u \times \pi_v^{e_{M|v}},$$

$e_{M|v}$ étant l'indice de ramification delatif de M/K_v, on posera pour une telle construction :

$$\mathrm{mult}_{D,v} = e_{M|v} \mathrm{mult}_{D,M}.$$

On peut alors vérifier que :

$$\mathrm{mult}_{D,v}(P) \, \frac{\log \; N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}$$

est indépendant d'une éventuelle extension de v.

Dans ce cadre on peut introduire le résultat dû à André Néron :

Proposition 4.7. *(Néron) Si A possède bonne réduction en v, il existe une constante κ_v telle que pour tout P n'appartenant pas au support du diviseur de D :*

$$\hat{\lambda}_{D,v}(P) = \mathrm{mult}_{D,v}(P) \frac{\log \; N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v.$$

Démonstration. C'est un résultat bien connu et qui est dû à André Néron dans [43]. De plus on peut vérifier qu'àvec la normalisation introduite cela définit bien la hauteur normalisée sur $\bar{K}$ comme précédemment introduite. □

Définition 4.8. Nous noterons dans le cadre de cette section $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ l'unique hauteur locale qui dans le cadre de la définition précédente est définie par $\kappa_v = 0$, c'est aussi la seule hauteur locale qui est normalisée de sorte que :

$$\inf_{\substack{P \in A(\bar{K}_v) \\ P \notin |D|}} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) = 0,$$

où $|D|$ désigne le support du diviseur D.

Nous aurons l'occasion de reprendre ce type de normalisation des hauteurs locales canoniques au chapitre suivant.

Le résultat suivant est dû à John Boxall dans [10], nous l'utiliserons à plusieurs reprises dans le chapitre suivant.

Théorème 4.9. *(John Boxall) Soit A/K une variété abélienne de dimension c sur un corps de nombres K et soit D un diviseur ample effectif sur A. Soit d'autre part v une place non archimédienne de K en laquelle A admet bonne réduction, alors localement en v et pour la hauteur locale normalisée qui précède :*

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ v \text{ premier à } N}} \frac{1}{N^{2c}} \sum_{P \in A[N],\ P \notin |D|} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) = 0.$$

Démonstration. C'est le résultat principal de l'article [10]. □

Remarquons par ailleurs que comme il y a N^{2c} points de torsion dans $A(\bar{K}_v)$ le calcul précédent est la moyenne des hauteurs locales sur les points de torsion. Ce résultat nous dit donc qu'en moyenne la hauteur locale normalisée en une place de bonne réduction est nulle sur les points de torsion.

4.3.2 Hauteurs locales aux places archimédiennes

Considérons une variété abélienne principalement polarisée $(A/\mathbb{C}, L)$ sur le corps des nombres complexes de dimension g.

On sait qu'à L correspond une fonction thêta définie à une constante près d'après le chapitre 2 et notamment le théorème d'Appell-Humbert.

Choisissons une telle fonction thêta que nous notons Θ. On sait d'après cette situation classique que si l'on note $H(\cdot,\cdot)$ la forme de Riemann correspondant à (A, L) alors la fonction définie par

$$z \mapsto \mathbb{R},\ z \to -\log|\Theta(z)| + \frac{\pi}{2} H(z, z),$$

est bien définie sur $\mathbb{C}^g$ et est Λ-périodique pour le réseau Λ définissant $A(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^g/\Lambda$. C'est un simple calcul à partir des facteurs d'automorphie.

En effet d'après Marc Hindry et Joseph Silverman, lemme A.5.2.6 p. 100 [25] même si c'est très classique et remonte à Riemann, on peut choisir la fonction thêta de sorte qu'elle admette un diviseur D, défini de manière unique par $L = \mathcal{O}(D)$ et $D \geq 0$, et que Θ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall z \in \mathbb{C}^g, \forall \lambda \in \Lambda, \Theta(z + \lambda) = \exp\left(\pi H(z, \lambda) + \frac{\pi}{2} H(\lambda, \lambda) + 2\pi i K(\lambda)\right) \Theta(z),$$

où H est la forme de Riemann et où $K : \Lambda \to \mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait l'identité :

$$\exp(2\pi i K(\lambda + \lambda')) = \exp(2\pi i K(\lambda)) \exp(2\pi i K(\lambda')) \exp(\pi i E(\lambda, \lambda')),$$

la forme E étant comme usuellement $E = \operatorname{Im} H$.

On en déduit alors les propriétés de la fonction qui nous intéresse.

Autrement dit cette fonction définit une fonction sur A par passage au quotient et à un pôle logarithmique le long du diviseur de θ c'est-à-dire le long de D, diviseur tel que $L = \mathcal{O}_A(D)$ et $D \geq 0$.

On en déduit par les propriété de pseudo-unicité des hauteurs locales que la fonction précédente est une hauteur locale associée à D :

Proposition 4.10. *Soit $(A/\mathbb{C}, L)$ une variété abélienne principalement polarisée, D l'unique diviseur effectif tel que $L = \mathcal{O}_A(D)$, H la forme de Riemann associée par le théorème d'Appell-Humbert et Θ une fonction thêta, notons $\pi : \mathbb{C}^g \to A$ l'uniformisation canonique, alors si l'on note $\hat{\lambda}_{A/\mathbb{C},D}$ une hauteur locale associée il existe une constante κ telle que pour $z \in \mathbb{C}^g$,*

$$\hat{\lambda}_{A/\mathbb{C},D}(\pi(z)) = -\log|\Theta(z)| + \frac{\pi}{2}H(z,z) + \kappa.$$

Démonstration. C'est un résultat classique, qui provient de la périodicité et du pôle logarithmique le long de D, c'est notamment établi par Serge Lang dans [29]. □

4.3.3 Hauteurs locales aux places non archimédiennes de mauvaise réduction : cas torique et cas mixte

Cas torique

Le cas de réduction non archimédienne torique peut être décrit de manière analogue au cas archimédien. Le cas archimédien tel que nous l'avons présenté dans le second chapitre est un cas bien connu et qu'il est facile de se représenter. Cependant comme nous allons le voir la situation archimédienne correspond dans la situation non archimédienne au cas de réduction la plus dégénérée. C'est comme si une variété archimédienne sur $\mathbb{C}$ a toujours une mauvaise réduction, ce qui pourrait sembler contre-intuitif.

La fonction de Riemann pour un tore complexe $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g)$ où Ω est un réseau (additif) de période est donnée par :

$$\theta(z,\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i^t n\Omega n + 2\pi i^t nz\right),$$

où ^{t} représente la transposition.

Cette fonction est associée à la forme de Riemann $H(z,w) =^t z(\mathrm{Im}(\Omega))^{-1}\bar{w}$ et dans le cas des Jacobiennes elle est associée au diviseur Θ.

On peut remarquer que $\theta(z,\Omega)$ ne dépend que de $\exp(2\pi iz)$ comme fonction de z, on peut la voir comme une fonction sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^{*g}$.

La correspondance dans le cas non archimédien est presque directe. En tant que fonction sur $\mathbb{C}^{*g}$, θ s'écrit,

$$\theta(z,\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{1\le i,j\le g} q_{i,j}^{n_i n_j}\right)\left(\prod_{1\le i\le g} w_i^{n_i}\right),$$

où $q_{i,j} = exp(\pi i\Omega_{i,j})$ et $w_1 \dots w_g$ représentent les coordonnées sur $\mathbb{C}^{*g}$, c'est-à-dire dans la correspondance introduite $w_j = \exp(2\pi iz_j)$.

Ceci était déjà connu au temps de Jacobi, comme dit dans [11], c'est John Tate qui vu que cela a encore un sens dans le cas non archimédien et qui l'utilisa pour construire une uniformisation des courbes elliptiques semi-stable sur un corps non archimédien, la fameuse courbe de Tate, et qui donna ainsi naissance à la géométrie rigide.

Revenons au cas torique non archimédien. On suppose ici qu'on est dans le cas semi-stable, c'est-à-dire que que la composante neutre $\mathcal{A}_v^0$ du modèle de Néron de A/K_v est un tore déployé $\mathbb{G}_m^g$ pour une certaine place v de réduction torique d'un certain corps de nombres K.

Remarque : Nous savons que nous pouvons toujours obtenir une telle réduction déployée après une éventuelle extension non ramifiée du corps de base et donc comme nous le

verrons et rappellerons plus loins cette dernière hypothèse n'est pas restrictive pour nous.
Fin de la remarque.

On sait alors par Tate et Raynaud que l'on dispose d'une uniformisation :

$$(K_v^*)^g \to A(K_v),$$

dont le réseau multiplicatif des périodes, Ω_v, est engendré par disons $e_i = (q_{ij}^2)$.

Remarque : Le fait que nous prenions une matrice des périodes définies par des carré se justifie par l'analogie avec le cas complexe dans lequel la fonction $\theta(z, \Omega)$ introduite précédemment comporte un terme en $\exp(\pi i^t n\Omega n)$ et non en $\exp(2\pi i\ \cdot)$. Ainsi bien que ceci n'apparaisse pas dans le cas complexe, il faut introduire des racines carré.

Fin de la remarque.

Cette théorie est essentiellement due à Raynaud, on peut consulter [46, 7], on peut aussi consulter [20] pour une description plus précise ainsi que [41] pour une construction.

Définition 4.11. Pour des raisons de commodité de calculs qui apparaîtrons plus clairement dans le chapitre suivant nous noterons Q_v la matrice définie par :

$$(-\log |q_{ij}^2|_v)^{-1}_{1\leq i,j\leq n} = Q_v \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]},$$

de sorte que nous pouvons vérifer qu'en notant $e_{w|v}$ l'indice de ramification relatif d'une place w au-dessus de v :

$$Q_w = e_{w|v} Q_v.$$

Enfin, en toute cohérence avec le cas mixte présenté ci-après, nous noterons pour $t = (t_1, \ldots, t_g) \in (K_v^*)^g$:

$$\mathrm{Trop}(t) = (-\log |t_1|_v, \ldots, -\log |t_g|_v) = (\mathrm{Trop}(t_1), \ldots, \mathrm{Trop}(t_g)).$$

Nous allons montrer que la hauteur locale précédente prend, avec ces notations, la forme :

$$-\log |\Theta_v(t)|_v + \frac{1}{2}\left({}^t\mathrm{Trop}(t) Q_v \mathrm{Trop}(t)\right) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v.$$

La relation $Q_w = e_{w|v} Q_v$ provient du fait que la matrice $(-\log |q_{ij}^2|_v)_{1\leq i,j\leq n}$ est indépendente de l'extension $w|v$, on a donc :

$$Q_w \frac{\log\ N(w)}{[K_w : \mathbb{Q}_w]} = Q_v \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]},$$

c'est-à-dire en utilisant l'indice de ramification relatif et le degré relatif :

$$Q_w \frac{f_{w|v} \log\ N(v)}{e_{w|v} f_{w|v} [K_v : \mathbb{Q}_v]} = Q_v \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}.$$

Les relations de Riemann nous disent que la forme quadratique

$$Q_v,$$

est symétrique définie positive.

Cette théorie nous dit que dans le cas torique semi-stable, en parfaite analogie avec le cas complexe, si l'on note pour $m \in \mathbb{Z}^g$:

$$q(m, m) = \prod_{1\leq i,j\leq g} q_{ij}^{m_i m_j}, \text{ et } t^m := \prod_{1\leq j\leq g} t_j^{m_j},$$

alors la fonction, $(K_v^*)^g \to K_v$, définie par

$$\Theta_v(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} q(m,m)t^m,$$

est une fonction thêta en un sens que nous allons préciser.

Lemme 4.12. *Avec les notations et définitions précédentes, pour $t = (t_1, t_2, \dots, t_g) \in K_v^*$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_g) \in \mathbb{Z}^g$, on associe $t' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_g) \in K_v$ défini pour $1 \le j \le g$ par $t'_j = t_j \prod_{i=1}^{g} q_{ij}^{2l_i}$.*

On a alors :

$$\Theta_v(t') = \Theta_v(t)\left(q(l,l)t^l\right)^{-1},$$

où $t^l = \prod_{i=1}^{g} t_i^{l_i}$.

Démonstration. C'est un simple calcul dans lequel la seule propriété que l'on utilise vraiment c'est la symétrie, $q_{ij} = q_{ji}$:

$$\begin{gathered}\Theta_v(t') = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \prod_{1\le i,j\le g} q_{ij}^{m_im_j}\left(\prod_{1\le j\le g}\left(t_j\prod_{i=1}^{g} q_{ij}^{2l_i}\right)^{m_j}\right)\\ = \\ \sum_{m\in\mathbb{Z}^g}\left(\prod_{1\le i,j\le g} q_{ij}^{m_im_j+2l_im_j+l_il_j}\right)\left(\prod_{1\le j\le g} t_j^{m_j+l_j}\right)\left(\prod_{1\le i,j\le g} q_{ij}^{-l_il_j}\right)\left(\prod_{1\le j\le g} t_j^{-l_j}\right)\\ = \\ \Theta_v(t)\left(q(l,l)t^l\right)^{-1}\end{gathered}$$

□

Corollaire 4.13. *La fonction, $t \in (K_v^*)^g \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\left(-\log|\Theta_v(t)|_v + \frac{1}{2}\,{}^t\mathrm{Trop}(t)Q_v\mathrm{Trop}(t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\right),$$

est Ω_v-périodique.

Démonstration. Définissons la matrice :

$$R_v := (\mathrm{ord}_v(q_{ij}^2))_{1\le i,j\le n},$$

alors avec les notations précédentes :

$$Q_v\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = \left(R_v\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\right)^{-1},$$

de sorte que

$$\begin{gathered}\left(-\log|\Theta_v(t)|_v + \tfrac{1}{2}\,{}^t\mathrm{Trop}(t)Q_v\mathrm{Trop}(t)\right)\tfrac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\\ = \\ \left(\mathrm{ord}_v\left(\Theta_v(t)\right) + \tfrac{1}{2}\,{}^t\mathrm{ord}_v(t)R_v^{-1}\mathrm{ord}_v(t)\right)\tfrac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\end{gathered}.$$

Définissons la fonction, $G : (K_v^*)^g \to \mathbb{R}$

$$G(t) = \mathrm{ord}_v\left(\Theta_v(t)\right) + \frac{1}{2}\,{}^t\mathrm{ord}_v(t)R_v^{-1}\mathrm{ord}_v(t),$$

alors pour $t' = (t_j \prod_{i=1}^{g} q_{ij}^{2l_i})_j$, on a :

$$G(t') = \mathrm{ord}_v(\Theta_v(t')) + \frac{1}{2}\,{}^t\mathrm{ord}_v(t')R_v^{-1}\mathrm{ord}_v(t').$$

Or, d'après le lemme précédent,

$$\mathrm{ord}_v(\Theta_v(t')) = \mathrm{ord}_v\left(\Theta_v(t')\left(q(l,l)t^l\right)^{-1}\right) = \mathrm{ord}_v(\Theta_v(t)) - \frac{1}{2}\,{}^tlR_vl -{}^t l\mathrm{ord}_v(t),$$

et d'autre part,

$$\mathrm{ord}_v(t') = \mathrm{ord}_v(t) + R_vl,$$

de sorte que :

$$G(t') = \mathrm{ord}_v(\Theta_v(t)) - \tfrac{1}{2}\,{}^tlR_vl - l\mathrm{ord}_v(t) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{ord}_v(t)+R_vl)^tR_v^{-1}(\mathrm{ord}_v(t)+R_vl)$$
$$=$$
$$\mathrm{ord}_v(\Theta_v(t)) - \tfrac{1}{2}\,{}^tlR_vl -{}^t l\mathrm{ord}_v(t) + \tfrac{1}{2}\,{}^t\mathrm{ord}_v(t)R_v^{-1}\mathrm{ord}_v(t) +{}^t l\mathrm{ord}_v(t) + \tfrac{1}{2}\,{}^tlR_vl$$
$$=$$
$$G(t).$$

□

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.14. *Soit $\Omega_v = q^{\mathbb{Z}^g}$ le réseau des périodes correspondant à l'uniformisation rigide $(K_v^*)^g \to A(K_v)$ de $A(K_v)$ comme précédemment. Soit, avec les notations précédentes, D le diviseur de la fonction $\Theta_v(\cdot)$ et soit $P \in A(K_v) \setminus |D|$ dont nous notons t le paramètre dans $(K_v^*)^g$.*

Alors la fonction, définie à une constante réelle κ_v près, $(K_v^*)^g \to \mathbb{R}$,

$$-\log|\Theta_v(t)|_v + \frac{1}{2}\left({}^t\mathrm{Trop}(t)Q_v\mathrm{Trop}(t)\right)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + \kappa_v,$$

est une hauteur locale canonique associée à D.

Démonstration. On a vérifié en effet que cette fonction est Ω_v-périodique et donc définit bien une fonction sur $A(K_v)$, d'autre part elle possède une singularité logarithmique le long du diviseur de Θ et elle est "fonctorielle" puisque à la somme des diviseurs correspond le produit des fonctions thêta et le terme "quadratique" rendant la fonction périodique est additif. De plus on peut vérifier que la normalisation est choisie correctement pour pouvoir rendre cette hauteur indépendante d'une éventuelle extension $w|v$ au-dessus de v.

Voir aussi [55] pour des constructions et preuves complètes. □

Cas Général

La théorie générale, cas mixte non archimédien, serait trop longue à présenter dans les détails ici. Dans son texte non publié, [22], Marc Hindry pose déjà les fondations de la théorie des hauteurs locales dans le cas mixte. On reproduit ici la la construction esquissée par Marc Hindry. L'article [57] d' Annette Werner formule aussi une version plus restreinte dans le cas de diviseurs algébriquement équivalents à 0.

Nous savons, ce fut déjà présenté dans notre chapitre 2, que dans le cas d'une variété abélienne A/K sur un corps de nombres K admettant réduction semi-stable en une place

v de K, ou bien après une éventuelle extension finie de K la rendant semi-stable, nous avons d'après Raynaud un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & \\ & & M \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & T = \mathbb{G}_m^r \arrow[r] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[d] & & \\ & & 0 & & \end{tikzcd}$$

où C est une variété abélienne admettant bonne réduction en v, G est un groupe algébrique commutatif, M est un réseau dans le sens précisé dans le chapitre 1 et A est représentable comme quotient $A = G/M$.

Si on note $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères de T l'extension G est décrite par un homomorphisme $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}^0(C)$; soit D le diviseur que l'on veut étudier, alors il existe une fonction Θ_v méromorphe sur G (une fonction thêta généralisée) et un diviseur E sur C tel que :

$$q^*(D) = (\Theta_v) + \pi^* E,$$

nantis de la description plus complète donnée dans le chapitre 2, on peut trouver la fonction de Néron ainsi, la fonction

$$-\log |\Theta_v(t)|_v + \hat{\lambda}_{E,v}(\pi(t))$$

possède la même singularité logarithmique que $\hat{\lambda}_{D,v}(q(t))$; on sait de plus, c'est une propriété classique des variétés abéliennes que le diviseur D vérifie le théorème du cube, c'est-à-dire que si pour un ensemble $I \subset \{1,2,3\}$ on note s_I la fonction :

$$s_I : A^3 \to A, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{i \in I} x_i,$$

alors il existe une fonction de ϕ sur A^3 telle que :

$$\sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} s_I^*(D) = \mathrm{div}(\phi).$$

Cela se traduit par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in A^3, \qquad \sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} \hat{\lambda}_{D,v}(s_I(x_1, x_2, x_3)) = -\log |\phi(x_1, x_2, x_3)|_v + c_v,$$

pour une certaine constante c_v.

Ainsi notant l_v la fonction définie par :

$$l_v(t) = \hat{\lambda}_{D,v}(t) - \left(-\log |\Theta_v(t)|_v + \hat{\lambda}_{E,v}(\pi(t)) \right),$$

la fonctions l_v vérifie la relation :

$$\sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} l_v(s_I(x_1, x_2, x_3)) = -\log |f(x_1, x_2, x_2)|_v,$$

pour une certaine fonction rationelle f. En effet $\hat{\lambda}_{E,v}$ vérifie la propriété la formule du cube précédente mais il est aussi bien connu que $-\log|\Theta_v(\cdot)|_v$ aussi (c'est essentiellement cela qui fait que le fibré $\mathcal{O}(D)$ sur A est cubiste).

La fonction l_v étant bornée sur $(A(K) \setminus |D|)$, en effet on a fait ce qu'il fallait pour en retirer les possibles pôles, on en déduit que la fonction rationnelle f est bornée et donc constante.

On en déduit donc que :

$$\sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} l_v(s_I(x_1, x_2, x_3)),$$

est une constante. De l'algèbre élémentaire montre que si une fonction vérifie une telle relation elle est alors de degré 2, c'est-à-dire : "quadratique+Linéaire+Constante".

Ainsi on a nécessairement :

$$\hat{\lambda}_{D,v}(q(t)) = -\log|\Theta_v(t)|_v + \hat{\lambda}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + J_v(t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v, \quad (4.2)$$

où $H(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire, $J(\cdot)$ est linéaire et κ_v est une constante et où l'on a convenablement normalisé les termes.

De plus si on note $\Phi_E : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ l'application usuelle qui à $a \in C$ associe $t_a^* E - E$ où t_a est la translation par a nous avons, toujours comme dans le chapitre 2, qu'il existe un homomorphisme $\phi : M \to X(T)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & G(K_v) \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[d, "\Phi_E"] \\
X(T) \arrow[rr, "\tau"] & & \mathrm{Pic}^0(C).
\end{tikzcd}$$

Le lemme suivant est alors dû à Marc Hindry :

Lemme 4.15. *(Hindry) L'application bilinéaire H_v qui précède est uniquement déterminée par ces valeurs sur $M \times T$ et plus précisément :*

$$\forall (m,t) \in M \times T, H_v(m,t) = \frac{1}{2}\mathrm{ord}_v(\phi(m)(t)).$$

De plus $G(\mathcal{O}_{K_v})$, le sous-groupe des points "entiers" de G tel que défini à la fin du chapitre 2, est dans le noyau de H.

Démonstration. On a utilise, suivant [48], l'existence d'une fonction h_m telle que Θ_v vérifie l'équation fonctionnelle :

$$h_m(g)\Theta_v(mg) = \Theta_v(g),$$

et où

$$\forall t \in T, h_m(tg) = \phi(m)(t)h_m(g).$$

Nous reprenons alors simplement l'équation 4.3 et utilisons la périodicité de $\hat{\lambda}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\lambda}_{D,v}(q(gmt)) - \hat{\lambda}_{D,v}(q(gt)) + \hat{\lambda}_{D,v}(q(g)) - \hat{\lambda}_{D,v}(q(gm)) \\ &= + \log |h_m(tg)/h_m(g)|_v + 2H_v(t,g)\frac{\log N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} \\ &= + \log |\phi(m)(t)|_v + 2H_v(t,m)\frac{\log N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}. \end{aligned}$$

L'unicité d'une fonction bilinéaire H vérifiant cette propriété est immédiate si l'on utilise que G/T est compact, l'existence provient bien entendu de l'existence des hauteurs locales de Néron mais on peut aussi décrire plus explicitement H : tout d'abord l'application H de $T \times M$ dans $\mathbb{R}$ passe au quotient en une application de $T(K_v)/T(\mathcal{O}_{K_v}) \times M$ dans $\mathbb{R}$ puis en utilisant $G(K_v) \to G(K_v)/G(\mathcal{O}_{K_v}) \cong T(K_v)/T(\mathcal{O}_{K_v})$ on obtient $H : G \times M \to \mathbb{R}$ avec $H_v(m_1, m_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Trop}(m_1)(\phi(m_2))$ est l'application bilinéaire définie positive sur M du théorème 2.16 de la fin du chapitre 2. En particulier H ainsi définie s'étend à $G \times G$ et le sous-groupe $G(\mathcal{O}_{K_v})$ défini dans la dernière section du chapitre 2 est dans le noyau de H. □

Nous avons les deux lemmes suivants qui nous seront utiles dans le chapitre suivant :

Lemme 4.16. *Soit $(A/K, L)$ une variété abélienne principalement polarisée sur un corps de nombre K. Alors il existe une extension finie K'/K et un fibré en droites ample et symétrique L' translaté de L sur K' tel que $(A/K', L')$ soit principalement polarisée.*

Démonstration. Rappelons qu'en toute généralité, une polarisation d'une variété abélienne A/K est une application

$$\phi : A \to \mathrm{Pic}^0(A),$$

qui s'écrit pour un certain fibré en droites ample L, $\phi(a) = t_a^* L \otimes L^{-1}$. Le groupe Pic^0 étant naturellement vu comme la variété abélienne duale de A.

Soit donc L un fibré en droites ample définissant une polarisation principale sur A.

— Remarquons que le fibré $L \otimes [-1]^* L^{\otimes(-1)}$ est antisymétrique et donc il s'écrit comme $\phi_L(a)$ pour un certain $a \in A(\bar{K})$.

— Remarquons que toute translation du fibré L définit encore une polarisation principale, recherchons donc parmi tous les translatés de L celui ou ceux qui sont symétrique.
Pour cela posons $L_b = t_b^* L$ pour un certain $b \in A(\bar{K})$.
Alors, en remarquant que $[-1]^* L \cong L^{\otimes(2)} \otimes (t_a^* L)^{\otimes(-1)}$, nous avons en notation additive :

$$[-1]^* L_b = [-1]^* t_b^* L = (t_b \circ [-1])^* L = ([-1]^* \circ t_{-b})^* L = t_{-b}^* [-1]^* L,$$

d'où

$$[-1]^* L_b = t_{-b}^*(2L - t_a^* L) = 2t_{-b}^* L - t_{a-b}^* L.$$

On en déduit que

$$[-1]^* L_b - L_b = -t_{a-b}^* L + 2t_{-b}^* L - t_b L = -\phi_L(a-b) + 2\phi_L(-b) - \phi_L(b) = \phi_L(-a-2b).$$

Et donc pour que L_b soit symétrique il suffit que $a + 2b = 0$ pour certains a et b définis dans $A(\bar{K})$.

□

Lemme 4.17. *Soit $(A/K_v, L)$ une variété abélienne principalement polarisée sur un corps non archimédien K_v par un fibré en droite ample et symétrique L. Alors il existe une unique diviseur D tel que $D = \operatorname{div}(s)$ pour $s \in H^0(A, L) \setminus \{0\}$, D est effectif et symétrique de sorte que la fonction J dans la formule, 4.2, de la hauteur locale canonique soit nulle.*

Démonstration. Rappelons la décomposition évidente d'un diviseur D en somme d'un diviseur symétrique et d'un diviseur antisymétrique : $2D = (D + [-1]^*D) + (D - [-1]^*D)$ et décidons d'appeler complètement symétrique un diviseur de la forme $([-1]^*D' + D')$

Dans le cadre de ce qui précède, si l'on suppose d'abord pour simplifier que D est complètement symétrique, on peut décomposer $q^*D = (\Theta_v) + \pi^*E$ avec E complètement symétrique de sorte que la fonction J dans la formule 4.2 de la hauteur locale canonique soit nulle.

En effet :

Si $D = D' + [-1]^*D'$ et $q^*D' = (\Theta'_v) + \pi^*E'$ alors $q^*D = (\Theta_v) + \pi^*E$ avec $E = E' + [-1]^*E'$, totalement symétrique, et $\Theta_v(g) = \Theta'_v(g)\Theta'_v(g^{-1})$. On voit donc que $\hat{\lambda}_v \circ [-1] = \hat{\lambda}_v$ et $\Theta_v(g) = \Theta_v(g^{-1})$; comme de plus $H_v(g, g) = H_v(g^{-1}, g^{-1})$ par bilinéarité, $J_v(g) = J_v(g^{-1})$ et donc $J_v \equiv 0$.

D'autre part, si A/K_v est principalement polarisée par un fibré L symétrique de sorte que $L = [-1]^*L$ alors on voit qu'il existe un unique diviseur (nécessairement effectif) tel que $D = \operatorname{div}(s)$ pour tout $s \in H^0(A, L) \setminus \{0\}$ car $h^0(A, L) = 1$. On voit alors que $L = \mathcal{O}(D)$ et donc que $D = [-1]^*D$. Ainsi, $2D$ est complètement symétrique on est alors dans la situation précédente avec $\hat{\lambda}_{D,v} = \frac{1}{2}\hat{\lambda}_{2D,v} + C_v$ pour une certaine constante C_v et donc la fonction linéaire dans l'équation 4.2 est aussi identiquement nulle. □

On retiendra que l'on peut toujours quitte à faire une extension du corps supposer que le fibré ample qui nous intéresse est symétrique et que dans ce cas si D est le diviseur effectif correspondant à L, la hauteur locale prend la forme suivante :

$$\hat{\lambda}_{D,v}(q(t)) = -\log|\Theta_v(t)|_v + \hat{\lambda}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v, \tag{4.3}$$

en particulier dans le chapitre suivant nous allons voir que notre construction est invariante par toute extension finie du corps de base, en particulier on pourra toujours supposer que le fibré est symétrique.

Chapitre 5

Minoration de la Hauteur de Faltings

Dans ce chapitre on reprend le travail initié par Jean-Benoît Bost pour minorer la Hauteur de Faltings tel que décrit dans l'appendice 8 de [18] et qui sert à Pascal Autisser dans [3] pour établir une version effective du lemme matriciel de David Masser. Notre but est de compléter l'inégalité en y incluant les contributions des places non archimédiennes de mauvaise réduction.

Le cas des places archimédiennes est reproduit ici pour nous orienter. Ensuite nous traitons le cas des variétés abéliennes à réduction complètement dégénérée pour servir de guide finalement pour le cas général des variétés abéliennes à réductions mixtes.

Nous nous servons pour cela des rappels fait dans les chapitres 2, 3 et 4, en particulier vis-à-vis de la notion de hauteur locale que nous rapprochons de la notion de norme d'une section d'un fibré hermitien cubiste.

Il est à noter que ce rapprochement entre hauteur locale et norme de section, qui est d'ailleurs explicité dans le chapitre III du livre de Laurent Moret-Bailly [35] n'est que rarement présentée. C'est ce que nous faisons dans la section de préliminaires. Dans cette section nous présentons aussi l'inégalité de base qui sera utilisée par la suite.

5.1 Préliminaires

Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K.

Remarque Ce chapitre consiste essentiellement en une minoration théorique de la hauteur de Faltings des variétés abéliennes principalement polarisées sur un corps de nombres. Étant donné $(A/K, L)$ une variété abélienne principalement polarisée nous associons naturellement à L l'unique diviseur effectif $D \geq 0$ tel que $L = \mathcal{O}_A(D)$. Il est défini sans équivoque comme le diviseur d'une section globale non nulle de L. De plus, pour toute la suite, nous noterons par $|E|$ le support d'un diviseur E.

Fin de la Remarque

La conséquence du théorème de Mordell-Weil et de l'existence des modèles de Moret-Bailly telle que présentée à la fin du chapitre 3 est la suivante

Proposition 5.1. *Soit (A, L) une variété abélienne polarisée sur un corps de nombre K, il existe un modèle de Moret-Bailly, au sens de la définition 3.12 du chapitre 3, $(\mathcal{A} \to \text{Spec}\, \mathcal{O}_{K'}, \mathcal{L})$ défini sur l'anneau des entiers d'une extension K' de K tel que :*

1. *K'/K est une extension finie*
2. *$\mathcal{L}$ est un fibré hermitien cubiste*

3. *$\mathcal{A} \to$ Spec $\mathcal{O}_{K'}$ est un schéma en groupes semi-stable de fibre générique A/K.*
4. *Chaque point rationnel $P \in A(K)$ se relève en une section entière ϵ_P : Spec $\mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{A}$.*

Démonstration. D'après le théorème de Mordell-Weil, A(K) est un groupe abélien de type fini. Choisissons alors un ensemble constitué d'un ensemble fini de générateurs de $A(K)$.

On peut alors appliquer le théorème de Jean-Benoît Bost, rappelé à la fin du chapitre 3, sur l'existence d'une extension finie K'/K telle que de plus les points 2., 3. et 4. de la proposition précédente soient vérifiées. □

Il faut noter qu'en général ce modèle n'est pas un modèle de Néron mais plutôt c'est un ouvert dans un modèle de Néron comme le stipule le théorème de téduction temi-stable. Il y a en effet deux processus qui rentrent en concurrence ici, à la fois l'existence de l'extension des points rationnels en sections entières et l'existence de l'extension cubiste du fibré. Ces deux processus et l'obstruction conséquente font qu'il n'est pas possible en général d'avoir de telles propriétés sur un Modèle de Néron.

Munissons nous, à présent, d'un modèle de Moret-Bailly ($\mathcal{A} \to$ Spec $\mathcal{O}_{K'}, \mathcal{L}$) au sens de la proposition précédente pour une variété abélienne principalement polarisée $(A/K, L)$.

Considérons maintenant une place non archimédienne, v, de K et la complétion correspondante K_v. Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'à ces données correspond une hauteur locale canonique $\hat{\lambda}_{D,v}$ qui n'est bien définie qu'à une constante près.

Définition 5.2. (Hauteur canonique normalisée) Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombre K. Soit D un diviseur sur A.

Pour v une place non archimédienne de K, nous choisissons ici de noter $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ la hauteur locale canonique associée à D qui est normalisée de sorte que

$$\inf_{P \in A(\bar{K}_v) \setminus |D|} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) = 0.$$

Dans notre cadre, nous serons dans la situation d'une variété abélienne principalement polarisée par un fibré L. Nous choisissons alors de noter $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ l'unique fonction hauteur canonique normalisée comme précédemment qui soit associée à l'unique diviseur effectif D tel que $L = \mathcal{O}(D)$.

À la donnée d'un tel modèle de Moret-Bailly correspond un $\mathcal{O}_{K'_v}$-module $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K'_v}$ qui définit un réseau dans $H^0(A, L) \otimes_{K'} K'_v$. A un tel réseau est associée une norme définie pour $s \in H^0(A, L) \otimes_{K'} K'_v$ par

$$\|s\|_{\mathcal{L},v} = \min\left\{|\lambda|_v;\ \lambda \in K'_v \setminus \{0\} \text{ et } s/\lambda \in H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K'_v}\right\}.$$

De même si a un point rationnel $P \in A(K)$ correspond la section entière $\epsilon_P : \mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{A}$ nous pouvons définir le réseau $H^0(\epsilon_P, \epsilon_P^*\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K'_v}$ dans $H^0(P, P^*L) \otimes_{K'} K'_v$ et définir ainsi une norme :

$$\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v} = \min\left\{|\lambda|_v;\ \lambda \in K'_v \setminus \{0\} \text{ et } s/\lambda \in H^0(\epsilon_P, \epsilon_P^*\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K'_v}\right\}.$$

Notre but ici est de démontrer que

Théorème 5.3. *Avec la construction qui précède, la fonction, $(A(K_v) \setminus |D|) \to \mathbb{R}$, définie par*

$$P \mapsto -\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right),$$

est une hauteur locale canonique associée au diviseur $D = \mathrm{div}(s)$.

De plus si $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ *est la hauteur locale canonique normalisée comme dans la définition 5.2 qui précède et si les normes de sections sont normalisées de manière correspondante :*

Alors, pour chaque $P \in A(K_v)$ *et chaque* $s \in H^0(A, L) \times_K K'$,

$$\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right) \leq -\hat{\lambda}_{D,v,n}(P).$$

Démonstration. Les théorèmes B.8.1, 9.1 et 9.2 et 9.3 respectivement de [25], notamment rappelés dans le chapitre précédent, qui sont essentiellement dus à Néron dans [43] nous disent qu'il existe une unique fonction définie à une constante près qui vérifient les conditions de normalisation, d'additivité, de fonctorialité ainsi que la propriété local/global de redonner la hauteur de Néron-Tate sur la somme pour toutes les places.

Or Laurent Moret-Bailly dans le chapitre III de [35] montre que la fonction qui nous intéresse vérifie bien ces conditions. Il le prouve dans le cadre d'un modèle de Néron mais les seules propriétés qu'il utilise sont celles de vérifier l'extension des points rationnels et l'existence du fibré cubiste, autrement dit les propriétés qu'il utilise sont valables pour un modèle de Moret-Bailly. En particulier les propriétés de normalisation, d'additivité, de fonctorialité de la page 65 de [35] sont les mêmes que celle d'une hauteur locale. Il énonce de plus à la fin du chapitre que ces hauteurs locales vérifient la propriété local/global de redonner la hauteur de Néron-Tate.

De plus on peut vérifier facilement que les normalisations des normes de sections données dans le chapitre 3. correspondent avec les normalisations de nos hauteurs locales du chapitre 4.

On en déduit, d'après les théorèmes de [25] et [35] précisés précédemment, que

$$-\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right),$$

est bien une hauteur locale canonique convenablement normalisée.

On déduit de ceci qu'il existe une constante $h_v \in \mathbb{R}$ telle que

$$-\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right) = \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) + h_v,$$

mais d'autre part nous remarquons que si $s \in H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_v}$ alors $s(P) \in H^0(\epsilon_P, \epsilon_P^*\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_v}$, donc pour tout $P \in A(K)$ et pour tout $s \in H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_v}$:

$$\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v} \leq \|s\|_{\mathcal{L},v},$$

et donc pour tout $P \in A(K)$,

$$-\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right) \geq 0,$$

autrement dit $h_v \geq 0$ avec la condition de normalisation sur $\hat{\lambda}_{D,v,n}$.

On a donc prouvé la deuxième assertion du théorème. □

Comme dans le chapitre 3, en une place archimédienne σ, le fibré L est muni d'une métrique correspondant au fibré hermitien cubiste $\mathcal{L}$ de sorte que la norme $\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}$ de l'évaluation d'une section s en un point $\mathbb{C}$-rationnel P pour la place σ est définie sans ambiguité. De plus, en association, on définit la norme $\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}$ par :

$$\|s\|_\sigma = \left(\int\limits_{A_\sigma} \|s(P)\|^2_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma} g\mu_\sigma(P) \right)^{1/2},$$

où $d\mu_\sigma$ est la mesure de Haar-Lebesgue sur A_σ.

Avec ces normes, le fibré $H^0(A, L)$ devient un fibré hermitien ou bien, dit de manière équivalente, un fibré adélique.

Supposons maintenant que notre variété abélienne A est munie d'une polarisation principale L, de sorte que $\chi(A, L) = h^0(A, L) = 1$ et que notre point P ne soit pas dans le support du diviseur D associé à L.

Nous allons alors utiliser ce qui précède ainsi que notre travail préliminaire sur les hauteurs locales dans le cadre de la formule

$$\hat{\mu}(\overline{H^0(A_{K'}, L_{K'})}) = \hat{\mu}(\overline{\epsilon_P^*\mathcal{L}}) + \frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_v [K'_v : \mathbb{Q}_v] \log \left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}} \right), \tag{5.1}$$

où la somme a lieu sur toutes les places.

La formule précédente est relativement triviale une fois que l'on connaît la formule 3.1 de la section 3.1 du chapitre 3 et en remarquant que les deux fibrés en question sont de rang 1.

En effet d'après cette formule nous avons pour $s \in H^0(A_{K'}, L_{K'}) \setminus \{0\}$,

$$\widehat{\deg}_n(\overline{H^0(A_{K'}, L_{K'})}) = -\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_v [K'_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s\|_{\mathcal{L},v},$$

la somme ayant lieu sur toutes les places et de même

$$\widehat{\deg}_n(\overline{\epsilon_P^*\mathcal{L}}) = -\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_v [K'_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v},$$

en sommant sur toutes les places.

La formule qui précède est alors simplement la différence entre ces deux termes sachant qu'on est dans le cadre de fibrés hermitiens de rang 1.

Le théorème 4.10, (ii) de [9], rappelé à la fin du chapitre 3 nous indique que

$$\hat{\mu}(\overline{\epsilon_P^*\mathcal{L}}) = h_L(x),$$

ainsi que la formule hautement non triviale due à Jean-Benoît Bost, la "formule clé" :

$$\hat{\mu}(\overline{H^0(A_{K'}, L_{K'})}) = -\frac{1}{2} h_{\mathrm{st}}(A) - \frac{g}{4} \log(2\pi).$$

Pour toute la suite de ce texte, nous définirons après les formules définissant la hauteur de Faltings du chapitre 3 :

Définition 5.4. Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K, soit $h(A/K)$ et $h_{\mathrm{st}}(A)$ respectivement la hauteur de Faltings sur K et la hauteur de Faltings stable telle que définies dans le chapitre 3, nous posons alors et pour toute la suite de ce texte :

$$\tilde{h}(A/K) = h(A/K) + \frac{g}{2} \log(2\pi),$$

et

$$\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) = h_{\mathrm{st}}(A) + \frac{g}{2} \log(2\pi).$$

Ces définitions reviennent essentiellement à une renormalisation de la hauteur de Faltings comme nous l'avons indiqué dans la remarque du chapitre 3.

L'intérêt de cette définition est d'une part que nous n'aurons plus à ajouter partout la constante en question et que d'autre part les hauteurs de Faltings ainsi définies deviennent des nombres positifs (d'après Bost, voir plus loin, cas archimédien).

Nous aurons donc

$$-\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) = h_L(P) + \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_v [K'_v:\mathbb{Q}_v]\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right), \tag{5.2}$$

l'idée originale de Jean-Benoît Bost qui est précisée dans [18] est alors de faire une moyenne de l'égalité précédente sur les points de torsion de la variété abélienne pour lesquels la hauteur $h_L(P)$ est nulle.

L'idée très intéressante de Jean-Benoît Bost constituait grosso modo à ne considérer que les places archimédiennes tandis que les termes non archimédiens étaient négligés. Dans le travail de Jean-Benoît Bost précisé dans l'appendice 8 de [18] seules les places archimédiennes comptent et il utilise l'inégalité

$$-\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \leq h_L(P) + \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}}{\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}}\right),$$

qui provient de l'égalité précédente utilisée en incorporant pour chaque place non archimédienne v,

$$\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}} \leq 1,$$

qui est équivalente à dire que si une section est entière elle est entière le long de la section ϵ_P qui étend P.

Notre travail affine le résultat de Jean-Benoît Bost en incorporant des estimations plus fines des termes non archimédiens.

Remarque

1. Dans le travail précédent, notamment dans le choix du modèle de Moret-Bailly, nous pouvons librement considérer que $A(K')$ contient tous les points de N-torsion de A. En effet l'égalité 5.2 précédente est independante de l'extension K'/K et nous pouvons appliquer le théorème de Jean-Benoît Bost sur l'existence des modèles de Moret-Bailly en incluant l'ensemble fini des points de N-torsion. Nous faisons ce choix pour la suite.

   Définition 5.5. (Notation) Nous noterons donc dorénavant K'_N une extension finie de K telle qu'il existe un modèle de Moret-Bailly de (A, L) défini sur $\mathcal{O}_{K'_N}$ tel que tout point K-rationnel et tout point de N-torsion de A s'étende en une section de ce modèle.

   Il sera notamment important pour nous de savoir qu'avec les normalisations que nous avons choisies dans le chapitre 3, $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ est défini de manière unique sur tout $\bar{K}$.

2. Plus précisément nous pourrons supposer dans notre travail que nous nous plaçons sur une extension finie K'/K quelconque ou plus précisément choisie au besoin de la situation puisque tous les termes restent invariants.

Dans notre contexte nous aurons les places complexes, les places de bonne réduction et les places de mauvaise réduction (désignées par Bad). Dans notre évaluation nous ne prenons en compte que les places archimédiennes et les places non archimédiennes de mauvaise réduction. La manière dont nous faisons nos évaluations ne peut en effet rien apporter de plus dans le cas de bonne réduction (voir la remarque qui suit).

Dans toute la suite de ce texte nous adoptons donc la notation suivante :

Définition 5.6. Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K, nous notons :

$$\mathrm{Bad}(A/K),$$

l'ensemble des places non archimédiennes de K où A a mauvaise réduction.

Ainsi si $P \in (A[N] \setminus |D|)$, $h_L(P) = 0$, nous aurons donc :

$$\begin{gathered} -\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \\ \leq \\ \tfrac{1}{[K'_N:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K'_N \hookrightarrow \mathbb{C}} \log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}}{\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}}\right) + \tfrac{1}{[K'_N:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K'_N)} [K'_{N,v} : \mathbb{Q}_v] \log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right), \end{gathered}$$

Notant à présent $t_N := \mathrm{Card}(D \cap A[N])$ où D est le diviseur correspondant à L nous avons en faisant la moyenne :

$$\begin{gathered} (1 - \tfrac{t_N}{N^{2g}}) \left(-\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)\right) \\ \leq \\ \tfrac{1}{N^{2g}[K'_N:\mathbb{Q}]} \sum_{P \in (A[N] \setminus |D|)} \sum_{\sigma:K'_N \hookrightarrow \mathbb{C}} \log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}}{\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}}\right) \\ + \\ \tfrac{1}{N^{2g}[K'_N:\mathbb{Q}]} \sum_{P \in (A[N] \setminus |D|)} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K'_N)} [K'_{N,v} : \mathbb{Q}_v] \log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right) \end{gathered}$$

Rappelons à présent, la forme suivante d'un théorème de Raynaud, ex-conjecture de Manin-Mumford :

Théorème 5.7. *(Raynaud, voir [47]) Soit A/K est une variété abélienne sur un corps de nombres K et soit V une sous-variété de A, alors il existe un nombre fini n de sous-varitítés abéliennes B_i, $i = 1, \ldots, n$, telles que si l'on note A_{tors} l'ensemble des points de torsion de A et respectivement $B_{i,\mathrm{tors}}$ ceux des B_i alors il existe des points $t_1, t_2, \ldots, t_n \in A$ tels que :*

$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ (t_i + B_i) \subset V,$$

et

$$A_{\mathrm{tors}} \cap V = \bigcup_{i=1}^{n} (t_i + B_{i,\mathrm{tors}}).$$

Ainsi, les points de torsion situés sur D sont contenus dans un nombre fini de sous-variétés abéliennes strictes de A. On en déduit que $t_N = O(N^{2g-2})$.

Donc, en passant à la limite supérieure que :

$$\begin{gathered} -\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \\ \leq \\ \limsup_{N\to\infty} \tfrac{1}{N^{2g}[K'_N:\mathbb{Q}]} \sum_{P \in (A[N] \setminus |D|)} \sum_{\sigma:K'_N \hookrightarrow \mathbb{C}} \log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}}{\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}}\right) \\ + \\ \limsup_{N\to\infty} \tfrac{1}{N^{2g}[K'_N:\mathbb{Q}]} \sum_{P \in (A[N] \setminus |D|)} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K'_N)} [K'_{N,v} : \mathbb{Q}_v] \log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right), \end{gathered} \tag{5.3}$$

ce qui nous permet de séparer les places archimédiennes des places non archimédiennes de mauvaise réduction.

Remarque au sujet des places de bonne réduction : Nous savons depuis Néron, voir le chapitre 4, qu'aux places de bonnes réductions v, la hauteur locale est donnée, à une constante réelle κ_v près, par

$$\hat{\lambda}_{D,v}(P) = \mathrm{mult}_{D,v}(P)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v,$$

où $\mathrm{mult}_{D,v}(P)$ est la mutltiplicité d'intersection du diviseur D au point P en v, telle que définie dans le chapitre 4., de sorte qu'en une place de bonne réduction,

$$\hat{\lambda}_{D,v,n} = \mathrm{mult}_{D,v}(P)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}.$$

Or le théorème principal de John Boxall dans [10] est que

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ v \text{ ne divise pas } N}} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{P \in (A[N] \setminus |D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) = 0.$$

Ainsi nous voyons que, dans le cas d'une place v de bonne réduction, le processus précédent ne peut fournir mieux qu'une majoration grossière du type

$$\log\left(\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},v}}{\|s\|_{\mathcal{L},v}}\right) \leq 0.$$

Nous allons voir qu'aux places de mauvaise réduction nous pouvons cependant obtenir de meilleures estimations.

Rappelons pour l'instant le traitement de la partie archimédienne.

5.2 Partie complexe

La norme archimédienne associée à un fibré hermitien cubiste a été calculée sans ambiguité par Laurent Moret-Bailly dans son article [37].

C'est maintenant un résultat classique que si θ est la fonction thêta associée par le theorème d'Appell-Humbert à $s \in H^0(A, L) \otimes_\sigma \mathbb{C}$ alors pour tout $P = \exp_{A_\sigma}(z) \in A_\sigma$,

$$\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma} = |\theta(z)| \exp\left(-\frac{\pi}{2}\|z\|_{L,\sigma}^2\right),$$

où $\|\cdot\|_{L,\sigma}$ est la forme de Riemann associée à L et à σ. Il s'agit de la forme hermitienne que nous avons notée H dans le chapitre 1 après le théorème d'Appell-Humbert.

Rappelons-en la raison ([37, 35]) : le membre de droite est invariant sous l'action du réseau et est le produit de θ par une fonction C^∞ positive, il en résulte que le membre de droite définit une unique norme sur $\mathcal{O}(\theta)$. D'autre part ce même membre est à courbure par rapport à z invariante car c'est le produit d'une fonction holomorphe par une exponentielle quadratique. Or la proposition 2.1 p.48 de [35] indique que $\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}$ est à une constante de normalisation près l'unique norme sur L_σ satisfaisant ces propriétés.

Considérons à présent une variété abélienne A principalement polarisée par un fibré L et reprenons le travail de Gaël Rémond et de Éric Gaudron, d'après Jean-Benoît Bost, dans [18] appendice 8.

Comme la variété abélienne est principalement polarisée elle est isomorphe à un quotient $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega_\sigma\mathbb{Z}^g)$, Ω_σ étant la matrice des périodes.

On introduit la fonction $F_\sigma : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ définie si $z = q + \Omega_\sigma p \in \mathbb{C}^g$ avec $p, q \in \mathbb{R}^g$ par

$$F_\sigma(z) = \det\left(2\mathrm{Im}(\Omega_\sigma)\right)^{1/4} \sum_{n \in Z^g} \exp(i\pi^t(n+p)\Omega_\sigma(n+p) + 2i\pi^t nq).$$

Nous avons alors le lemme suivant, essentiellement classique, qui est repris par Laurent Moret-Bailly dans [37], et qui se trouve comme lemme 8.2 de [18].

Lemme 5.8. *Soit σ un plongement complexe de K*

1.

$$\int_{(\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g)^2} |F_\sigma(q + \Omega_\sigma p)|^2 gpdq = 1$$

2. $\theta_\sigma(z) = F_\sigma(z) \exp\left((\pi/2)^t z \mathrm{Im}(\Omega_\sigma)^{-1} z - i\pi^t p \Omega_\sigma p\right)$ *pour* $z = q + \Omega_\sigma p$ *avec* $p, q \in \mathbb{R}^g$ *alors* $\theta_\sigma : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ *est une fonction thêta assocciée à la donnée d'Appell-Humbert* (H_σ, χ_σ) *définie par :*

$$H_\sigma(z, z') =^t \bar{z} \mathrm{Im}(\Omega_\sigma)^{-1} z', \qquad \chi_\sigma(n + \Omega_\sigma m) = (-1)^{^t mn}.$$

3. $|\theta_\sigma(z)| = |F_\sigma(z)| \exp\left(\frac{\pi}{2} H_\sigma(z, z)\right)$.

Démonstration. C'est le lemme 8.2 de [18] prouvé dans cet article. □

Nous rappelons maintenant la définition des invariants $I(A(\mathbb{C}), L_\mathbb{C})$:

Définition 5.9. Étant donnés une variété abélienne principalement polarisée $(A/K, L)$ définie sur un corps de nombre K et une place $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, un isomorphisme $A_\sigma(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega_\sigma \mathbb{Z}^g)$ étant fixé, on définit dans le cadre de ce qui précède,

$$I(A_\sigma, L_\sigma) = -\int_{(\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g)^2} \log |F_\sigma(q + \Omega_\sigma p)| dpdq$$

Remarques

1. On peut remarquer grâce à l'inégalité de Jensen et à la normalisation du point 1. du lemme précédent que $I(A_\sigma, L_\sigma) \geq 0$.
2. Si on fait une extension finie K'/K du corps de définition K de A/K

$$\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma' \colon K' \hookrightarrow \mathbb{C}} I(A_{\sigma'}, L_{\sigma'}) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \colon K \hookrightarrow \mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma)$$

est indépendant de l'extension finie K'/K. En particulier, cette valeur est indépendante de toute extension finie K'/K.

En effet si K'/K est une extension finie et si $\sigma' : K' \hookrightarrow \mathbb{C}$ est un plongement qui se restreint en un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega_{\sigma'} \mathbb{Z}^g) \equiv \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega_\sigma \mathbb{Z}^g)$$

de sorte que comme $F_\sigma = F_{\sigma'|K}$ on a,

$$\sum_{\substack{\sigma' : K \hookrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma'|_K = \sigma}} I(A_{\sigma'}, L_{\sigma'}) = \left(\sum_{\substack{\sigma' : K \hookrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma'|_K = \sigma}} 1 \right) I(A_\sigma, L_\sigma) = [K' : K] I(A_\sigma, L_\sigma).$$

On conclut en faisant la somme sur les $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et en utilisant la multiplicativité du degré.

3. Enfin, quitte à faire une extension finie de K on peut fixer l'isomorphisme entre A_σ et $\mathbb{C}^g/(\Omega_\sigma\mathbb{Z}^g+\mathbb{Z}^g)$ de sorte que L_σ corresponde au faisceau inversible de donnée d'Appell-Humbert définie dans le lemme précédent. En effet la forme hermitienne est de toute façon fixée par A tandis que si l'on fait une translation de L, on peut obtenir d'après le lemme 4.16 du chapitre 3, une polarisation par un fibré symétrique puis par une translation par un point de 2-torsion convenable le fibré défini toujours une polarisation principale tandis que χ_σ peut-être maintenant donné par la formule du lemme qui précède.

Nous en déduisons la chose suivante :

Quitte à faire une extension suffisamment grande mais finie de K, nous sommes dans le cadre de l'inégalité 5.3 avec pour les normes, d'après le lemme précédent :

$$\frac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}}{\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}}=|F_\sigma(z_\sigma)|.$$

Nous avons alors :

Théorème 5.10. *(J.-B. Bost, voir [18])*

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)\\ \geq\\ -\limsup_{N\to\infty}\tfrac{1}{N^{2g}[K'_N:\mathbb{Q}]}\sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)}\sum_{\sigma\colon K'_N\hookrightarrow\mathbb{C}}\log\left(\tfrac{\|s(P)\|_{\epsilon_P^*\mathcal{L},\sigma}}{\|s\|_{\mathcal{L},\sigma}}\right)\\ \geq\\ \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}}I(A_\sigma,L_\sigma)\end{gathered}\tag{5.4}$$

Démonstration. Ce résultat est prouvé comme théorème 8.1 p.34 de [18].

Nous en rappelons très brièvement quelques points essentiels de la démonstration : :

1. Remplacer les normes de sections par les valeurs absolues de fonctions F_σ comme dans le point précédant.
2. Remarquer que la somme sur les points de torsion est essentiellement une somme de Riemann ce qui fera appraître l'intégrale.
3. Mais tous les points de torsion ne peuvent pas intervenir car certains peuvent être trop proches du support du diviseur associé à L (quand N et donc le degré de K'/K tendent vers l'infini les points de torsion deviennent denses), il faut en tous cas au moins enlever les points qui sont sur $|D|$ et en fait il est commode d'enlever une sorte de voisinage tubulaire de $|D|$. Il faut donc tronquer la somme de Riemann. Le point merveilleux est alors l'utilisation du theorème de Raynaud (ex-conjecture de Manin-Mumford) qui va faire appraître que les points de torsion de A qui sont sur le support du diviseur apportent une contribution en $O(N^{2g-2})$, ce qui les rend négligeables. Il est alors notamment important d'avoir l'invariance par extension de K indiquée dans la remarque précédente.

□

Remarque : On déduit notamment de cette dernière inégalité que comme les invariants $I(\cdot,\cdot)$ sont positifs :

$$\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)\geq 0.$$

Fin de la remarque.

5.3 Cas de réduction totalement dégénérée (torique)

Remarque Importante

Cette section a essentiellement un intérêt pédagogique et l'intérêt de servir de guide au cas général qui est établi dans la section suivante. Cela permet d'avoir un certain point de vue pour comprendre ce qui se passe quand on essaie d'évaluer les termes non archimédiens qui nous intéressent.

Dans cette optique, nous nous plaçons dans le cas suivant : le diviseur D est le diviseur d'une fonction thêta particulière.

Fin de la Remarque

Nous nous plaçons toujours dans le cas d'une variété abélienne A/K définie sur un corps de nombres K et nous supposons dans cette section que A admet, en une place v de mauvaise réduction , une réduction torique telle qu'introduite dans le chapitre 4.

Nous nous plaçons dans le cadre des préliminaires, section 4.1, de ce chapitre.

Dans ce cas on sait, voir chapitre 4, que quitte à faire une extension finie de K' que nous notons aussi K', A_v est représentable, comme quotient analytique rigide, comme le quotient d'un tore déployé $(\mathbb{G}_{m,v})^g$ par un sous-groupe de période :

$$A(K'_v) \cong (K'^*_v)^g/(\Omega_v),$$

où Ω_v est un réseau multiplicatif des périodes qui est engendré disons par $\bar{q} = (q^2_{ij})_{1\leq i,j\leq g}$.

Nous associons à ceci une fonction thêta non archimédienne donnée par :

$$\Theta_v(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} q(m,m)t^m,$$

où

$$q(m,m) = \prod_{1\leq i,j\leq g} q_{ij}^{m_i m_j},$$

et

$$t^m = \prod_{1\leq i\leq g} t_i^{m_i}.$$

Remarquons que nous ne prouvons pas ici qu'il s'agisse du cas torique général, nous traiterons en fait la situation en toute généralité et notamment dans le cas de réduction mixte dans la section suivante.

Nous savons, par Hisasi Morikawa dans la section 3. de [39], que la série Θ_v est bien convergente et nous savons de plus que la forme quadratique représentée par Q_v, la matrice introduite dans la définition 4.11 du chapitre 4, est définie positive, et nous rappellons que la hauteur locale prend la forme :

$$-\log|\Theta_v(t)|_v + \frac{1}{2}\left({}^t\mathrm{Trop}(t)Q_v\mathrm{Trop}(t)\right)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + \kappa_v,$$

où $\mathrm{Trop}(t) = (-\log|t_1|_v, \ldots, -\log|t_g|_v) = (\mathrm{Trop}(t_1), \ldots, \mathrm{Trop}(t_g))$ pour $t = (t_1, \ldots, t_g) \in (K^*_v)^g$. On rappelle de plus que pour une place w au-dessus de v :

$$Q_w = e_{w|v}Q_v,$$

$e_{w|v}$ étant l'indice de ramification résiduel. Notons d'ailleurs que d'après ceci, comme nous savons que la réduction devient déployée après une éventuelle extension non ramifiée du corps de base et comme la hauteur locale est invariante par extension, nous pouvons considérer que nous sommes sur K quitte à définir la hauteur locale en prenant une extension K' sur laquelle le tore est déployé et à redescendre à K ensuite.

Nous avons d'autre part le lemme suivant :

Lemme 5.11. *Considérons M un réseau de $\mathbb{R}^g$ muni d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. Alors,*

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^g \mid \|x\| = \min_{m \in M} \|x+m\| \right\},$$

est un domaine fondamental pour M, c'est-à-dire que :

$$\mathbb{R}^g = \bigcup_{m \in M} (F+m)$$

et si $m_1 \neq m_2$, $(F+m_1)$ et $(F+m_2)$ se rencontrent "au plus" sur le bord.

Démonstration. Nous avons déjà bien évidemment,

$$\bigcup_{m \in M} (F+m) \subset \mathbb{R}^g.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^g$ choisissons alors $x_0 \in (x+M)$ réalisant le minimum de $\|x+m\|$, c'est-à-dire :

$$\|x_0\| = \min_{m \in M} \|x+m\|,$$

alors $x_0 \in F$ et il existe par hypothèse $m \in M$ tel que $x = x_0 + m$. Donc

$$\mathbb{R}^g = \bigcup_{m \in M} (F+m).$$

Il reste à montrer que F et $F+m$ pour $m \in M$ s'intersecte au pire sur le bord et que sinon l'intersection est vide.

Or si il existe $n \in M$ tel que $x \in F$ et $x+n \in F$ alors,

$$\|x+n\| = \min_{m \in M} \|x+n+m\| = \min_{m \in M} \|x+m\| = \|x\|.$$

Or on remarque que pour $n \neq 0$ $\|x_0+n\| > \|x_0\|$ pour tout x_0 à l'interieur de F par construction.

□

Remarque : Comme F est défini par les inégalités $\|x+m\|^2 - \|x\|^2 \geq 0$, autrement dit par $\|m\|^2 + 2 < m, x > \geq 0$, le domaine F est un polyèdre convexe symétrique par rapport à l'origine. C'est l'intersection de tous les demi-espaces affines définis par $| < m, x > | \leq \frac{\|m\|^2}{2}$.

Définition 5.12. Le domaine fondamental du lemme précédent est appelé le domaine fondamental naturel associé à $\|\cdot\|$ et à M.

En particulier, nous noterons F_{Q_v}, le domaine fondamental naturel associé à la norme euclidienne $\|x\|^2_{Q_v} = {}^t x Q_v x$ et au réseau $L_{Q_v} = 2(Q_v \frac{\log N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]})^{-1}\mathbb{Z}^g$, Q_v étant la matrice définie dans la définition 4.11 du chapitre 4.

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 5.13. *Pour $P \in A(K'_v))$, notons t_P le représentant de P appartenant au domaine naturel* $\mathrm{Trop}^{-1}(F_{Q_v})$. *Alors si $t_P \in \mathrm{Trop}^{-1}(\overbrace{F_{Q_v}}^{\circ})$, on a :*

$$-\log|\Theta_v(t_P))|_v = 0,$$

avec $\overbrace{F_{Q_v}}^{\circ}$ désignant l'intérieur de F_{Q_v} pour la topologie réelle.

Démonstration. Nous avons :

$$-\log|q(m,m)t_P^m|_v = {}^t m(Q_v \frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]})^{-1}m + {}^t m\cdot \mathrm{Trop}(t_P)$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\left(\|\mathrm{Trop}(t_P) + 2(Q_v\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]})^{-1}m\|^2_{Q_v} - \|\mathrm{Trop}(t_P)\|^2_{Q_v}\right)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}.$$

Mais si $t_P \in \mathrm{Trop}^{-1}\overbrace{F_{Q_v}}^{\circ}$, $\mathrm{Trop}(t_P) \in \overbrace{F_{Q_v}}^{\circ}$ de sorte que par définition de F_{Q_v}, pour tout $m \neq 0$

$$\|\mathrm{Trop}(t_P) + 2(Q_v\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]})^{-1}m\|^2_{Q_v} - \|\mathrm{Trop}(t_P)\|^2_{Q_v} > 0,$$

tandis que bien évidemment le membre de gauche est nul si $m = 0$.

On en déduit le résultat par définition de Θ et des propriétés ultramétriques. □

Proposition 5.14. *La hauteur locale canonique normalisée $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ associée au diviseur $D = \mathrm{div}(\Theta_v)$ que nous avons définie dans la section préliminaire 4.1 vérifie pour tout point $P \in A(K'_v)$ dont le représentant $t_P \in \mathrm{Trop}^{-1}\overbrace{F_Q}^{\circ}$:*

$$\hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \frac{1}{2}\|\mathrm{Trop}(t_P)\|^2_{Q_v}\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}. \tag{5.5}$$

Démonstration. Nous savons déjà par le corollaire 4.14 du chapitre 4 qu'il existe une constante $\kappa_v \in \mathbb{R}$ telle que

$$\hat{\lambda}_{D,v,n}(P) = -\log|\Theta_v(t_P)|_v + \frac{1}{2}\left({}^t\mathrm{Trop}(t_P)Q_v\mathrm{Trop}(t_P)\right)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + \kappa_v,$$

Or d'après le lemme précédent si $t_P \in \mathrm{Trop}^{-1}\overbrace{F_{Q_v}}^{\circ}$, alors $-\log|\Theta_v(t_P)|_v = 0$

On en déduit que

$$\hat{\lambda}_{D,v,n}(P) = \frac{1}{2}\|\mathrm{Trop}(t_P)\|^2_{Q_v}\log\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + \kappa_v \geq 0.$$

Mais comme d'autre part, pour tout t_0 tel que $\mathrm{ord}_v(t_0) = (0,0,\ldots,0)$

$$\|\mathrm{Trop}(t_0)\|_{Q_v} = 0,$$

on en déduit par définition de $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ que $\kappa_v \geq 0$ ce qui conclut. □

Proposition 5.15. *Notons comme précédemment $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ la hauteur locale normalisée associée à $D = \mathrm{div}(\Theta_v)$ et normalisée par la formule* $\inf \hat{\lambda}_{D,v,n} = 0$ *alors*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)} \hat{\lambda}_{v,D,n}(P) \geq \frac{1}{2}\left(\int\limits_{F_Q} \|x\|^2_{Q_v} gx\right) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} \tag{5.6}$$

Démonstration. On sait déjà par la définition de F_Q et la proposition 5.13 qui précède que

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)(K'_{N,v})} \hat{\lambda}_{v,\mathcal{L},n}(P) \geq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{t\in(A[N]\setminus|D|)\cap\mathrm{Trop}^{-1}\overbrace{F_Q}^{\circ}} \frac{1}{2}\|\mathrm{Trop}(t)\|^2_{Q'_v} \log\ N(v).$$

Or, un point de $N-$torsion s'écrit sous la forme

$$T((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_g), n_1, n_2, \ldots, n_g) = \left(\xi_1 \prod_{i=1}^{g} q_{i1}^{n_i/N}, \xi_2 \prod_{i=1}^{g} q_{i2}^{n_i/N}, \ldots, \xi_g \prod_{i=1}^{g} q_{ig}^{n_i/N}\right),$$

avec les ξ_i des unités et les n_i entiers relatifs.
de sorte que son ordre v-adique s'écrit

$$\mathrm{Trop}(T((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_g), n_1, n_2, \ldots, n_g)) = \left(\sum_{i=1}^{g} \frac{n_i}{N}\mathrm{Trop}(q_{i1}), \sum_{i=1}^{g} \frac{n_i}{N}\mathrm{Trop}(q_{i2}), \ldots, \sum_{i=1}^{g} \frac{n_i}{N}\mathrm{Trop}(q_{ig})\right).$$

On voit en particulier que l'image par l'application Trop des points de $A(K_v)$ qui sont situés sur D sont sur le bord de F_{Q_v} car par hypothèse $\Theta_v(t) = 0$ si $t \in |D|$, en particulier, la somme de droite est une somme de Riemann sur F_{Q_v} car on voit que l'image par Trop des points qui nous intéressent devient équirépartie dans F_Q quand N tend vers l'infini. □

Définition 5.16. Soit A/K une variété abélienne principalement polarisée par un fibré symétrique L et v une place non archimédienne de K. Soit K'/K une extension finie de K sur laquelle l'extension de Raynaud est donnée par un tore déployé en une place $w|v$. On sait qu'on peut choisir w de sorte que w soit non ramifiée au-dessus de v. Alors la théorie de Raynaud telle que présenté précédemment défini une forme quadratique Q_w et comme la hauteur locale de Néron est bien définie sur $\bar{K}$, on définit alors Q_v par $Q_v = Q_w$ puisque l'extension est choisie non ramifiée. On définit :

$$J(A_v, L_v) = \int\limits_{\mathcal{F}_{Q_v}} Q_v(x)dx,$$

pour la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{R}^g$.

On voit ainsi que cet invariant est bien défini pour toute place v de K que l'extension soit déployée ou non.

Le domaine tropical F_{Q_v} lui étant indépendant d'une quelconque extension $w|v$ comme on le voit sur la définition (en effet les inégalités définissant ce domaine reste inchangées si l'on remplace Q_v par $Q_w = e_{w|v}Q_v$ tandis que le réseau par lequel il est défini est $L_{Q_v} = 2(Q_v \frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]})^{-1}\mathbb{Z}^g$ qui est indépendant de $w|v$).

Théorème 5.17. *Soit A/K une variété abélienne semi-stable principalement polarisée sur un corps de nombre K. Notons $\operatorname{Tor}(A/K)$ l'ensemble des places de K pour lesquelles A a réduction torique déployée du type précédent.*

Soient $I(A_\sigma, L_\sigma)$ le nombre défini dans la définition 4.17 et $J(A_v, L_v)$ le nombre défini dans la définition 5.16 pour σ une place archimédienne et v une place non archimédienne de réduction torique respectivement.

Alors :

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)\\ \geq \\ \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\operatorname{Tor}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\, N(v)\end{gathered} \tag{5.7}$$

Démonstration. Nous utilisons ici l'équation 5.3 des préliminaires, section 5.1, de ce chapitre. On remarque d'ailleurs que l'on peut toujours prendre une extension finie K'/K telle qu'à la fois les propriétés de la section 5.1 ainsi que de 5.2 et de cette section soient vérifiées, nous pouvons ainsi utiliser la proposition 5.31 et la remarque de la section 5.2.

Nous utilisons alors le théorème 5.10 pour minorer la partie complexe tandis que nous utilisons le théorème 5.3 de la section 5.1 dans le cadre des propositions 5.14, 5.13 et 5.15 qui précèdent pour les places de mauvaise réduction.

En particulier nous pouvons nous placer sur une extension K'_N contenant $(A[N]\setminus|D|)$ et utilisons la formule :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{[K'_N:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\operatorname{Tor}(A/K)}\sum_{w|v}[K'_{N,w}:\mathbb{Q}_w]\left(\frac{1}{N^{2g}}\sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)}\hat{\lambda}_{D,v}(P)\right)\\ &=\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\operatorname{Tor}(A/K)}[K_v:\mathbb{Q}_v]\underbrace{\left(\frac{\sum_{w|v}[K'_{N,w}:K_v]}{[K'_N:K]}\right)}_{=1}\left(\frac{1}{N^{2g}}\sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)}\hat{\lambda}_{D,v}(P)\right),\end{aligned}$$

ainsi que le fait que par la normalisation de nos valeurs absolues les hauteurs locales sont bien définies sur toutes les clôtures algébriques. □

Proposition 5.18. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombre K et soit $\operatorname{Tor}(A/K)$ l'ensemble de ses places de réduction torique du type précédent et soit K'/K une extension finie, alors :*

$$\frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_{w|v, v\in\operatorname{Tor}(A/K)} J(A_w, L_w)\log\, N(w) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\operatorname{Tor}(A/K)} J(A_v, v)\log\, N(v)$$

est indépendant de l'extension K'/K.

Démonstration. Soit $w|v$ une place de K' au-dessus de la place v de K. Alors,

$$Q_w = e_{w|v}Q_v,$$

où $e_{w|v}$ est l'indice de ramification relatif de $w|v$. De sorte que :

$$J(A_w, L_w) = e_{w|v}J(A_v, L_v).$$

D'autre part,

$$\log\, N(w) = f_{w|v}\log\, N(v),$$

où $f_{w|v}$ est le degré résiduel relatif.

Ainsi,

$$J(A,w)\log\ N(w) = [K'_w : K_v]J(A,v)\log\ N(v),$$

on en déduit alors la formule grâce à

$$\sum_{w|v}[K'_w, K_v] = [K' : K],$$

et à la formule de multiplicativité du degré. □

Ainsi, on peut retirer l'hypothèse de réduction déployée et obtenir :

Théorème 5.19. *(Cas de réduction totalement dégénérée(=torique))*

Soit A/K une variété abélienne semi-stable principalement polarisée sur un corps de nombre K.Notons $\mathrm{Tor}(A/K)$ *l'ensemble des places de K pour lesquelles A a réduction torique du type précédent.*

Soient $I(A_\sigma, L_\sigma)$ le nombre défini dans la définition 4.17 et $J(A_v, L_v)$ le nombre défini dans la définition 5.16 pour σ une place archimédienne et v une place non archimédienne de réduction torique respectivement.

Alors :

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A)\\ \geq\\ \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Tor}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\ N(v)\end{gathered} \tag{5.8}$$

Démonstration. On peut d'abord établir le théorème sur une extension finie pour laquelle la réduction est déployée. Le fait que le terme archimédien soit invariant et comme nous venons de le voir, avec nos définitions cohérentes des invariants $J(\cdot,\cdot)$, le terme non archimédien est invariant aussi ; on obtient, en redescendant, l'inégalité sur le corps de base. □

Remarque Le théorème précédent est cas très particulier du théorème principal que nous établirons dans la section suivante.

5.4 Cas de réduction mixte

Dans le cas général, une variété abélienne semi-stable A_v/K_v sur un corps non archimédien K_v admet une uniformisation de Raynaud de la forme suivante : La composante neutre $\mathcal{A}^0$du modèle de Néron de A_v, est extension d'une variété abélienne $\mathcal{C}_v$ par un tore déployé $\mathbb{G}_m^r$. Cette hypothèse est toujours vérifiée après une éventuelle extension non ramifiée du corps de base, ce que nous pouvons faire dans notre contexte d'après l'une de nos remarques préliminaires de ce chapitre.

Cette extension se relève d'après Raynaud [46, 6, 7, 48] en un diagramme d'espaces analytiques rigides :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & \\ & & M_v \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & T_v \arrow[r] & G_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & C_v \arrow[r] & 0 \\ & & A_v \arrow[d] & & \\ & & 0 & & \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Où $T_v \cong \mathbb{G}^r$ est un tore déployé, C_v/K_v est une variété abélienne admettant bonne réduction, G_v est un groupe algébrique commutatif et M_v est un réseau dans G_v dans le sens défini dans le chapitre 2, section 2.3, et redéfini plus loin.

Remarques :

— Nous supposerons dans toute cette section que la polarisation principale est donnée par un fibré symétrique L. Comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 4, cela n'est pas très restrictif.

— Nous savons de plus que le tore T_v est déployé après une extension finie non ramifiée du corps de base ; ce fait est cité et utilisé par exemple par Bosch et Lüktebohmert ([7] page 655) et peut être démontré en s'appuyant sur des propriétés générales des tores (SGA3 II exposé IX 3.6).

Fin des remarques.

Nous supposons ici que A est muni d'une polarisation principale symétrique L, et soit D l'unique diviseur effectif tel que $L = \mathcal{O}(D)$ défini par $D = \mathrm{div}(s)$ pour $s \in H^0(A, L) \setminus \{0\}$.

Si on note $X(T_v) = \mathrm{Hom}(T_v, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères de T_v, l'extension G_v/K_v est décrite (voir [48] pour une description explicite) par un homomorphisme $\tau : X(T_v) \to \mathrm{Pic}^0(C)$.

Il existe d'après [48], page 431, un diviseur E sur C_v et une fonction Θ_v sur G_v (une fonction thêta généralisée) tels que :

$$q^* D = (\Theta_v) + \pi^* E.$$

De plus, toujours d'après [48] page 431, si on définit

$$\Phi_E : C_v \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C_v) ,$$

$$a \longmapsto t_a^* E - E$$

alors il existe un homomorphisme

$$\phi : M_v \to X(T_v),$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_v \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & G_v(K_v) \arrow[r, "\pi"] & C_v \arrow[d, "\Phi_E"] \\ X(T_v) \arrow[rr, "\tau"] & & \mathrm{Pic}^0(C_v). \end{tikzcd}$$

On dispose de plus pour chaque $m \in M$ d'une fonction méromorphe $h(m)(\cdot)$ sur G_v déterminée à une constante près par

$$\mathrm{div}(h(m)(\cdot)) = m^{-1}\pi^* E - \pi^* E, \tag{5.10}$$

$$\text{et } \forall \lambda \in T, \forall t \in G, h(m)(\lambda t) = \phi(m)(\lambda) h(m)(t),$$

et qui vérifie pour tout $m_1, m_2 \in M$ et tout $t \in G_v$,

$$h(m_1)(m_2 t)[h(m_1)(t)]^{-1} = h(m_2)(m_1 t)[h(m_2)(t)]^{-1}$$

De plus, d'après [48] page 429, $\Theta_v \in H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^* E))$ et ce dernier espace admet une décomposition suivant les sous-espaces propres :

$$H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^* E)) = \widehat{\bigoplus_{x \in X(T_v)}} H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^* E))_x,$$

où

$$H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^* E))_x = \left\{ f \in H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^* E)) \mid \forall \lambda \in T_v, \forall t \in G_v, f(tg) = x(\lambda) f(t) \right\},$$

et où $\widehat{\bigoplus}$ désigne les séries $\sum a_x$ telles que $\lim \|a_x\|_x = 0$ où $\|\cdot\|_x$ désigne la norme canonique sur $H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^* E))_x$ définie dans [48] page 429.

On voit M_v comme un réseau dans G_v dans le sens que l'image de M_v par l'application naturelle de tropicalisation :

$$\mathrm{Trop} : G_v(K_v) \longrightarrow G_v(K_v)/G_v(\mathcal{O}_{K_v}) \cong T_v(K_v)/T(\mathcal{O}_{K_v}) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}(X(T_v), K_v^*/\mathcal{O}_{K_v}^*) \xrightarrow{-\log|\cdot|_v} \mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R})$$

est un réseau au sens usuel dans $\mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r_v}$, r_v étant la dimension de T_v.

On peut remarquer que si w est une place au-dessus de v, $\mathrm{Trop}(M_v) = \mathrm{Trop}(M_w)$, cela provient de la normalisation de nos valeurs absolues.

On aimerait bien que les fonctions $h(m)(\cdot)$ qui ne sont autres que des facteurs d'automorphie puisse nous permettre de reconstruire la fonction thêta.

Cela ne pose pas de problème particulier une fois que l'on a vérifié que $h(m)(\cdot)$ peut être définie par l'équation fonctionnelle

$$h(m)(t)\Theta_v(mt) = \Theta_v(t),$$

qui montre notamment que les fonctions $h(m)(\cdot)$ vérifient l'équation fonctionnelle :

$$h(m_1m_2)(t) = h(m_1)(m_2t)h(m_2)(t) \tag{5.11}$$

Cette nouvelle définition fixe les constantes qui interviennent quand on définissait $h(m)(\cdot)$ par $\mathrm{div}(h(m)(\cdot)) = m^{-1}\pi^*E - \pi^*E$.

Nous identifions ici $H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^*E))$ et

$$L(\pi^*E) = \{f \in K_v(G)^* \mid \mathrm{div}(f) + \pi^*E \geq 0\}.$$

Le fait que $\mathrm{div}(\Theta_v) = q^*D - \pi^*E$ nous dit entre autres que $\Theta_v \in L(\pi^*E)$. En toute généralité nous noterons pour F un diviseur, $L(F)$ l'espace de fonction méromorphes naturellement associé.

Proposition 5.20. *Si A/K_v est principalement polarisée comme précédemment, considérons les diviseurs D, E ainsi que la fonction thêta telle que $q^*D = \mathrm{div}(\Theta_v) + \pi^*E$, nous avons alors que la série*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow K \\ t &\longmapsto \sum_{m \in M_v} h(m)(t) \end{aligned}$$

est convergente dans $H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^*E))$ et définit une fonction proportionnelle à la fonction Θ.

Démonstration. Le fait que la série converge provient de [48], 2.4 et 2.2, où Reversat et Van der Put montrent notamment que $\log \|h(m)(\cdot)\|_{\phi(m)} = -< m, m > +L(m)$ où $< \cdot, \cdot >$ est bilinéaire définie positive et L est linéaire. Nous voyons alors d'après l'équation fonctionnelle 5.10 et la décomposition de $H^0(G_v, \mathcal{O}_{G_v}(\pi^*E))$ en sous-espaces propres rappelée précédemment que la série en question définit un élément de $L(\pi^*E)$.

A présent on peut considérer la fonction méromorphe

$$\frac{1}{\Theta_v(t)} \sum_{m \in M} h(m)(t),$$

qui n'est autre que

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{\Theta_v(mt)}.$$

Comme

$$q^*D = \mathrm{div}(\Theta_v) + \pi^*E,$$

on voit alors que

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\Theta_v(t)} \sum_{m \in M} h(m)(t)\right) \geq -q^*D$$

On en déduit, c'est la même remarque dans la preuve du lemme 2.4.4 de [48], que cette fonction est une fonction M-périodique qui appartient à $L(q^*D)$, autrement dit c'est une fonction de $L(D)$ qui est de dimension 1 car la polarisation est supposée principale et comme D est effectif c'est par conséquent une constante.

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Décidons donc d'appeler Θ_v la fonction définie, après estimations, par

$$\Theta_v(t) = \sum_{m \in M} h(m)(t) \tag{5.12}$$

On sait d'autre part d'après le chapitre 4, équation 4.3 section 4.3.3 cas général et lemme 4.17, qu'il existe une fonction bilinéaire $H : G_v \times G_v \to \mathbb{R}$ et une constante κ_v telle que la hauteur locale normalisée correspondant au fibré symétrique $L = \mathcal{O}_G(D)$ définie dans la première section de ce chapitre soit donnée par

$$\hat{\lambda}_{D,v,n}(q(t)) = \mathrm{ord}_v(\Theta_v(t))\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t))\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + H_v(g,g)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + \kappa_v \tag{5.13}$$

Rappelons les propriétés essentielles de $H_v(\cdot,\cdot)$ telle que présentées dans le chapitre 4 :

Lemme 5.21. *(Chapitre 4, lemme 4.15) La fonction H_v définie précédemment est l'unique application bilinéaire et symétrique $H_v : G_v \times G_v \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(m,t) \in M_v \times T_v$,*

$$H_v(m,t) = \frac{1}{2}\mathrm{ord}_v(\phi(m)(t))$$

de plus, H_v est positive et comme $G_v(\mathcal{O}_{K_v})$ est dans le noyau de H_v, il existe une unique application quadratique $Q_v : \mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r_v} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $g \in G$:

$$H_v(g,g) = Q_v(\mathrm{Trop}(g)).$$

Pour aller plus loin dans nos estimations plaçons nous sur le domaine suivant pour M :

Définition 5.22.

$$\mathcal{D}^* = \left\{ t \in G \,|\, \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t) = \min_{m \in M_v} [\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(mt)) + H_v(mt,mt)] \right\}$$

On a le recouvrement suivant :

$$G = \bigcup_{m \in M_v} m\mathcal{D}^*.$$

Nous définissons aussi :

Définition 5.23.

$$\mathcal{D}^{*\circ} = \left\{ t \in G \,|\, \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t) < \min_{m \in M_v \setminus 1_G} [\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(mt)) + H_v(mt,mt)] \right\}$$

Pour le moment nous ne nous soucions pas de ce qui ressemble à un bord $\mathcal{D}^* \setminus \mathcal{D}^{*\circ}$, il apparaîtra plus clairement après quelques réductions et après un processus de tropicalisation qui le rendra simple à manipuler.

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 5.24. *Pour tout $t \in \mathcal{D}^{*\circ}$,*

$$\hat{\lambda}_{D,v,n}(q(t)) \geq (\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t))\,\frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}$$

Démonstration. La preuve de ceci se fait en deux étapes :

1. D'abord on garde la constante κ_v et on montre que l'ordre de Θ est nul pour $t \in \mathcal{D}^{*\circ}$. Cela nous permet déjà "d'oublier" Θ_v. Comme dans le cas torique.
2. Ensuite on sait que $\hat{\lambda}_{D,v,n}$ est positive ou nulle, on va montrer que l'expression qui nous intéresse s'annule à l'intérieur du domaine, ce qui permettra de prouver que $\kappa_v \geq 0$.

Pour la première étape, remarquons ce qui suit, comme la hauteur locale est invariante sous l'action de M sur G, nous avons pour tout $t \in \mathcal{D}^{*\circ}$ d'après la relation 5.13,

$$\mathrm{ord}_v(h(m)(t))\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = \mathrm{ord}_v\left(\frac{\Theta_v(t)}{\Theta_v(mt)}\right)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}$$

$$=$$

$$\hat{\lambda}_{D,v,n}(q(t))-\hat{\lambda}_{D,v,n}(q(mt))+(-\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t))+\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(mt))-H_v(t,t)+H_v(mt,mt))\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} =$$

$$=$$

$$(\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(mt)) + H_v(mt,mt) - \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) - H_v(t,t))\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}.$$

On en déduit, par définition de $\mathcal{D}^{*\circ}$, que pour tout $t \in \mathcal{D}^{*\circ}$, $\mathrm{ord}_v(h(m)(t)) > 0$ pour $m \neq 1_G$ et $\mathrm{ord}_v(h(m)(t)) = 0$ pour $m = 1_G$, comme d'autre part

$$\Theta_v(t) = \sum_{m\in M_v} h(m)(t),$$

on en déduit que :

$$\forall t \in \mathcal{D}^{*\circ}, \mathrm{ord}_v(\Theta_v(t)) = 0.$$

De ceci on déduit que :

$$\forall t \in \mathcal{D}^{*\circ}, \hat{\lambda}_{D,v,n}(q(t)) = \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t))\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + \kappa_v \geq 0.$$

Montrons à présent que $\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t))\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}$ s'annule sur $\mathcal{D}^{*\circ}$ ce qui permettra de conclure que $\kappa_v \geq 0$.

Nous savons d'après Boxall [10] que sur la variété abélienne C_v de dimension c à bonne réduction en v :

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N \text{ premier à } v}} \frac{1}{N^{2c}} \sum_{P\in(C[N]\setminus|E|)} \mathrm{mult}_{E,v}(P) = 0.$$

En particulier comme les $\mathrm{mult}_{E,v}$ sont des entiers positifs ou nuls et comme il y a N^{2c} points de torsion dans $C_v(\bar{K})$, nous savons que quitte à faire une extension de K ce que nous pouvons faire, il existe un point $P \in C_v[N]$ tel que $\mathrm{mult}_{E,v}(P) = 0$.

Comme d'autre part, $G(\mathcal{O}_v)$ se surjecte dans $C_v(K_v)$, $G_v(\mathcal{O}_v)[N]$ se surjecte sur $C_v[N]$ et donc le point P en question provient d'un point $t \in G_v(\mathcal{O}_v)[N]$.

Comme maintenant, $G_v(\mathcal{O}_v)$ est dans le noyau de H, nous savons que pour ce point P bien choisi et un point t dont il est issu : $H_v(t,t) = 0$ et $\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) = 0$. En particulier,

$$\text{Il existe } t \in \mathcal{D}^{*\circ}; \text{et } \hat{\lambda}_{D,v,n}(q(t)) = \kappa_v \geq 0.$$

Donc $\kappa_v \geq 0$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Considérons les définitions suivantes :

Définition 5.25. Après avoir identifié de façon convenable, $\mathrm{Hom}(X(T_v),\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r_v}$, nous définissons les domaines

$$\mathcal{D}^\circ = \left\{ t \in G \mid H_v(t,t) < \min_{m \in M \setminus 1_G} H_v(mt,mt) \right\},$$

ainsi que

$$\mathcal{D} = \left\{ t \in G \mid H_v(t,t) = \min_{m \in M} H_v(mt,mt) \right\},$$

$$\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v} = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid Q_v(x) < \min_{m \in \mathrm{Trop}(M_v)\setminus 0} Q_v(x+m) \right\},$$

et

$$\mathcal{F}_{Q_v,M_v} = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid Q_v(x) = \min_{m \in \mathrm{Trop}(M_v)} Q_v(x+m) \right\}.$$

En particulier,

$$\mathcal{D}^\circ = \mathrm{Trop}^{-1}\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}, \text{ et } \mathcal{D} = \mathrm{Trop}^{-1}\mathcal{F}_{Q_v,M_v}.$$

De plus, $\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}$ est l'intérieur de $\mathcal{F}_{Q_v,M_v}$ pour la topologie réelle.

Remarquons que les domaines $\mathcal{F}_{Q_v,M_v}$ et $\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}$ sont indépendant d'une éventuelle extension de la place v. En effet si w est une place au-dessus de v alors $Q_w = e_{w|v}Q_v$, $e_{w|v}$ étant l'indice de ramification relatif de $w|v$, et comme $\mathrm{Trop}(M_w) = \mathrm{Trop}(M_v)$ les équations définissant $\mathcal{F}_{Q_v,M_v}$ et $\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}$ sont inchangées lorsque l'on remplace v par w.

Proposition 5.26. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K principalement polarisée par un fibré symétrique L et v une place de K telle que A_v/K_v soit définie dans l'extension de Raynaud correspondante par un tore déployé.*

Alors, pour toute places $w|v$,

$$\forall\, t \in A(K_v), \hat{\lambda}_{D,w,n}(q(t)) = \hat{\lambda}_{D,v,n}(q(t)),$$

et

$$H_w(t,t) = e_{w|v}H_v(t,t),$$

de sorte que

$$Q_w = e_{w|v}Q_v.$$

Démonstration. L'égalité entre les hauteurs locales provient de l'existence de ces hauteurs et de la normalisation utilisée, on en déduit alors l'égalité des fonctions Thêta car elles sont définies par des relations sur K (i.e. par D).

Montrons alors les relation entre les formes quadratiques, on se place dans la deuxième situation de $w|v$, la première situation étant strictement semblable.

Les hauteurs locales étant invariantes par extension et les termes $-\log|\Theta_v(q(t))|_v$ aussi, on en déduit que l'on a :

$$H_w(t,t)\frac{\log\ N(w)}{[K_w : Q_w]} = H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : Q_v]}.$$

De ceci on déduit :

$$H_w(t,t)\frac{f_{w|v}\log\ N(v)}{e_{w|v}f_{w|v}[K_v : Q_v]} = H_v(t,t)\frac{\log\ N(v)}{[K_v : Q_v]},$$

où $e_{w|v}$ et $f_{w|v}$ sont respectivement l'indice de ramification relatif et le degré relatif.

On conclut alors facilement.

On aurait pu aussi déduire cette relation du lemme 5.21 sachant que $\mathrm{ord}_w = e_{w|v}\mathrm{ord}_v$. □

Nous pouvons alors définir l'invariant suivant :

Définition 5.27. Soit A/K une variété abélienne principalement polarisée par un fibré symétrique L et v une place non archimédienne de K. Soit K'/K une extension finie de K sur laquelle l'extension de Raynaud est donnée par un tore déployé en une place $w|v$. On sait qu'on peut choisir w de sorte que w soit non ramifiée au-dessus de v. Alors la théorie de Raynaud telle que présentée précédemment définit une forme quadratique Q_w et comme la hauteur locale de Néron est bien définie sur $\bar{K}$, on peut définir Q_v par $Q_v = Q_w$ puisque l'extension est choisie non ramifiée. On définit alors :

$$J(A_v, L_v) = \int_{\mathcal{F}_{Q_v,M_v}} Q_v(x)dx,$$

pour la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{R}^g$.

On voit ainsi que cet invariant est bien défini et défini de manière cohérente pour toute place v de K que l'extension soit déployée ou non.

Dans ce qui suis nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 5.28. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres principalement polarisée par un fibré symétrique L, on se donne une place non archimédienne v de K et on suppose que l'extension de Raynaud définissant A_v/K_v est donnée par un tore déployé. On a alors d'après ce qui précède une forme bilinéaire H_v comme introduite précédemment sur le groupe G_v définissant l'uniformisation de A_v.*

Alors :

$$\sum_{\substack{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \\ \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) = 0}} H_v(t,t) = \sum_{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N])} H_v(t,t) + O(N^{2g-2}).$$

Démonstration. Notons, r la dimension de T_v, c la dimension de C_v et g la dimension de G_v.

Le résultat de ce lemme provient directement du résultat suivant en remarquant que H_v est borné sur $\mathcal{D}^0$:

$$\mathrm{Card}\left(\left\{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\right\}\right) = O(N^{2g-2}).$$

Prouvons donc ce dernier résultat.

Déjà remarquons que la suite exacte $0 \to M_v \to G_v \to A_v \to 0$ nous fournit avec l'injectivité de Trop sur M_v la suite exacte de groupes :

$$0 \to G[N] \to q^{-1}(A[N]) \to \frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \to 0,$$

où la première flèche est l'inclusion et la seconde est la restriction de Trop. De plus comme $G[N] \subset G(\mathcal{O}_{K_v}) = \ker(\mathrm{Trop})$, on a en particulier que si $t \in G[N]$, $H_v(t,t) = 0$, ainsi $G[N] \subset \mathcal{D}^\circ$.

De ceci on déduit qu'on a une surjection :

$$q^{-1}(A[N]) \cap \mathcal{D}^\circ \twoheadrightarrow \frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \cap \mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v},$$

dont les fibres sont des classes modulo $G[N]$.

On en déduit à présent,

$$\begin{array}{c} \mathrm{Card}\left(\{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\}\right) \\ = \\ \sum_{\mu \in \frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v)\cap \mathcal{F}^\circ_{M_v}} \left(\mathrm{Card}\left(\{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{Trop}(t) = \mu \text{ et } \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\}\right)\right) \end{array}. \tag{5.14}$$

D'après les remarques précédentes, on a :

$$\begin{array}{c} \{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{Trop}(t) = \mu \text{ et } \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\} \\ = \\ \{t \in t_\mu G_v[N] \mid \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\}, \end{array}$$

pour un certain $t_\mu \in G_v$.

De plus, la suite exacte de groupes algébriques, $0 \to T_v \to G_v \to C_v$ nous fournit la suite exacte : $0 \to T_v[N] \to G_v[N] \to C_v[N] \to 0$.

Posant alors pour chaque $\mu \in \frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \cap \mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}$, $t'_\mu = \pi(t_\mu)$, on a :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Card}\left(\{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{Trop}(t) = \mu \text{ et } \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\}\right) \\ = \\ \mathrm{Card}(T_v[N]) \times \mathrm{Card}\left(\left\{t' \in C_v[N] | \mathrm{mult}_{\tau_{-t_\mu}E,v}(t') \geq 1\right\}\right) \\ = \\ N^r \mathrm{Card}\left(\left\{t' \in C_v[N] | \mathrm{mult}_{\tau_{-t_\mu}E,v}(t') \geq 1\right\}\right), \end{array}$$

où τ_{-t_μ} désigne la translation par "$-t_\mu$" et où l'on a utilisé le fait que

$$\mathrm{mult}_{E,v}(t'_\mu t') = \mathrm{mult}_{-\tau_{t_\mu}E,v}(t').$$

On peut maintenant réutiliser l'argument de Mumford-Fogarty tel qu'utilisé par John Boxall à la page 117 de [10], en utilisant en plus le fait que, par le moving lemma, le cardinal des intersections est indépendant du translaté du diviseur. Ainsi comme dans [10] on obtient :

$$\mathrm{Card}\left(\left\{t' \in C_v[N] | \mathrm{mult}_{\tau_{-t_\mu}E,v}(t') \geq 1\right\}\right) = O(N^{2c-2}),$$

où le O est uniforme dans le sens qu'il dépend pas de μ.

On déduit alors de la relation 5.14 qui précède que :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Card}\left(\{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\}\right) \\ = \\ \mathrm{Card}\left(\frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \cap \mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}\right) \times O(N^{r+2c-2})., \end{array}$$

et comme $\mathrm{Trop}(M_v)$ est un réseau dans $\mathbb{R}^r$,

$$\mathrm{Card}\left(\frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \cap \mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}\right) = O(N^r).$$

Ceci implique que :

$$\mathrm{Card}\left(\left\{t \in \mathcal{D}^\circ \cap q^{-1}(A[N]) \mid \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) \geq 1\right\}\right) = O(N^{2r+2c-2}),$$

et comme $g = c + r$ on conclut.

□

Nous pouvons alors déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème 5.29. *Avec les notations introduites dans ce chapitre nous avons dans le cas d'une place pour laquelle l'extension est déployée :*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \left(\int_{\mathcal{F}_{Q_v,M}} Q_v(x)dx\right) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}$$

Démonstration. La preuve revient essentiellement à écrire que le membre de gauche est une somme de Riemann, pour cela différentes estimations sont nécessaires. Tout d'abord remarquons que pour $t \in \mathcal{D}^\circ$, $H(t,t) < H(mt, mt)$ pour tout $m \in M \setminus 1_G$ et si de plus $\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(g)) = 0$ alors $t \in \mathcal{D}^{*\circ}$. Autrement dit,

$$\mathcal{D}^\circ \cap \{t \in G \mid \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) = 0\} \subset \mathcal{D}^{*\circ}. \tag{5.15}$$

On peut maintenant procéder au calcul :

D'après la proposition 5.24, on a pour N premier à v, comme $A = G/M$ et comme pour tout $t \in \mathcal{D}^{*\circ}$, $mt \notin \mathcal{D}^{*\circ}$ pour $m \neq 1_G$ par définition, on a notamment d'après la relation 5.15 :

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \frac{1}{N^{2g}} \sum_{\substack{t\,\in\,\mathcal{D}^{*\circ} \\ q(t)\,\in\,(A[N]\setminus|D|)}} (\mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t)) + H_v(t,t)) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}$$

$$\geq \frac{1}{N^{2g}} \sum_{\substack{t\,\in\,\mathcal{D}^\circ \\ q(t)\,\in\,(A[N]\setminus|D|) \\ \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t))=0}} H_v(t,t) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}$$

De plus, on sait d'après le théorème de Raynaud, rappelé en 5.7 dans la section préliminaire de ce chapitre, que $\mathrm{Card}(A[N] \cap |D|) = O(N^{2g-2})$, comme de plus pour $t \in \mathcal{D}^0$ et $m \neq 1_G$, $mt \notin \mathcal{D}^0$, on a d'après ce qui précède :

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \frac{1}{N^{2g}} \sum_{\substack{t\,\in\,(q^{-1}(A[N])\cap\mathcal{D}^0) \\ \mathrm{mult}_{E,v}(\pi(t))=0}} H_v(t,t) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + o(1).$$

On déduit alors de ceci et du lemme 5.28 qui précède que :

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\setminus|D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \frac{1}{N^{2g}} \sum_{t\in(q^{-1}(A[N])\cap\mathcal{D}^0)} H_v(t,t) \frac{\log\ N(v)}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} + o(1).$$

D'autre part, nous avons la suite exacte $0 \to T \to G \to C \to 0$ qui fournit la suite :

$$0 \to T[N] \to G[N] \to C[N] \to 0,$$

et donc

$$G[N] \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2c+r}.$$

Où r est la dimension de T_v, et comme $c+r=g$, on a ainsi :

$$G[N] \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g-r}.$$

Comme, d'autre part, nous disposons de la suite exacte $0 \to M_v \to G_v \to A_v \to 0$ et que Trop est injective sur M_v, nous avons aussi la suite exacte de groupes suivante :

$$0 \to G[N] \to q^{-1}(A[N]) \to \frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \to 0,$$

où la première flèche est l'inclusion et la seconde est la restriction de Trop.

De plus, $G[N] \subset G(\mathcal{O}_{K_v}) = \ker(\mathrm{Trop})$, en particulier si $t \in G[N]$, $H_v(t,t)=0$, de sorte que $G[N] \subset \mathcal{D}^0$.

De ceci on déduit qu'on a une surjection :

$$q^{-1}(A[N]) \cap \mathcal{D}^\circ \twoheadrightarrow \frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v) \cap \mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v},$$

dont les fibres sont des classes modulo $G[N]$.

Ce qui nous fournit, comme notamment $H_v(t,t) = Q_v(\mathrm{Trop}(t))$,

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\backslash|D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \frac{1}{N^{2g}} \left(\sum_{x\in\frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v)\cap\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}} \mathrm{Card}(G[N])Q_v(x) \right) \frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + o(1).$$

Et donc :

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in(A[N]\backslash|D|)} \hat{\lambda}_{D,v,n}(P) \geq \frac{1}{N^{r}} \left(\sum_{x\in\frac{1}{N}\mathrm{Trop}(M_v)\cap\mathcal{F}^\circ_{Q_v,M_v}} Q_v(x) \right) \frac{\log\ N(v)}{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + o(1).$$

Comme dans le cas torique on voit que les points intervenants dans la somme de droite deviennent équirépartis dans $\mathcal{F}_{Q_v,M_v}$ quand $N \to \infty$, car $\mathrm{Trop}(M_v)$ est un réseau dans $\mathbb{R}^r$, et comme il s'agit d'une moyenne, le membre de droite est une somme de Riemann qui à la limite tend vers l'intégrale indiquée :

$$\int_{\mathcal{F}_{Q_v,M_v}} Q_v(x)dx.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Nous pouvons alors déduire assez facilement de tout ce qui précède notre théorème principal, pour cela nous notons $I(\cdot,\cdot)$ et $J(\cdot,\cdot)$ respectivement les invariants archimédiens de la section 5.2 et respectivement les invariants non archimédiens de cette section :

Théorème 5.30. *Soit A/K une variété abélienne semi-stable sur un corps de nombres K principalement polarisée par un fibré symétrique L, notons $Bad(A/K)$ les places non archimédiennes de mauvaises réduction de A/K, notant pour $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$, $N(v)$ la norme sur $\mathbb{Q}$ de v et supposant que l'extension de Raynaud est déployée pour chaque $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$, on a :*

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \\ \geq \\ \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\ N(v)\end{gathered} \tag{5.16}$$

Démonstration. Nous utilisons ici l'équation 5.3 des préliminaires, section 5.1, de ce chapitre. On remarque d'ailleurs que l'on peut toujours prendre une extension finie K'/K telle qu'à la fois les propriétés de la section 5.1 ainsi que de 5.2 et de cette section soient vérifiées, nous pouvons ainsi utiliser la proposition 5.31 et la remarque de la section 5.2..

Nous utilisons alors le théorème 5.10 pour minorer la partie complexe tandis que nous utilisons le théorème 5.3 de la section 5.1 dans le cadre de la proposition 5.29 qui précède pour les places de mauvaise réduction.

Après nous utilisons la même remarque que dans le cas torique pour chasser les degrés et rester sur K.

□

Proposition 5.31. *Soit A/K une variété abélienne semi-stable principalement polarisée par un fibré symétrique L, notons par $\mathrm{Bad}(A/K)$ les places de mauvaise réduction pour un corps K et soit K'/K une extension finie, alors :*

$$\frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_{w\in\mathrm{Bad}(A/K')} J(A_w, L_w)\log\ N(w) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v)\log\ N(v)$$

est indépendant de l'extension K'/K.

Démonstration. Il s'agit de la même preuve que dans le cas torique, on utilise ici que si $w|v$ est une place de K' au-dessus de la place v de K, on a vu dans la proposition 5.26 :

$$Q_w = e_{w|v} Q_v,$$

$$J(A_w, L_w) = e_{w|v} J(A_v, L_v),$$

et, d'autre part,

$$\log\ N(w) = f_{w|v}\log\ N(v),$$

où $e_{w|v}$ et $f_{w|v}$ sont respectivement l'indice de ramification et le degré relatifs.

Donc

$$J(A_w, L_w)\log\ N(w) = [K'_w : K_v] J(A_v, L_v)\log\ N(v).$$

Ensuite on utilise que

$$\sum_{w|v}[K'_w : K_v] = [K' : K],$$

et la multiplicativité du degré.

□

Théorème 5.32. *Soit A/K une variété abélienne semi-stable sur un corps de nombres K principalement polarisée par un fibré symétrique L, notons $Bad(A/K)$ les places non archimédiennes de mauvaises réduction de A/K, notant pour $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$, $N(v)$ la norme sur $\mathbb{Q}$ de v, on a :*

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \\ \geq \\ \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}} I(A_\sigma, L_\sigma) + \tfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} J(A_v, L_v) \log\ N(v) \end{gathered} \tag{5.17}$$

Démonstration. Nous savons déjà que cette relation est vraie quitte à faire une extension finie sur laquelle les extension de Raynaud sont déloyées, or nous avons vu que la partie archimédienne du minorant est invariante par toute extension du corps de base et qu'avec notre définition (cohérente) des invariants non archimédiens et la proposition 5.31 qui précède, la partie non archimédienne est elle aussi invariante par toute extension finie. On en déduit la relation sur K. □

Remarques :

— Il est pratiquement certain que l'on puisse traiter le sujet directement sans passer par une extension déployée cependant la théorie n'a jamais été complètement écrite dans ce cadre.

— On peut imaginer que cette minoration est essentiellement optimale, la seule approximation un peu grossière que nous avons faite est de négliger les multiplicités dans la moyenne sachant qu'elles sont positives. En retravaillant le texte de John Boxall [10] nous pouvons cependant imaginer que le résultat de cet article soit vrai uniformément par rapport au diviseur E sur C, on obtiendrait alors le résultat probant que l'inégalité du théorème 5.29 est optimale. Ce sera l'objet d'un travail ultérieur.

Chapitre 6

Estimations des Invariants et Conséquences

Dans ce chapitre on donne une minoration des invariants $J(A_v, L_v)$ intervenant dans la minoration de la hauteur de Faltings du théorème principal du chapitre 5, théorème 5.32, nous donnons une minoration les reliant au nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron. On donne ensuite une version explicite de la minoration de la hauteur de Faltings d'une variété abélienne qui n'est pas forcément principalement polarisée grâce à l'astuce de Zarhin.

On commence le chapitre par un rappel concernant la réduction au sens de Minkowski des matrices symétriques définies positives, nous nous en servons dans la section suivante pour donner une version explicite de la minoration des invariants, puis dans la dernière section nous donnons une minoration de la hauteur de Faltings d'une variété abélienne quelconque faisant intervenir toutes les places de mauvaises réduction. Dans ces estimations interviennent essentiellement le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de la variété abélienne en la place que nous considérons.

Une minoration de ce type a déjà été décrite par Marc Hindry et Amílcar Pacheco dans l'article [23] mais nous en donnons une forme tout à fait explicite ici et avec de meilleures estimations que celles pouvant être obtenues par la méthode de cet article.

Remarque : Pour A/K une variété abélienne sur une corps de nombres K, nous noterons comme dans le chapitre 4, $\tilde{h}(A/K) = h(A/K) + \frac{g}{2}\log(2\pi)$ et $\tilde{h}_{\rm st}(A) = h_{\rm st}(A) + \frac{g}{2}\log(2\pi)$, $h(A/K)$ et $h_{\rm st}(A)$ étant la hauteur de Faltings et hauteur de Faltings stable définies dans le chapitre 3.

Fin de la remarque

6.1 Rappels concernant la réduction de Minkowski

L'essentiel de ce qui est présent dans cette section est couvert plus précisément dans [1].

Nous désignons ici par $S_n(\mathbb{R})^+$ l'ensemble des matrices symétriques définies positive à coefficients réels, alors pour tout $Q = (q_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})^+$, $V \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\xi =^t (\xi_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nous noterons dorénavant :

$$Q[V] =^t VQV,$$

et

$$Q[\xi] =^t \xi Q\xi = \sum_{1\leq i,j\leq n} q_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Réduire une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire un élément $Q \in S_n(\mathbb{R})^{>0}$, c'est trouver un domaine fondamental, puis un élément de ce domaine fondamental correspondant à Q, pour l'action du groupe $GL_n(\mathbb{Z})$ selon la loi de transformation :

$$Q \to Q[V] =^t VQV \text{ pour } V \in GL_n(\mathbb{Z}).$$

La réduction de Minkowski consiste à déterminer le domaine fondamental et la matrice $V \in GL_n(\mathbb{Z})$ envoyant Q dans le domaine fondamental selon les conditions de minimalité suivantes :

On note les colonnes de la matrice $V \in GL_n(\mathbb{Z})$ par $v_1, \ldots, v_n$ de sorte que $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, on note

$$\Gamma_k^n = \{(v_1, v_2, \ldots, v_k) | (v_1, \ldots, v_k, *, *, \ldots, *) \in GL_n(\mathbb{Z})\},$$

l'ensemble des matrices $n \times k$ constitués des premières colonnes des éléments de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Alors, pour $Q \in S_n(\mathbb{R})^{>0}$ on choisit $v_1 \in \Gamma_1^n$ tel que $Q[v_1] =^t v_1 Q v_1$ soit minimal, cela est possible car Q est définie positive. Ensuite on choisit v_2 tel que $(v_1, v_2) \in \Gamma_2^n$ et $Q[v_2] =^t v_2 Q v_2$ soit minimal. En remplaçant v_2 par $-v_2$ si nécessaire on peut supposer que ${}^t v_1 Q v_2 \geq 0$. En continuant selon ce processus, à la $k-$ième étape on choisit v_k tel que $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \Gamma_k^n$, $Q[v_k] =^t v_k Q v_k$ est minimal et ${}^t v_{k-1} Q v_k \geq 0$.

Finalement quand $k = n$ on obtient une certaine matrice unimodulaire $V = (v_1, \ldots, v_n) \in GL_n(\mathbb{Z})$ et une matrice $T = (t_{\alpha\beta}) = Q[V]$. La matrice T est dite Minkowski réduite.

Notons à présent,

$$V_{k,n} = \{v =^t (v_1, \ldots v_n) | \forall\, i, v_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{pgcd}(v_k, \ldots, v_n) = 1\},$$

ainsi que

$$F_n = \{T = (t_{\alpha\beta}) \in S_n(\mathbb{R})^{>0} | \forall\, k, t_{kk} \leq T[V] \text{ pour } V \in V_{k,n} \text{ et } \forall\, k, t_{k-1,k} \geq 0\}\}.$$

Nous avons alors le théorème classique suivant dont on peut trouver la preuve page 48 de [1] comme théorème 2.1.7 :

Théorème 6.1. *Toute orbite de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur $S_n(\mathbb{R})^{>0}$ contient au moins une et au plus un nombre fini de matrices de F_n. Si T, T' sont des points de F_n et si $T' = T[U]$ pour un certain $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ alors $U \in \{I_n, -I_n\}$ (I_n étant l'identité) ; en particulier deux points distincts de l'intérieur de F_n n'appartiennent pas à la même orbite.*

Démonstration. Il s'agit d'un théorème classique formulé et prouvé comme théorème 2.1.7 page 48 de [1]. □

En particulier, si T est Minkowski réduite, le fait que $t_{kk} \leq T[e_{k+1}] = t_{k+1,k+1}$ où les e_k représentent les vecteurs de base, implique que

$$t_{11} \leq t_{22} \leq \cdots \leq t_{nn},$$

et le fait que $t_{ll} \leq T[e_k + e_l] = t_{kk} + 2t_{kl} + t_{ll}$ ainsi que $t_{ll} \leq T[e_k - e_l] = t_{kk} - 2t_{kl} + t_{ll}$ implique que

$$\forall\, k \neq l, |t_{kl}| \leq \frac{t_{kk}}{2}.$$

En particulier on a aussi le résultat important suivant :

Proposition 6.2. *Soit $T = (t_{\alpha\beta})$ une matrice $g \times g$ Minkowski réduite et soit $D_T = \mathrm{diag}(t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{gg})$ la matrice de ses coefficients diagonaux, alors*

$$\det(T) \leq \det(D_T) \leq c(g)\det(T),$$

où $c(g)$ ne dépend que de g et on peut prendre

$$c(g) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^g \Gamma\left(\frac{g+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(g-1)(g-2)},$$

Γ étant la fonction Γ d'Euler.

De plus la valeur optimale de $c(g)$ pour $g = 2, 3, 4, 5$ que nous notons $c_{\mathrm{opt}}(g)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{opt}}(2) &= \tfrac{4}{3} \\ c_{\mathrm{opt}}(3) &= 2 \\ c_{\mathrm{opt}}(4) &= 4 \\ c_{\mathrm{opt}}(5) &= 8 \end{aligned}$$

Démonstration. Le résultat est relativement classique, il se trouve rappelé et prouvé comme théorème 3 p.62, ch.2, de [21] et les valeurs optimales sont rappelées dans le complément sur les matrices réduites à la page 150 de loc. cit. □

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.3. *Soit Q une matrice $r \times r$ Minkowski réduite et D_Q la matrice de ses coefficients diagonaux, nous notons λ_{opt} le plus grand nombre réel tel que la matrice $Q - \lambda_{\mathrm{opt}} D_Q$ soit positive alors :*

$$\lambda_{\mathrm{opt}} \geq \frac{1}{c(r)\left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1}},$$

où $c(r)$, nous pouvons aussi prendre c_{opt} pour les petites valeurs de r, sont les constantes introduites dans la proposition 6.2 qui précède.

Démonstration. Notons $c(r)$ (resp. c_{opt} pour $r = 2, 3, 4, 5$), la constante de la proposition 6.2 qui précède et définissons R_Q la matrice :

$$R_Q = Q[D_Q^{-1/2}] = D_Q^{-1/2} Q D_Q^{-1/2}.$$

Alors, d'après la proposition 6.2,

$$\det(R_Q) = \frac{\det(Q)}{\det(D_Q)} \geq \frac{1}{c(r)}.$$

Notons $\rho_1 \leq \ldots \leq \rho_r$ les valeurs propres de R_Q.

Alors $Q - \rho_1 D_Q$ est semi-définie positive, autrement dit :

$$\lambda_{\mathrm{opt}} \geq \rho_1$$

Mais comme d'autre part, R_Q a été choisie de sorte que ces coefficients vérifient $r_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}}$ on a $r_{ii} = 1$ et, pour $i \neq j$, $|r_{ij}| \leq \frac{1}{2}$, de sorte que pour toute valeur propre :

$$\rho_i \leq \frac{r+1}{2},$$

ainsi :

$$\left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1} \rho_1 \geq \rho_1 \cdots \rho_r \geq \frac{1}{c(r)},$$

ce qui conclut. □

6.2 Minoration explicite des invariants

Dans cette section nous reprenons le cadre d'une variété abélienne semi-stable principalement polarisée sur une corps de nombres K et d'une place v de mauvaise réduction comme dans la section 4 du chapitre 5. En particulier nous reprenons toutes les notations, associées à une uniformisation de Raynaud et à la construction faite pour la minoration de la hauteur de Faltings, introduites dans le chapitre 5.

En particulier nous avons l'invariant :

$$J(A_v, L_v) = \int_{\mathcal{F}_{Q_v,M_v}} Q_v(x)dx,$$

où $\mathcal{F}_{Q_v,M_v}$ est le domaine introduit dans la définition 5.25 associé à la forme quadratique Q_v sur $\mathrm{Hom}(X(T_v), \mathbb{R})$ et au réseau $\mathrm{Trop}(M_v)$.

La première remarque que nous pouvons faire est que quitte à faire un changement de base, on peut supposer que $\mathrm{Trop}(M_v)$ s'identifie à $\mathbb{Z}^r$ tandis que Q_v demeure une matrice symétrique définie positive à coefficients réels.

La seconde remarque que nous pouvons faire est que l'on peut supposer que Q_v est Minkowski réduite, cela provient du lemme suivant :

Lemme 6.4. *Soit $Q \in S_r(\mathbb{R})^{>0}$, et $U \in GL_r(\mathbb{R})$, définissons pour tout réseau M de $\mathbb{R}^r$,*

$$\mathcal{F}_{Q,M} = \{x \in \mathbb{R}^r | \forall\, m \in M, Q[x] \leq Q[x+m]\},$$

puis

$$B_{Q,M} = \int_{\mathcal{F}_{Q,M}} Q[x]dx,$$

alors

$$B_{Q,M} = |\det(U)| B_{Q[U],U^{-1}M}.$$

En particulier, pour $M = \mathbb{Z}^r$ et $U \in GL_n(\mathbb{Z})$,

$$B_{Q,\mathbb{Z}^r} = B_{Q[U],\mathbb{Z}^r}.$$

Donc si T est une matrice Minkowski réduite représentant Q,

$$B_{Q,\mathbb{Z}^r} = B_{T,\mathbb{Z}^r}.$$

Démonstration. Notons $\tilde{Q} = Q[U]$, alors

$$x \in \mathcal{F}_{Q,M} \iff \forall m \in M, |{}^t m Q x| \leq \frac{1}{2} Q[m],$$

ce qui est équivalent à

$$|{}^t(U^{-1}m)\tilde{Q}(U^{-1}x)| \leq \frac{1}{2}\tilde{Q}[U^{-1}m].$$

Donc,

$$x \in \mathcal{F}_{Q,M} \iff y = U^{-1}x \in \mathcal{F}_{Q[U],U^{-1}M}.$$

En faisant le changement de variable $y = U^{-1}x$ dans l'intégrale, la formule de changement de variable nous donne bien :

$$B_{Q,M} = \int_{\mathcal{F}_{Q[U],U^{-1}M}} \tilde{Q}[y] |\det(U)| dy = |\det(U)|^{-1} B_{Q[U],UM}.$$

Le reste de l'énoncé est complètement trivial. □

Remarque-Définition On notera dorénavant

$$\mathcal{F}_{Q_v},$$

le domaine définit dans la définition 5.25 du chapitre 4, étant sous-entendu que l'on identifie $\mathrm{Trop}(M)$ à $\mathbb{Z}^r$ par changement de base et que l'on peut supposer de plus que la matrice Q_v est Minkowski réduite.

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.5. *Avec les notations de la dernière section du chapitre 4, choisissant sans perte de généralité la matrice Q_v Minkowski réduite, il existe une constante $C(r)$ ne dépendant que de la dimension r_v de T_v, telle que*

$$\frac{\mathrm{Tr}(Q_v)}{12} \geq J(A_v, L_v) \geq C(r_v)\mathrm{Tr}(Q_v),$$

où on peut prendre

$$C(r) = \frac{1}{12\left(\frac{4}{\pi}\right)^r \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(r-1)(r-2)} \left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1}}.$$

De plus dans les cas $r = 2, 3, 4, 5$ on a les meilleures estimations suivantes :

$$\begin{array}{c} \textit{pour}\, r = 2,\ \textit{on peut prendre}:\ C(2) = \frac{1}{24} \\ \textit{pour}\, r = 3,\ \textit{on peut prendre}:\ C(3) = \frac{1}{96} \\ \textit{pour}\, r = 4,\ \textit{on peut prendre}:\ C(4) = \frac{1}{750} \\ \textit{pour}\, r = 5,\ \textit{on peut prendre}:\ C(5) = \frac{1}{7776} \end{array}.$$

Démonstration. En effet, d'après les lemmes qui précèdent, on peut supposer que $M = \mathbb{Z}^r$, que Q_v est Minkowski réduite, on a alors avec les notations de cette section :

$$J(A_v, L_v) = \int_{\mathcal{F}_{Q_v}} Q_v[x]dx.$$

— Commençons par la majoration.
  Pour cela posons :

  $$\bar{Q}_v(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}^r} Q_v(x+m)$$

  et choisissons le domaine fondamental suivant pour $\mathbb{Z}^r$ dans $\mathbb{R}^r$:

  $$C = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^r.$$

  Par définition de $\mathcal{F}_{Q_v}$, on a alors :

  $$\int_{\mathcal{F}_{Q_v}} Q_v(x)dx = \int_{\mathcal{F}_{Q_v}} \bar{Q}_v(x)dx,$$

  et comme C et $\mathcal{F}_{Q_v}$ sont des domaines fondamentaux et que $\bar{Q}_v$ est $\mathbb{Z}^r$-périodique :

  $$\int_{\mathcal{F}_{Q_v}} \bar{Q}_v(x)dx = \int_C \bar{Q}_v(x)dx \leq \int_C Q_v(x)dx.$$

  On en déduit que :

$$J(A_v, L_v) \leq \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^r} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq r} q_{ij} x_i x_j \right) dx$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq r} q_{ii} \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} x_i^2 dx_i$$

$$= \frac{\mathrm{Tr}(Q_v)}{12}$$

— Pour la minoration on procède comme suit :
On définit d'abord comme précédemment,

$$\bar{Q}_v = \min_{m \in \mathbb{Z}^r} Q_v(x+m),$$

et on choisit

$$C = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^r,$$

comme domaine fondamental du réseau $\mathbb{Z}^r$ dans $\mathbb{R}^r$ et on note D_{Q_v} la matrice obtenue à partir des coefficients diagonaux de Q_v, $D_{Q_v} = \mathrm{Diag}(q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{rr})$.
On choisit alors λ un réel tel que $Q_v - \lambda D_{Q_v}$ soit positive.
On remarque alors que pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\min_{m \in \mathbb{Z}} |t+m|^2 = |t|^2,$$

et donc en particulier, comme $Q_v(x+m) \geq \lambda D_{Q_v}(x+m)$, alors

$$\forall x \in C, \bar{Q}_v(x) \geq \lambda D_{Q_v}(x),$$

comme de plus C et $\mathcal{F}_{Q_v}$ sont des domaines fondamentaux :

$$J(A_v, L_v) = \int\limits_{\mathcal{F}_{Q_v}} \bar{Q}_v(x) dx = \int\limits_{C} \bar{Q}_v[x] \geq \lambda \int\limits_{C} D_{Q_v}[x] = \frac{\lambda \mathrm{Tr}(Q_v)}{12},$$

en prenant alors pour λ les valeurs minorantes obtenues dans le lemme qui précède on obtient le résultat.

□

Définition 6.6. Soit A/K une variété abélienne sur un corps K et v une place de K, nous noterons $c_v(A, K)$ le nombre de composantes de la fibre spéciale en v du modèle de Néron de A.

Remarque : Si $\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ est le modèle de Néron de A/K et si K' est une extenstion non ramifiée de K, alors $\mathcal{A} \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K'}/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K'}$ est le modèle de Néron de A/K', autrement dit si v' est une place de K' au-dessus de v, place de K, $c_v(A, K) = c_{v'}(A, K')$.

Ainsi la proposition suivante à bien un sens avec notre construction du chapitre 5 où nous étions passés par une extension non ramifiée puis redescendu.

Fin de la remarque.

Proposition 6.7. *Soit A d'une variété abélienne semi-stable sur un corps de nombres K admettant mauvaise réduction en une place non archimédienne v, nous avons, avec les notations des dernières sections du chapitre 2 et du chapitre 5, notant $c_v(A,K)$ le nombre de composantes de la fibre spéciale en v du modèle de Néron de $A \times_K K_v$:*

$$c_v(A,K) = \det(Q_v)$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 5.2 de [8] et du corollaire 8.2, Chapitre III, de [11]. □

De ce qui précède on déduit le résultat suivant :

Proposition 6.8. *Il existe une constante $\tilde{C}(r)$ ne dépendant que de r telle qu'avec les notations précédemment introduites :*

$$J(A_v, L_v) \geq \tilde{C}(r) c_v(A,K)^{1/r},$$

en particulier on peut prendre :

$$\tilde{C}(r) = \frac{r}{12\left(\frac{4}{\pi}\right)^r \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(r-1)(r-2)} \left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1}},$$

Démonstration. La preuve provient des lemmes précédents où l'on utilise en plus l'inégalité arithmético-géométrique qui nous donne

$$\mathrm{Tr}(Q_v) \geq r(\det(D_{Q_v})^{1/r}) \geq r(\det(Q_v))^{1/r},$$

puis la proposition précédente nous permet de remplacer le déterminant par le nombre de composantes. □

6.3 Conséquences pour la minoration de la hauteur de Faltings

Théorème 6.9. *Soit A/K une variété abélienne semi-stable principalement polarisée, soit, pour chaque place v de mauvaise réduction l'entier r_v, la dimension du tore T_v dans l'uniformisation de Raynaud en la place v et notant aussi $c_v(A/K)$ le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$ alors :*

Il existe une fonction $\tilde{C} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{1}{2}\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} \tilde{C}(r_v) c_v(A,K)^{1/r_v} \log\ N(v),$$

on peut prendre :

$$\tilde{C}(r) = \frac{r}{12\left(\frac{4}{\pi}\right)^r \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(r-1)(r-2)} \left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1}},$$

en particulier il existe une constante $c_1(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que

$$c_1(g)\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} c_v(A,K)^{1/g} \log\ N(v),$$

où l'on peut prendre

$$c_1(g) = \frac{6\left(\frac{4}{\pi}\right)^g \Gamma\left(\frac{g+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(g-1)(g-2)} \left(\frac{g+1}{2}\right)^{g-1}}{g}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe des résultats de cette section dans le cadre du théorème 5.32 du chapitre 4, où l'on utilise notamment que les termes archimédiens sont positifs. Tandis que les inégalités $c_v(A,K)^{1/r_v} \geq c_v(A,K)^{1/g}$ et $c_1(r_v) \leq c_1(g)$ pour $r_v \leq g$ sont triviales. □

Nous en déduisons le résultat suivant, valable pour toute variété abélienne semi-stable :

Corollaire 6.10. *Soit A/K une variété abélienne semi-stable sur un corps de nombre K, $\mathrm{Bad}(A/K)$ l'ensemble de ses places de mauvaise réduction, et pour chaque $v \in \mathrm{Bad}(A/K)$, $c_v(A/K)$ le nombre de composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$, alors il existe une constante $\tilde{c}_2(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que :*

$$c_2(g)\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in \mathrm{Bad}(A/K)} c_v(A,K)^{1/g} \log\ N(v),$$

on peut prendre :

$$c_2(g) = \frac{6\left(\frac{4}{\pi}\right)^{8g} \Gamma\left(\frac{8g+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(8g-1)(8g-2)} \left(\frac{8g+1}{2}\right)^{8g-1}}{g}.$$

Démonstration. On sait, notant $\check{A}$ la variété abélienne duale de A, que, par l'astuce de Zarhin, $A^4 \times \check{A}^4$ est principalement polarisée.

Notant $c(g)$ la constante du théorème précédent, on à alors :

$$c(8g)\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A^4\times\check{A}^4) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in \mathrm{Bad}(A/K)} c_v(A^4\times\check{A}^4,K)^{1/8g} \log\ N(v).$$

Or, les propriétés usuelles de la hauteur de Faltings, notamment le fait usuel que $\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A\times B) = \tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) + \tilde{h}_{\mathrm{st}}(B)$ ainsi que le résultat de Raynaud rappelé dans notre chapitre 3 comme quoi, si A/K est semi-stable : $\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) = \tilde{h}_{\mathrm{st}}(\check{A})$ nous donne :

$$\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A^4\times\check{A}^4) = 8\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A).$$

D'autre part, dans le cas semis-stable les propriétés de fonctorialité du modèle de Néron nous indique que $c_v(A\times B,K) = c_v(A,K)c_v(B,K)$ et un résultat de Annette Werner dans [56] conjecturé par Alexander Grothendieck nous indique aussi que si A/K est semi-stable $c_v(A,K) = c_v(\check{A},K)$ donc

$$c_v(A^4\times\check{A}^4,K)^{1/8g} = c_v(A,K)^{1/g}.$$

On en déduit que :

$$8c(8g)\tilde{h}_{\mathrm{st}}(A/K) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in \mathrm{Bad}} c_v(A,K)^{1/g} \log\ N(v),$$

on en déduit l'inégalité du corollaire avec :

$$c_2(g) = 8c_1(8g).$$

□

Nous allons maintenant traiter le cas des variétés abéliennes qui ne sont pas nécessairement semi-stables comme le font Marc Hindry et Amilcar Pacheco dans leur article [23].

Rappelons ce qui suit : Si L/K est une extension de K et $w|v$ une place w de L au-dessus de v place de K, notons $\mathcal{A}_L$ le modèle de Néron de A/L_w et $\mathcal{A}_K$ celui de A/K_v, alors si on définit $\phi_v(A/K)$ (resp. $\phi_w(A/L)$) le groupe des composantes de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_K$ (resp. de $\mathcal{A}_L$), la propriété universelle des modèles de Néron donne une application canonique

$$\mathcal{A}_K \times_{\mathcal{O}_{K_v}} \mathcal{O}_{L_w} \to \mathcal{A}_L,$$

qui induit une application canonique :

$$\phi_v(A/K) \to \phi_w(A/L).$$

Notamment rappelons le lemme suivant qui est dû Lorenzini d'une part et à Edixhoven, Liu et Lorenzini d'autre part :

Lemme 6.11. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et L/K une extension finie sur laquelle A possède réduction semi-stable, soit v une place de K au dessus du nombre premier p_v et $w|v$ une place de L. On note $\Phi_v(A/K)$ (resp. $\Phi_w(A/L)$) le groupe des composantes du modèle de Néron de $A \times_K K_v/K_v$ (resp. de $A_L \times_L L_w/L_w$) et on définit :*

$$\Psi = \Psi(A, L/K, w|v) = \ker\left\{\Phi_v(A/K) \to \Phi_w(A/L)\right\},$$

alors :

1. *(Lorenzini [30]) Le cardinal de la partie première à p_v de Ψ est borné par 2^{2g}.*
2. *(Edixhoven, Liu, Lorenzini [15]) La p-partie de Ψ est tuée par $[L:K]$. (Ainsi elle s'annule si $p_v > 2g+1$)*

La dernière remarque provient du fait élémentaire que si l'on note

$$D_g = \text{pgcd}\left(\text{Card}(\text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_l)),\ \text{pour } l \text{ premier } \neq 2, p_v\right),$$

alors

$$p|D_g \text{ si et seulement si } p \leq 2g+1.$$

On sait de plus que le cardinal d'une extension L/K telle que A_L/L soit semi-stable peut être choisi comme inférieur ou égal au cardinal de $\text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_3) \times \text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_5)$ car les faits usuels de la théorie de réduction semi-stable des variétés abéliennes (Serre et Tate) nous disent que si $l \neq p_v, 2$ où p est un nombre premier caractéristique résiduelle d'une place v de K alors en posant $L = K(A[l])$ la variété obtenue par extension de corps à L, A_L à réduction semi-stable en toute place w divisant v.

En particulier si la caractéristique résiduelle est différente de 3 ou peut prendre $l=5$ et si la caractéristique résiduelle est différente de 5 on peut prendre $l=3$.

En toute généralité, on pourra supposer que notre variété abélienne A/K admet par extension des scalaires une réduction semi-stable au-dessus d'une extension L/K telle que :

$$[L:K] \leq \text{Card}(\text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_3))\text{Card}(\text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_5)) = \prod_{i=0}^{2g-1}(3^{2g}-3^i)(5^{2g}-5^i) = 15^{g(2g-1)}\prod_{i=1}^{2g}(3^i-1)(5^i-1).$$

Nous allons en déduire une minoration du type précédent et un corollaire dont l'intérêt principal est qu'ils vont nous servir à établir une borne effective sur la torsion des variétés abéliennes dans le chapitre suivant.

Définition 6.12. Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K. Soit v une place de K de caractéristique résiduelle p_v. On définit l'entier

$$c'_v(A, K),$$

comme égal à $c_v(A, K)$ si $p_v > 2g + 1$ ou bien si v est semi-stable, et comme la partie première à p_v de $c_v(A, K)$ sinon, ce dernier étant comme d'habitude le cardinal du groupe des composantes du modèle de Néron de A/K.

En particulier, d'après le lemme précédent, si L/K est une extension sur laquelle A_L/L est semi-stable et si $w|v$ est une place de L au dessus de v :

$$c'_v(A, K) \leq 2^{2g} c_w(A, L).$$

Notons que la majoration précédente du degré $[L : K]$ de la plus petite extension L/K sur laquelle A/K admet réduction semi-stable est loin d'être optimale, c'est pour cela que nous introduisons la notation suivante :

Définition 6.13. Soit A/K une vériété abélienne sur un corps de nombres K nous notons et définissons

$$\mathrm{dss}(A/K),$$

le degré minimal d'une extension L/K sur laquelle A acquiert réduction semi-stable.

On sait notamment par ce qui précède qu'il existe une constante $\delta(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que :

$$\mathrm{dss}(A/K) \leq \delta(g).$$

Notamment,

$$\delta(g) = \prod_{i=0}^{2g-1} (3^{2g} - 3^i)(5^{2g} - 5^i) = 15^{g(2g-1)} \prod_{i=1}^{2g} (3^i - 1)(5^i - 1),$$

convient.

Nous disposons alors du théorème suivant :

Théorème 6.14. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombre K, soit pour chaque place v de K, $c'_v(A, K)$ l'entier défini précédemment, $\tilde{h}(A/K)$ notre hauteur de Faltings convenablement normalisée, et* $\mathrm{Bad}(A/K)$ *l'ensemble des places de mauvaise réduction de A/K,alors il existe une constante $c_3(g)$ ne dépendant que de la dimension g de A telle que :*

$$\frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} c'_v(A, K)^{1/g} \log\ N(v) \leq c_3(g) \tilde{h}(A/K),$$

on peut prendre,

$$c_3(g) = (4\mathrm{dss}(A/K) c_2(g)) \\ \leq \\ 24 \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^{8g} \Gamma\left(\frac{8g+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{(8g-1)(8g-2)} \left(\frac{8g+1}{2}\right)^{8g-1} \cdot 15^{g(2g-1)} \prod_{i=1}^{2g} (3^i - 1)(5^i - 1)}{g}.$$

Démonstration. Commençons par quelques définitions, nous noterons dans cette preuve :

$$\mathrm{SS}_{A/K},$$

l'ensemble des places de K où A a mauvaise réduction semi-stable

$$\mathrm{Ust}_{A/K},$$

l'ensemble des places où A/K a mauvaise réduction non semi-stable,

$$\mathrm{PG}_{A/K},$$

l'ensemble des places de mauvaise réduction où A a potentiellement bonne réduction.

$$\mathrm{PM}_{A/K},$$

l'ensemble des places instables de mauvaise réduction où A admet réduction potentiellement mauvaise, dans le sens que la variété abélienne garde mauvaise réduction quelque soit l'extension et n'est pas stable.

En particulier,

$$\mathrm{Ust}_{A/K} = \mathrm{PG}_{A/K} \bigcup \mathrm{PM}_{A/K},$$

l'union étant bien entendue disjointe et en particulier :

$$\mathrm{Bad}(A/K) = \mathrm{SS}_{A/K} \bigcup \mathrm{PG}_{A/K} \bigcup \mathrm{PM}_{A/K}.$$

Notons au passage que d'après la proposition 3.9 de la fin de notre chapitre 3 et notre normalisation de la hauteur de Faltings :

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Ust}_{A/K}} \log\ N(v) + \tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \leq \tilde{h}(A/K).$$

Choisissons un corps L de plus petit degré possible sur lequel A admet réduction semi-stable par extension des scalaires, on sait qu'on peut choisir L tel que :

$$\mathrm{dss}(A/K) = [L:K] \leq \prod_{i=0}^{2g-1} (3^{2g} - 3^i)(5^{2g} - 5^i) = 15^{g(2g-1)} \prod_{i=1}^{2g} (3^i - 1)(5^i - 1).$$

De plus, pour chaque place v de K nous choisissons une place $w(v)$ de L au-dessus de v.

Alors, comme $c'_v(A,K) \leq 2^{2g} c_{w(v)}(A,L)$, en particuler $c'_v(A,K)^{1/g} \leq 4$ si $v \in \mathrm{PG}_{A/K}$ et comme d'autre part, $\log\ N(v) = \frac{1}{f_{w(v)|v}} \log\ N(w(v)) \leq \log\ N(w(v))$, où $f_{w(v)|v}$ étant le degré de l'extension résiduelle, on a toujours : $c'_v(A,K)^{1/g} \log\ N(v) \leq 4 c_{w(v)}(A,L)^{1/g} \log\ N(w(v))$. Donc :

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} c'_v(A,K)^{1/g} \log\ N(v)$$

$$\leq$$

$$\frac{4}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{PG}_{A/K}} \log\ N(v) + \frac{4}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{SS}_{A/K}} c_{w(v)}^{1/g}(A,L) \log\ N(w(v)) + \dots$$

$$\dots + \frac{4}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{PM}_{A/K}} c_{w(v)}^{1/g}(A,L) \log\ N(w(v)) \leq$$

$$\leq \frac{4}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Ust}_{A/K}} \log\ N(v) + \frac{4}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{w \in \mathrm{Bad}(A/L)} c_w(A,L)^{1/g} \log\ N(w)$$

$$\leq 4[L:K]c_2(g) \left(\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Ust}_{A/K}} \log\ N(v) + \tilde{h}_{\mathrm{st}}(A) \right)$$

$$\leq 4[L:K]c_2(g)\tilde{h}(A/K),$$

où l'on a utilisé le corollaire 6.10 qui précède et les remarques précédentes.

En particulier, l'inégalité du théorème est vraie avec :

$$c_3(g) = 4 \cdot 15^{g(2g-1)} \prod_{i=1}^{2g} (3^i - 1)(5^i - 1) c_2(g).$$

□

Finalement, nous en déduisons le corollaire suivant que nous allons utiliser dans le chapitre suivant :

Corollaire 6.15. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K et* $\mathrm{Bad}(A/K)$ *l'ensemble de ses places de mauvaise réduction alors il existe une constante $c_3(g)$ ne dépendant que de la dimension de A telle que*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{Bad}(A/K)} \log\ N(v) \leq c_3(g)\tilde{h}(A/K),$$

on peut prendre pour $c_3(g)$ la constante du dernier théorème.

Démonstration. C'est un corollaire trivial du théorème précédent où l'on utilise simplement que les $c'_v(A,K)$ sont des entiers strictement positifs.

□

Remarque : Nous n'avons pas cherché à optimiser les constantes dans ce travail.
Fin de la remarque.

Chapitre 7

Corollaire : Borne explicite sur la torsion

Dans ce dernier chapitre on utilise les résultats des chapitres précédents , en particulier le corollaire 6.15 de la fin du chapitre 6, pour établir une borne sur la torsion des variétés abéliennes ne dépendant que de la hauteur de Faltings, du degré, de la dimension et éventuellement du discriminant du corps. L'idée consiste essentiellement a utiliser le théorème des nombres premiers pour trouver un idéal premier borné de bonne réduction grâce auxquels des résultats classiques nous permettent alors de borner la torsion.

Nous écrivons deux théorèmes, d'abord un théorème pour les variétés abéliennes définies sur $\mathbb{Q}$, enfin on écrit un dernier théorème valable pour une variété abélienne quelconque sur un corps de nombres quelconque et où l'exposant en la hauteur de Faltings est optimal avec notre méthode.

Les deux théorèmes ont des preuves complètement similaires, elles reposent sur l'utilisation du théorème des nombres premiers, sachant que l'on sait borner les places de mauvaise réduction grâce aux résultats du chapitre précédent, le théorème des nombres premiers nous dit que l'on peut trouver une place de bonne réduction convenable à partir de laquelle on peut déduire une borne sur la torsion à l'aide du lemme 7.1 qui suit.

7.1 Préliminaires

Commençons par quelques lemmes intermédiaires avant de présenter théorèmes et preuves. Le lemme fondamental qui va nous permettre d'obtenir une borne sur la torsion grâce aux résultats des chapitres précédents est le suivant :

Lemme 7.1. *Soit A/K une variété abélienne sur un corps de nombre K, soit v une place de K de caractéristique résiduelle p_v, notant $A(K)_{\text{tors}}$ le groupe des points K-rationnels de torsion nous avons une application de réduction telle que*

$$\operatorname{Ker}\left\{ A(K)_{\text{tors}} \xrightarrow{\text{red}} A_v(\mathbb{F}_{N(v)}) \right\},$$

est un p_v-groupe qui est de plus nul si l'indice de ramification vérifie $e(v/p_v) < p_v - 1$. En particulier il est nul si $p_v \geq [K:\mathbb{Q}] + 2$.

Ainsi, si $p_v \geq [K:\mathbb{Q}] + 2$ et si A a bonne réduction en v :

$$\operatorname{Card}(A(K)_{\text{tors}}) \leq (\sqrt{N(v)} + 1)^{2g}.$$

Démonstration. C'est une conséquence d'un résultat assez classique sur les groupes formels que l'on peut trouver comme proposition 3.1 section 3.1 de l'article [12], la deuxième partie du lemme est alors prouvé comme point c) de la proposition 3.3 de loc. cit. qui est une conséquence du théorème de Weil sur le nombre de points de torsion d'une variété abélienne sur un corps fini. □

Nous notons et définissons désormais la fonction thêta de Tchebytchev

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p \text{ nombre premier} \\ p \leq x}} \log\, p$$

Nous pouvons aussi définir son analogue sur un corps de nombres K :

$$\vartheta_K(x) = \sum_{\substack{v \text{ place de } K \\ N(v) \leq x}} \log\, N(v)$$

On sait alors par le théorème des nombres premiers que quand $x \to \infty$:

$$\vartheta(x) \sim x,$$

ainsi que

$$\vartheta_K(x) \sim x.$$

À présent nous aurons besoin de faire un tout petit peu de théorie analytique des nombres, nous notons la proposition suivante, due à J. Barkley Rosser et Lowell Schoenfeld, que nous allons utiliser sous une forme très affaiblie :

Proposition 7.2. *(Rosser-Schoenfeld [50]) Nous disposons de l'inégalité suivante, pour tout nombre réel $x \geq 41$:*

$$\vartheta(x) \geq x(1 - \frac{1}{\log(x)}),$$

et pour tout $x > 1$,

$$\vartheta(x) < x(1 + \frac{1}{2\log(x)})$$

Démonstration. Il s'agit d'une du théorème 4 [50] et de son corollaire. □

Nous en retenons la forme très affaiblie suivante :

Corollaire 7.3. *Si $x \geq 41$:*

$$2x \geq \vartheta(x) \geq \frac{x}{2}.$$

Démonstration. C'est un corollaire trivial. □

Dans le cas d'un corps de nombres K des formes explicites et effectives du théorème des nombres premier sont formulables, c'est par exemple un travail fait par Bruno Winckler dans sa thèse de Doctorat [58]. Dans notre travail nous n'allons pas utiliser de versions complètement explicites mais soulignons simplement qu'elles existent.

Proposition 7.4. *Soit K un corps de nombres de degré d et de discriminant Δ_K, notons p_v la caractéristique résiduelle d'une place v de K, alors il existe une constante explicite $x_0(d, \Delta_K)$ ne dépendant que de d et de Δ_K telle que pour tout $x \geq x_0(d, \Delta_K)$,*

$$\sum_{\substack{v \textit{ place de } K \\ N(v) \leq x \\ p_v \geq d+2}} \log\ N(v) \geq \frac{x}{2}.$$

Démonstration. Nous restons volontairement assez imprécis ici, notamment car des formes complètement explicites existent (voir par exemple Ch2. de [58]) mais qu'elles ne sont pas encore optimisées ou alors si une forme optimisée existe elle utilise la conjecture de Riemann généralisée.

Reprenant alors l'équation 2.41 page 39 de la thèse [58] de Bruno Winckler, chapitre sur le théorème de Chebotarev effectif, sous une forme très affaiblie, on sait qu'il existe une constante explicitée $T_0(d, \Delta_K)$ ne dépendant que de d et de Δ_K telle que pour tout $T \geq T_0(d, \Delta_K)$:

$$\vartheta_K(T) = \sum_{\substack{v \text{ place de } K \\ N(v) \leq T}} \log\ N(v) \geq \frac{3T}{4}. \tag{7.1}$$

(ayant $\vartheta_K(T) \sim T$ de manière effective)

Reprenant d'autre part le corollaire 7.3 qui précède et notant $f_{v|p} \leq d$ le degré résiduel d'une place v divisant un nombre premier p :

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{p \text{ premier},\ v \text{ place de } K \\ v|p \\ p \leq d+2}} \log\ N(v) = \sum_{p \leq d+2} \sum_{\substack{v \text{ place de } K \\ v|p}} f_{v|p} \log\ p \\ \leq \\ \displaystyle d \sum_{p \text{ premier} \leq d+2} \log\ p \\ \leq \\ 2d(d+2) \end{array} \tag{7.2}$$

En soustrayant l'inégalité 7.2 à l'inégalité 7.1 qui précède on obtient alors en prenant T suffisamment grand en comparaison de d un $x_0(d, \Delta_K)$ qui répond aux contraintes de l'énnoncé. □

7.2 Borne explicite sur la torsion pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}$

Nous allons prouver le théorème suivant qui est un corollaire assez simple mais astucieux du corollaire de la fin du chapitre 5.

Théorème 7.5. *Soit $A/\mathbb{Q}$ une variété abélienne. Soit g la dimension de A, $\tilde{h}(A/\mathbb{Q})$ notre hauteur de Faltings normalisée comme dans les chapitres 4, 5 et 6, alors il existe une* *constante $C_1(g)$, explicitement calculable, telle que si l'on note $A(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ le groupe des points $\mathbb{Q}-$rationnels de torsion de A :*

$$\mathrm{Card}(A(\mathbb{Q})_{\text{tors}}) \leq C_1(g) \max\{1, \tilde{h}(A/\mathbb{Q})\}^g.$$

On peut prendre

$$C_1(g) = 2^{3g} c_3(g)^g,$$

où $c_3(g)$ est la constante de la fin du chapitre précédent.

Remarque : Nous n'avons pas réellement cherché à optimiser la constante $C_1(g)$ cependant l'exposant g dans $\max\{1, \tilde{h}(A/\mathbb{Q})\}^g$ est optimal avec notre méthode.

Fin de la remarque

Démonstration. La preuve est assez simple grâce aux lemme 7.1 et aux estimations précédentes.

En effet on sait d'après le corollaire 6.15 de la fin du chapitre précédent qu'il existe une constante explicite $c_3(g) \geq 20$ ne dépendant que de g telle que :

$$\sum_{p \in \mathrm{Bad}(A/\mathbb{Q})} \log\, p \leq c_3(g) \tilde{h}(A/\mathbb{Q}). \tag{7.3}$$

Et on sait d'après les estimations de la section précédente que pour $x \geq 41$:

$$\sum_{p \text{ premier} \leq x} \log\, p \geq \frac{x}{2}.$$

On en déduit alors qu'on peut trouver un premier impair de bonne réduction et appliquer le lemme 7.1 ce qui nous donne :

$$\mathrm{Card}(A(\mathbb{Q})_{\text{tors}}) \leq \left(\sqrt{2c_3(g) \max\{1, \tilde{h}(A/\mathbb{Q})\}} + 1\right)^{2g} \leq 2^{3g} c_3(g)^g \max\{1, \tilde{h}(A/\mathbb{Q})\}^g$$

□

7.3 Borne sur la torsion des variétés abéliennes sur un corps de nombres

On déduit à présent un autre théorème sur le cardinal du groupe de torsion d'une variété abélienne sur un corps de nombres quelconque. On utilise pour cela le même schéma de démonstration que dans le cas des variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}$.

L'avantage de cette méthode est que l'on va optimiser l'exposant en la hauteur de Faltings en obtenant une borne de la forme $C_2(d, \Delta_K, g) \max\{1, \tilde{h}(A/K)\}^g$, nous pouvons estimer que l'exposant g est relativement bon par contre l'utilisation d'une forme effective du théorème des nombres premiers nous fait perdre beaucoup dans la constante et notamment fait apparaître une dépendance en le discriminant Δ_K de K.

Théorème 7.6. *Soit A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K de degré d et de discriminant Δ_K. Notons $\tilde{h}(A/K)$ notre hauteur de Faltings convenablement normalisée et $A(K)_{\text{tors}}$ le groupe des points K-rationnels de torsion, alors il existe une constante explicite $C_2(d, \Delta_K, g)$ ne dépendant que de d, de Δ_K et de g telle que :*

$$\mathrm{Card}(A(K)_{\text{tors}}) \leq C_2(d, \Delta_K, g) \max\{1, \tilde{h}(A/K)\}^g.$$

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que dans le cas de variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}$ du théorème 7.5. On utilise le théorème 6.15 de la fin du chapitre précédent qui nous donne une borne sur les places de mauvaise réduction induisant grâce au lemme 7.1 de la première section un idéal premier de bonne réduction convenable que l'on sait borné par la proposition 7.4.

Le fait que la constante soit explicite (ou plutôt, explicitable) repose sur l'existence de forme effective du théorème de Chebotarev et du théorème des nombres premiers telles que présentées par exemple dans le chapitre 2 de [58]

$\square$

Bibliographie

[1] A. Andrianov : *Quadratic Forms and Hecke Operators.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 286 Springer Verlag, 1980.

[2] P. Autissier : Hauteur de Faltings et hauteur de Néron-Tate du diviseur thêta. *Compos. Math.*, 142(6):1451–1458, 2006.

[3] P. Autissier : Un lemme matriciel effectif. *Math. Z.*, 273:355–361, 2013.

[4] A. Beauville : Theta functions, old and new. *Open Problems and surveys of contemporary Mathematics*, SMM 6:99–131, 1990.

[5] C. Birkenhake et H. Lange : *Complex Abelian Varieties.* Springer-2nd Ed., 2004.

[6] S. Bosch et W. Lütkebohmert : Stable reduction and uniformization of abelian varieties II. *Invent. Math.*, t. 78:257–297, 1985.

[7] S. Bosch et W. Lütkebohmert : Degenerating abelian varieties. *Topology*, 30(4):653–698, 1991.

[8] S. Bosch et X. Xarles : Component groups of Néron models via rigid uniformization. *Math. Ann.*, 306(3):459–486, 1996.

[9] J.-B. Bost : Intrinsic heights on stable varieties and abelian varieties. *Duke Mathematical Journal*, 82(1):21–70, 1996.

[10] J. Boxall : Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variétés abéliennes. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 119(t.7):111–119, 1995.

[11] C.-L. Chai et G. Faltings : *Degeneration of abelian varieties.* Springer-Verlag, 1990.

[12] P. Clark et X. Xarles : Local bounds for torsion points on abelian varieties. *Canad. J. Math.*, 60:532–555, 2008.

[13] O. Debarre : *Tores et variétés abéliennes complexes.* SMF, 1999.

[14] P. Deligne : Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevich (d'après G. Faltings. *Astérisque No. 121-122, Séminaire Bourbaki*, p. 25–41, 1985.

[15] B. Edhixoven, Q. Liu et D. Lorenzini : The p-part of groups of components of a Néron model. *J. Algebraic Geom.*, 5(4):801–813, 1996.

[16] G. Faltings : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpen. *Inventiones Mathematicae*, 73:349–366, 1983.

[17] G. Faltings : Calculus on arithmetic surfaces. *Annals of Mathematics*, 119: 387–424, 1984.

[18] E. Gaudron et G. Rémond : Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. *Comment. Math. Hel*, 89(2), 2014.

[19] E. GAUDRON et G. RÉMOND : Polarisations et isogénies. *Duke Math. Jour.*, 163(11):2057–2108, 2014.

[20] L. GERRITZEN : On the non-archimedean representation of abelian varieties. *Math. Ann*, 169:323–346, 1972.

[21] P. GRUBER et C. LEKKERKERKER : *Geometry of Numbers.* North-Holland Mathematical Library, 1987.

[22] M. HINDRY : Sur les hauteurs locales de Néron sur les variété abéliennes. *Prépublications Mathématiques de l'U.R.A 212 "Théories Géométriques", disponible à l'adresse : https://webusers.imj-prg.fr/~marc.hindry/Neron.pdf*, 1993.

[23] M. HINDRY et A. PACHECO : An analogue of the Brauer-Siegel theorem for abelian varieties in positive characteristic. *Moscow Mathematical Journal*, 16(1): 45–93, 2016.

[24] M. HINDRY et N. RATAZZI : Torsion pour les variétés abéliennes de type I et II. *arxiv :1505.05620*, 2015.

[25] M. HINDRY et J. SILVERMAN : *Diophantine Geometry : An Introduction*, vol. 201. Graduate Texts In Mathematics Springer, 2000.

[26] G. KEMPF : *Complex Abelian Varieties and Theta Functions.* Springer-Verlag, 1980.

[27] U. KÖPF : Uber eigentlische Familien algebraischer. Varietäten über Affinoiden Räumen. *Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster*, Ser.2(t.7), 1974.

[28] S. LANG : *Abelian Varieties.* Springer-Verlag, 1959.

[29] S. LANG : *Fundamentals of Diophantine Geometry.* Springer-Verlag, 1983.

[30] D. LORENZINI : Groups of components of Néron models of jacobians. *Composition Math.*, 73(2):145–160, 1990.

[31] D. MASSER : Lettre personnelle à D. Bertrand. *17 Novembre*, 1986.

[32] D. MASSER : Small values of heights on families of abelian varieties. *Lecture Notes Math.*, 1290:109–148, 1987.

[33] D. MASSER et G. WÜSTHOLZ : Periods and minimal abelian subvarieties. *Annals of Math.*, 137:407–458, 1993.

[34] L. MEREL : Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *Inventiones Mathematicae*, 124:437–449, 1996.

[35] L. MORET-BAILLY : *Pinceaux de Variétés Abéliennes*, vol. 129. Astérisque SMF, 1985.

[36] L. MORET-BAILLY : La formule de Noether pour les surfaces arithmétiques. *Invent. Math.*, 98(3):491–498, 1989.

[37] L. MORET-BAILLY : Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann. *Compositio Mathematica*, 75(2):203–217, 1990.

[38] L. MORET-BAILLY : Compactifications, hauteurs et finitude. *Astérisque*, 127: 113–129, 1995.

[39] H. MORIKAWA : Theta functions and abelian varieties over valuation fields of rank one. *Nagoya Math. J.*, 20,21:1–27, 231–250, 1962.

[40] D. MUMFORD : *Abelian Varieties.* Oxford University Press, 1970.

[41] D. MUMFORD : An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings. *Comp. Math.*, 24:239–272, 1972.

[42] A. NÉRON : Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. *Pub. Math. IHES*, 21:361–482, 1964.

[43] A. NÉRON : Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. *Annals of Mathematics*, 82:249–331, 1965.

[44] M. PAPIKIAN : Rigid-analytic geometry and abelian varieties. *Contemporary Mathematics*, 388, 2005.

[45] A. N. PARSHIN : Minimal models of curves of genus 2, and homomorphisms of abelian varieties defined over a field of positive caracteristic. (russian). *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math*, 36:67–109, 1972.

[46] M. RAYNAUD : Variétés abéliennes et géométrie rigide. *Actes congrès inter. Math.*, t1:473–477, 1970.

[47] M. RAYNAUD : Sous variétés d'une variété abélienne et points de torsion. *Birkhäuser*, Vol. 1.:327–352, 1983.

[48] M. REVERSAT et M. Van der PUT : Construction analytique rigide de variétés abéliennes. *Bulletin de la SMF*, 117:415–444, 1989.

[49] M. REVERSAT et M. Van der PUT : *Rigid analytic geometry and its applications.* Birkäuser, 2004.

[50] J. ROSSER et L. SCHOENFELD : Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Maths.*, 6(1):64–94, 1962.

[51] H. SWINNERTON-DYER : *Analytic theory of Abelian Varieties*, vol. L.N.S. 14. Cambridge U. Press, 1974.

[52] L. SZPIRO : *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques, la conjecture de Mordell*, vol. 127. Astérisque SMF, 1985.

[53] K. UENO : Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, II:749–770, 1988.

[54] E. VIADA : Slopes and abelian subvariety theorem. *Journal of Number Theory*, 112(1):67–115, 2005.

[55] A. WERNER : Local heights on abelian varieties with split multiplicative reduction. *Compositio. Math.*, 107(3):289–317, 1997.

[56] A. WERNER : On Grothendieck's pairing of component groups in the semistable case. *J. reine angew. Math.*, 486:205–215, 1997.

[57] A. WERNER : Local heights on abelian varieties and rigid uniformization. *Doc. Math.*, 3:301–319, 1998.

[58] B. WINCKLER : *Intersection arithmétique et problème de Lehmer elliptique.* Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux, `http://mathem-all.fr/bw/manuscrit_bw.pdf`, 2015.

[59] Y. G. ZARHIN : A finiteness theorem for unpolarized abelian varieties over number fields with prescribed places of bad reduction. *Invent. Math.*, 79(2):309–321, 1985.