Thèse de Doctorat de l'Université Sorbonne Paris Cité préparée à l'Université Paris 7 - Denis Diderot

École doctorale Physique île-de-France

Présentée par :

Simon Yves

sous la direction de **Geoffroy Lerosey**

et co-encadrée par **Fabrice Lemoult**

à l'Institut Langevin - Ondes et Image

Métamatériaux cristallins : du motif sub-longueur d'onde au comportement macroscopique

---

Soutenance le 17 Décembre 2018

Devant le jury composé de :

Philippe Roux	Président
Vincent Tournat	Rapporteur
Stefan Enoch	Rapporteur
Sarah Benchabane	Examinatrice
Alberto Amo	Examinateur
Pierre Delplace	Examinateur
Geoffroy Lerosey	Directeur de thèse
Fabrice Lemoult	Invité
Mathias Fink	Invité

Résumé

Les matériaux tirent beaucoup de leurs propriétés de l'interaction entre leurs constituants et une onde. Ceci est principalement conditionné par deux caractéristiques : la composition et l'arrangement structurel. Cette interdépendance est précisément décrite par la physique du solide. Ceci a ensuite motivé la découverte des matériaux composites dont les caractéristiques découlent à nouveau de ces deux critères. Ils se divisent en deux catégories. La première est celle des cristaux photoniques/phononiques, qui tirent leurs propriétés de leur arrangement périodique. La seconde catégorie est celle des métamatériaux, dont les propriétés proviennent de l'interaction de leurs constituants avec les ondes. Les effets de structure sont généralement négligés dans la description de ces milieux et ils sont considérés comme étant des milieux homogènes avec des paramètres effectifs. Ces deux types de systèmes semblent donc a priori très différents du point de vue de l'interaction avec les ondes.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au cas des métamatériaux localement résonant, c'est-à-dire à ceux dont la cellule unité est un résonateur sub-longueur d'onde. Au lieu de les considérer comme des milieux homogènes effectifs, l'idée est de partir des caractéristiques de la cellule unité du milieu ainsi que de son arrangement spatial afin d'obtenir ses propriétés macroscopiques. Cette approche microscopique permet d'appréhender conjointement les effets de structure et de composition. Ceci est décrit dans le chapitre I, où nous introduisons le concept de polariton dont la relation de dispersion présente une bande liée à des modes sub-longueur d'onde, et une bande interdite d'hybridation. Dans le chapitre II, nous tirons parti cette dernière afin d'induire un couplage localisé entre des défauts résonants qui est similaire au terme de saut que l'on retrouve au sein des Hamiltoniens tight-binding de physique du solide. Nous reproduisons ainsi les structures de bande du graphène et du réseau « dice », ce qui nous permet de mesurer des cônes de Dirac au sein du système. Dans le chapitre III, nous introduisons le concept des métamatériaux cristallins, ce qui revient à considérer ces milieux comme des cristaux photoniques/phononiques, mais à une échelle très petite devant la longueur d'onde de travail. Cela nous permet d'induire une bande négative dans le système mais aussi une bande relativement plate, et des cônes de Dirac. Dans le chapitre IV nous brisons ces cônes en réalisant un analogue de l'effet Hall quantique de Vallée, ce qui revient à modifier conjointement la structure et la composition de la cellule unité. Dans le chapitre V nous brisons encore une fois ces cônes afin de d'induire des propriétés topologiques dans le milieu et de créer un analogue macroscopique d'un isolant topologique de spin.

Summary

Many material properties arise from the interaction between their constituents and a wave. This is mainly conditioned by two characteristics : the composition and the structural arrangement. This interdependence is precisely described by condensed matter physics. This motivated the discovery of composite materials whose characteristics also stem from these two criteria. They divide in two categories. The first is the photonic/phononic crystals, whose properties are linked to their periodic arrangement. The second category is the one of metamaterials, whose properties come from the interaction of their constituents with the waves. The structural effects are generally neglected in the description of these media and they are considered to be homogeneous media with effective parameters. These two types of systems seem very different from the point of view of the interaction with the waves.

In this thesis, we focus on locally resonant metamaterials, whose unit cell is a subwavelength resonator. Instead of seeing them as effective homogeneous media, the idea is to start from the characteristics of the unit cell of the medium as well as from its spatial arrangement in order to obtain its macroscopic properties. This microscopic approach makes it possible to jointly apprehend the effects of structure and composition. This is described in Chapter I, where we introduce the concept of polariton whose dispersion relation has a band linked to subwavelength modes, and a hybridization bandgap. In Chapter II, we use the latter to induce a localized coupling between resonant defects that is similar to the hopping term found in tight-binding solid-state physics Hamiltonians. We reproduce the band structures of graphene and of the dice lattice, which allows us to measure Dirac cones within the system. In Chapter III, we introduce the concept of crystalline metamaterials, which amounts to seeing these media as photonic/phononic crystals, but on a very small scale compare to the operating wavelength. This allows us to induce a negative band in the system but also a relatively flat band, and Dirac cones. In Chapter IV we break these cones by creating an analogue of the quantum Hall effect of Valley, which amounts to jointly modifying the structure and composition of the unit cell. In Chapter V we again break these cones in order to induce topological properties in the medium and to create a macroscopic analogue of a topological isolator.

Remerciements

Ces remerciements viennent conclure trois très belles années au sein de l'Institut Langevin ponctuées de nombreuses rencontres très enrichissantes, autant humainement que scientifiquement. Pour cela je souhaite remercier l'ensemble du personnel de l'institut pour l'atmosphère conviviale qu'il contribue à y créer chaque jour.

Plus particulièrement, j'aimerai remercier très chaleureusement Geoffroy Lerosey pour son encadrement et la confiance qu'il m'a accordée au cours des trois dernières années. À ses qualités de chercheur et à son intuition scientifique indéniables viennent s'ajouter des qualités humaines qui font de lui un directeur de thèse avec qui travailler est incroyablement enrichissant. Son enthousiasme communicatif, son dynamisme mais aussi sa franchise naturelle m'ont permis d'acquérir une maturité scientifique et une confiance en moi pour lesquelles je lui suis très reconnaissant.

Je remercie aussi Mathias Fink pour avoir accepté d'être mon directeur au début de ma thèse. Bien que Mathias ait un emploi du temps très chargé, il est invariablement enthousiaste quand on parle de science et son apport est toujours très intéressant.

Par ailleurs, j'exprime ma plus grande gratitude à Fabrice Lemoult qui m'a encadré du début de mon stage de master jusqu'à la fin de ma thèse. Fabrice est quelqu'un de brilliant et d'extrêmement pédagogue qui m'a permis de comprendre et d'apprendre énormément de choses. Sa gentillesse, sa patience et ses connaissances scientifiques théoriques et expérimentales font de lui l'encadrant rêvé. Les heures passées dans son bureau à essayer de comprendre le pourquoi et le comment de la topologie des structures de bandes vont me manquer.

J'adresse ensuite mes sincères remerciements à Vincent Tournat et Stefan Enoch pour avoir pris le temps de lire mon manuscrit dans le détail et pour leurs commentaires constructifs. A cette occasion, je remercie fortement l'ensemble des membres de mon jury : Sarah Benchabane, Philippe Roux, Alberto Amo et Pierre Delplace. C'est une chance d'avoir pu réunir des chercheurs d'aussi grande qualité et d'horizons assez différents. Cela a déclenché des échanges très intéressants et stimulants que j'ai beaucoup appréciés.

J'aimerai ensuite remercier les autres personnes qui ont contribué plus ou moins directement aux productions scientifiques de cette thèse. Romain Fleury tout d'abord, dont l'année passée à travailler avec lui m'a permis de découvrir et comprendre beaucoup de concepts scientifiques qui nous ont ouvert par la suite de nouvelles perspectives. Je remercie sincèrement aussi Thomas Berthelot pour le travail lié à la fabrication des échantillons au CEA. Sa bonne humeur et son énergie ont rendu les journées de « chimie à la campagne »beaucoup plus plaisantes que ce que j'aurai pu imaginer *a priori*. Je remercie par

ailleurs Lucie Domino et Antonin Eddi pour les diverses discussions que l'on a pu avoir ainsi que le reste de leur équipe pour la cohabitation conviviale en salle de manip.

Je tiens aussi à remercier Samuel Métais avec qui je partage un cursus scientifique quasi-identique depuis maintenant presque huit ans, un goût immodéré pour le montage/démontage de chambres anéchoïques artisanales mais aussi quelques bières à l'occasion qui s'accompagnent de beaucoup d'autres souvenirs. Je remercie aussi le reste de l'équipe passée et présente (Philipp, Nadège, Matthieu, Maxime, Matthieu, Jean-Baptiste et Alexandre) au sein de laquelle l'ambiance est très agréable et stimulante.

J'aimerai ensuite remercier l'ensemble des doctorants et post-doctorants du laboratoire et plus particulièrement les collègues du bureau (Claire, Elodie, Vincent, Nancy, Thibaud, Mathieu, Margaux, Léo, Romain, Fish). Je vous suis très reconnaissant de cette atmosphère chaleureuse et joyeuse que vous y créez et qui m'a toujours donné envie de me lever le matin.

Je remercie aussi l'ensemble de mes amis, ceux de Granville, de Rennes, de l'ESPCI, du foot, du master, mes collocs ainsi que ceux d'horizons plus lointains rencontrés au cours de diverses tribulations. Vous êtes pour moi comme une seconde grande famille sans qui je ne serai pas là où j'en suis aujourd'hui.

Pour finir j'aimerai remercier chaleureusement tous les membres de ma famille, et plus particulièrement mes parents à qui je dois tout. J'espère être à la hauteur de leur affection et de la liberté qu'ils m'ont toujours assuré.

Table des matières

Introduction **1**

I Propagation des ondes dans les milieux matériels **5**
I.1 Propagation dans les milieux non dispersifs 5
I.1.1 Propagation dans le vide 5
I.1.2 Notion d'indice 7
I.1.3 Phénomènes aux interfaces 9
I.1.4 Les ondes acoustiques dans l'air 11
I.2 Propagation dans les milieux dispersifs 11
I.2.1 Milieux dispersifs naturels 11
I.2.2 La diffraction des rayons X 16
I.2.3 Les matériaux composites 18
I.3 Matériaux composites structurés à l'échelle de la longueur d'onde 19
I.3.1 Cas unidimensionnel 19
I.3.2 Cristaux Photoniques 2D 24
I.3.3 Cristaux Photoniques 3D 26
I.3.4 Cristaux Phononiques 27
I.3.5 Analogue de la physique du solide 27
I.4 Matériaux composites résonants organisés sur une l'échelle sub-longueur d'onde 28
I.4.1 Métamatériaux électromagnétiques 29
I.4.2 Métamatériaux acoustiques 31
I.4.3 Le contrôle des ondes avec les métamatériaux 32
I.5 Approche microscopique des métamatériaux localement résonants 33
I.5.1 Approche macroscopique : polariton 33
I.5.2 Approche microscopique 36
I.5.3 Illustration 1D : *Rainbow Trapping* 39
I.6 Conclusion 43

II La bande interdite d'hybridation pour reproduire les Hamiltoniens *tight-binding* **45**
II.1 La bande interdite pour générer des défauts 45
II.1.1 Défauts dans les cristaux photoniques 45
II.1.2 Défauts dans les métamatériaux localement résonant 49
II.2 Cristaux de défauts : l'exemple de l'Hamiltonien du graphène 57

II.2.1 Graphène . . . 57
II.2.2 Analogue du graphène dans un métamatériau localement résonant . 60
II.2.3 Analogue électromagnétique : Milieu de fils . . . 61
II.2.4 Analogue acoustique : réseau de canettes . . . 68
II.3 Un Hamiltonien plus complexe : le cas du réseau *Dice* (ou *T3*) . . . 73
II.3.1 Réseau . . . 73
II.3.2 Analogue du réseau *dice* avec un métamatériau localement résonant 75
II.3.3 Résultats numériques : milieu de fils . . . 76
II.4 Conclusion . . . 80

III Les métamatériaux cristallins : de la bande négative aux cônes de Dirac 83
III.1 Au delà de l'approche effective du polariton . . . 83
III.1.1 Anisotropie des bandes . . . 83
III.1.2 Diffusion multiple au sein du métamatériau . . . 85
III.2 Chaîne de résonateurs structurée à l'échelle sub-longueur d'onde . . . 86
III.2.1 Structuration de la cellule unité . . . 87
III.2.2 Approche cristalline . . . 90
III.2.3 Approche type Méta-molécule . . . 91
III.2.4 Bande « négative » . . . 94
III.3 Généralisation à deux dimensions . . . 97
III.3.1 Réseau Hexagonal . . . 97
III.3.2 Réseau Carré bidisperse . . . 102
III.3.3 Super-lentille électromagnétique . . . 106
III.4 Un réseau plus complexe : le Kagomé . . . 112
III.4.1 Méta-molécule triangulaire . . . 113
III.4.2 Métamatériau cristallin de type Kagomé . . . 115
III.4.3 Comparaison avec le réseau hexagonal . . . 118
III.5 Conclusion . . . 120

IV Des métamatériaux cristallins aux guides d'onde polarisés 123
IV.1 Contrôle de la structure et de la composition . . . 123
IV.1.1 Réseau hexagonal . . . 123
IV.1.2 Réseau hexagonal bidisperse . . . 125
IV.1.3 Vérification expérimentale . . . 128
IV.2 Du coeur du métamatériau à ses bords . . . 130
IV.2.1 Effet Hall quantique de vallée . . . 130
IV.2.2 Interfaces . . . 132
IV.2.3 Exploitation du moment angulaire . . . 135
IV.2.4 Guides d'onde avec une polarisation cristalline . . . 139
IV.3 Correspondance avec le Kagomé . . . 142
IV.3.1 Équivalence structure-composition . . . 142
IV.3.2 Interface . . . 147
IV.4 Conclusion . . . 151

V Introduction d'effets topologiques au sein des métamatériaux cristallins 155
V.1 Cône de Dirac et topologie . . . 155
V.1.1 Isolants topologiques . . . 156
V.1.2 Ingénierie de bandes pour obtenir un pseudo-spin . . . 161
V.2 Étude du coeur du métamatériau . . . 163
V.2.1 Métamatériau topologiquement trivial . . . 164
V.2.2 Métamatériau topologiquement non-trivial . . . 167
V.2.3 Vérification expérimentale en micro-ondes . . . 170
V.3 Interface . . . 174
V.3.1 Modes d'interface topologiques . . . 175
V.3.2 Brisure de la symétrie C6 . . . 178
V.3.3 Étude expérimentale en micro-ondes . . . 181
V.4 Conclusion . . . 184

Conclusion 187

Introduction

Les matériaux tirent nombres de leurs propriétés de l'interaction entre leurs constituants, les atomes, et une onde, qu'elle soit acoustique, optique, électromagnétique, électronique ou encore élastique. Le caractère conducteur ou isolant d'un milieu, mais aussi la transparence optique, ou à l'inverse l'opacité, de certains matériaux découlent directement de cette interaction. Ceci est principalement conditionné par deux caractéristiques : la composition chimique et l'arrangement structurel. Ainsi, le diamant et la blende sont deux composés différents dont la composition diffère mais leur structure est similaire. Dans le cas du graphite, composé d'atomes de carbone comme le diamant, c'est l'arrangement cristallin qui explique la différence de leur propriétés. Cette interdépendance est précisément décrite par la physique du solide.

La compréhension du lien existant entre la structuration de la matière et les propriétés macroscopiques de propagation a permis la découverte des matériaux composites dont les caractéristiques découlent à nouveau de ces deux critères. Ainsi on trouve deux catégories de matériaux artificiels selon qu'ils s'inspirent de la structure ou de la composition des matériaux. La première est celle des cristaux photoniques/phononiques, qui tirent leurs propriétés de leur arrangement périodique. La propagation des ondes dans ces milieux est décrite par des structures de bande, de manière similaire aux électrons dans les solides. La seconde catégorie est celle des métamatériaux, dont les propriétés proviennent de l'interaction de leurs constituants avec les ondes. Les effets de structure sont généralement négligés dans la description de ces matériaux. Ils sont ainsi considérés comme étant des milieux homogènes avec des paramètres effectifs. Ces deux types de systèmes semblent donc *a priori* très différents du point de vue de l'interaction avec les ondes.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons au cas des métamatériaux localement résonant, c'est-à-dire à ceux dont la cellule unité est un résonateur sub-longueur d'onde. Au lieu de les considérer comme des milieux homogènes effectifs, l'idée est de partir des caractéristiques de la cellule unité du milieu ainsi que de son arrangement spatial afin d'obtenir ses propriétés macroscopiques. Cette approche microscopique permet d'appréhender conjointement les effets de structure et de composition.

Tout au long de ce manuscrit nous allons donc jouer avec la structure et la composition de la cellule unité résonante de ces métamatériaux, et ce dans le but de manipuler les ondes. Par ailleurs, nous tirons parti de la généralité des phénomènes ondulatoires en passant indifféremment du domaine de l'acoustique audible à celui des micro-ondes dans le cadre de nos études à la fois numériques et expérimentales. Ainsi, le chapitre I est consacré à quelques rappels sur l'interaction des ondes avec la matière et notamment du rôle de la structure et de la composition des matériaux sur leurs propriétés macroscopiques. Nous y présentons ensuite l'approche usuelle des cristaux photoniques/phononiques et des métamatériaux. Nous introduisons ensuite la description microscopique de ces derniers en utilisant le modèle du polariton dont la relation de dispersion possède deux branches, dont une porte des modes sub-longueur d'onde, séparées par une bande interdite.

Le chapitre II porte sur l'utilisation de cette dernière. Par définition, elle empêche les ondes de se propager au sein du milieu. Elle permet ainsi d'y introduire des défauts qui, ici, se comportent comme des cavités résonantes à l'échelle sub-longueur d'onde. Le couplage entre plusieurs de ces cavités est localisé ce qui en fait un analogue du terme de saut que l'on retrouve au sein des Hamiltoniens *tight-binding* de physique du solide. Nous exploitons ce parallèle afin d'implémenter des réseaux bidimensionnels de défauts qui reproduisent les structures de bandes du graphène et du réseau « *dice* ». Cela nous permet de mettre en évidence la présence de cônes de Dirac au sein du système, et ce à l'échelle très sub-longueur d'onde.

Dans le chapitre III, nous nous concentrons sur la bande sub-longueur d'onde du polariton. Nous montrons qu'en structurant la cellule unité du métamatériau nous pouvons induire des repliements spectraux équivalents à ce que l'on trouve dans le cas des cristaux photoniques/phononiques, mais à une échelle très petite devant la longueur d'onde de travail. Ceci introduit le concept des métamatériaux cristallins qui revient à décrire ces derniers en termes de structure de bandes plutôt que de paramètres effectifs. Nous montrons qu'en partant d'une cellule unité constituée d'un dimère de résonateurs il est possible d'induire une bande « négative » dans le système mais aussi des cônes de Dirac. Ensuite nous y ajoutons un troisième résonateur et obtenons une bande supplémentaire relativement plate, et là encore des cônes de Dirac. Les similarités entre les deux études nous permettent d'introduire une correspondance entre la structure et la composition du métamatériau.

Ces cônes de Dirac sont des points particuliers de la relation de dispersion où deux bandes se touchent. Dans le chapitre IV nous allons briser cette dégénérescence en jouant à la fois sur la structure et la composition de la cellule unité. Nous montrons que ceci résulte en l'apparition d'une polarisation cristalline qui accompagne la propagation des

ondes au coeur du métamatériau. Nous l'exploitons ensuite afin d'obtenir un équivalent macroscopique de l'effet Hall quantique de vallée qui nous permet par la suite de concevoir des guides d'ondes avec une polarisation cristalline. Par ailleurs, nous tirons parti de la correspondance entre composition et structure évoquée au chapitre précédent afin de réaliser cet effet avec deux systèmes apparemment différents.

Enfin le chapitre V s'intéresse à l'aspect topologique de ces cônes de Dirac. Encore une fois, en structurant différemment la cellule unité du métamatériau cristallin nous montrons qu'il est possible de superposer deux de ces points de dégénérescence. Cela reproduit, dans une certaine mesure, le comportement du spin des électrons dans le graphène. A partir de là, nous modifions de deux façons différentes la cellule unité du milieu afin de mettre en évidence une transition de phase topologique qui est le pendant macroscopique de l'effet Hall quantique de spin. Nous démontrons ainsi la présence de modes de bords avec une propagation hélicoïdale.

Chapitre I

Propagation des ondes dans les milieux matériels

I.1 Propagation dans les milieux non dispersifs

Dans ce premier chapitre nous introduisons plusieurs concepts de physique ondulatoire en général, et ce afin de donner au lecteur les idées nécessaires à la compréhension du manuscrit. Nous commençons par rappeler la nature des ondes puis nous décrivons leur propagation au sein de milieux homogènes et dans des milieux structurés. Dans un second temps, nous présentons les différentes méthodes mises en oeuvre afin de manipuler ces ondes, notamment dans le domaines des cristaux structurés à l'échelle de la longueur d'onde et dans celui des métamatériaux. Nous finissons par présenter l'approche microscopique des métamatériaux localement résonants qui a été développée au cours des dernières années au sein du groupe et qui sert de base au travaux effectués dans cette thèse.

I.1.1 Propagation dans le vide

Les ondes électromagnétiques résultent du couplage entre deux champs vectoriels : le champ électrique $\vec{E}$ d'une part, créé par une particule chargée, et un champ magnétique $\vec{B}$ d'autre part, qui émerge du mouvement d'une charge, autrement dit d'un courant [1,2]. Ces derniers exercent ensuite à leur tour une force sur les charges précédentes appelée force de Lorentz. La variation d'un de ces champs entraîne celle de l'autre ce qui se traduit par la propagation d'une onde.

Dans le vide, milieu infini, homogène et statique, les densités de charges et de courant sont nulles. Il s'agit du support de propagation le plus simple à étudier pour ces ondes. L'équation qui y décrit cette propagation est la suivante :

$$\Delta\vec{\Psi}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Psi}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{I.1}$$

$\vec{\Psi}$ représente ici un champ vectoriel qui dépend de la position et du temps et qui peut être soit $\vec{E}$ ou $\vec{B}$. c est homogène à une vitesse et dépend directement des constantes ϵ_0 et μ_0 : $c = \sqrt{1/\epsilon_0\mu_0}$. Les solutions de cette équation peuvent se décomposer sur la base des ondes planes harmoniques :

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) = \vec{\Psi_0}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{I.2}$$

Cette solution de l'équation d'onde est périodique temporellement : on définit ainsi la pulsation ω telle que $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ où T est la période temporelle de l'onde et f sa fréquence. L'onde plane possède aussi une périodicité spatiale reliée au vecteur d'onde $\vec{k}$ et dont la dimension caractéristique est la longueur d'onde λ telle que $\left\|\vec{k}\right\| = 2\pi/\lambda$.

Ce sont ces deux paramètres qui font l'identité de l'onde. Ces deux échelles de temps et d'espace sont reliées par la célérité de l'onde, qui est propre au milieu de propagation. Cette dépendance, appelée relation de dispersion, est obtenue simplement en réinjectant l'expression (I.2) dans l'équation d'onde. Elle traduit le lien entre l'échelle spatiale et l'échelle temporelle. Dans le vide, elle correspond à :

$$\left\|\vec{k}^2\right\| = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ ou } \left\|\vec{k}\right\| = \frac{\omega}{c} \tag{I.3}$$

Cette relation est représentée sur la figure I.1(a) dans le cas du vide. Dans ce cadre précis, on obtient une droite, dont la pente est égale à la célérité c de l'onde, et il existe au moins une onde qui se propage pour chaque fréquence dans le vide. Cette relation montre aussi que plus la fréquence de l'onde est élevée, plus sa dimension spatiale est petite (figure I.1(b)). En outre, cette droite sépare l'espace réciproque en deux domaines distincts : l'intérieur où sont les modes qui auraient une périodicité spatiale supérieure à la longueur d'onde s'ils pouvaient se propager, et l'extérieur où sont ceux qui possèdent une périodicité spatiale plus petite que la longueur d'onde.

Enfin, cette relation de dispersion fait apparaître naturellement une première vitesse de propagation appelée vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\left\|\vec{k}\right\|} \tag{I.4}$$

C'est cette vitesse de phase qui fait le lien entre les échelles de temps et d'espace. Elle correspond à la vitesse de propagation des fronts d'ondes en régime monochromatique.

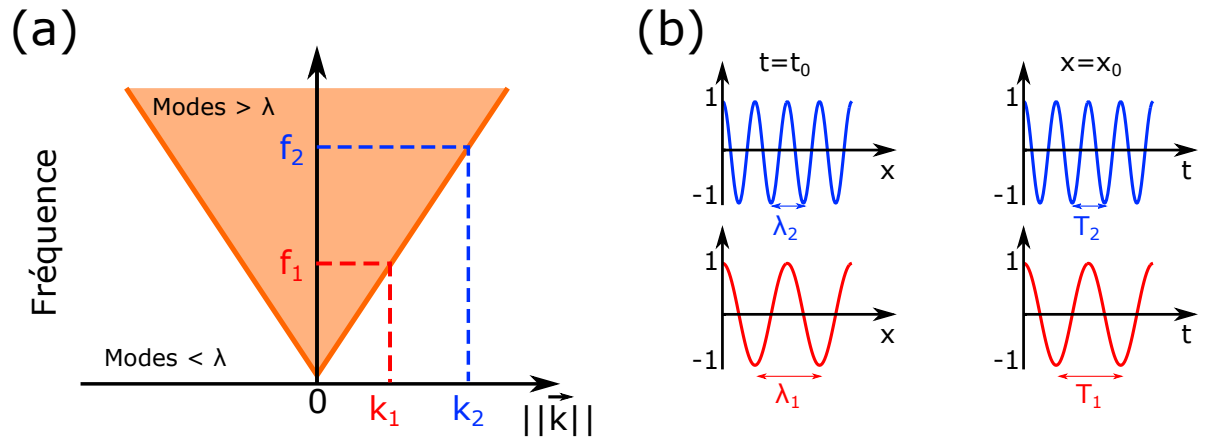


FIGURE I.1 – (a) Relation de dispersion du vide. (b) Variations spatiale et temporelle d'une onde dans le vide à la fréquence f_1 (rouge) et f_2 (bleu).

Lorsque l'on se place en régime polychromatique, il devient pertinent d'introduire une deuxième vitesse appelée vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \left\| \vec{k} \right\|}, \tag{I.5}$$

Elle est directement liée au gradient de la relation de dispersion. Cette dernière est la vitesse de propagation d'un paquet d'onde. Dans l'espace libre, ces deux vitesses sont égales à la constante universelle c. Le milieu est ainsi dit non-dispersif, toutes les ondes se propageant à la même vitesse.

I.1.2 Notion d'indice

Nous nous intéressons à présent à la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux matériels homogènes. Ils sont composés d'atomes qui possèdent un nuage électronique disposé autour de leur noyau comme le montre la figure I.2(a). Ici, nous considérons des matériaux dit diélectriques. Dans ces derniers, les électrons ne peuvent pas s'affranchir de la force qui les relie au noyau. Ils ne possèdent donc pas de charge libre, ce qui fait d'eux des isolants. C'est le cas du verre ou des céramiques par exemple. Cependant, cela ne les empêche pas d'interagir avec une onde incidente. Nous allons voir ici que cette interaction peut être décrite via un processus d'homogénéisation du milieu.

Prenons le cas d'un milieu diélectrique non magnétique composé d'un seul type d'atome. Ces derniers sont neutres électriquement, ce qui implique que le barycentre des charges

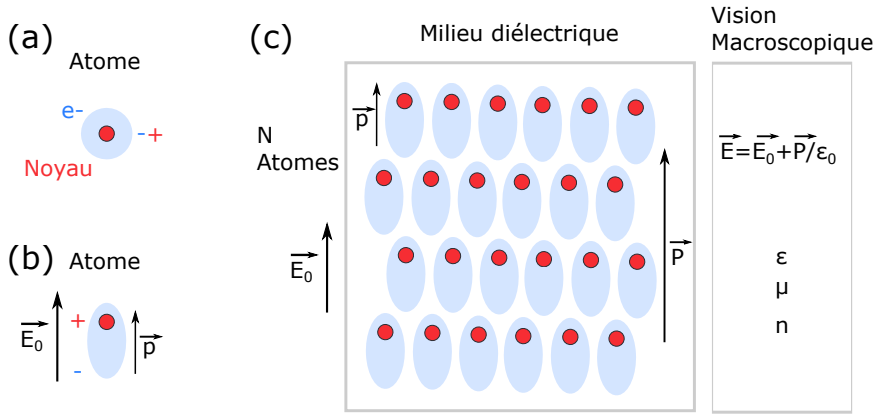


FIGURE I.2 – (a) Atome constitué d'un noyau et d'un nuage électronique. (b) L'ajout d'un champ électrique sur l'atome induit un moment dipolaire. (c) A l'échelle d'un milieu diélectrique, le champ électrique extérieur crée une polarisation globale et le milieu est décrit avec des paramètres effectifs macroscopiques.

positives et négatives est confondu. L'introduction d'un champ électrique extérieur $\vec{E_0}$ va déformer le nuage électronique dans l'espace (figure I.2(b)). Cela a pour conséquence d'éloigner les barycentres précédents et donc d'induire un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha\epsilon_0\vec{E_0}$ au niveau de l'atome. Nous avons introduit ici la polarisabilité α qui rend compte de la capacité du nuage électronique à se déformer sous l'effet du champ $\vec{E_0}$.

Ainsi la polarisation globale $\vec{P}$ d'un milieu composé de N atomes par unité de volume, est donnée par la somme de tous les dipôles induits :

$$\vec{P} = N\vec{p} = \chi\epsilon_0\vec{E_0}. \tag{I.6}$$

χ représente la susceptibilité électrique du milieu qui traduit la force d'interaction de ce dernier avec un champ électrique. Nous voyons ici que deux champs électriques coexistent dans le milieu, $\vec{P}/\epsilon_0$ et $\vec{E_0}$.

Il devient alors pertinent d'introduire le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ qui correspond à la superposition de ces deux champs :

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E_0} + \vec{P} \tag{I.7}$$
$$\vec{D} = (1+\chi)\epsilon_0\vec{E_0} \tag{I.8}$$
$$\vec{D} = \epsilon_r\epsilon_0\vec{E_0} \tag{I.9}$$

Ce vecteur $\vec{D}$ diffère du champ extérieur incident uniquement par une constante $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$, appelée permittivité du milieu (ϵ_r étant la permittivité relative). Il en découle

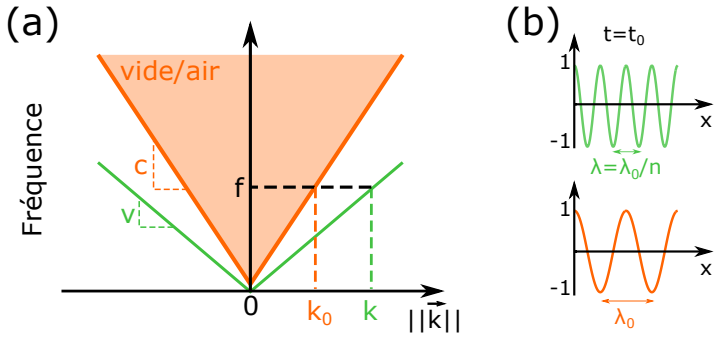


FIGURE I.3 – (a) Dispersion d'un diélectrique d'indice n comparée à celle du vide. (b) Comparaison de la variation spatiale d'une onde dans l'air et dans le diélectrique pour une fréquence f fixée.

directement que la propagation des ondes dans un milieu diélectrique est similaire à celle du vide à la condition de remplacer ϵ_0 par ϵ dans l'équation (I.1). Ainsi la célérité des ondes dans ce milieu s'écrit simplement $v = \sqrt{1/\epsilon\mu_0}$. Dans la majorité des cas, l'interaction de l'onde avec les atomes se traduit par un ralentissement qui est caractérisé par l'indice de réfraction n. Il est le rapport des deux vitesses précédentes :

$$n = \frac{c}{v}. \tag{I.10}$$

La relation de dispersion devient $\left\|\vec{k}\right\| = \omega/v$. Cette interaction est ainsi responsable du changement de pente de la relation de dispersion (figure I.3). Pour un indice inférieur à 1, cela signifie qu'à une pulsation donnée, la longueur d'onde caractéristique de l'onde est plus petite d'un facteur $1/n$ dans le milieu diélectrique que dans le vide. D'un point de vue pratique, le milieu de référence auquel on se réfère dans cette thèse pour les ondes électromagnétique est l'air. Ce dernier est considéré comme ayant un indice de 1, sa relation de dispersion est donc équivalente à celle du vide.

I.1.3 Phénomènes aux interfaces

Pour l'instant nous avons caractérisé la propagation des ondes dans des milieux infinis, or il est évident que tout système réel est d'extension finie. Ainsi, lorsqu'une onde arrive depuis un milieu 1 d'indice n_1 sur un milieu 2 d'indice n_2, cela donne naissance à de nouvelles ondes. C'est le cas d'un miroir par exemple. L'onde incidente de vecteur d'onde $\vec{k_i}$ génère une onde réfléchie dans le milieu 1 et une onde transmise dans le milieu 2. Le vecteur d'onde incident peut s'écrire comme étant la somme de ses projections transverse

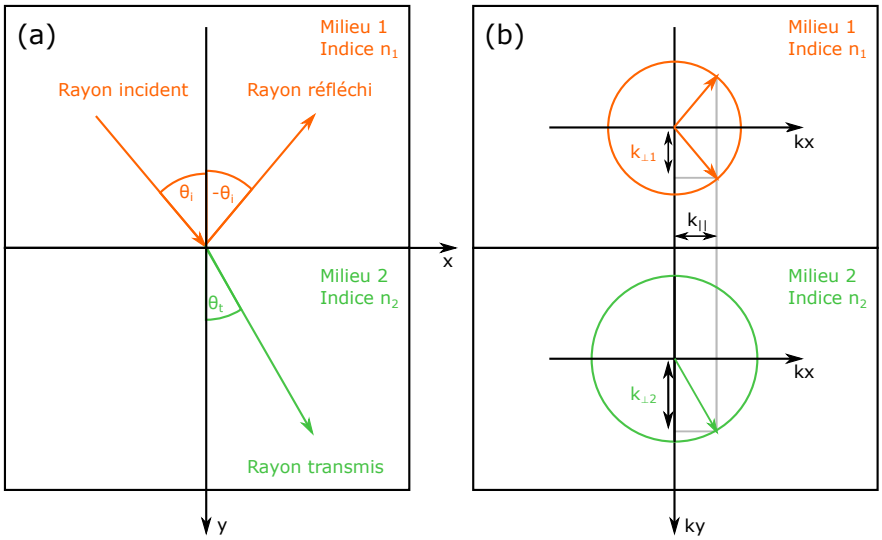


FIGURE I.4 – (a) Représentation de la réfraction à l'interface entre deux milieux d'indice n_1 et n_2 dans l'espace réel selon les lois de Snell-Descartes. (b) Équivalent de (a) dans l'espace réciproque en utilisant la représentation avec les contours isofréquences. La variation d'indice entre les deux milieux affecte uniquement la composante transverse $k_\perp$ du vecteur d'onde incident.

$\vec{k_\perp}$ et parallèle $\vec{k_\parallel}$ à l'interface. Si $\vec{k_\perp}$ est affectée par la discontinuité d'indice, la composante parallèle à l'interface $\vec{k_\parallel}$ est quant à elle conservée. En effet, l'interface est invariante par translation selon la direction $\vec{k_\parallel}$. Cela se résume par la formule de Snell-Descartes reliant les angles des ondes incidentes et transmises au niveau de l'interface :

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \tag{I.11}$$

où θ_i est l'angle d'incidence et θ_t l'ange de réfraction. Cette situation est représentée sur la figure I.4(a).

Du point de vue de l'espace réciproque, ces phénomènes d'interface s'expliquent clairement avec les contours isofréquences. Ces derniers correspondent à une coupe horizontale de la relation de dispersion et représentent ainsi tous les vecteurs d'ondes accessibles dans un milieu donné à une fréquence fixée. Pour les cas isotropes présentés pour l'instant, un contour particulier en deux dimensions à une fréquence est un cercle dont le rayon dépend de l'indice du milieu. Appliquer la conservation de $\vec{k_\perp}$ à l'interface permet ainsi de rendre compte précisément de la réfraction de l'onde incidente comme le montre la figure I.4(b). Nous notons que si ces contours isofréquences sont ici de simples cercles, ils peuvent prendre des formes beaucoup plus complexes, notamment avec l'anisotropie du

milieu. Au cours de cette thèse nous allons ainsi explorer plusieurs façons de complexifier ces contours et étudier leurs impact sur la propagation des ondes.

I.1.4 Les ondes acoustiques dans l'air

Les ondes acoustiques, bien que différentes par nature des ondes électromagnétiques, obéissent cependant à la même équation d'onde (I.1). Il est souvent possible, lorsqu'on traite de problèmes purement ondulatoires, de passer d'un domaine à l'autre bien qu'il existe plusieurs distinctions à ne pas oublier. Tout d'abord, le son, consistant en des déplacements de tranches de fluide, a nécessairement besoin d'un milieu matériel pour se propager [3]. Ensuite, à la place des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les variables couplées à prendre en compte sont le champ de pression P et la vitesse de déplacement des particules $\vec{v}$. Ainsi P est scalaire alors que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des grandeurs vectorielles. Quant aux paramètres d'un milieu utilisés pour caractériser la propagation sonore ce sont à présent la densité ρ et la compressibilité χ du fluide. La célérité de l'onde dans le fluide devient $v = \sqrt{1/\chi\rho}$. Au cours de cette thèse, plusieurs aller-retours sont effectués entre ces deux domaines, ce qui témoigne de la richesse et de la grande versatilité de la physique des ondes en général. Le milieu de référence utilisé pour les ondes acoustiques est donc aussi l'air, et sa relation de dispersion est similaire à celle des ondes électromagnétiques. La différence majeure est évidemment la pente du cône de son qui est beaucoup plus faible que celle du cône de lumière, les ondes acoustiques étant par nature beaucoup plus lentes ($c_{son} = 343\ m.s^{-1}$) que les ondes électromagnétiques dans l'air ($c_{emg} = 3.10^8\ m.s^{-1}$).

I.2 Propagation dans les milieux dispersifs

I.2.1 Milieux dispersifs naturels

Nous avons vu qu'il était possible de décrire la propagation des ondes électromagnétiques dans un diélectrique en utilisant un paramètre effectif macroscopique tel que la permittivité ϵ ou encore l'indice de réfraction n. Pour l'instant, nous nous sommes placés dans le cas de milieux non dispersifs, c'est à dire pour lesquels ces paramètres ne dépendent pas de la fréquence. Cependant, lorsque l'on se place en régime dynamique, les charges mises en mouvement par les champs électromagnétiques présentent une inertie qui est responsable d'un retard entre la réponse du milieu et l'excitation extérieure. Ainsi, à part le vide, tous les milieux naturels sont dispersifs. Cela se traduit par des constantes macroscopiques avec une dépendance fréquentielle. Ce phénomène de dispersion permet

ainsi d'expliquer la séparation des différentes couleurs de la lumière blanche par un prisme de verre par exemple, ou encore l'existence d'arcs-en-ciel.

Plusieurs modèles existent afin de décrire différents phénomènes dispersifs naturels. Nous en présentons ici quelques exemples.

Eau : Modèle de Debye

L'eau est composée de molécules polaires, H_20, qui présentent un moment dipolaire permanent intrinsèque. L'introduction d'un champ électrique extérieur $\vec{E_0}$ dans l'eau force ainsi l'alignement de ces dipôles, ce qui induit une polarisation globale du milieu. Couper brutalement ce champ extérieur provoque des collisions inter-molécules, ce qui détruit progressivement l'alignement des dipôles. Debye a introduit l'équation différentielle du premier ordre suivante pour modéliser ce phénomène de relaxation [4] :

$$\tau \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{P} = \chi_0^{eau} \epsilon_0 \vec{E_0} \tag{I.12}$$

χ_0^{eau} est ici la susceptibilité statique de l'eau et τ représente le temps de relaxation de la polarisation : $\vec{P}(t) = \vec{P_0} \exp(-t/\tau)$. Pour l'eau pure $\tau \simeq 10^{-11} s$.

Nous nous plaçons à présent dans le cas monochromatique où le champ incident oscille à la pulsation ω. La polarisation $\vec{P}(\omega)$ s'écrit alors :

$$\vec{P} = \frac{\chi_0^{eau} \epsilon_0 \vec{E}}{1 - i\omega\tau} = \chi^{eau}(\omega) \epsilon_0 \vec{E} \tag{I.13}$$

Cela fait apparaître la susceptibilité dynamique du milieu χ^{eau}, proportionnelle à χ_0^{eau}, qui dépend à présent de la pulsation ω de l'excitation. L'indice de réfraction prend la forme :

$$n^2(\omega) = \epsilon_r^{Debye}(\omega) = (1 + \chi^{eau}(\omega)) = 1 + \frac{\chi_0^{eau}}{1 - i\omega\tau} \tag{I.14}$$

L'indice du milieu dépend à présent de la fréquence de l'onde incidente, comme le montre la figure I.5. Si la pulsation est très petite par rapport à $1/\tau$, l'orientation des dipôles suit sans retard celle du champ et l'indice est celui du régime statique n_0. Dans le cas inverse où la pulsation est très grande par rapport à l'inverse du temps de relaxation, les dipôles ne peuvent pas suivre les oscillations du champ incident et l'indice tend vers celui de l'air. Quant au cas où la pulsation est de l'ordre de $1/\tau$, on observe une variation brutale de la partie réelle de l'indice n, qui correspond à un maximum de sa partie imaginaire. Ce comportement se traduit par un pic d'absorption très large dans le spectre de l'eau, pour des longueurs d'onde de l'ordre du centimètre, ce qui explique d'ailleurs le

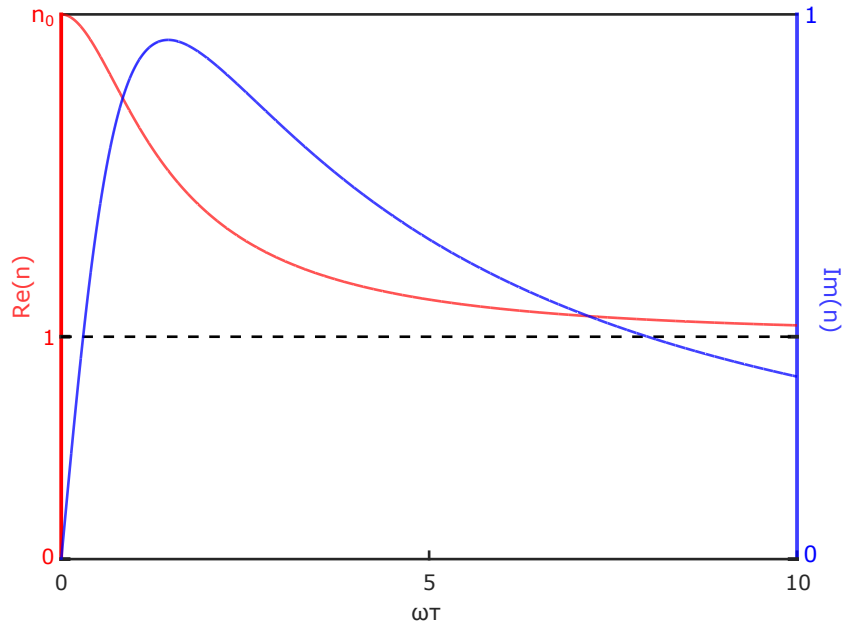


FIGURE I.5 – Partie réelle et partie imaginaire de l'indice calculé via le modèle de Debye pour l'eau en fonction de la pulsation normalisée par le temps de relaxation τ.

fonctionnement d'un four à micro-ondes.

Milieux diélectriques résonants : modèle de l'électron élastiquement lié

Nous revenons à présent aux milieux diélectriques et nous complexifions le modèle vu au paragraphe précédent afin de décrire ces milieux dans le cas où la polarisabilité α des atomes dépend de la fréquence. Dans les diélectriques, ce caractère dispersif provient de la nature résonante des constituants du milieu. Le modèle le plus simple de système résonant est celui de l'électron élastiquement lié. Il revient à dire que chaque électron, de masse m et de charge $-e$ est relié au noyau par une force de rappel électrique paramétrée par le coefficient k lui conférant un comportement d'oscillateur. Un coefficient de dissipation γ permet de modéliser l'atténuation de l'oscillation au cours du temps. Lorsque le milieu est soumis à un champ incident $\vec{E_0} = E_0(t)\vec{e_x}$, ce dernier induit une force de Lorentz sur la charge. Le mouvement de l'électron est ainsi décrit par l'équation suivante :

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - m\gamma\frac{\partial x}{\partial t} + k^2 x = -eE_0(t) \tag{I.15}$$

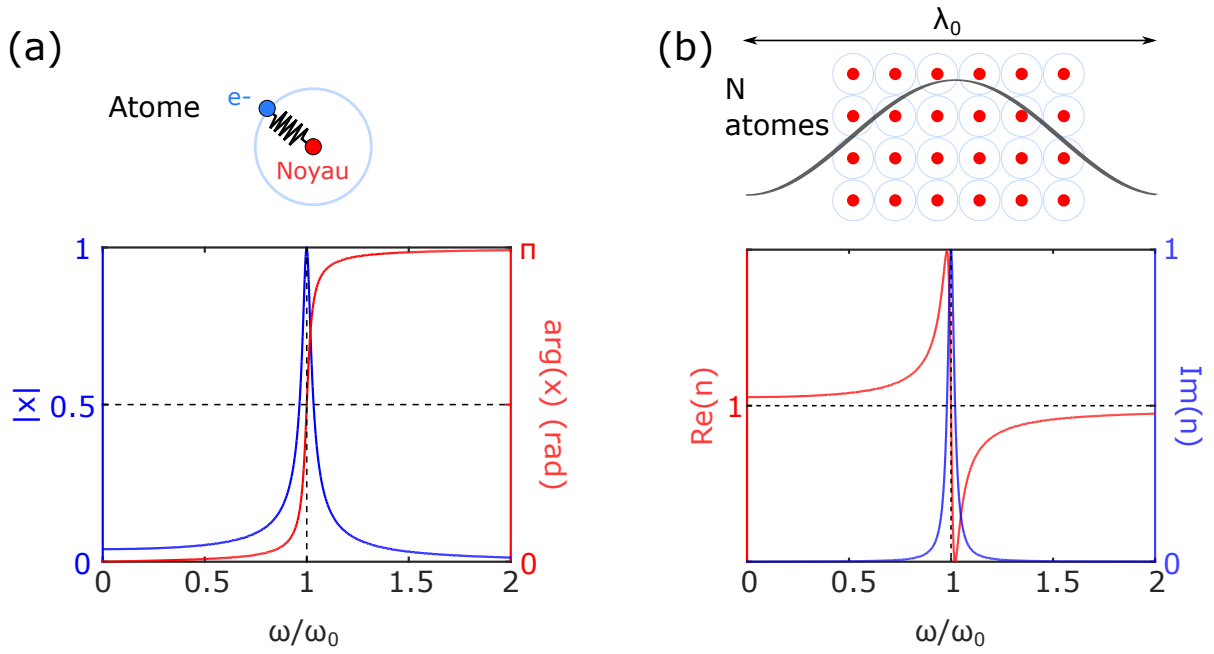


FIGURE I.6 – (a) Amplitude (bleu) et phase (rouge) du déplacement électronique x en fonction de la pulsation d'un atome décrit par le modèle de l'électron élastiquement lié. (b) Partie réelle et imaginaire de l'indice correspondant à une collection de N atomes ayant le comportement représenté en (a).

où x est la position de l'électron dans la direction de la Force de Lorentz imposée par $\vec{E}$. La solution de cette équation en régime monochromatique est la suivante :

$$x(\omega) = \frac{-eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \tag{I.16}$$

C'est l'expression d'un oscillateur en régime forcé, dont le comportement est représenté sur la figure I.6(a). On y a introduit la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. L'amplitude est proportionnelle à celle de l'excitation et augmente fortement à la pulsation de résonance ω_0. Cela témoigne du caractère fortement dispersif du milieu résonant. Par ailleurs, un phénomène résonant est aussi caractérisé par une réponse de phase qui traduit le retard de l'oscillateur par rapport à l'excitation. Ainsi, aux fréquences inférieures à la résonance, le résonateur est en phase avec l'onde incidente et il est donc capable de suivre l'excitation. En revanche pour les fréquences supérieures à cette dernière, il ne peut plus suivre les oscillations du champ excitateur et se retrouve en opposition de phase avec ce dernier.

L'oscillation spatiale de la particule chargée fait qu'elle se comporte comme un dipôle qui rayonne un champ qui s'ajoute au champ incident. Il est proportionnel à la polarisa-

bilité de l'atome et possède donc les caractéristiques résonantes de $x(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \tag{I.17}$$

A partir de cette polarisabilité, il est possible de déduire la permittivité effective relative totale, et donc l'indice, du milieu résonant de densité volumique N :

$$n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \tag{I.18}$$

Cette grandeur dispersive, représentée sur la figure I.6(b), est là encore calculée via un processus d'homogénéisation. Il fait l'hypothèse que tous les atomes séparés d'une distance beaucoup plus petite que la longueur d'onde du champ incident ressentent le même champ. Chaque oscillateur répond donc localement avec la même amplitude et la même phase, la réponse globale du milieu consiste alors uniquement en N fois la réponse d'un atome. Cette hypothèse est valide dans le cas des milieux diélectriques car ces derniers sont très denses. La distance inter-atomique est donc extrêmement faible devant les longueurs d'onde en jeu.

Les métaux : modèle de Drude

Un autre exemple de matériau extrêmement dispersif est celui des métaux. Ces derniers étant conducteurs, interagissent avec les ondes électromagnétiques différemment : un plasma d'électrons libres appelé plasmon est créé. La permittivité électrique de ces milieux est donnée par le modèle de Drude [5]. Les électrons étant libres, on supprime la force de rappel dans le modèle précédent. On traite ainsi classiquement la dynamique d'un électron à la position $\vec{r}$ soumis à un champ électrique oscillant à la pulsation ω. Il donne la permittivité diélectrique relative suivante :

$$\epsilon_r^{Drude}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \tag{I.19}$$

Dans cette équation $\omega_p = \sqrt{Ne^2/m\epsilon_0}$ est la pulsation plasma qui correspond à l'oscillation des électrons, et γ le facteur d'atténuation dû aux collisions de ces derniers avec des impuretés par exemple. Ainsi pour les fréquences inférieures à la pulsation plasma, les métaux présentent une permittivité négative (figure I.7). Cela témoigne concrètement du fait que les électrons produisent un champ électrique qui s'oppose au champ d'excitation. Par conséquent, pour cette large gamme de fréquence les ondes électromagnétiques ne

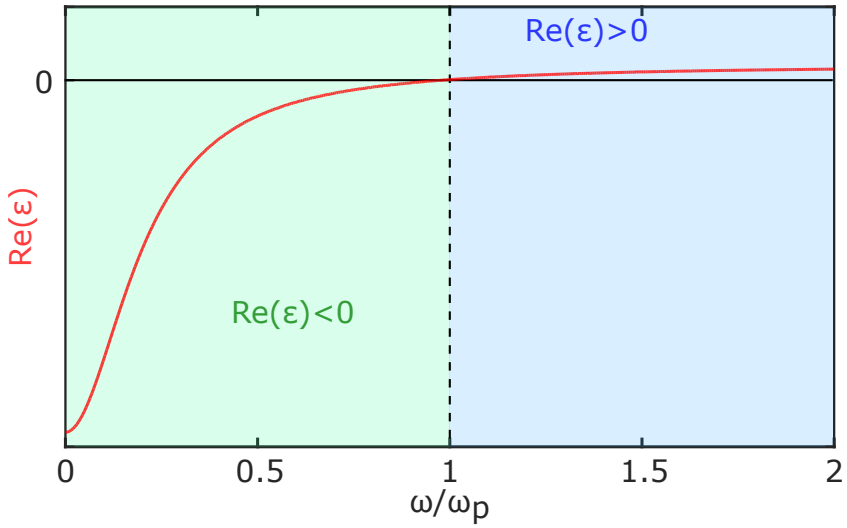


FIGURE I.7 – Partie réelle de la permittivité d'un métal calculée avec le modèle de Drude en fonction de la pulsation normalisée par la pulsation plasma ω_p. En dessous de cette dernière, la permittivité est négative, les métaux sont réfléchissants.

pénètrent pas dans les milieux métalliques et sont complètement réfléchies.

Nous avons décrit ici des matériaux dont la nature dispersive provient directement de la nature de leurs constituants élémentaires, qu'ils soient des atomes ou des molécules. Elle est notamment due à des phénomènes résonants autour desquels l'interaction avec l'onde est grandement modifiée.

Les inhomogénéités spatiales à l'échelle inter-atomique (ou inter-molécule) ne sont ici pas prises en compte dans la réponse ondulatoire de ces milieux, même après obtention des paramètres effectifs, la longueur d'onde étant largement plus grande. Dans ce cas, chaque constituant voit donc le même champ incident et la réponse globale du système est équivalente au cas d'un milieu homogène décrit par des paramètres effectifs macroscopiques, ces derniers étant une moyenne globale de la réponse locale.

I.2.2 La diffraction des rayons X

Pour l'instant nous nous sommes intéressés à l'interaction d'une onde extérieure avec des matériaux dont l'arrangement des atomes est à une échelle très inférieure à la longueur d'onde. Dans ce paragraphe, nous décrivons le cas où la longueur d'onde et les dimensions inter-atomiques sont comparables. Les inhomogénéités spatiales intrinsèques au matériau ne sont plus négligeables et des phénomènes de diffraction apparaissent.

Historiquement, la mise en évidence de ces effets a été rendue possible par la découverte

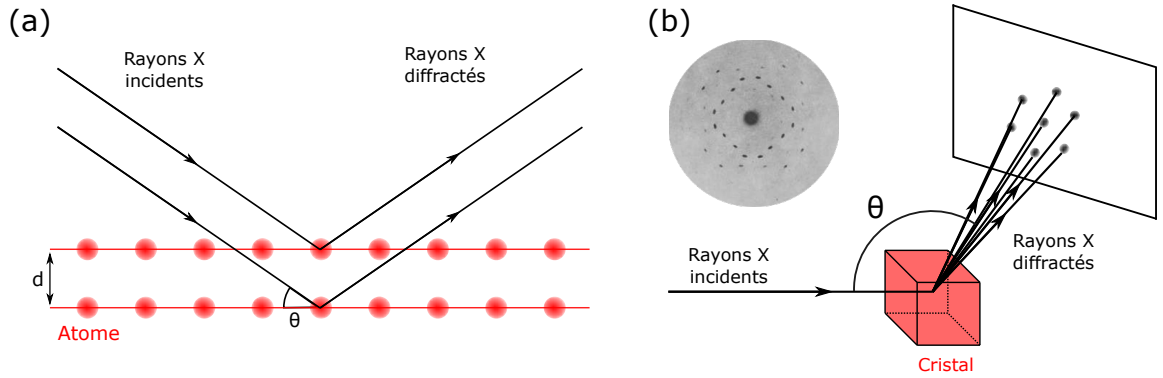


FIGURE I.8 – (a) Diffraction des rayons X par les plans atomiques parallèles (plans de Bragg, en rouge) séparés par une distance d comparable à la longueur d'onde du champ incident. (b) Protocole de radiocristallographie par rayons X. En insert, le cliché de la diffraction de ces rayons par un cristal de Blende (ZnS).

des rayons X en 1895 par le physicien allemand Wilhelm Röntgen [6] (prix Nobel 1901). Ces derniers ont une longueur d'onde qui s'étend de 5 pm à 10 nm, alors que les distances inter-atomiques sont de l'ordre de 100 pm. C'est ensuite Max von Laüe qui a observé pour la première fois leur diffraction par un cristal [7] (prix Nobel 1914). Par la suite, les Bragg, père et fils (prix Nobel 1915), ont proposé une loi, qui porte leur nom, afin de rendre compte de ce phénomène [8] :

$$2d\sin(\theta) = m\lambda \tag{I.20}$$

d représentant la distance entre deux plans atomiques parallèles, θ l'angle du faisceau incident par rapport à ces plans et m étant l'ordre de diffraction, comme cela est décrit sur la figure I.8(a). Ainsi, lorsqu'un faisceau monochromatique de rayons X arrive sur le cristal, il est réfléchi par les différentes interfaces que forment ces plans d'atomes. Ceci résulte en un mélange d'ondes qui sont susceptibles d'interférer entre elles. Lorsqu'elles sont en phase ces interférences sont constructives l'onde résultante se propage dans les directions correspondantes. Si elles sont en opposition de phase, ces interférences sont alors destructives et le champ n'est pas transmis. Ce phénomène de diffraction fournit donc une signature de l'arrangement des plans cristallins du milieu. En connaissant la longueur d'onde incidente, il est possible de déterminer la distance d entre les familles de plans atomiques en scannant l'angle θ et donc remonter à la structure nanométrique du matériau. Ce protocole, qui est à la base de la radiocristallographie, permet d'obtenir des clichés semblables à celui de la Blende (ZnS) obtenu initialement par Laüe et ses collègues (figure I.8(b)).

La diffraction des rayons X met ainsi en évidence le rôle primordial de la structure des matériaux dans la propagation des ondes lorsque celle-ci est de l'ordre de la longueur d'onde du champ incident, voire plus grande.

I.2.3 Les matériaux composites

Les précédents paragraphes démontrent ainsi que la propagation des ondes dans les milieux naturels peut être très diverse. Les propriétés ondulatoires des matériaux sont ainsi très dépendantes de la fréquence de l'onde qui s'y propage. Ainsi, dans le cas où la longueur d'onde est très grande devant la structure intrinsèque du système, c'est la composition de ce dernier qui va principalement dicter la dispersion du matériau. C'est le cas de la dispersion de la lumière blanche par un prisme de verre par exemple.

Dans le cas où la longueur d'onde est de l'ordre des dimensions inter-atomiques, des phénomènes de diffraction apparaissent et il faut prendre en compte la structure du milieu pour y décrire correctement la propagation des ondes. Par ailleurs, ces effets structurels se retrouvent à d'autres longueurs d'onde dans la nature [9]. En effet, si les Paons ont des plumes dont les couleurs sont spectaculaires c'est à cause de leur nano-architecture périodique complexe [10]. Cela a pour effet de moduler localement l'indice de réfraction du milieu et ainsi d'augmenter fortement la réflectivité pour certaines longueur d'ondes, à l'image des cristaux pour les rayons X. Ces phénomènes interférentiels sont aussi responsables des couleurs éclatantes des ailes de certains papillons [11], ou de l'irisation que l'on discerne sur les coquillages nacrés.

Ayant compris ces phénomènes naturels, la prochaine étape est de les généraliser à d'autres longueurs d'onde en les transposant à une échelle macroscopique. C'est le domaine des matériaux composites. Ces derniers sont des milieux artificiels conçus en mélangeant plusieurs milieux différents afin de manipuler les ondes à loisir. Ils permettent ainsi d'obtenir des comportements ondulatoires avec une gamme de propriétés qui est beaucoup plus large que les matériaux que l'on trouve dans la nature.

Par conséquent, deux chemins s'ouvrent à nous afin de concevoir ces milieux artificiels. Le premier consiste à les structurer à l'échelle de la longueur d'onde de travail. C'est le domaine des cristaux dits photoniques en électromagnétisme et phononiques en acoustique. Ils sont les analogues macroscopiques des cristaux naturels et trouvent leurs origines dans les travaux pionniers de Yablonovitch [12] et John [13].

La seconde option revient à suivre le modèle des milieux diélectriques en regroupant un grand nombre d'inclusions résonantes au sein d'un système dont la dimension, globale cette fois-ci, est celle de la longueur d'onde. C'est le domaine des métamatériaux qui fut

initié dans la fin des années 90 par les travaux fondateurs de sir John Pendry [14].

Dans les sections suivantes, nous allons présenter ces deux différentes approches et comment elles permettent d'obtenir des phénomènes ondulatoires contrôlables qui peuvent aller au delà de ce que la nature peut offrir.

I.3 Matériaux composites structurés à l'échelle de la longueur d'onde

Dans cette partie nous nous intéressons aux effets qu'induit la structuration d'un matériau composite à une échelle de l'ordre de la longueur d'onde incidente. Cette structuration correspond généralement à des arrangements périodiques de milieux diélectriques d'indice différents. Nous montrons ainsi plusieurs exemples dans lesquels la structure permet de manipuler la propagation des ondes, et ce à plusieurs dimensions.

I.3.1 Cas unidimensionnel

Nous commençons cette étude par le cas le plus simple : la périodisation d'un milieu selon une unique direction, l'axe Ox en l'occurence. Nous nous intéressons ici à un empilement de couches de même épaisseur $a/2$ alternant entre deux diélectriques d'indices respectifs n_1 et n_2.

Théorème de Floquet-Bloch

Ce milieu n'est plus invariant par translation selon la direction Ox, mais ne conserve qu'une invariance discrète de pas a. Le champ $\vec{E}$ monochromatique qui existe dans le réseau possède nécessairement la même symétrie que ce dernier vérifie ainsi le théorème de Floquet-Bloch [15] :

$$\vec{E}(x,\omega) = \vec{E_0}(\omega)e^{ikx}u_k(x,\omega) \text{ avec } u_k(x+ma,\omega) = u_k(x,\omega) \tag{I.21}$$

Cela signifie que la solution s'écrit comme étant simplement la solution en espace libre (l'onde plane $\vec{E_0}(\omega)e^{ikx}$) modulée par une enveloppe spatiale $u_k(x,\omega)$ qui possède la périodicité a du réseau.

Comme on a l'habitude de travailler en espace libre avec des ondes planes, il peut être pratique de décomposer cette solution sur la base des ondes planes. Pour cela il suffit d'effectuer une transformée de Fourier spatiale ce qui nous donne la série de Fourier suivante :

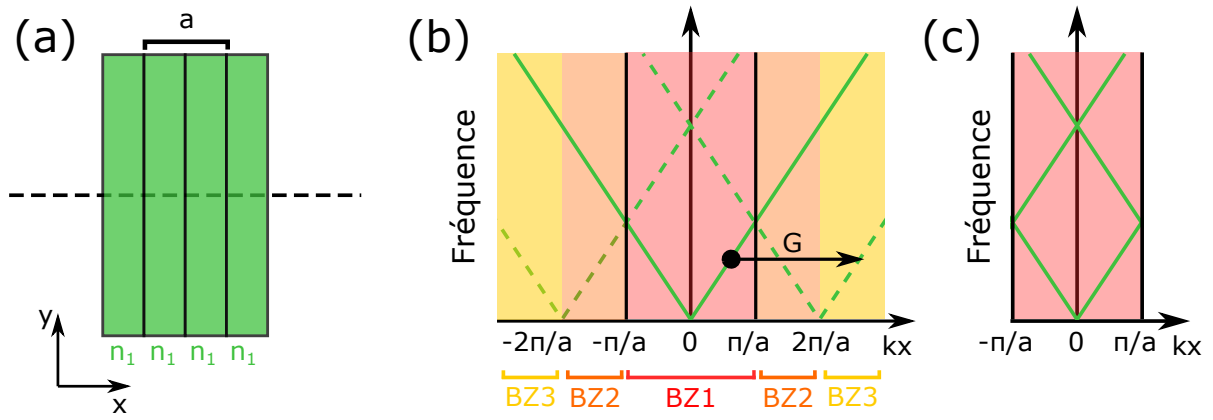


FIGURE I.9 – (a) Périodisation artificielle de pas a selon l'axe x d'un diélectrique d'indice $n1$. (b) Relation de dispersion correspondante dans l'espace réciproque. Celle-ci présente aussi une période selon k_x, ce qui génère des effets de repliement spectral. (c) Première zone de Brillouin qui encapsule l'ensemble des propriétés de (b).

$$\vec{E}(k,\omega) = \vec{E_0} \sum_p u_{k,p} e^{i(k+p\frac{2\pi}{a})x} \tag{I.22}$$

Cela signifie qu'au sein du milieu périodique, il n'y plus une seule onde plane mais la superposition d'une infinité d'entre elles, qui correspondent aux vecteurs d'onde $k+pG$ où $G = 2\pi/a$. Cependant, il faut garder en mémoire que cette superposition d'ondes planes ne forme en réalité qu'une unique onde appelée onde de Bloch.

Au niveau de la relation de dispersion, cela revient à la répéter périodiquement selon k_x, avec un pas de $G = 2\pi/a$. Ceci rajoute plusieurs branches au diagramme. C'est le cas si l'on considère le cas mathématique de la périodisation d'un diélectrique d'indice n_1 avec un pas a comme représenté sur la figure I.9(a) et (b). En effet, là où dans l'espace libre chaque fréquence correspondait à un unique vecteur d'onde selon l'axe k_x, il existe à présent une infinité de solutions à chaque fréquence.

En effet, le fait de périodiser la relation de dispersion a induit le repliement de cette dernière. Il devient ensuite possible de simplifier cette relation de dispersion en se limitant à la zone $[-\pi/a, \pi/a]$, appelée première zone de Brillouin (figure I.9(c)). Cette dernière est la cellule unité de la relation de dispersion périodique et contient toute l'information concernant la propagation des ondes dans le milieu.

Il faut cependant garder à l'esprit que le nombre d'onde dominant n'appartient pas nécessairement à la première zone de Brillouin. Les branches de la relation de dispersion issues du repliement spectral lié à la périodicité du réseau correspondent à des harmo-

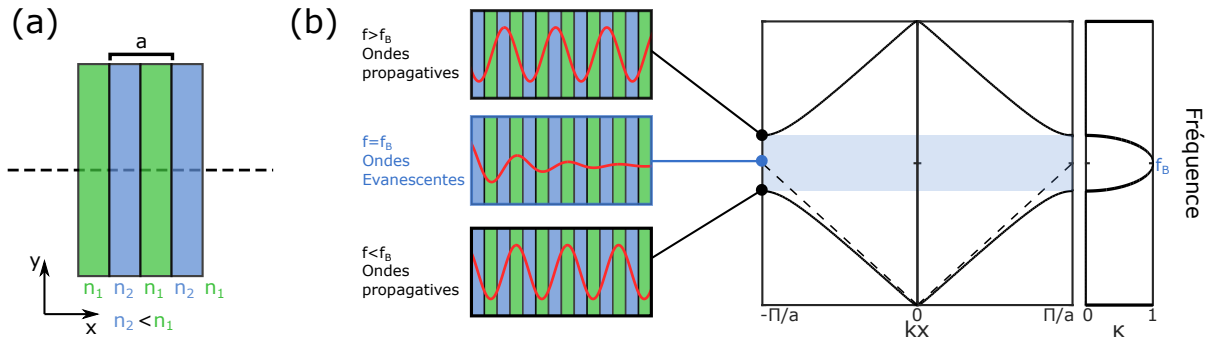


FIGURE I.10 – (a) Cas physique d'un empilement de diélectrique avec une période a selon l'axe x alternant les indices n_1 et n_2. (b) Relation de dispersion correspondante. On note l'ouverture de la bande interdite de Bragg (zone bleue) en bord de zone de Brillouin. Le coefficient d'atténuation κ est représenté à côté.

niques plus élevées dont les nombres d'ondes majoritaires sont hors de la première zone de Brillouin.

Cette étude mathématique nous a permis d'introduire la notion de repliement spectral que nous allons rencontrer de nombreuses fois au cours de cette thèse. Cependant, elle conduit pour l'instant à certains résultats non physiques, notamment au bord et au centre de la première zone de Brillouin. En effet, on y trouve des points de dégénérescence qui signifieraient qu'il existe deux solutions contre-propagatives à la même fréquence.

Propagation parallèle à l'axe de la périodicité : le miroir de Bragg

Nous revenons donc au cas physique de notre empilement de diélectriques dont l'indice alterne entre n_1 et n_2 ($< n_1$) selon la direction x (figure I.10(a)). Nous nous limitons ici à l'étude de la propagation parallèle à l'axe Ox. La relation de dispersion correspondante est présentée sur la figure I.10(b). On voit ici que le point de dégénérescence auparavant situé à $k_x = \pi/a$, a disparu laissant place à l'ouverture d'une gamme de fréquence pour laquelle il n'existe aucune solution : on parle de bande interdite.

L'apparition de cette dernière peut s'expliquer de deux façons différentes. La première consiste en un argument de symétrie. En effet, l'onde dont le vecteur d'onde k_x est égal à π/a présente une longueur d'onde de $2a$. Cela signifie que son intensité peut être centrée soit au centre de la couche d'indice n_1 soit au centre de celle d'indice n_2, comme le montre la figure I.11(a). Cela crée une répulsion de niveau entre les deux bandes : à basse fréquence (respectivement à haute fréquence) le champ se concentre sur le milieu d'indice le plus élevé (respectivement le plus faible). La deuxième explication, donnée par Rayleigh en 1917 [16], est de nature interférentielle. A chaque interface entre les milieux d'indice n_1 et n_2, une

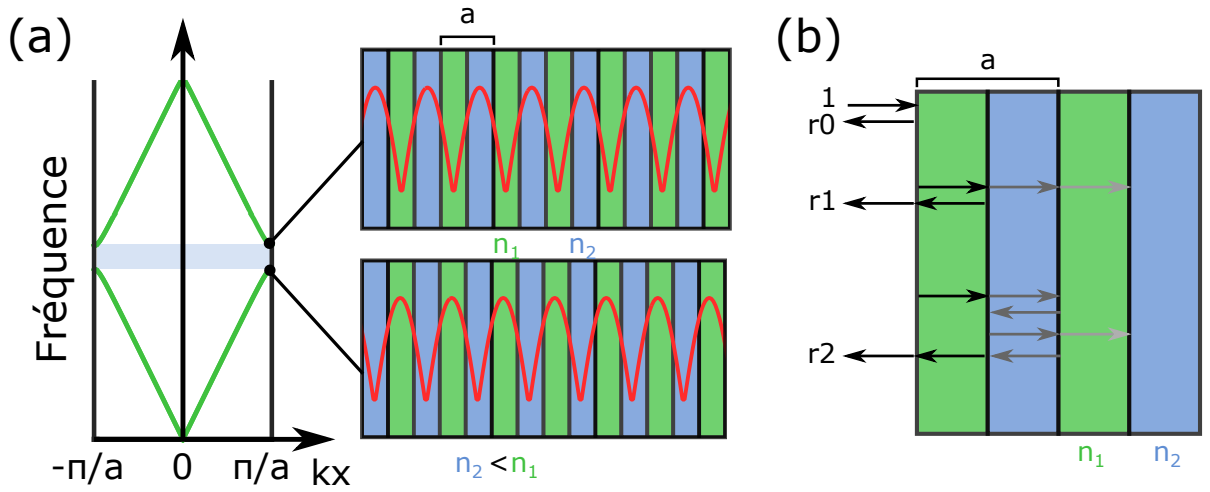


FIGURE I.11 – (a) Explication énergétique de l'ouverture de la bande interdite de Bragg. Au bord de la première zone de Brillouin, l'intensité du champ (ligne rouge) est maximale sur les zones d'indice n_1 à basse fréquence et sur les zones d'indice $n_2 < n_1$ à haute fréquence. (b) Explication interférentielle de l'ouverture de la bande interdite. Pour la longueur d'onde correspondant au bord de zone de Brillouin, les ondes multiplement réfléchies interfèrent constructivement.

partie de l'onde est réfléchie et l'autre est transmise, comme le montre la figure I.11(b). L'onde globale réfléchie est la somme cohérente de toutes les ondes multiplement réfléchies, chacune étant déphasée en fonction du trajet parcouru dans le milieu. En particulier, le déphasage d'une onde transmise à travers deux couches adjacentes d'épaisseur $a/2$ est égal à $\phi = \frac{\omega}{c}(n_1+n_2)a/2$. Pour la fréquence à laquelle s'ouvre la bande interdite ce déphasage vaut π ce qui revient à dire que les ondes transmises directement ou après des aller-retours dans la bi-couche interfèrent destructivement. Cette condition, dite de Bragg, correspond à $\lambda_B = 2(n_1+n_2)a/2$.

Lorsque l'on a une bande interdite cela signifie qu'aucune solution propagative n'existe dans le milieu. En considérant une interface, on trouve alors des solutions évanescentes. Ces dernières sont décrites par un nombre d'onde de Bloch complexe dont la partie imaginaire κ est reliée à la force d'atténuation de cette bande interdite. On note $\beta = 1/\kappa$, la longueur d'atténuation caractéristique de cette onde évanescente. Plus la bande interdite est large en fréquence, c'est-à-dire plus le contraste d'indice entre le diélectrique et l'air est important, plus l'atténuation de l'onde est efficace [17]. Pour les fréquences de la bande interdite, le milieu multi-couches étudié possède une grande réflectivité, tout comme les métaux qui donnaient naissance à une onde évanescente. Ce phénomène est connu sous le nom de miroir de Bragg et a été étudié dès 1887 par Lord Rayleigh [18].

Propagation transverse à l'axe de la périodicité : diffraction

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressé à l'ouverture de la bande interdite dans le milieu multicouches. Nous allons à présent nous concentrer sur les bandes propagatives qui l'entourent. Pour cela nous considérons ce même milieu périodique selon x, mais sa dimension selon l'axe y est à présent finie. Nous étudions le cas de l'incidence normale d'une onde monochromatique de pulsation ω venant de l'air et allant dans le multicouches. La représentation de ce scénario est donnée sur la figure I.12, à la fois dans l'espace réel et dans l'espace réciproque. Ainsi, lorsque l'onde incidente pénètre dans le milieu, la périodicité de ce dernier génère une onde de Bloch, qui est la superposition d'ondes planes dont les vecteurs d'ondes sont séparés de $2\pi/a$. Cette dernière est responsable de la diffraction du faisceau incident en sortie du multicouche. Les angles correspondant aux différents ordres de diffraction sont directement donnés par le contour isofréquence dans l'espace réciproque, comme expliqué sur la figure I.12(b).

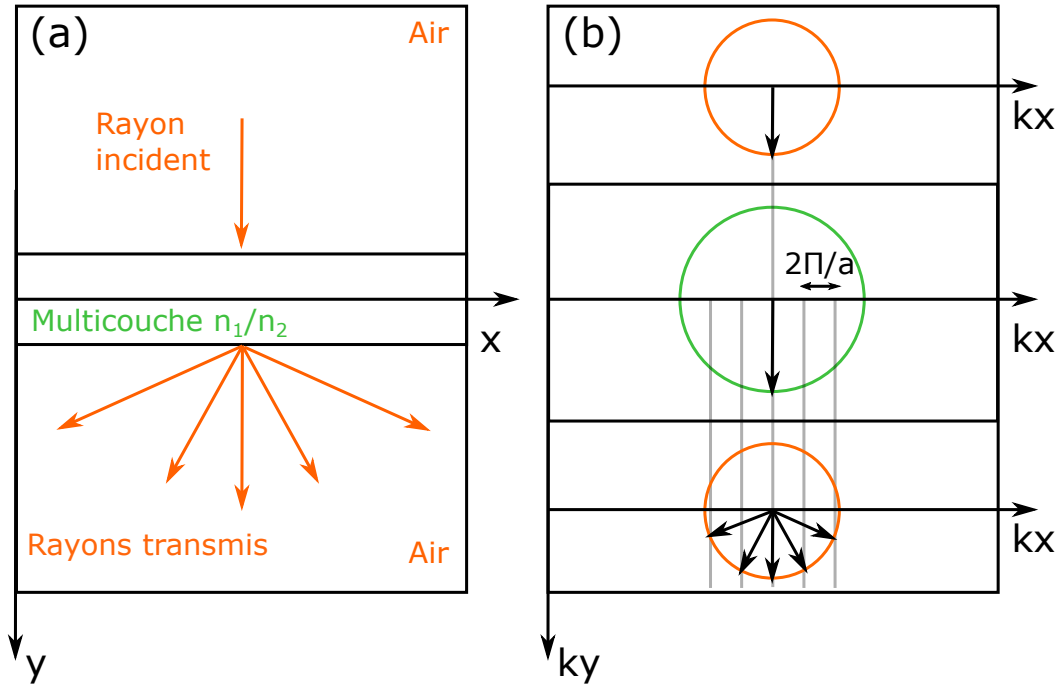


FIGURE I.12 – Diffraction d'une onde incidente par le multichouche dans l'espace réel (a) et réciproque (b).

I.3.2 Cristaux Photoniques 2D

Après avoir traité un cas structurel unidimensionnel simple dans le paragraphe précédent, nous allons à présent nous intéresser aux matériaux composites bidimensionnels structurés à l'échelle de la longueur d'onde : les cristaux photoniques 2D [17]. Ces derniers se classent généralement en deux catégories. Dans la première, le cristal est une matrice d'indice faible, tel que l'air, dans lequel sont disposés des inclusions d'indice élevé [19–21]. C'est le cas des réseaux de barreaux diélectriques par exemple (figure I.13(a)). La seconde est en fait le complémentaire de la précédente : des trous sont percés dans une matrice d'indice élevé [22, 23]. Un exemple commun est celui des plaques de silicium perforées périodiquement, comme représenté sur la figure I.13(b). Dans l'espace réciproque, la relation de dispersion se répète à présent périodiquement dans les deux directions k_x et k_y. Cela est à l'origine de l'ouverture de bandes interdites, qui bien que similaires au cas unidimensionnel, peuvent toutefois présenter des caractéristiques plus riches, reliées à l'anisotropie par exemple. Quant aux phénomènes de diffraction ils sont beaucoup plus complexes mais toujours précisément décrits par l'utilisation de contours isofréquences aux formes diverses sous-tendues par les symétries des cristaux.

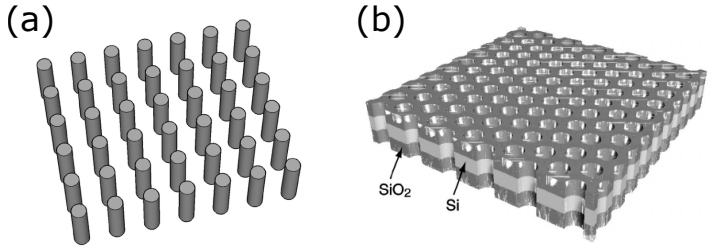


FIGURE I.13 – (a) Cristal photonique constitué de piliers de silicium dans l'air. (b) Cristal photonique constitué de trous dans une plaque de silicium.

Réseaux Cristallins

A deux dimensions, il existe uniquement cinq types de réseaux cristallins, dits de Bravais, permettant de paver l'espace réel [24]. Ils sont décrits par leur cellule unité dont la répétition périodique permet de retrouver l'ensemble de la structure cristalline. Elle comporte ainsi toutes les informations structurelles du milieu. Elle est décrite par deux vecteurs $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ formant un angle γ.

La transposition dans l'espace réciproque de ces réseaux périodiques se fait *via* la

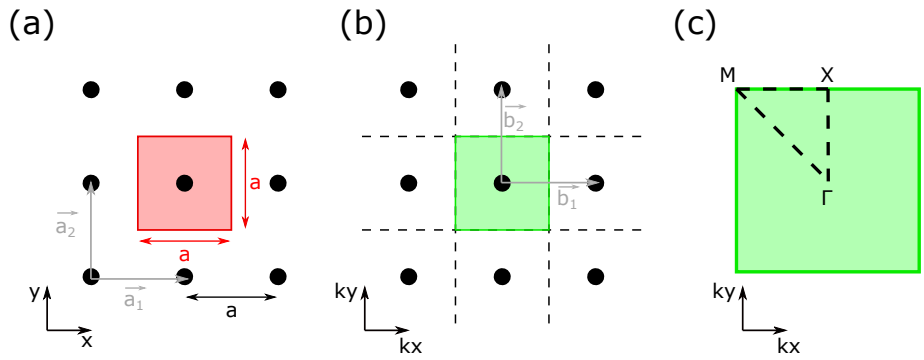


FIGURE I.14 – (a) Réseau carré dans l'espace réel (cellule unité en rouge). (b) Même réseau dans l'espace réciproque. La première zone de Brillouin (BZ1) est représentée en vert. (c) Zoom sur la BZ1.

transformation des vecteurs constitutifs de la maille telle que :

$$\vec{b_i}.\vec{b_j} = 2\pi\delta_{ij} \tag{I.23}$$

Les vecteurs $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$ étant les vecteurs de la maille dans l'espace réciproque. Leur norme est telle que : $\left\|\vec{b}_{1,2}\right\| = 2\pi/\left\|\vec{a}_{1,2}\right\|$ ce qui se compare directement au cas unidimensionel précédent. Les solutions étant aussi périodiques dans l'espace réciproque, il est utile de définir la maille élémentaire correspondante, la première zone de Brillouin. Elle est délimitée par les plans médiateurs des segments joignant le centre, dénommé Γ, et les points immédiatement voisins de l'espace réciproque. De façon similaire au cas unidimensionnel précédent, il est ainsi possible d'encapsuler toute la physique du réseau en considérant cette première zone de Brillouin, qui dans ce cas peut prendre diverses formes possédant les mêmes symétries que le réseau dans l'espace réel. Ces symétries spécifiques sont à l'origine de phénomènes de repliement spectral plus complexes permettant d'obtenir une palette de propriétés de réfraction et de réflexion très riche.

Au cours de cette thèse nous nous sommes principalement intéressés aux réseaux tétragonal et hexagonal. Nous les décrivons plus en détail dans les paragraphes suivants.

Réseau Tétragonal (Carré)

La maille du réseau tétragonal consiste en un carré de côté a, le pas du réseau (figure I.14(a)). Sa première zone de Brillouin construite à partir des plans médiateurs entre plus proche voisins du réseau comme le montre la figure I.14(b), est donc un carré de côté π/a. Cette dernière possède des points particuliers : Γ le centre de l'espace réciproque, M situé

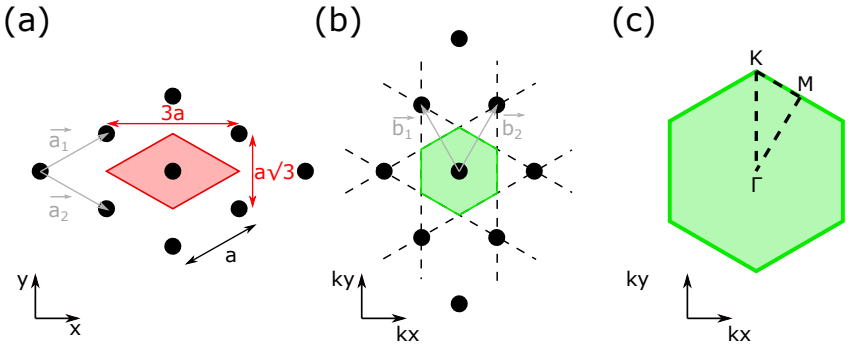


FIGURE I.15 – (a) Réseau triangulaire dans l'espace réel (cellule unité en rouge). (b) Même réseau dans l'espace réciproque. La première zone de Brillouin (BZ1) est représentée en vert. (c) Zoom sur la BZ1.

aux coins du carré et X situé à la moitié du côté du carré (figure I.14(c)).

Cette structuration particulière du matériau a permis d'obtenir des bandes interdites [20]. Il est aussi possible d'induire une réfraction négative avec cette maille [25].

Réseau Hexagonal (Triangulaire)

Le réseau triangulaire est légèrement plus complexe. Dans l'espace réel, sa maille est un losange de côté a où l'angle γ vaut 120 degrés (figure I.15(a)). Ainsi, dans l'espace réciproque, la première zone de Brillouin est un hexagone qui possède là encore trois types de points particuliers : Γ en son centre, K au milieu de ses côtés et K situés aux coins de ce dernier comme le montre les figures I.15(b) et (c).

De la même façon qu'avec un réseau de type carré, la présence de bande interdite a été démontrée dans ce genre de réseau [21] ainsi que la possibilité d'obtenir de la réfraction négative [26].

I.3.3 Cristaux Photoniques 3D

Dans le cadre des systèmes tri-dimensionnels le principe est le même que précédemment mais la modulation d'indice apparaît dans les trois dimensions de l'espace réel, comme le montre les exemples de la figure I.16. Cela décuple le nombre de structures différentes réalisables : il y a à présent 32 classes de symétries se répartissant en 14 réseaux de Bravais qui viennent eux même de l'extension de 7 formes primitives de mailles élémentaire. Ainsi de nombreuses structures 3D présentant une bande interdite complète ont été proposées. C'est le cas de la Yablonovite par exemple, qui est un diélectrique percé selon les trois

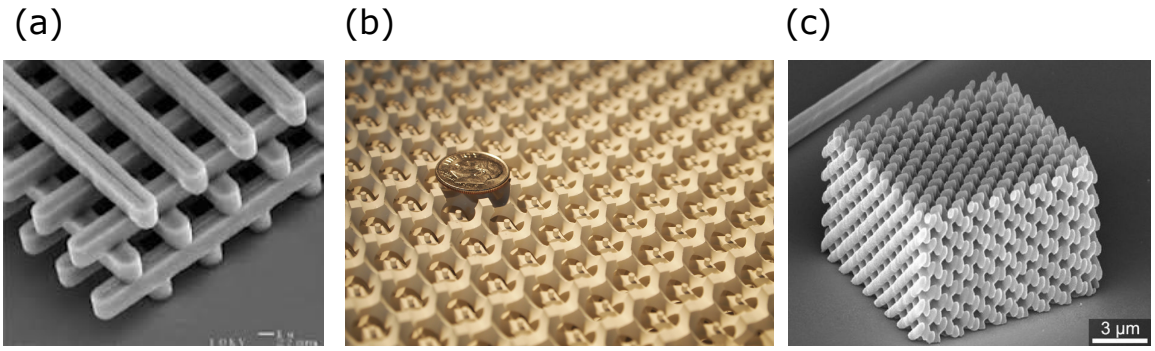


FIGURE I.16 – Différents exemples de cristaux photoniques 3D pour le domaine optique ((a), (c)) et micro-onde (b).

vecteurs de la maille cubique face centrée (CFC) [27, 28]. La possibilité d'obtenir une réfraction négative dans les trois dimensions a aussi été étudiée [29].

I.3.4 Cristaux Phononiques

Bien que les paragraphes précédents soient consacrés aux ondes électromagnétiques, il est évident que ces concepts de structuration des milieux à l'échelle de la longueur d'onde s'adaptent aux ondes acoustiques et élastiques. Le contraste d'indice est dans ce cas obtenu avec des matériaux de densité ou de rigidité différentes. Des structures périodiques bi et tri-dimensionnelles ont ainsi été réalisées afin d'obtenir des bandes interdites [30–33] mais aussi des phénomènes de réfraction négative [34].

I.3.5 Analogue de la physique du solide

Nous avons vu que la propagation des ondes au sein de ces cristaux photoniques, analogues macroscopiques des matériaux cristallins naturels, est précisément décrite avec des structures de bande. A partir de là, il est intéressant de la comparer avec celle des électrons en physique du solide. En effet, ces derniers peuvent être représentés par un champ lié à leur probabilité de présence dans un cristal (la fonction d'onde). Les énergies, ou similairement les fréquences, auxquelles les électrons peuvent se propager sont aussi fortement déterminées par leur environnement proche. Ce sont les solutions de l'équation de Schrödinger, analogue de l'équation d'onde pour ces particules. Ainsi lorsqu'un électron est placé dans un cristal, il est sensible à la répartition périodique des atomes, qui agissent comme des puits de potentiel. Sa propagation est décrite par un ensemble de bandes, représentant les gammes d'énergie où les états électroniques existent, séparées par des

bandes interdites au sein desquelles ces derniers ne sont pas autorisés.

Ce diagramme de bande est ainsi à l'origine des propriétés macroscopiques de la matière. En effet, selon la taille de la bande interdite et de la densité électronique, un matériau sera considéré comme conducteur, semi-conducteur ou isolant. Contrôler la densité des électrons au sein du matériau, représentée indirectement par le niveau de Fermi, permet ainsi de naviguer au sein de la structure de bande électronique et de contrôler les propriétés de conductivité du système. Dans le cas des cristaux photoniques (resp. phononiques), la propagation de l'onde électromagnétique (resp. acoustique) dans le milieu dépend directement de sa fréquence.

Contrôler la propagation des ondes grâce à un arrangement périodique à l'échelle de la longueur d'onde signifie donc adopter un point de vue issu de la physique du solide. A terme, ces cristaux artificiels ont d'ailleurs pour but de remplacer les électrons par les photons afin de véhiculer de l'information [17]. Le domaine de l'électronique laissant place à celui de la photonique, que l'on présume beaucoup plus rapide.

I.4 Matériaux composites résonants organisés sur une l'échelle sub-longueur d'onde

L'autre grande famille des matériaux composites n'est plus basée sur la structuration du milieu mais sur sa composition. Ces systèmes sont les analogues macroscopiques des diélectriques et sont dénommés métamatériaux. Ils sont ainsi constitués d'atomes artificiels (méta-atomes) dont les propriétés intrinsèques sont à l'origine de la réponse macroscopique du milieu à une excitation extérieure. Lorsque ces inclusions sont de nature résonante on parle alors de métamatériaux localement résonants. C'est à ce type de systèmes que l'on s'est intéressé au cours de cette thèse.

Dans ce cas de figure, les méta-atomes sont des résonateurs dont la longueur d'onde de résonance est beaucoup plus grande que leur dimension physique. Ils sont organisés sur une échelle elle-aussi très sub-longueur d'onde. C'est la raison pour laquelle, tout comme leurs modèles diélectriques, ces métamatériaux sont considérés comme des milieux homogènes avec des paramètres effectifs macroscopiques (ϵ_{eff} et μ_{eff} en électromagnétisme, ρ_{eff} et χ_{eff} en acoustique). Ces derniers représentent ainsi la réponse moyennée de toutes les inclusions résonantes supposées voir le même champ incident à l'échelle du milieu considéré. De cette façon, il est possible d'obtenir des matériaux dont les propriétés n'existent pas dans la nature. Cela a grandement motivé le développement du domaine au début des années 2000, notamment les travaux concernant l'obtention de milieux d'indice négatif.

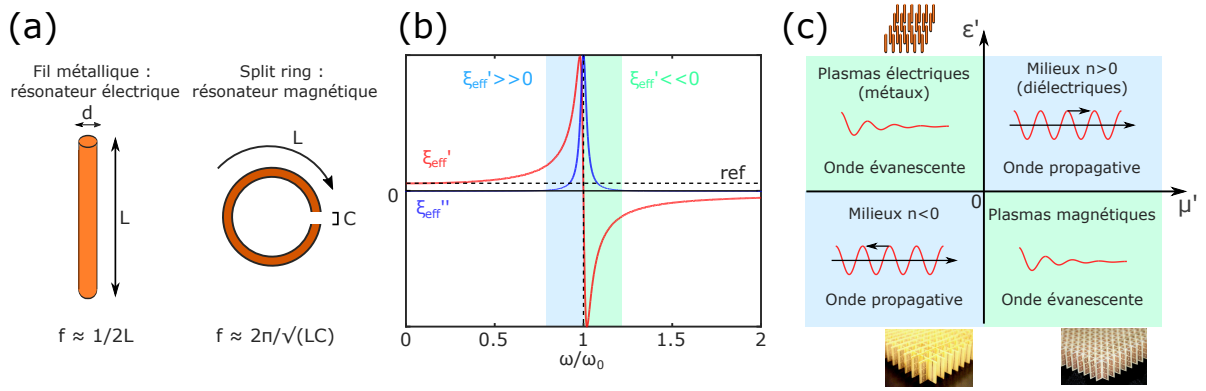


FIGURE I.17 – (a) Méta-atomes électromagnétiques. (b) Paramètres effectifs d'un métamtériau en fonction de la fréquence. (c) Exemple de propriétés obtenues avec ces systèmes.

Ces derniers, prédits par Veselago dans les années 60 [35], ont ensuite fait l'objet des travaux pionniers de sir John Pendry [14, 36], réalisés expérimentalement en 2000 par Smith en électromagnétisme [37] et Liu en acoustique [38].

I.4.1 Métamatériaux électromagnétiques

Les inclusions résonantes électromagnétiques sont généralement constituées de métal, mais aussi de matériaux diélectriques, moins dissipatifs aux fréquences optiques. Les plus utilisées sont le fil métallique [14] et l'anneau fendu (*Split Ring Resonator* ou *SRR*) [36]. Pour un fil de longueur finie L_0, le champ électrique incident induit des courants le long de celui-ci qui agit comme un dipôle électrique. Sa résonance est simplement fixée par sa longueur : $f_0 \simeq c/(2L_0)$. La longueur d'onde de résonance fondamentale est le double de la longueur du fil. Pour un diamètre fixé, cette inclusion est donc un méta-atome pertinent uniquement dans le plan transverse. Lorsqu'on le place sur un plan de masse, la longueur du fil correspond alors au quart de la longueur d'onde fondamentale. Cet atome artificiel a été utilisé de nombreuses fois au cours de cette thèse. Il présente l'intérêt d'avoir son champ magnétique maximal sur le plan de masse et nul à l'autre extrémité. Le champ électrique a le comportement inverse.

L'anneau fendu a quant à lui été proposé par sir John Pendry afin d'obtenir un nouveau type d'inclusion de type magnétique [36]. Il consiste en une boucle de courant d'inductance L qui génère un flux magnétique lorsqu'elle est soumise à un champ magnétique extérieur. L'interstice de l'anneau crée une capacité C qui, s'ajoutant à L, permet d'obtenir un circuit résonant LC. Modifier la géométrie de ce méta-atome magnétique permet de contrôler simplement ses propriétés résonantes. Ces deux inclusions sont représentées sur la figure

I.17(a).

Propriétés effectives électromagnétiques

La conception précise de ces inclusions artificielles permet de moduler la polarisabilité mésoscopique $\alpha(\omega)$ d'un milieu en contenant un grand nombre. A partir de là, il est possible d'obtenir les propriétés macroscopiques du métamatériau localement résonant global en le considérant comme un milieu homogène avec des paramètres effectifs, tout comme les milieux diélectriques présentés précédemment. Ces derniers sont obtenus en moyennant la réponse résonante sur l'ensemble des inclusions. L'amplitude de résonance des résonateurs artificiels pouvant être beaucoup plus élevée que celle des atomes, ces milieux composites peuvent présenter des propriétés effectives qui varient de manière beaucoup plus importante que dans les matériaux naturels. C'est le cas autour de la résonance, où leur valeur évolue depuis les nombres positifs, passe par zéro puis devient négative (figure I.17(b)). La gamme de fréquence sur laquelle ces phénomènes apparaissent dépend non seulement de la nature de l'inclusion (via son facteur de qualité), mais aussi de la densité de résonateurs dans le milieu.

La propriété effective négative vient directement du comportement résonant de l'inclusion. Au delà de la résonance, elle n'arrive plus à suivre les oscillations du champ incident ce qui induit un retard se traduisant par un déphasage supérieur à $\pi/2$. La réponse du résonateur s'oppose donc à l'excitation. Pour le métamatériau global, cela donne une propriété effective négative et l'indice effectif $n_{\text{eff}} = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}\mu_{\text{eff}}}$ devient imaginaire pur. Ainsi, pour la gamme de fréquence correspondante, les ondes ne peuvent plus se propager dans le milieu et deviennent évanescentes. Une propriété effective négative génère donc directement une bande interdite [39].

Si deux propriétés sont simultanément négatives, l'indice de réfraction devient lui même négatif [35]. En règle générale, cela est obtenu en mélangeant deux types d'inclusions, chacune donnant un type de paramètre négatif. Cela a été démontré en premier dans le domaine des micro-ondes. Le mélange d'un milieu de fils, dont la résonance donne lieu à une permittivité électrique effective négative, et d'un milieu de *SRR*, dont la résonance donne cette fois une perméabilité magnétique effective négative, a en effet permis d'obtenir expérimentalement un phénomène de réfraction négative [37]. Divers exemples de propriétés atteignables avec ces systèmes sont présentés sur la figure I.17(c).

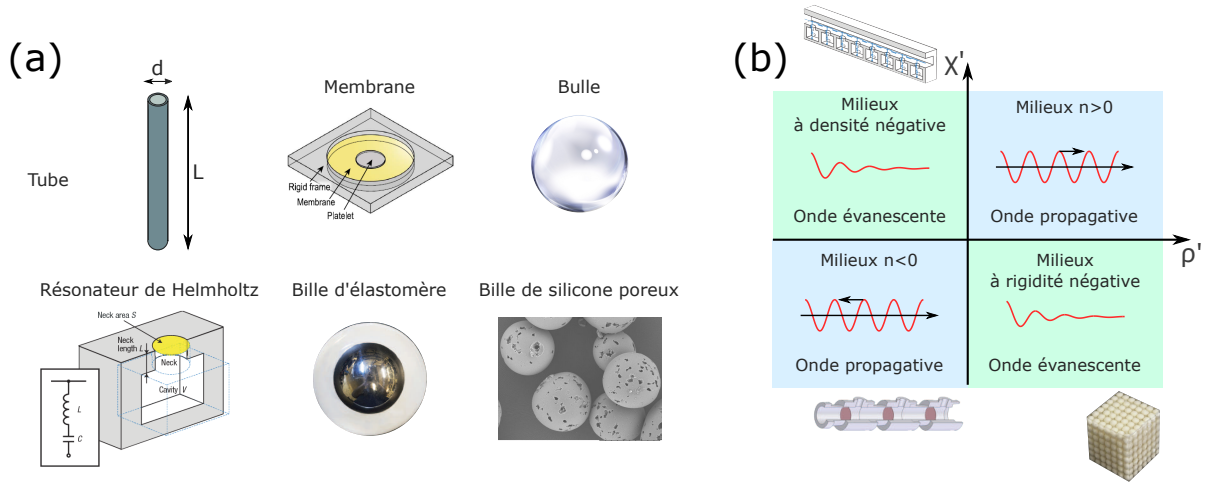


FIGURE I.18 – (a) Méta-atomes acoustiques. (b) Exemple de propriétés obtenues avec des métamatériaux acoustiques.

I.4.2 Métamatériaux acoustiques

Le résonateur sub-longueur d'onde acoustique le plus simple est un tube creux aux parois rigides de longueur L et de section de taille typique d^2. C'est l'analogue du fil en électromagnétisme. La résonance émerge de l'oscillation du fluide à l'intérieur du tube et est contrainte par les conditions aux limites aux extrémités de ce dernier. La longueur d'onde du mode fondamental est fixé par L, de manière similaire au fil métallique en électromagnétisme, et vaut $\lambda_0/2$ où $\lambda_0/4$ selon que le tube soit ouvert ou fermé sur une ou deux extrémités. Le tube est donc un méta-atome pertinent uniquement dans la direction transverse. Une limitation importante de ces résonateurs réside dans la forte dissipation par frottements fluides le long des parois lorsque $d \ll \lambda$.

Un autre type de résonateur standard existe : le résonateur de Helmholtz [40]. Il consiste en une cavité de volume V surmontée d'un petit conduit, le cou, de longueur L et de surface S. Sa fréquence de résonance théorique est donnée par :

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{VL}} \tag{I.24}$$

Non seulement ce résonateur offre plus de paramètres de contrôle sur la résonance que de simples tubes, mais en plus les pertes visqueuses sont concentrées dans le cou, ce qui limite la dissipation. Cette résonance existe dans beaucoup d'objets du quotidien tels que les bouteilles ou encore les boules de Noël. Par exemple, au cours de cette thèse, nous avons utilisés des canettes de soda à plusieurs reprises. D'autres potentiels méta-atomes

acoustiques existent tels que les bulles, qui possèdent une résonance de Minnaert pour des longueurs d'onde ultra-sonores qui dépendent du rayon de la bulle [41, 42], des billes de silicone micro-poreux présentant des résonances de Mie [43], des matériaux durs entourés d'élastomère ou encore de simples membranes [44]. Ces méta-atomes sont représentés sur la figure I.18(a).

Tout comme le cas électromagnétique, il est possible de former des matériaux, dont la taille globale est de l'ordre de la longueur d'onde de travail, avec ces inclusions résonantes acoustiques (figure I.18(b)) [45, 46]. Là encore, ces derniers sont considérés comme étant des milieux homogènes avec des paramètres macroscopiques tels que ρ_{eff} (densité effective) et χ_{eff} (compressibilité effective). Ces derniers sont des valeurs moyennes calculées avec l'hypothèse que les inclusions résonantes ne perturbent pas le champ acoustique à leur échelle locale. De cette façon, en utilisant le caractère résonant des atomes artificiels acoustiques il est possible d'obtenir des compressibilités négatives dans un milieu composé de résonateurs de Helmholtz [47]. Un tube dans lequel sont disposées des membranes se comportera quant à lui comme un système avec une densité effective négative, provenant du déphasage de la réponse de la membrane par rapport au mouvement du fluide incident [48]. C'est aussi le cas d'une collection de billes entourées d'élastomère [38]. Si l'on combine les deux types de milieux précédents et que l'on ajoute des résonateurs de Helmholtz sur ce guide d'onde supportant les membranes, il est possible d'induire une double négativité, analogue d'un indice négatif [49]. Ainsi l'onde se propageant dans le tube présente une vitesse de phase opposée à sa vitesse de groupe.

I.4.3 Le contrôle des ondes avec les métamatériaux

Les métamatériaux sont donc des systèmes compacts d'une grande flexibilité ce qui en fait des milieux utiles pour le contrôle de la propagation des ondes. Ainsi, grâce aux propriétés effectives élevées qu'ils sont susceptibles d'avoir, il est possible d'obtenir des indices de réfraction très grands, ce qui permet de ralentir fortement les ondes dans un milieu [50–52]. Les longueurs d'ondes correspondantes sont donc beaucoup plus petites que celles en espace libre et ont été exploitées notamment pour faire de la focalisation et de l'imagerie super-résolue [53–56].

En outre, il est possible de concevoir ces métamatériaux afin qu'ils aient une propriété effective quasi-nulle [57]. Cela est utilisé afin d'améliorer le couplage entre différents guides d'ondes [58, 59], mais dans le but d'ajuster le diagramme de rayonnement des sources [60].

Par ailleurs, ces métamatériaux sont aussi des milieux adaptés pour l'étude de la physique transformationnelle [61, 62]. Ainsi de nombreux travaux ont montré qu'il était

possible de contrôler la propagation ondulatoire autour d'objets et donc d'implémenter des capes d'invisibilité à deux ou à trois dimensions [63–65].

Quant aux milieux à indice négatif ils ont fait preuve d'un attrait bien particulier. En effet les travaux de sir John Pendry ont montré qu'un indice négatif permettait non seulement de réfracter négativement les ondes à une interface mais aussi de faire une lentille parfaite [66]. Ces lentilles plates sont théoriquement capables de restaurer l'image d'un objet en battant la limite de diffraction [67].

Les précédents paragraphes démontrent ainsi qu'en suivant le modèle des diélectriques, il est possible de jouer avec la composition d'un matériau artificiel afin de contrôler spécifiquement la propagation des ondes.

I.5 Approche microscopique des métamatériaux localement résonants

I.5.1 Approche macroscopique : polariton

Tous les travaux présentés dans le paragraphe précédent ont fait l'objet d'une approche macroscopique du problème, dans le sens où le choix des inclusions résonantes est dicté uniquement par l'obtention d'une propriété effective globale du système. Ici, nous montrons que considérer ces métamatériaux localement résonants du point de vue microscopique de leurs composants sub-longueur d'onde permet, entre autres, d'expliquer le comportement des ondes dans le milieu et d'appréhender différemment ces matériaux composites. Ces travaux proviennent de la thèse de Fabrice Lemoult [68] et ont été continués ultérieurement au cours de la thèse de Nadège Kaina [69].

Nous nous intéressons à un métamatériau localement résonant composé d'un seul type de méta-atome de fréquence de résonance f_0. Ces inclusions sont disposées aléatoirement dans l'espace bidimensionnel xOy, et sont séparées les unes des autres par une distance moyenne a très inférieure à la longueur d'onde $\lambda_0 = c/f_0$.

Comme nous l'avons vu précédemment, ce système est habituellement considéré comme étant homogène avec une propriété effective ζ_{eff} qui dépend directement de la densité de résonateurs N et de leur polarisabilité individuelle $\alpha(\omega)$. Autour de la résonance, ζ_{eff} varie fortement et sa valeur devient négative pour les fréquences supérieures à f_0 ce qui se traduit par un indice effectif imaginaire pur, correspondant à des ondes évanescentes dans le milieu. Cela témoigne de l'ouverture d'une bande interdite de propagation.

De ce point de vue macroscopique, le milieu est donc équivalent à un résonateur global

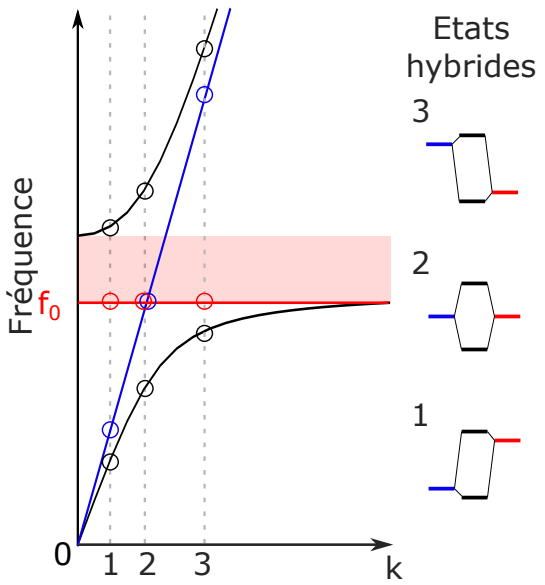


FIGURE I.19 – Relation de dispersion d'un polariton (gauche). États hybrides de la quasi-particules correspondants aux différents cas 1,2 et 3.

dont l'amplitude de la polarisabilité est N fois celle d'un méta-atome. Le comportement ondulatoire dans le métamatériau localement résonant résulte ainsi d'un couplage entre l'onde incidente et la résonance du milieu. Ceci est l'analogue d'un modèle bien connu dans la communauté quantique utilisé pour décrire de manière générale le couplage entre une onde lumineuse (le photon) et une onde de polarisation électrique (un état résonant). De ce couplage émerge ainsi un état hybride : le polariton. Cette quasi-particule possède deux états énergétiques distincts dépendant des états énergétiques propres au photon et à la résonance. Ainsi en faisant varier l'énergie du photon, il est possible de tracer l'évolution du moment de la quasi-particule comme le montre la figure I.19.

Ce diagramme représente tous les états accessibles par le polariton, c'est donc une relation de dispersion. Elle peut être interprétée comme résultant de la répulsion de niveaux entre la dispersion du photon et celle de la résonance. Lorsque l'énergie du photon et celle de la résonance sont très différentes (états 1 et 3), les deux états propres du système hybride sont proches des énergies initiales des particules indépendantes. Les courbes d'énergie suivent alors la ligne de lumière et celle de la résonance. Lorsque les énergies du photon et de la résonance sont équivalentes, le fort couplage entre les particules lève la dégénérescence d'énergie et génère deux états hybrides d'où le terme de quasi-particule. Cette hybridation est aussi à l'origine d'une bande interdite de propagation au dessus de la fréquence f_0 de l'état de polarisation résonant (zone rouge sur la figure). Elle est appelée

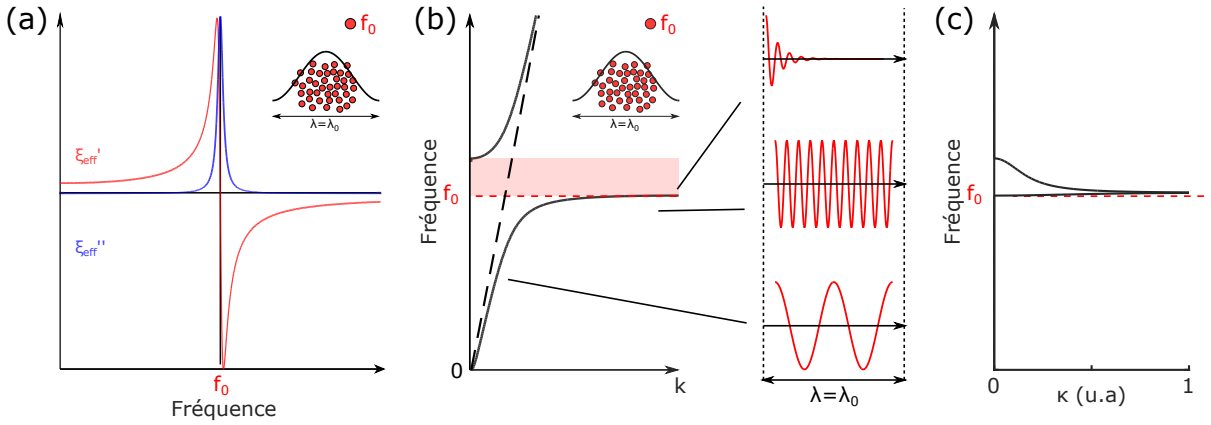


FIGURE I.20 – (a) Représentation des propriétés d'un métamatériau localement résonant en terme de paramètres effectifs η_{eff} en fonction de la fréquence. (b) Représentation du même milieu avec une relation de dispersion polaritonique comportant une bande interdite d'hybridation. (c) Coefficient d'atténuation κ correspondant.

bande interdite d'hybridation, par analogie avec la notion d'hybridation entre orbitales atomiques en chimie quantique [70, 71].

Ce concept de polariton a ainsi été utilisé pour rendre compte des propriétés des diélectriques par Hopfield, où l'état de polarisation correspond à la résonance globale des atomes [72]. Il se généralise ensuite au couplage de l'onde incidente avec d'autres types d'états résonants. Ceux-ci peuvent ainsi provenir de la présence de phonons (une oscillation mécanique d'atomes), d'exciton (une paire électron-trou liée par la force de Coulomb) ou encore un plasmon de surface (oscillations collective d'un gaz d'électrons à la surface d'un métal). Dans ce dernier cas, le polariton est appelé polariton de plasmon de surface car il est cantonné à l'interface entre un milieu de permittivité négative (métal) et l'air ou un diélectrique dont la permittivité est positive. L'analogue de ces plasmons de surfaces, qui apparaissent aux fréquences optiques, s'obtient en micro-ondes en créant des surfaces métalliques striées périodiquement. Ces systèmes, proposés là encore par sir John Pendry, supportent la propagation d'une quasi-particule appelée *spoof plasmon polariton* [73].

Par conséquent, le fait d'appréhender le métamatériau localement résonant comme étant un résonateur effectif global permet d'appliquer ce concept de polariton au système. Ce faisant, plutôt que du point de vue de ses paramètres effectifs (figure I.20(a)) nous le décrivons grâce à sa relation de dispersion (figure I.20(b)). Cette dernière fait donc apparaître deux bandes séparées par une bande interdite d'hybridation qui s'ouvre à partir de f_0. La bande située aux basses fréquences est hors du cône d'espace libre, c'est-à-dire la variation spatiale des modes propagatifs correspondants est très inférieure à la longueur

d'onde du champ excitateur. Ces derniers sont donc incapables de se propager dans l'espace libre à ces fréquences et restent confinés spatialement à la surface du métamatériau. Par ailleurs, cette bande tend asymptotiquement vers la fréquence de résonance f_0, ce qui témoigne d'un indice effectif très élevé pour cette gamme de fréquence. Quant à la bande supérieure de la relation de dispersion, elle est située à l'intérieur du cône d'espace libre et les modes correspondants présentent des longueurs d'onde de l'ordre de celle du champ incident. Le coefficient d'atténuation κ de la bande interdite est quant à lui bien plus élevé que dans le cas d'une bande interdite de Bragg. Il dépend aussi fortement de la fréquence. La figure I.20(c) montre qu'il atteint rapidement son maximum à une fréquence proche de f_0 puis sa valeur diminue quand la fréquence augmente.

I.5.2 Approche microscopique

Le paragraphe précédent montre que l'interprétation en terme de polariton des métamatériaux localement résonant est pertinente pour décrire la propagation des ondes au sein du milieu. Elle intervient toujours dans le cadre d'une vision macroscopique du système, considéré comme un résonateur effectif global.

Cependant, la nature résonante des inclusions elles-mêmes nous autorise à adopter aussi localement ce concept de quasi-particule. Les paragraphes suivants expliquent ainsi comment une approche microscopique du métamatériau localement résonant découle sur l'existence de polariton à l'échelle locale des méta-atomes.

Transmission sur un résonateur

Nous nous plaçons ici dans le cas acoustique en prenant comme résonateur une simple canette de soda [74], représentée sur la figure I.21. Cette dernière est un résonateur de Helmholtz, dont la fréquence de résonance est autour de 415 Hz. Ceci qui correspond à une longueur d'onde de 80 cm, ce qui est beaucoup plus grand que la taille de la canette. Par ailleurs, en plus d'avoir des dimensions standardisées, ce résonateur possède un cou très petit ce qui permet de limiter la dissipation. Bien que ce paragraphe présente une étude numérique, cette propriété est intéressante pour les cas pratiques présentés dans la suite de cette thèse.

Afin de mettre en évidence l'interaction microscopique entre le champ incident et l'état résonant nous simulons donc la propagation d'une onde acoustique dans un guide d'onde linéaire sous lequel est disposé une canette (figure I.22(a)).

Nous traçons le module de la transmission en champ lointain correspondant (figure I.22(b)). Il dépend fortement de la fréquence de l'onde incidente, notamment autour de

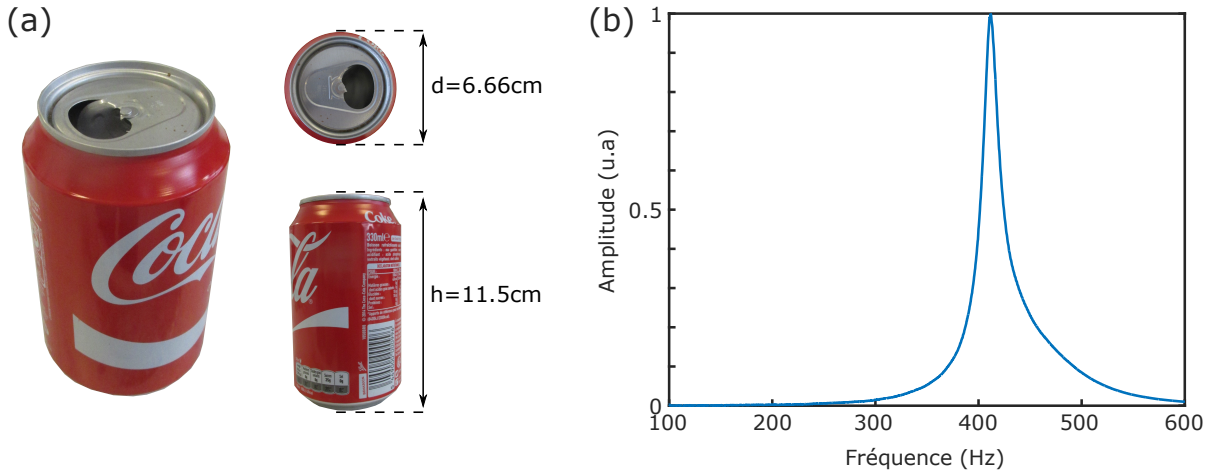


FIGURE I.21 – (a) Canette de soda. (b) Pic de résonance mesuré en plaçant un microphone à l'intérieur d'une canette.

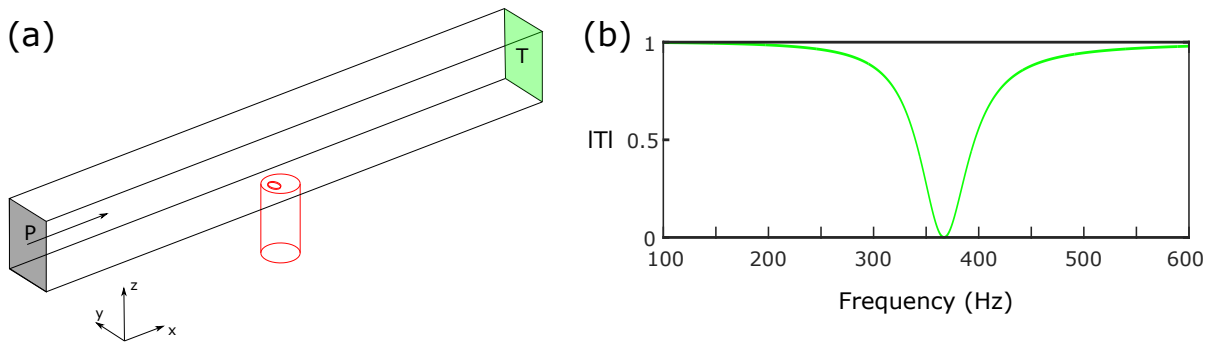


FIGURE I.22 – (a) Schéma de la simulation de la transmission d'une canette disposée sous un guide d'onde.(b) Profil de la transmission en champ lointain correspondant.

la résonance.[1] Cette dernière fait chuter la transmission à zéro, le résonateur diminue donc la propagation de l'onde dans le guide pour une gamme de fréquence autour de la résonance f_0, dont la taille dépend de son facteur de qualité.

La transmission se rapproche ensuite de l'unité pour les fréquences plus élevées le résonateur apparaissant comme transparent.

Polariton local

Il est possible d'expliquer l'allure de cette transmission par un effet interférentiel. En effet, l'onde acoustique se propageant dans le guide est le résultat de la somme cohérente du champ de pression incident, et de celui réémis en aval de la canette, comme cela est représenté sur la figure I.23. Pour les fréquences inférieures à f_0, le résonateur répond en phase avec l'excitation, l'interférence de ces deux ondes est donc constructive ce qui résulte en la transmission d'une onde dans le guide. A la résonance en revanche, le champ réémis par le résonateur est déphasé de π par rapport à l'excitation. L'interférence devient destructive : l'onde ne se propage plus dans le guide.

Ce couplage interférentiel microscopique entre l'onde incidente et le méta-atome nous permet ainsi d'adapter le concept du polariton évoqué précédemment à l'échelle de l'inclusion résonante. L'onde qui se propage dans le guide est donc le résultat d'une hybridation entre la résonance de la canette unique avec l'onde dans l'espace libre. Cela se traduit par l'émergence d'une quasi-particule à l'échelle du résonateur qui est responsable d'une baisse de transmission localisée spatialement sur l'inclusion. Par ailleurs, en ajoutant d'autres résonateurs identiques sur le guide d'onde, une bande interdite d'hybridation se crée. Cela s'explique par le fait que l'onde incidente interfère avec le premier résonateur, forme un polariton local qui va ensuite interférer avec le second résonateur et ainsi de suite. Il est ainsi possible de remonter au polariton macroscopique du milieu global à partir de chacun des polaritons microscopiques et de leur densité N.

Ainsi, ce concept polaritonique, qui en règle générale repose sur des approches macroscopiques effectives, peut être transposé à l'échelle microscopique des inclusions. Le paragraphe suivant montre un exemple qui met en évidence l'utilisation des propriétés de ce polariton local.

1. La fréquence simulée $f_0 = 370$ Hz ne correspond pas à la fréquence expérimentale uniquement pour des questions de simplification de la géométrie

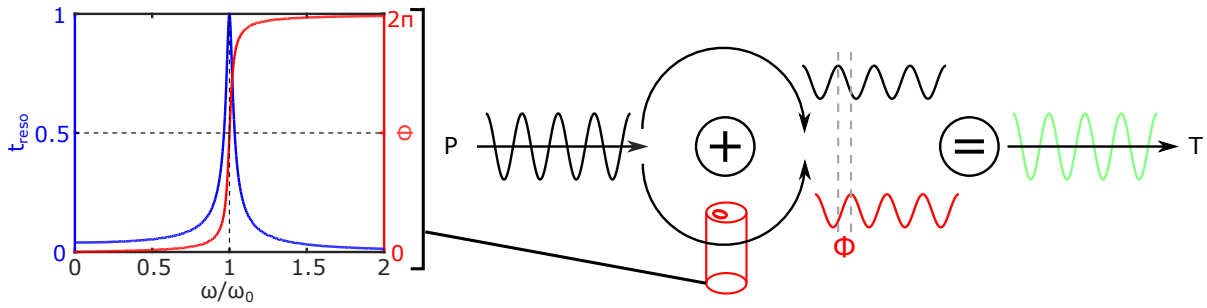


FIGURE I.23 – Schéma explicatif de l'interaction entre l'onde du guide et la canette. L'onde transmise (vert) est la somme cohérente de l'onde du guide (noir) avec l'onde diffusée par le résonateur (rouge).

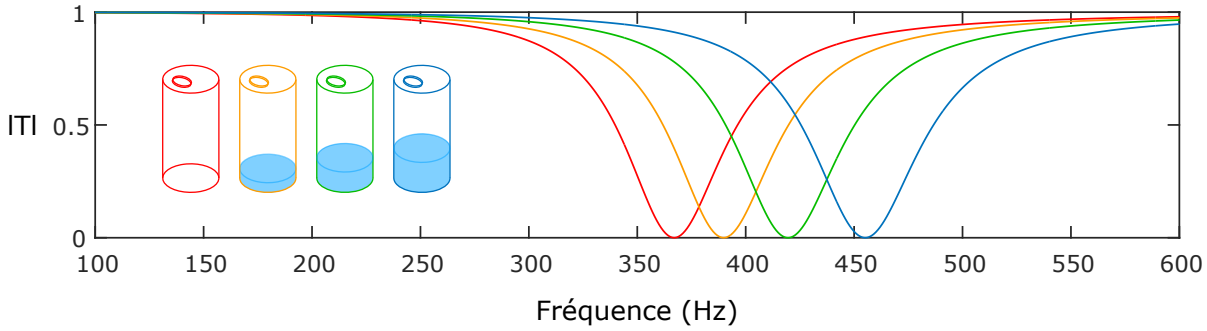


FIGURE I.24 – Transmission en champ lointain simulée pour plusieurs niveau d'eau dans la canette. La fréquence de résonance du résonateur augmente avec le remplissage de ce dernier.

I.5.3 Illustration 1D : *Rainbow Trapping*

Contrôle de la résonance du méta-atome

La fréquence de résonance d'un résonateur de Helmholtz est directement liée au volume d'air qu'il contient. Plus ce volume est grand, plus la fréquence de résonance est basse. Dans le cas des canettes de soda, il suffit donc simplement de les remplir de plus ou moins d'eau afin de modifier leur résonance. La transmission en champ lointain pour différents niveaux d'eau est présentée sur la figure I.24. Ainsi, plus le remplissage est élevé, moins il y a d'air dans la canette et plus la fréquence de résonance augmente. Il est donc très facile en pratique d'obtenir différents polaritons microscopiques.

Gradient de remplissage

De manière similaire au cas d'une seule canette, nous simulons à présent la transmission d'une onde monochromatique ($f = 375$ Hz) dans un guide d'onde avec une ligne de 15 résonateurs. C'est un métamatériau localement résonant 1D.

Ces résonateurs sont remplis en suivant un gradient décroissant selon l'axe du guide d'onde, c'est à dire que l'onde incidente interagit avec des résonateurs dont la fréquence de résonance diminue au cours de sa propagation. D'un point de vue microscopique, il est possible de décrire le système avec différents polaritons localisés spatialement sur chacune des canettes, comme le montre la figure I.25(a).

Rainbow trapping

Le champ de pression correspondant dans le guide est représenté sur la figure I.25(b) à la fois dans le plan xy juste au dessus des canettes et dans une section xz au centre du guide. Ces résultats démontrent bien une forte dépendance de la longueur d'onde λ_i avec l'abscisse x. La variation spatiale du champ dans l'espace libre se répartit sur une échelle de plus en plus sub-longueur d'onde au fur et à mesure de sa propagation dans l'alignement de résonateurs. Par ailleurs, ce caractère de plus en plus sub-longueur d'onde des modes est responsable d'une rupture d'impédance accrue avec l'espace libre. Cela explique leur confinement progressif dans le plan xz juste au dessus des canettes et l'augmentation de leur intensité.

Ceci s'explique très bien en considérant les différentes relations de dispersion des quasi-particules locales qui sont générées dans l'alignement. Ces modes hybrides microscopiques ont un nombre d'onde qui augmente en fonction de l'abscisse x. Au cours de sa propagation, l'onde sonde la partie de plus en plus plate de la branche inférieure du polariton.

Nous vérifions ensuite cela expérimentalement (figure I.26(a)). Nous mettons en place une ligne de canettes de soda avec un gradient de remplissage à l'intérieur d'une chambre anéchoïque, permettant de limiter le bruit environnant. Nous disposons une source, ici un haut-parleur commercial, à l'extrémité où la canette est la plus remplie. Cette source envoie un *chirp* de 10 s contenant une large bande de fréquence (800 Hz) centrée autour de 420 Hz. Nous mesurons ensuite la réponse du milieu avec un microphone disposé à 1 cm au dessus de l'ouverture des résonateurs. Il est fixé sur un bras motorisé qui permet d'effectuer un scan de l'ensemble du milieu.

Après avoir effectué une transformée de Fourier temporelle des données obtenues, nous récupérons une carte de champ de pression pour chacune des fréquences contenues dans le signal émis par le haut-parleur. Quatre d'entre elles sont présentées sur la figure I.26(b).

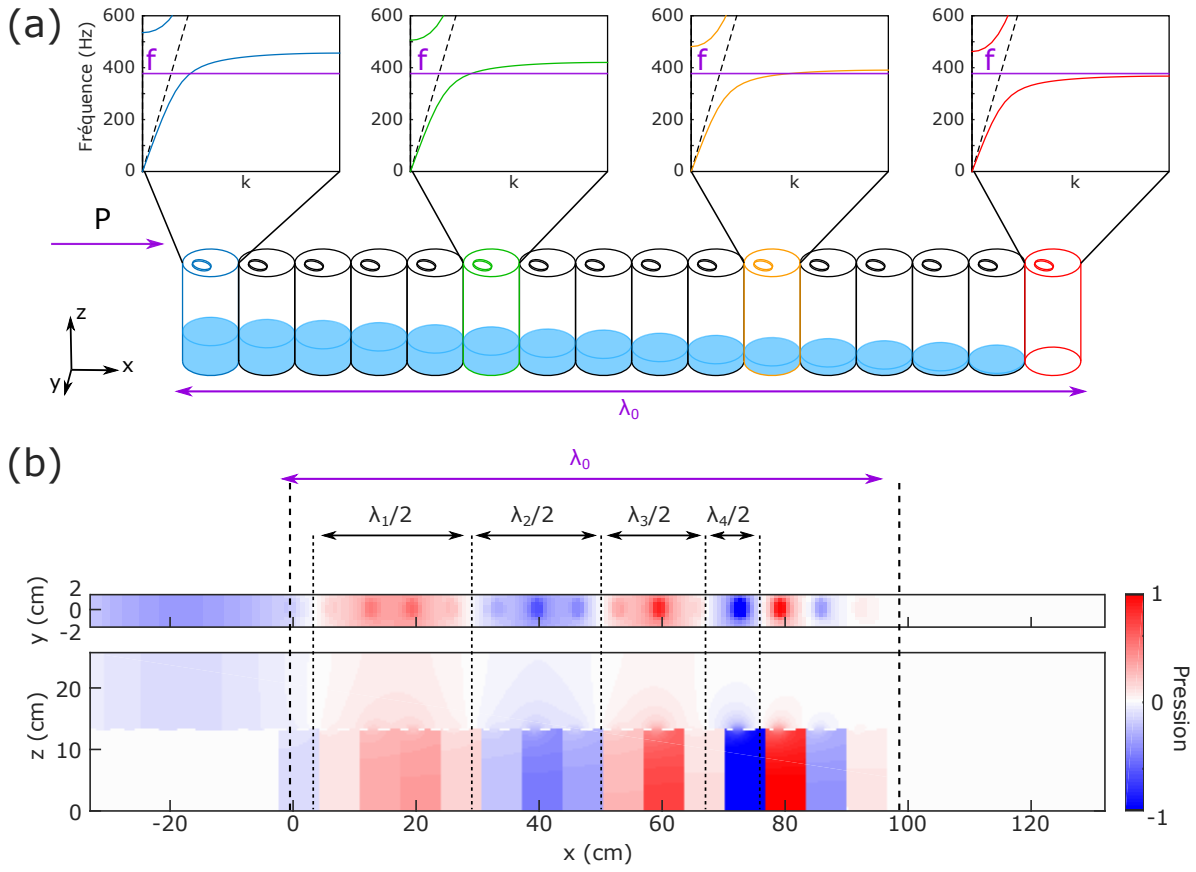


FIGURE I.25 – (a) Schéma de la simulation de la transmission d'une onde acoustique monochromatique à la fréquence f d'un métamatériau 1D consistant en une ligne de canettes avec un gradient décroissant de remplissage selon l'axe x. (b) Champ de pression dans le plan xy (haut) et xz (bas) obtenu en simulant le métamatériau 1D.

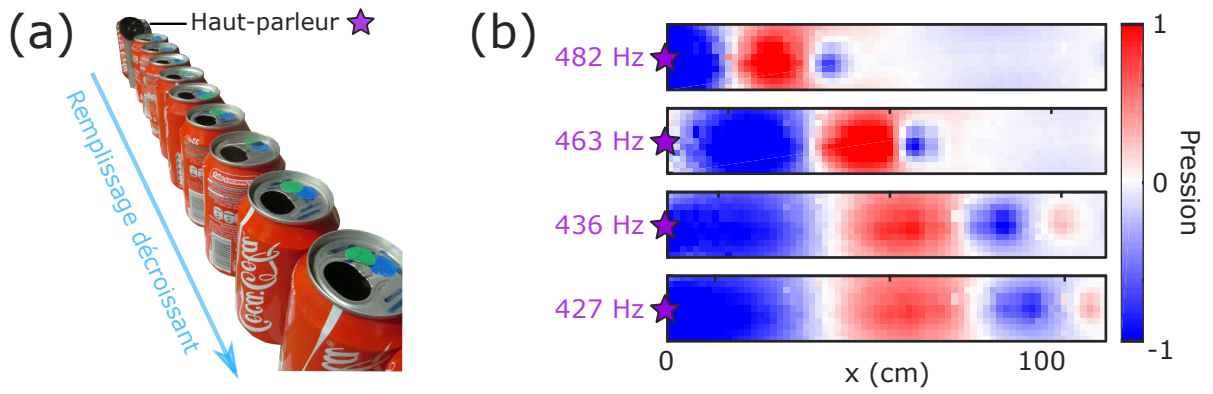


FIGURE I.26 – (a) Photographie de l'expérience avec un gradient de remplissage. (b) Cartes champ de pression mesurées pour différentes fréquences qui témoigne du phénomène.

Elles démontrent bien la dépendance de la longueur d'onde au sein du métamatériau en fonction de l'abscisse x. En particulier, la carte de champ à 427 Hz est en bon accord avec la simulation précédente mis à part l'écart de fréquence que nous avons évoqué précédemment.

En augmentant la fréquence de l'onde incidente, le champ se propage de moins en moins loin dans la ligne de résonateurs, avant de s'arrêter dans des zones où il oscille fortement. Cela s'explique aussi très bien avec l'approche locale du polariton : plus les canettes sont remplies, plus leur bande interdite s'ouvre à basse fréquence. Ces résultats mettent donc bien en évidence le gradient de fréquence de résonance au sein du métamatériau localement résonant.

Ce phénomène, équivalent à un spectromètre spatial, est connu sous le nom de *rainbow trapping*. Il a été démontré en électromagnétisme, notammment avec des dispositifs plasmoniques [75, 76] mais aussi en acoustique avec la structuration graduée d'une barre de léton [77].

Nous insistons ici sur le fait que toutes les échelles de longueur mises en jeu sont très petites par rapport à la longueur d'onde de l'onde incidente dans le guide seul. Par conséquent, en adoptant une description effective de la chaîne avec un polariton global, isotrope, il n'est pas possible de rendre compte de cette dépendance de la longueur d'onde en fonction de l'abscisse x. C'est bien la description microscopique qui permet ici de concevoir directement un tel système.

I.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons tout d'abord décrit la propagation des ondes, à la fois électromagnétiques et acoustiques, dans les milieux naturels. Deux cas de figures se sont présentés à nous. Le premier consiste au cas où la longueur d'onde du champ incident est très grande par rapport aux inhomogénéités spatiales du milieu. Dans ce cas, ce dernier est considéré comme étant homogène à l'échelle de l'onde incidente et est caractérisé par des paramètres effectifs macroscopiques tels que la permittivité relative ou l'indice de réfraction. L'autre scénario advient lorsque la longueur d'onde incidente est cette fois-ci de l'ordre de grandeur des distances inter-atomiques. Dans ce cas, la structure du matériau est primordiale pour expliquer les phénomènes de diffraction qui apparaissent.

Ces modèles naturels ont ensuite donné naissance à leurs analogues macroscopiques artificiels : les matériaux composites. Ils se divisent de la même façon en deux catégories. Les matériaux structurés à l'échelle de la longueur d'onde de travail appelés cristaux photoniques (phononiques en acoustique). Le comportement vis-a-vis de la propagation des ondes s'explique précisément par des diagrammes de bandes, issus de la répétition périodique de leur relation de dispersion, qui sont analogues au structures de bandes électroniques en physique du solide. Ces structures de bandes possèdent des bandes interdites, dites de Bragg, correspondant à des comportements de type miroir pour l'onde incidente.

L'autre catégorie de matériaux composites concerne quant à elle les systèmes dont la granularité est infiniment plus petite que la longueur d'onde d'opération. C'est le domaine des métamatériaux. Suivant le modèle des diélectriques naturels, leurs propriétés sont décrites par des paramètres effectifs issus de théories d'homogénéisation. La conception de ces matériaux passe donc par le design spécifique de leurs inclusions, qui peuvent être résonantes. Par ailleurs, cette description a pour effet de négliger totalement la structure sub-longueur d'onde de ces systèmes. Nous verrons au chapitre 3 que, bien que cela soit justifié pour l'étude des diélectriques naturels, ce n'est pas le cas lorsque l'on s'intéresse aux métamatériaux localement résonants.

Nous avons ensuite expliqué qu'il était possible de rendre compte de la physique des ondes dans ces métamatériaux avec le modèle du polariton. Ce dernier permet de voir ces milieux avec d'une relation de dispersion reliant la fréquence au nombre d'onde, plutôt que l'indice en fonction de la fréquence. Cette description explique aussi la présence d'une bande interdite d'hybridation, qui émerge de la nature résonante du milieu. Nous avons finalement vu qu'il était possible d'appliquer ce concept du polariton à une échelle microscopique. Cela permet d'utiliser localement les propriétés de cette quasi-particule.

Dans le chapitre suivant, nous allons tirer parti d'une autre propriété de ce polariton,

la bande interdite d'hybridation, à l'échelle macroscopique et microscopique dans des milieux bidimensionnels.

Chapitre II

La bande interdite d'hybridation pour reproduire les Hamiltoniens *tight-binding*

II.1 La bande interdite pour générer des défauts

Dans cette partie nous nous concentrons sur l'une des caractéristiques des matériaux composites que nous avons décrite dans le chapitre précédent, à savoir la bande interdite de propagation. Cette dernière représente une bande de fréquence pour laquelle les ondes ne peuvent pas se propager dans le milieu : elles deviennent évanescentes. Cette propriété existe à la fois dans les cristaux photoniques/phononiques et dans les métamatériaux, bien que son origine diffère entre ces deux types de systèmes.

Nous expliquons ici comment il est possible d'exploiter cette bande interdite afin d'introduire des défauts au sein du milieu considéré.

II.1.1 Défauts dans les cristaux photoniques

Défauts ponctuels dans un miroir de Bragg

Dans le premier chapitre nous avons décrit le principe du miroir de Bragg. Ce dernier est un empilement unidimensionnel périodique de couches de diélectriques d'indices différents n_1 et n_2. La relation de dispersion du milieu est ainsi équivalente à une structure de bande comportant une bande interdite de Bragg qui apparaît lorsque la longueur d'onde est égale au double de la période a.

La propagation des ondes est régie par la structure de l'empilement, et ce via des

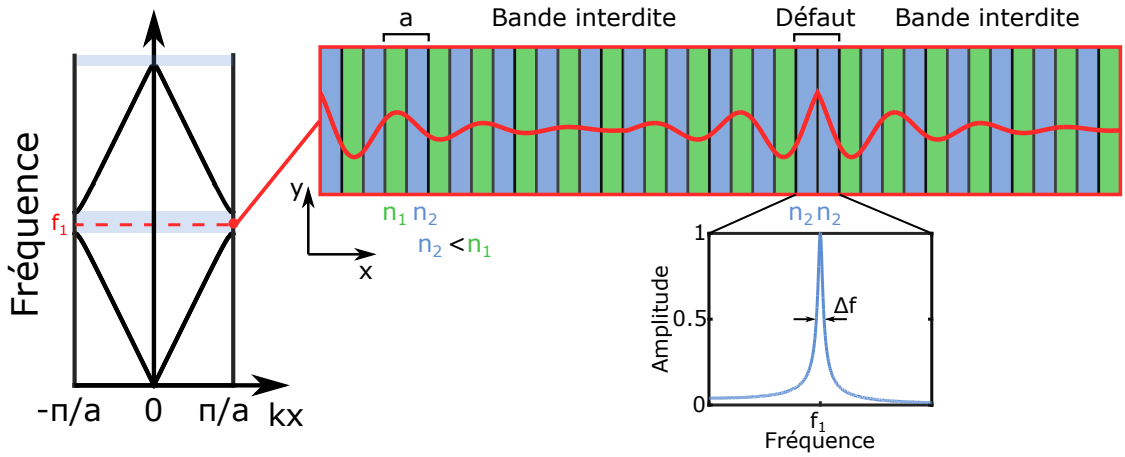


FIGURE II.1 – Cavité dans un miroir de Bragg.

phénomènes interférentiels délocalisés sur l'ensemble du système. Une modification structurelle locale, aussi appelée défaut ponctuel, entraîne donc une modification locale du champ au niveau du défaut. Briser localement la symétrie translationnelle discrète du milieu crée un mode résonant qui se concentre sur l'emplacement du défaut (figure II.1). L'extension spatiale de ce dernier est donc de l'ordre de la longueur d'onde λ et sa fréquence tombe dans la bande interdite du milieu environnant [78–80]. Bien qu'à cette fréquence les ondes ne peuvent pas se propager dans le cristal, il est possible d'exciter ce mode de défaut via une onde évanescente. En effet, même si l'amplitude de cette dernière décroît exponentiellement dans le milieu, une partie de l'énergie est potentiellement capable d'atteindre l'emplacement du défaut par effet tunnel. Une fois ce mode excité, le champ reste confiné localement autour du défaut. Ce défaut ponctuel est donc assimilable à une cavité résonante dont les parois réfléchissantes sont créées par la bande interdite de Bragg du cristal.

Ces cavités sont caractérisées par leur volume modal V et leur facteur de qualité Q. Le premier est relié à l'extension spatiale du mode résonant et le second décrit ses propriétés temporelles. Il rend compte de la capacité de la cavité à emmagasiner de l'énergie et est directement relié au temps de vie du mode. Un facteur de qualité élevé, correspondant à des durées de vie longue, est ainsi caractérisé dans l'espace fréquentiel par un pic de résonance étroit. Il s'écrit :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \tag{II.1}$$

où f_0 est la fréquence de résonance et Δf la largeur du pic. Ce facteur de qualité est di-

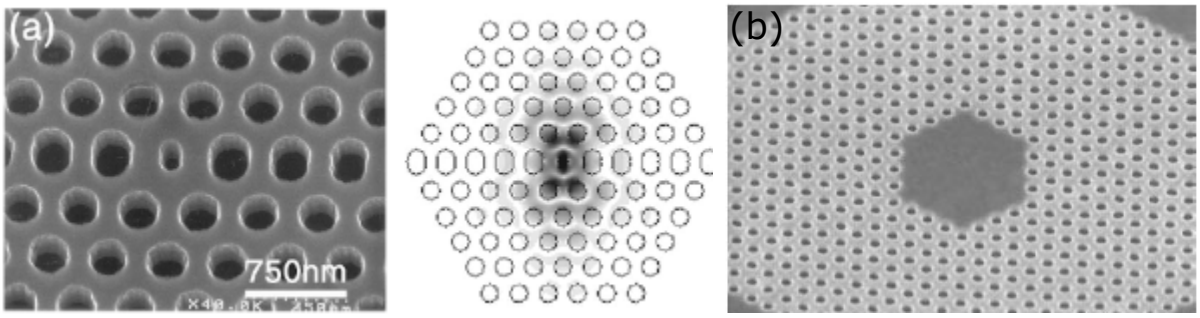


FIGURE II.2 – (a) Cavité dans un cristal photonique bi-dimensionnel et simulation du champ confiné correspondant [81]. (b) Cavité hexagonale dans un cristal photonique [82].

rectement lié à la dissipation dans le milieu. Elle s'opère par deux mécanismes. Le premier correspond aux pertes intrinsèques au système tels que les frottements visqueux en acoustique ou les pertes ohmiques dans les métaux en électromagnétisme. Le second représente les pertes radiatives qui rendent compte du couplage de la cavité à son environnement. Cela est décrit par la relation suivante :

$$Q^{-1} = Q_{rad}^{-1} + Q_{diss}^{-1} \tag{II.2}$$

où Q_{rad} correspond aux pertes radiatives et Q_{diss} aux pertes intrinsèques. Dans le cas du défaut ponctuel, la bande interdite du cristal environnant limite fortement la fuite des ondes piégées dans la cavité et augmente ainsi considérablement son facteur Q_{rad}. Quant à la dissipation intrinsèque, elle dépend du matériau utilisé et est relativement limitée pour les diélectriques utilisés en optique qui en ce sens font une bonne alternative aux métaux dans le domaine optique.

Défauts dans un milieu 2D : cavité et guide d'onde

Il est aussi possible de créer de telles cavités dans des cristaux photoniques/phononiques à deux dimensions. Dans ce cas, la structure du milieu est périodique selon deux directions de l'espace. Ainsi, un défaut ponctuel est généré en brisant localement la périodicité dans ces deux directions. Cela mène à l'établissement d'un mode résonant, dont le volume modal V est de l'ordre de λ^3 et dont la fréquence de résonance appartient à la bande interdite du cristal environnant. Ces défauts ponctuels peuvent dans ce cas prendre des formes géométriques plus complexes afin de mieux contrôler leurs caractéristiques et notamment leur facteur de qualité (figure II.2).

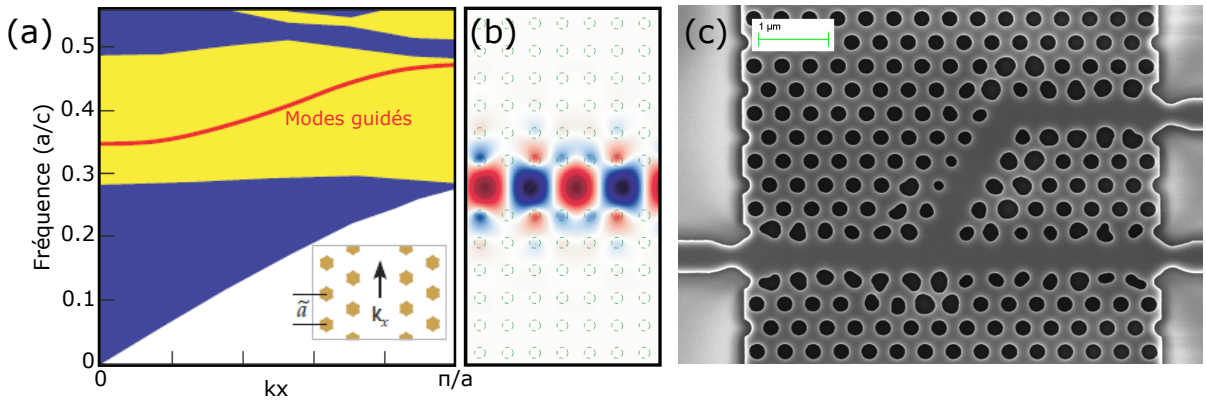


FIGURE II.3 – (a) Relation de dispersion projetée selon l'axe k_x d'un défaut linéaire. La bande rouge dans la bande interdite (jaune) correspond au modes guidés le long du défaut. (b) Simulation du champ guidé correspondant. (c) Guide d'onde avec une jonction dans un cristal photonique.

Par ailleurs, briser la périodicité du milieu uniquement selon une direction, l'axe y par exemple, permet de générer un défaut non plus ponctuel mais linéaire au sein du cristal [17, 83, 84]. De cette façon, une onde peut toujours se propager selon l'axe x, en étant confinée selon la direction y sur une distance de l'ordre de λ, qui correspond à la périodicité du milieu. Du point de vue de la relation de dispersion, une nouvelle bande de propagation correspondant aux modes guidés apparaît dans la gamme de fréquence correspondant à la bande interdite (en rouge sur la figure II.3(a)) . Ce guidage s'explique par un mécanisme de réflexion totale entre le guide et les interfaces avec le cristal, ces dernières se comportant comme des miroirs pour les fréquences de la bande interdite. Il est ensuite possible d'imaginer des structures plus complexes avec des virages ou encore des embranchements en T afin de diviser les ondes grâce à ces défauts linéaires [17, 85] (figure II.3(c)).

Applications et limitations

Ces défauts dans les cristaux ont plusieurs applications. Un premier exemple est celui des filtres de Bragg distribués. Lorsqu'une onde, dont la fréquence est dans la bande interdite du miroir de Bragg, arrive sur le multicouche qui possède un défaut ponctuel, elle devient évanescente dans le milieu. En revanche si sa fréquence correspond à la résonance de la cavité, l'énergie peut être transmise par effet tunnel. On crée ainsi des filtres passe-bande très sélectifs avec une bonne modularité [86, 87].

Par ailleurs, l'ajout d'un milieu à gain dans ces cavités résonantes permet l'implémen-

tation de lasers avec des systèmes relativement modulables et compacts. En jouant sur les caractéristiques du défaut, tel que sa taille ou sa géométrie, il est ainsi possible d'obtenir des lasers monomodes ou multi-modes avec un niveau de contrôle important [88–90].

Quant aux défauts linéaires, ils permettent de transporter et de diviser l'information portée par l'onde. Des guides d'ondes coudés avec des rayons de courbures plus ou moins faibles, ou alors optimisés géométriquement ont ainsi été démontrés [91–93].

L'exploitation de ces défauts dans les cristaux photoniques permet donc d'avoir des outils très intéressants et utiles pour le contrôle des ondes à l'échelle de leur longueur d'onde. Filtrer, guider, diviser sont en effet des tâches classiques des circuits électroniques. La réalisation de ces dernières avec des composants compacts opto-électroniques permet ainsi de tirer avantage des propriétés des photons, moins sensibles à la dissipation et surtout beaucoup plus rapides que les électrons.

Cependant, ces composants basés sur l'utilisation de la bande interdite des cristaux présentent plusieurs limitations. La première d'entre elles est la dissipation, principalement par l'absorption dans les matériaux, ce qui empêche la transmission de toute l'énergie. La deuxième concerne les irrégularités de fabrication. En effet, la formation de ces cavités étant liée à la structuration du milieu cette dernière doit être réalisée avec une très grande précision. Dans le cas contraire, non seulement le facteur de qualité des cavités diminue mais d'autres modes non désirés sont susceptibles d'apparaître dans la bande interdite. Pour les guides d'onde, ces imprécisions sont la cause de couplages parasites avec les modes du cristal environnant et donc d'un rayonnement hors du guide [94]. Elles génèrent aussi des réflexions qui mènent à l'établissement d'ondes stationnaires dans le guide, qui ne transporte donc plus d'information dans ce cas.

Enfin, l'échelle de ces défauts est par nature de l'ordre de la longueur d'onde d'opération [95]. Cela devient un problème si l'on veut travailler aux basses fréquences, tels que les micro-ondes en électromagnétisme ou la gamme audible en acoustique, pour lesquelles ces structures cristallines sont très encombrantes. Les longueurs d'onde en jeu sont en effet décimétriques dans ce cas. Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment il est possible de remédier à cela en utilisant des métamatériaux localement résonant.

II.1.2 Défauts dans les métamatériaux localement résonant

Comme nous l'avons expliqué dans le premier chapitre, les métamatériaux localement résonants sont des systèmes composés de résonateurs sub-longueur d'onde (de fréquence de résonance f_0) arrangés sur des échelles spatiales elles-aussi inférieures à la longueur d'onde. Ainsi ils sont habituellement décrits par des approches effectives qui ne prennent

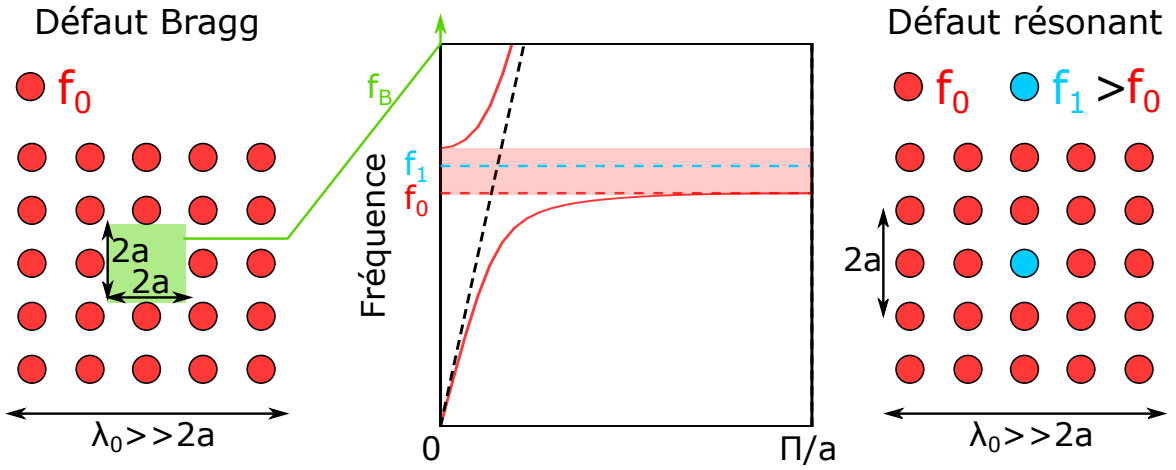


FIGURE II.4 – Comparaison entre un défaut de type Bragg et un défaut résonant dans un métamatériau localement résonant.

pas en compte les modifications à l'échelle de la cellule unité. De ce point de vue la modification d'un résonateur a un effet négligeable sur la réponse globale du milieu, son influence locale étant noyée dans la moyenne effectuée sur l'ensemble des inclusions.

Cependant, nous avons vu qu'il est possible de décrire la propagation des ondes dans ce milieu de manière microscopique grâce au modèle de polariton local, qui présente une bande interdite d'hybridation. Dans cette partie nous expliquons comment exploiter cette dernière afin d'introduire des défauts dans le système, mais cette fois-ci à une échelle très sub-longueur d'onde.

Cavité sub-longueur d'onde

Ce polariton résulte d'une interaction de l'onde avec la collection de résonateurs. Ainsi, comme dans le cas des cristaux photoniques, un défaut ponctuel ne change pas la structure de bande du milieu. Cependant, afin d'introduire un tel défaut il n'est pas possible d'utiliser la même procédure que dans les cristaux. En effet, les échelles en jeu étant très petites devant la longueur d'onde incidente, retirer un résonateur ne piège pas de mode entre les parois, les distances étant trop petites pour qu'il s'établisse. Un mode résonant apparaît cependant à une fréquence f_B bien plus élevée que la gamme de fréquence de la bande interdite d'hybridation lorsque la relation de dispersion en pointillés noirs croise le bord de zone de Brillouin (figure II.4).

Il est néanmoins possible de baisser la fréquence de ce mode en s'appuyant sur les caractéristiques de cette bande interdite [96, 97]. En effet, cette dernière provient de la

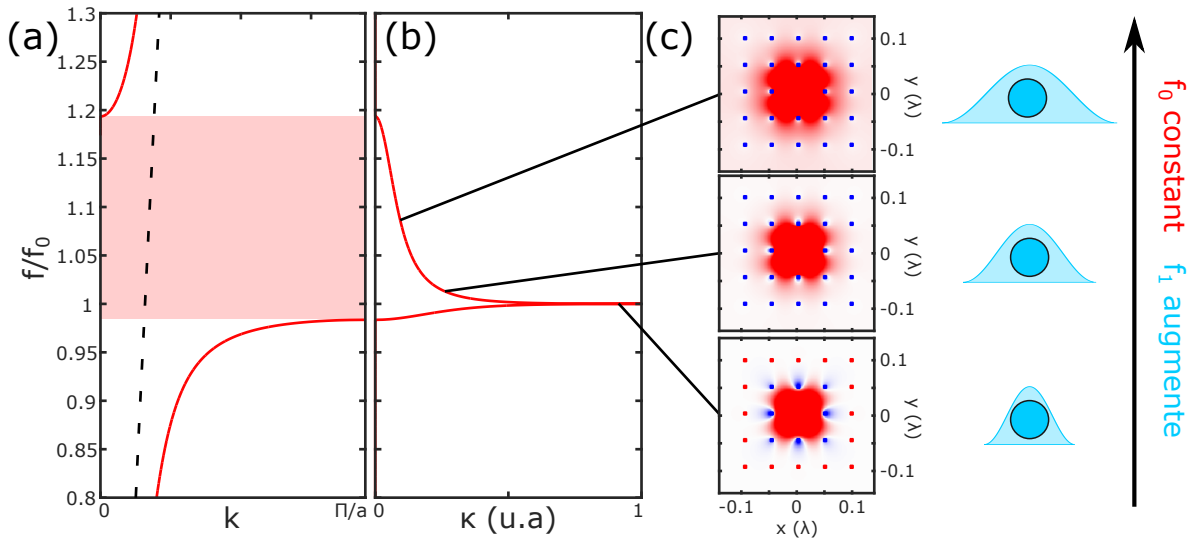


FIGURE II.5 – (a) Polariton (zoom sur la bande interdite). (b) Coefficient d'atténuation κ correspondant. (c) Degré de confinement du champ sur le défaut en fonction de la fréquence $f1$ de ce dernier.

nature résonante des inclusions du milieu, et non pas de la structure comme dans les cristaux. Il suffit donc de jouer localement avec la composition de la cellule unité du métamatériau pour générer ce défaut. Cela revient à y placer un résonateur dont la fréquence de résonance f_1 tombe dans la bande interdite du milieu environnant ($f_1 > f_0$) comme présenté sur la figure II.4. C'est l'équivalent du dopage en physique du solide, qui consiste à ajouter ou enlever des électrons dans les semi-conducteurs pour induire des nouveaux états énergétiques dans la bande interdite [98].

De la même manière que pour les cristaux, il est possible d'exciter ces défauts ponctuels par effet tunnel d'une onde évanescente. On forme ainsi une cavité dont les parois réfléchissantes sont créées par les résonateurs voisins qui génèrent la bande interdite. Contrairement aux défauts dans les cristaux, le champ est ici confiné sur une échelle très petite devant la longueur d'onde, et ce dans toutes les directions, ce qui correspond à un volume modal V beaucoup moins important. Dans le cas où la dissipation est relativement faible (soit pour un facteur de qualité Q_{diss} élevé), ces cavités sont capables de concentrer une grande quantité d'énergie pendant des temps longs. Ceci est décrit par le facteur de Purcell F_p [99] :

$$F_p = \frac{3\lambda^3}{4\pi^2}\frac{Q}{V} \tag{II.3}$$

Ainsi au cours de sa thèse, Nadège Kaina a mesuré dans le domaine micro-ondes que de

tels défauts résonants présentaient des facteurs de Purcell de l'ordre de 10^5, beaucoup plus élevés que pour les défauts de Bragg [97]. Ceci s'explique par le fait que le volume modal V correspondant est drastiquement plus faible que dans les cristaux photoniques, et ce pour des facteurs de qualité Q équivalents.

Par ailleurs, la longueur d'atténuation liée à la bande interdite d'hybridation, en plus d'être beaucoup plus faible que celle correspondant à une bande interdite de Bragg, varie fortement avec deux paramètres : la densité de résonateurs et la fréquence de travail. Il est ainsi possible de contrôler l'étalement spatial du mode piégé dans le plan du métamatériau en augmentant ou diminuant le nombre de résonateurs autour du défaut. Ceci s'ajuste aussi simplement avec la fréquence de résonance f_1 du défaut comme le montre la figure II.5. Plus celle-ci s'éloigne de f_0, moins le champ correspondant est confiné sur le défaut. En outre, la bande interdite provenant de la nature résonante des inclusions, la structure sub-longueur d'onde du système n'a pas d'influence sur cette dernière [97]. Ainsi, non seulement les métamatériaux localement résonants permettent de créer simplement des cavités résonantes dont le volume modal V est plusieurs ordres de grandeur plus faible que dans les cristaux, ils permettent aussi d'avoir un contrôle très poussé sur les propriétés de ces dernières.

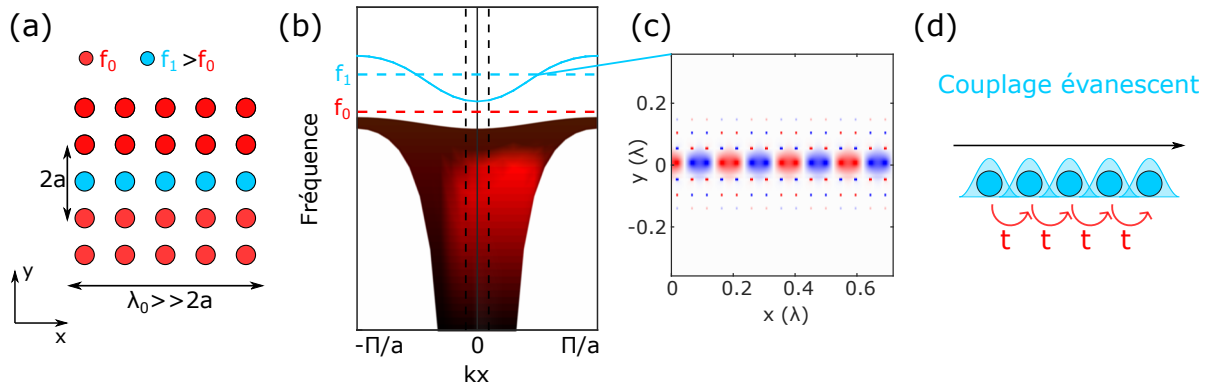


FIGURE II.6 – (a) Guide d'onde de défauts dans un métamatériau localement résonant. (b) Relation de dispersion correspondante projetée selon k_x (gauche). (c) Carte de champ ainsi que le mécanisme de propagation correspondant (d).

Guide d'onde de défauts

Nous nous intéressons à présent à l'implémentation d'une chaîne de défauts identiques de fréquence f_1 selon l'axe x au sein du métamatériau localement résonant (figure II.6(a)). Ce système est invariant par translation discrète selon la direction Ox, il est donc possible

d'appliquer le théorème de Bloch et d'obtenir la structure de bande correspondante. Cette dernière montre l'apparition d'une bande de propagation au sein de la bande interdite d'hybridation (en bleu sur la figure II.6(b)). Elle correspond à des modes guidés le long de la chaîne de défauts. Cette dernière se comporte donc comme un guide d'onde dont le confinement transverse est de l'ordre du pas du réseau donc beaucoup plus faible que la longueur d'onde [96].

Néanmoins, le mécanisme de propagation de l'onde guidée dans le métamatériau diffère de celui correspondant au modèle du polariton. En effet, les bandes polaritoniques émergent d'un couplage entre l'onde incidente et les inclusions résonantes. Elle existe donc grâce à la présence de l'onde propagative dans l'espace libre, qui s'hybride ensuite avec les résonateurs du milieu. Dans le cas de la chaîne de défauts, cette propagation libre n'est plus autorisée à cause de la bande interdite. Il est en revanche possible d'exciter un premier défaut via une onde évanescente, comme expliqué précédemment. Bien que l'énergie soit fortement confinée sur le site du défaut, ce dernier n'est pas totalement isolé du défaut voisin et le champ peut « tunneler »d'un site à l'autre comme le montre la figure II.6(b). Ce guide d'onde se comporte donc comme une succession de cavités reliées par un couplage évanescent.

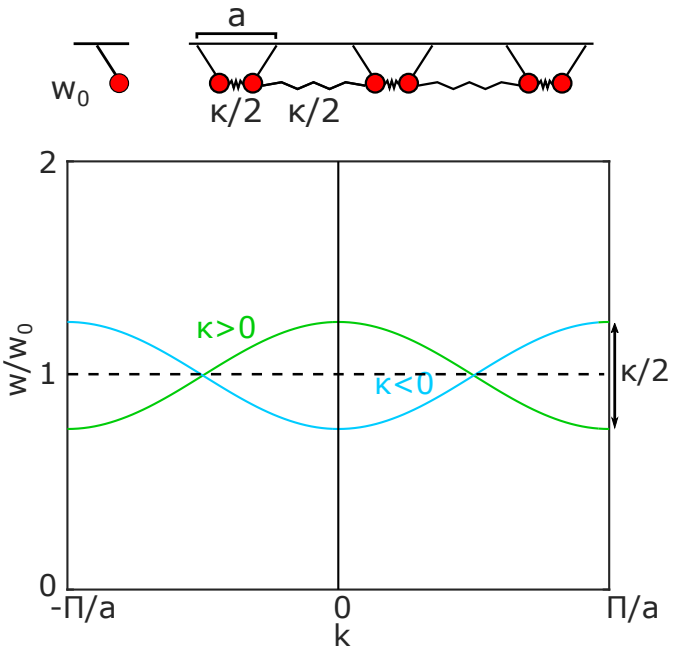


FIGURE II.7 – Relation de dispersion d'une chaîne d'oscillateurs couplés par des ressorts correspondant à un modèle de liaison forte (*tight-binding*).

Ce système est précisément décrit par le modèle de liaison forte (*tight-binding* en

anglais) qui correspond à une chaîne d'oscillateurs couplés par des ressorts de raideur $\kappa/2$ et dont la relation de dispersion est la suivante :

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + \kappa \cos ka) \tag{II.4}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance d'un résonateur et a le pas du réseau unidimensionnel. Dans le cas où le couplage se limite au plus proche voisin on obtient ($\kappa \to 0$) :

$$\omega = \omega_0(1 + \frac{\kappa}{2} \cos ka) \tag{II.5}$$

Dans ce cas précis, la bande de propagation est sinusoïdale oscillant autour de ω_0. Elle présente donc un profil symétrique autour de la pulsation ω_0, dont l'allure dépend du signe du coefficient de couplage κ comme le montre la figure II.7. La bande de défauts au sein de la bande interdite d'hybridation du métamatériau est ainsi similaire au cas où ce couplage est négatif.

Si ensuite, pour une densité de résonateurs fixée, on augmente la fréquence de résonance f_1 des défauts, la bande interdite environnante devient de moins en moins efficace et le confinement du champ sur les sites des défauts diminue progressivement. Le champ pénètre donc de plus en plus dans le milieu et l'interaction prend progressivement un caractère délocalisé. Cette transition du modèle *tight-binding* avec un couplage plus proche voisin vers un polariton émergeant de l'hybridation de l'onde propagative avec les résonateurs est représentée sur la figure II.8. La bande perd son profil sinusoïdal et s'étire de plus en plus vers les basses fréquences.

Ces guides d'onde de défauts ont leurs équivalents dans le domaine des cristaux photoniques : les *Coupled Resonator Optical Waveguides* (*CROWs*) [100–102] . Il en existe plusieurs types conçus à partir de résonateurs variés tels que des micro-disques résonants [100] ou des anneaux résonants [103]. Ils ont aussi été transposés aux micro-ondes en utilisant des résonateurs magnétiques tels que des anneaux fendus [104] ou des *swiss rolls* [105]. Ces guides permettent entre autre de ralentir drastiquement la propagation des ondes [103, 106–108]. Cette propriété est activement recherchée dans le domaine des télécommunications car elle facilite le contrôle temporel de l'information. D'un point de vue plus fondamental, l'utilisation des ondes lentes permet d'augmenter l'interaction lumière-matière. Suivant ce modèle, des lignes à retard conçues avec des guides d'onde de défauts dans des métamatériaux localement résonants ont aussi été démontrées au cours de la thèse de Nadège Kaina [109]. En plus d'être très compactes et robustes au désordre spatial, ces dernières ralentissent les ondes sur des bandes de fréquence larges. Pour une

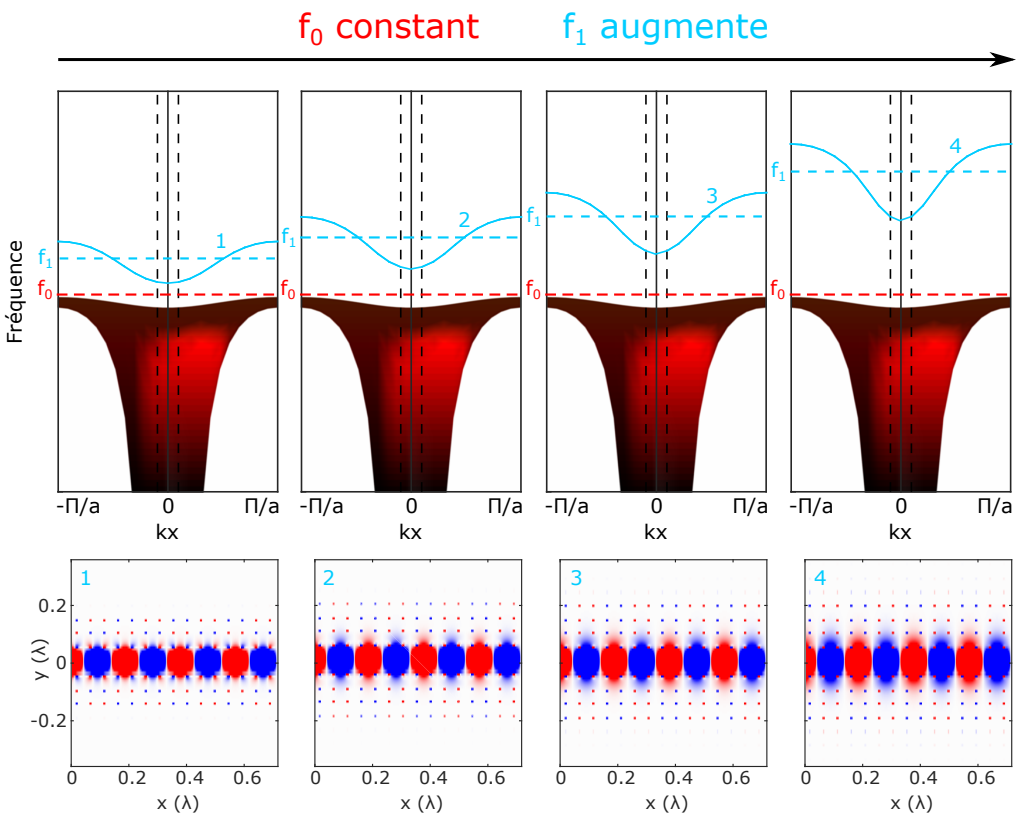


FIGURE II.8 – Évolution de la relation de dispersion de la chaîne de défaut en fonction de la fréquence de résonance f_1 de ces derniers.On observe une diminution du confinement du champ qui traduit une transition entre un modèle de liaison forte localisé vers un polariton délocalisé.

longueur d'onde fixée, cela leur donne un avantage certain sur les *CROWs* traditionnels.

Introduire des défauts résonants dans le métamatériau permet ainsi de changer le mécanisme de propagation des ondes. En l'occurence, cela crée un couplage localisé spatialement en son sein qui est facilement contrôlable. Le paragraphe suivant fait le lien entre cette interaction et la propagation des électrons dans les solides.

Physique du solide : Hamiltonien *tight-binding*

En physique du solide, la façon habituelle de calculer les structures de bandes électroniques est d'utiliser des Hamiltoniens répondant au modèle de liaison forte [98]. Ils reposent sur le fait que dans les solides, les électrons sont localisés autour des atomes. Ils forment ainsi des orbitales atomiques qui représentent la densité de probabilité de présence de ces électrons sur le site atomique (figure II.9(a)). Cela se traduit par une certaine

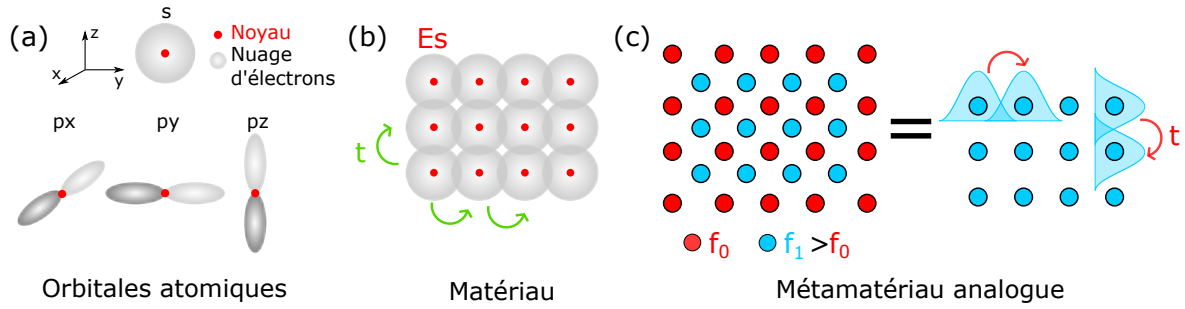


FIGURE II.9 – (a) Quatre premières orbitales atomiques. (b) Schéma correspondant au recouvrement partiel de ces orbitales au sein d'un matériau. (c) Equivalent de (b) avec des défauts dans un métamatériau localement résonant.

énergie par site E_s (figure II.9(b)). Cependant, au sein du matériau, ces orbitales sont susceptibles de se recouvrir spatialement et permettent ainsi aux électrons de passer d'un site à l'autre, ce qui est pris en compte par un terme de saut t dans l'Hamiltonien :

$$H = \begin{bmatrix} E_s & t \\ t & E_s \end{bmatrix} \tag{II.6}$$

Cette situation est ainsi très similaire au couplage évanescent entre des défauts voisins dans le métamatériau localement résonant décrit au paragraphe précédent. En utilisant les propriétés de la bande interdite du milieu, il est possible de passer d'un type de propagation polaritonique, délocalisée sur l'ensemble du système, à un couplage localisé entre les défauts. En poussant ce parallèle plus loin, il est à présent envisageable de reproduire à une échelle macroscopique la physique décrite par les Hamiltoniens *tight-binding* de physique du solide avec un métamatériau localement résonant. De cette façon, les défauts résonants se comportent comme des méta-atomes et l'onde qui se propage de site en site est le pendant macroscopique des sauts électroniques entre différentes orbitales (figure II.9(c)). Dans la partie suivante, nous allons appliquer ce concept à un exemple bien connu en physique du solide : le graphène.

II.2 Cristaux de défauts : l'exemple de l'Hamiltonien du graphène

II.2.1 Graphène

Matériau

Le graphène est le premier matériau cristallin bidimensionnel à avoir été découvert [110–112]. Il consiste en une couche monoatomique d'atomes de carbone organisés selon un réseau hexagonal. Ses paramètres cristallographiques sont décrits sur la figure II.10(a). L'empilement de plusieurs de ces couches donne naissance au graphite, que l'on retrouve dans les mines des crayons à papier par exemple. Il a été isolé pour la première fois en 2004 à l'université de Manchester par Andre Geim et Konstantin Novoselov, en utilisant du ruban adhésif, ce qui leur a valu le prix Nobel de physique en 2010 [110].

Ce système possède de nombreuses propriétés qui sortent de l'ordinaire. C'est l'objet le plus fin, le plus léger qui existe mais aussi le plus dur. Il est en effet plus résistant que le diamant et trois cent fois plus rigide que l'acier. En outre, ce matériau est transparent vis-à-vis de la lumière et très souple ce qui permet de le déformer à volonté. Il conduit aussi le courant beaucoup mieux que le cuivre, sa densité de courant électronique étant plus grande par six ordres de grandeur [113].

A la suite de la découverte du graphène, de nombreux autres matériaux bidimensionnels ont été isolés et étudiés tels que les couches uniques de BN (Nitrure de Bore) ou de métaux de transition dichalcogenide (TMD) par exemple. L'empilement de ces différents systèmes permet ainsi de tirer parti de leurs propriétés intrinsèques extraordinaires et rend le domaine des matériaux 2D très prometteur comme en témoigne l'engouement dont font preuve à la fois les domaines industriel et académique à son égard.

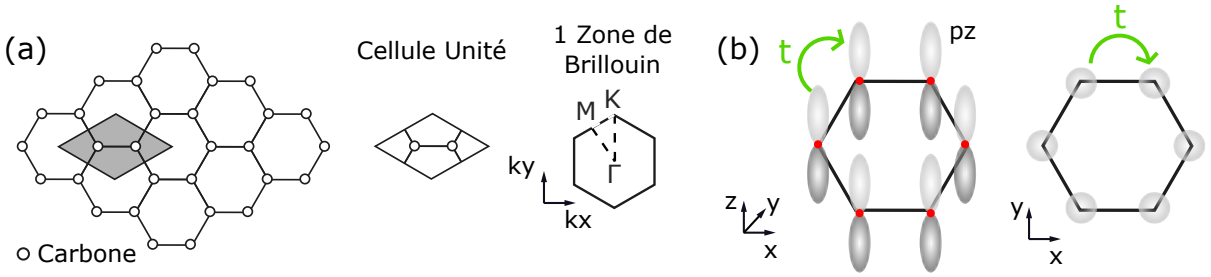


FIGURE II.10 – (a) Réseau du graphène. (b) Orbitales p_z responsables des bandes de conduction du matériau.

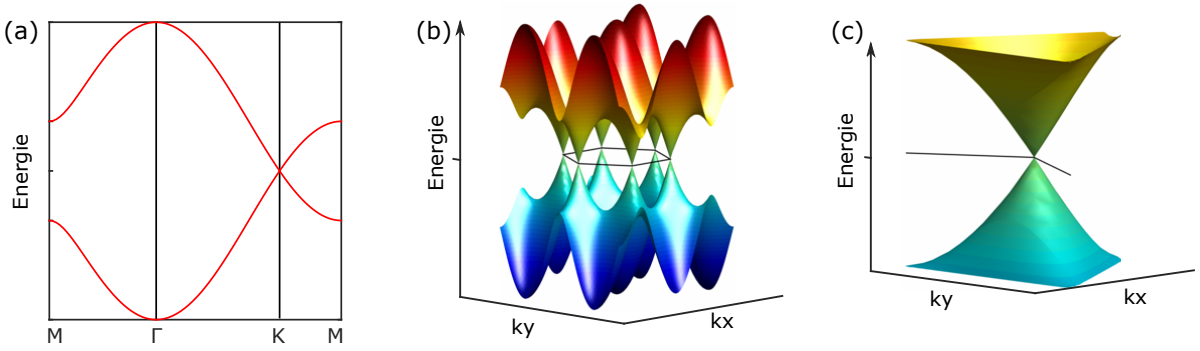


FIGURE II.11 – (a) Diagramme d'énergie obtenue avec l'Hamiltonien *tight-binding* du graphène projetée selon les directions principales de la première zone de Brillouin. (b) Similaire à (a) mais pour toute la première zone de Brillouin. (c) Zoom sur le cône de Dirac aux coins K de la première zone de Brillouin.

Structure de bande électronique

Dans la suite nous nous intéressons aux propriétés électroniques du graphène et notamment à sa structure de bande. L'atome de carbone possède des orbitales atomiques de type s et p qui sont susceptibles de former des liaisons de type σ et π au sein du réseau hexagonal par hybridation sp^2. Les liaisons liantes π et antiliantes $\pi*$ émergent à partir des orbitales atomiques p_z du carbone, et sont donc hors du plan du réseau. Ce sont elles qui portent les électrons de conduction du système et sont responsables de la propagation électronique dans le milieu. L'étude se réduit donc au plan (xy) (figure II.10(b)).

La structure de bande du graphène peut être calculée en diagonalisant un Hamiltonien de type *tight-binding* qui repose sur deux caractéristiques principales de ces liaisons π : le couplage entre deux sites plus proches voisins et la structure hexagonale du réseau [114, 115]. On obtient ainsi l'expression suivante :

$$E_{\pm}(k_x, k_y) = \pm t[3 + 4\cos\frac{\sqrt{3}k_x a}{2}\cos\frac{k_y a}{2} + \cos k_y a]^{1/2} \tag{II.7}$$

où t est le recouvrement des orbitales, a la distance inter-atomique, et les signes $(+)$ et $(-)$ correspondent respectivement aux bande liantes et antiliantes. Le diagramme d'énergie correspondant est ainsi représenté sur les figures II.11(a) et (b). Il présente un profil symétrique en accord avec le couplage fort entre plus proches voisins uniquement.

Par ailleurs, aux coins de la première zone de Brillouin, la bande de valence et la bande de conduction sont dégénérées et forment un cône appelé cône de Dirac (figure II.11(c)). C'est cette particularité de la structure de bande qui est responsable des pro-

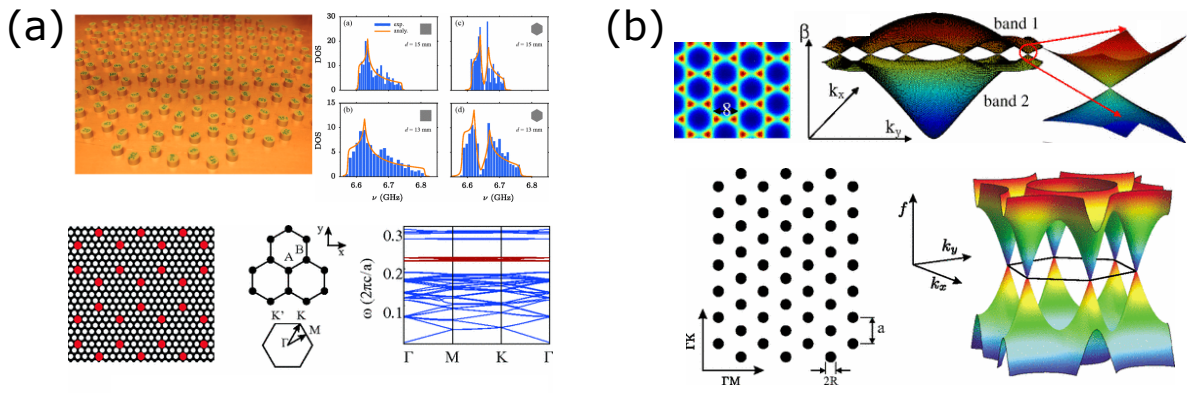


FIGURE II.12 – Matériaux composites macroscopiques avec des cônes de Dirac. Une partie d'entre eux présente un couplage champ proche comme le graphène (gauche), tandis que les autres sont des cristaux photoniques régis par des interférences de Bragg (droite).

priétés électroniques extraordinaires du graphène. En effet, la relation de dispersion des électrons dans les solides est de type quadratique. Cela est lié aux potentiels atomiques du réseau dont l'interaction avec la propagation électronique peut être décrite comme une masse effective. Dans le cas du graphène, cette masse est nulle et la relation de dispersion est linéaire au voisinage des cônes de Dirac. Les électrons ont ainsi des propriétés qui se rapprochent des particules relativistes décrites par l'équation de Dirac, où la vitesse de la lumière est remplacée par la vitesse de Fermi $v_F = 3ta/2 = 10^6 m.s^{-1}$:

$$E_{\pm}(k_x, k_y) \approx \pm v_F \sqrt{{k_x}^2 + {k_y}^2} \tag{II.8}$$

Cette propriété est responsable de la très grande mobilité des porteurs de charge dans ce matériau et permet d'envisager l'étude de particules pseudo-relativistes avec un système plus simple à appréhender que les accélérateurs de particules.

En outre, il a été démontré que les modes propres correspondant à ces cônes de Dirac pouvaient être décrits par des particules ayant un pseudo-spin 1/2. Ce dernier émerge de la structure cristalline du milieu et est décorrélé du spin intrinsèque de l'électron. Ce degré de liberté supplémentaire est ainsi responsable de phénomènes exotiques tels que le tunneling de Klein [116]. Il consiste en la transmission totale de la fonction d'onde à travers une barrière de potentiel pour le cas d'une incidence normale.

Analogues macrosopiques

Les propriétés particulières à ces cônes de Dirac ont motivé la découverte de ses analogues macroscopiques. Ainsi, plusieurs études ont transposé l'Hamiltonien *tight-binding* du graphène dans la physique classique. C'est le cas en micro-ondes d'un ensemble de résonateurs de Mie placés sur un plan de masse reliés entre eux par un couplage évanescent [117], ou encore de cavités couplées dans un cristal photonique [118] (figure II.12(a)).

Ces cônes de Dirac existent aussi dans des milieux qui ne possèdent pas de couplage fort entre plus proches voisins. En effet, ces dégénérescences sont uniquement liées à la présence de certaines symétries dans le réseau et ne dépendent pas directement du type de couplage entre les sites. Ainsi, de nombreux travaux ont démontré la présence de ces cônes dans des cristaux photoniques de type hexagonal en optique [119–121] et de type triangulaire en micro-ondes [122] (figure II.12(b)). On trouve aussi leurs équivalents acoustiques et élastiques dans des cristaux phononiques. Cependant, comme la physique de ces systèmes cristallins repose sur des interférences de Bragg, leurs cônes de Dirac correspondent à des modes dont les variations spatiales sont de l'ordre de la longueur d'onde de travail.

Dans la partie suivante, nous montrons qu'il est possible d'implémenter la physique décrite par le modèle de liaison forte de l'Hamiltonien du graphène dans un métamatériau localement résonant et ainsi d'obtenir des cônes de Dirac à une échelle très sub-longueur d'onde.

II.2.2 Analogue du graphène dans un métamatériau localement résonant

Afin d'obtenir cet Hamiltonien, il faut réunir ses deux paramètres principaux qui sont le couplage fort entre plus proches voisins et le réseau hexagonal. Nous avons vu précédemment qu'il était possible d'induire un couplage évanescent entre des défauts résonants grâce à la bande interdite d'hybridation du métamatériau.

Nous proposons donc le protocole suivant, présenté sur la figure II.13, dont le point de départ est l'espace libre, dans lequel les ondes peuvent se propager à toutes les fréquences. Nous mettons en place un premier sous-réseau de résonateurs dont la fréquence de résonance est f_0, dont l'arrangement spatial est triangulaire. Cela crée une relation de dispersion de type polariton dans le système, comme nous l'avons vu au premier chapitre. Par conséquent, les ondes ne sont plus autorisées à se propager dans le milieu pour une bande de fréquence supérieure à f_0, correspondant à la bande interdite d'hybridation.

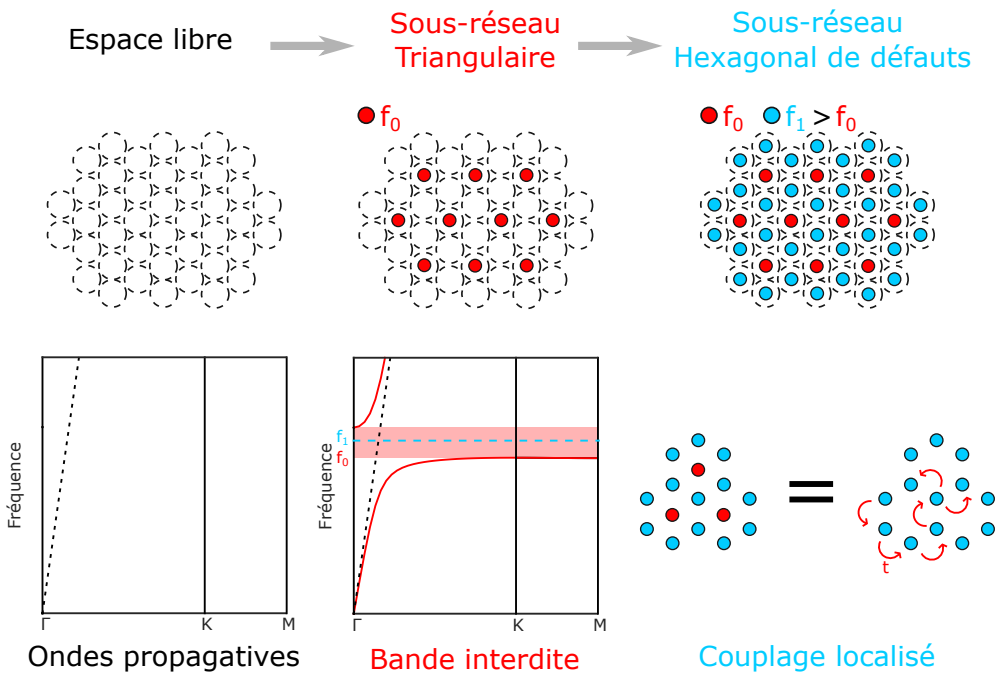


FIGURE II.13 – Protocole d'implémenter les caractéristiques de l'Hamiltonien *tight-binding* du graphène dans un métamatériau localement résonant.

Nous utilisons ensuite cette bande interdite afin d'introduire des défauts dans le système. Comme expliqué précédemment, ces derniers sont des résonateurs dont la fréquence de résonance f_1 est supérieure à f_0. Ces défauts sont arrangés selon un second sous-réseau, de symétrie hexagonale cette fois-ci, autour du premier sous réseau triangulaire. La bande interdite, en confinant le champ sur les sites du réseau hexagonal de défauts, force l'énergie à « tunneler »d'un site donné vers son plus proche voisin et empêche tout couplage avec les résonateurs plus distants. Elle induit bien un couplage de type liaison forte dans le réseau hexagonal : les deux ingrédients de l'Hamiltonien du graphène sont réunis.

Dans la suite nous démontrons la pertinence de cette approche en concevant deux analogues du graphène, électromagnétique et acoustique.

II.2.3 Analogue électromagnétique : Milieu de fils

Nous nous plaçons ici dans le domaine des micro-ondes et utilisons des fils de cuivres de diamètre $d = 1$ mm sur un plan de masse comme méta-atomes. Comme nous l'avons vu précédemment, la fréquence de résonance de ces fils est inversement proportionelle à leur longueur L. Ainsi les deux sous-réseaux décrits dans le paragraphe suivant sont simplement composés de fils de longueur différentes (figure II.14(a) et (b)). Les fils du

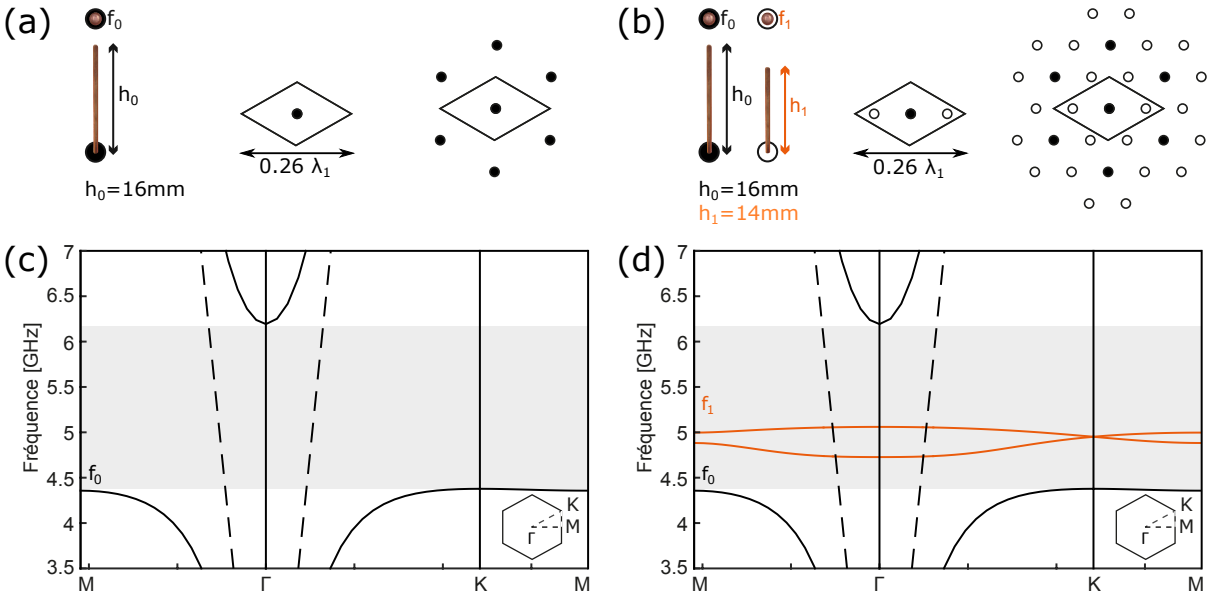


FIGURE II.14 – (a) Sous-réseau triangulaire de fils longs (disques noirs) avant l'ajout de défauts. (b) comme (a) mais après l'ajout du sous-réseau hexagonal de fils courts (cercles noirs).(c)(resp.(d)) Relation de dispersion correspondant à (a)(resp. (b)).

premier sous-réseau triangulaire ont une longueur $h_0 = 16$ mm et sont représentés par des disques noirs. Ceux du deuxième sous-réseau hexagonal de défauts sont plus courts ($h_1 = 14$ mm) et sont représentés par des cercles noirs. Ceci correspond à des fréquences de résonance respectivement égales à $f_0 = 4.68$ GHz et $f_1 = 5.35$ GHz $> f_0$. La distance inter-fils a est de 5 mm ce qui correspond à une cellule unité de type losange dont la longueur maximale est d'environ 15 mm $= 0.26\ \lambda_1$. Le métamatériau est bien structuré sur une échelle très petite devant la longueur d'onde de travail.

Relation de dispersion numérique

Nous calculons tout d'abord la relation de dispersion du cristal infini composé de ces deux sous-réseaux grâce au logiciel COMSOL Multiphysics. Cela revient à appliquer des conditions de bord périodiques sur les parois d'une cellule unité, c'est-à-dire implémenter le théorême de Bloch. Ces relations de dispersion, projetées sur les directions principales du réseau (ΓM, ΓK, KM) sont représentées sur les figures II.14(c) et (d) pour les cas avant et après l'ajout des défauts respectivement.

Ainsi, avant d'introduire les fils les plus courts, la relation de dispersion est bien celle décrite par le modèle du polariton avec l'ouverture d'une bande interdite au dessus de f_0 (partie grisée sur la figure II.14(c)). Après l'ajout des défauts, deux nouvelles bandes appa-

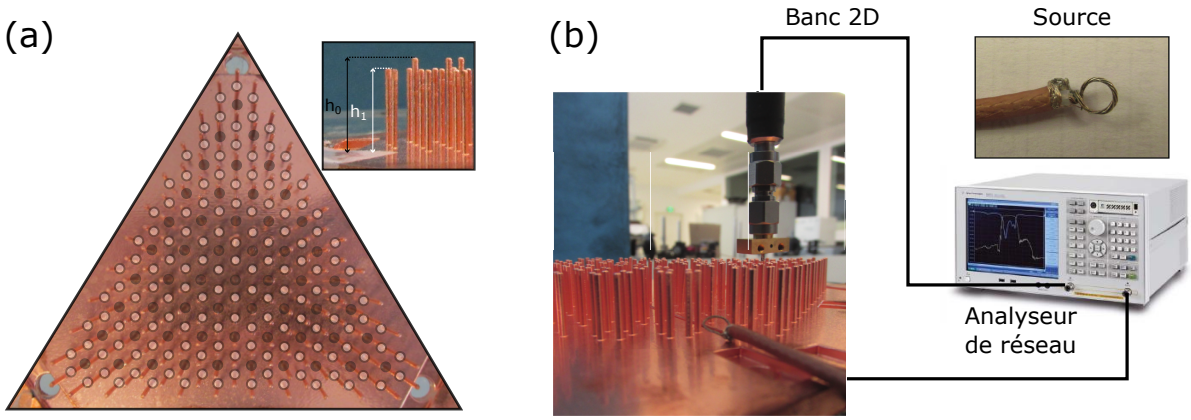


FIGURE II.15 – (a) Echantillon. (b) Protocole expérimental.

raissent dans la bande interdite précédente (représentées en orange sur la figure II.14(d)). Ces dernières sont similaires aux bandes calculées de la figure II.11 avec l'Hamiltonien *tight-binding* du graphène. En effet, elles présentent un profil symétrique par rapport à la fréquence du point de Dirac qui existe au point K de la zone de Brillouin.

Echantillon et expérience

Nous vérifions ensuite ces résultats en concevant l'échantillon correspondant représenté sur la figure II.15(a). Ce dernier est fabriqué au CEA dans l'équipe de Thomas Berthelot au sein du laboratoire IRAMIS. Le processus de fabrication consiste à imprimer une première version de l'échantillon en polymère ABS grâce à une imprimante 3D. On dépose ensuite chimiquement une couche de cuivre sur le plastique plus épaisse que l'épaisseur de peau du métal aux fréquences de travail [109]. Vis-à-vis des ondes électromagnétiques incidentes, l'échantillon obtenu se comporte donc exactement comme un milieu de fils métalliques sur un plan de masse. Par ailleurs, sa forme globale est celle d'un triangle dont les côtés sont de dimension comparable à λ_0, afin de respecter les symétries des différents sous-réseaux.

Nous réalisons ensuite l'expérience décrite sur la figure II.15(b). Nous mesurons la transmission entre une source magnétique, correspondant à une petite boucle de courant (2 mm de diamètre) disposée sur le plan de masse à proximité des fils, et une sonde de champ proche qui vient mesurer le champ électrique 1 mm au-dessus de ces derniers. Cela évite de mesurer directement le signal émis par la source et permet donc d'obtenir de meilleurs résultats. Pour cela nous utilisons un analyseur de réseau (Agilent Technologies N5230C) qui nous permet d'obtenir la transmission sur une large bande de fréquence, allant de 3.8 GHz à 5.2 GHz en une mesure. La sonde est ensuite montée sur un banc

de mesure bidimensionnel (Newport M-IMS400PP) qui permet de balayer l'ensemble du métamatériau étudié.

Cartes de champ électrique

Cet expérience nous fournit ainsi des cartes de champ électrique correspondant à la réponse du système pour chacune des fréquences d'excitation. En faisant une moyenne spatiale de ces mesures sur une surface correspondant au centre de l'échantillon on obtient le spectre moyen de la figure II.16. Il présente plusieurs pics de résonance qui témoignent du bon couplage entre l'excitation et les modes stationnaires de l'échantillon. Ces pics peuvent être séparés en deux groupes étiquetés en bleu pour les basses fréquences et en rouge pour les fréquences plus élevées. Ces deux groupes sont séparés par une bande interdite qui existe pour les fréquences allant de 4.4 GHz à 4.75 GHz. Ces bandes apparaissent ainsi à des fréquences qui sont en bon accord avec les résultats numériques du paragraphe précédent.

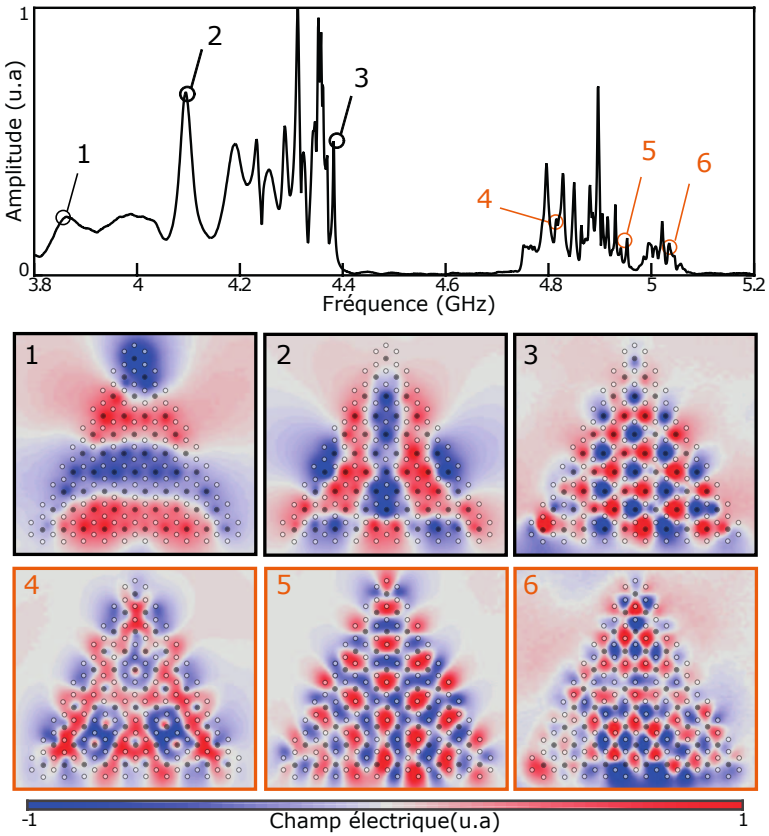


FIGURE II.16 – Spectre moyenné sur le centre de l'échantillon (haut) et cartes de champ électriques expérimentales correspondantes (bas).

Nous nous intéressons à présent aux cartes de champs correspondant à ces différents groupes de pics (figure II.16 encadrés dans les couleurs correspondants). Ces dernières montrent que les périodicités spatiales des modes cristallins dans le métamatériau sont plus petites que la longueur d'onde de travail. Par ailleurs, ces échelles spatiales varient aussi fortement sur une faible gamme de fréquence ce qui témoigne de la grande dispersion du milieu. En outre, grâce à la faible dissipation des fils de cuivre à ces fréquences, ces modes, même les plus sub-longueur d'onde, sont très bien définis.

Cela nous permet d'aller voir de plus près les cartes de champ des différents groupes de pics. Si l'on se concentre sur celles correspondants à la bande de basse fréquence (en noir), on remarque que le champ est majoritairement distribué sur le sous-réseau triangulaire de longs fils (disques noirs). Inversement, le champ est plutôt porté par les fils les plus courts (cercles noirs) dans le cas des pics aux hautes fréquences (en orange). D'ailleurs, pour le mode 4, le champ disposé sur le sous-réseau triangulaire est déphasé de π par rapport au champ sur le sous-réseau hexagonal comme on l'avait déjà observé dans le cas des cavités II.4(c). L'ensemble de ces premières observations est cohérent avec le fait que l'on a créé un cristal de défaut au sein de la bande interdite d'hybridation du métamatériau. Cependant, cela n'est pas encore suffisant pour affirmer que ce cristal est un analogue électromagnétique du graphène.

Contours isofréquence

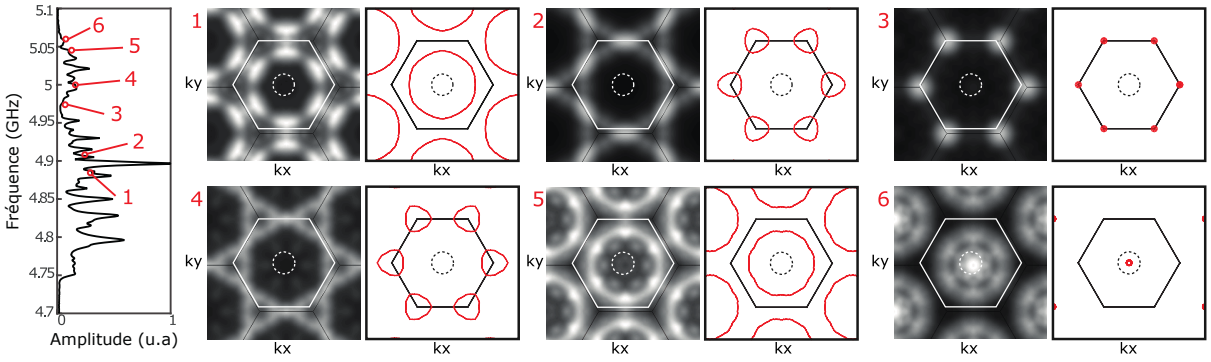


FIGURE II.17 – Transformées de Fourier spatiales bi-dimensionelles ainsi que les contours isofréquences correspondants pour plusieurs fréquences de la bande de défauts.

Dans cette optique nous passons dans l'espace réciproque afin de relier la fréquence des modes correspondants au réseau de défauts avec leur nombre d'onde de Bloch k_B. Pour cela nous calculons les transformées de Fourier spatiales bidimensionnelles de chacun de ces modes. Etant donné que l'ensemble de notre protocole expérimental est linéaire, nous

pouvons effectuer certaines modifications sur ces transformées de Fourier. Par conséquent, nous sommons les valeurs absolues de la transformée initiale avec celles modifiées selon certaines symétries autorisées par la zone de Brillouin hexagonale. En l'occurrence ces dernières sont la symétrie de rotation C_6 (angle de 60 degrés), deux miroirs ainsi que la répétition périodique de cette première zone de Brillouin imposée par le théorème de Bloch.

Grâce à cette procédure nous obtenons les cartes dans l'espace réciproque (k_x,k_y) représentées sur la figure II.17. En gardant uniquement leurs maxima nous sommes alors capables d'extraire les contours isofréquence correspondants (ligne rouge). La forme de ces contours varie fortement avec la fréquence, prouvant le caractère dispersif du milieu. Certains d'entre eux sont des cercles centrés sur l'origine du plan de Fourier ce qui est relié à une propagation isotrope dans le métamatériau. En ce sens, ils sont semblables au cas des diélectriques ce qui justifie la description usuelle en termes de paramètre effectif du système. Cependant, pour certaines fréquences les contours deviennent des cercles centrés autour des coins K de la zone de Brillouin. Cette forte anisotropie témoigne de la nature cristalline des modes portés par les défauts.

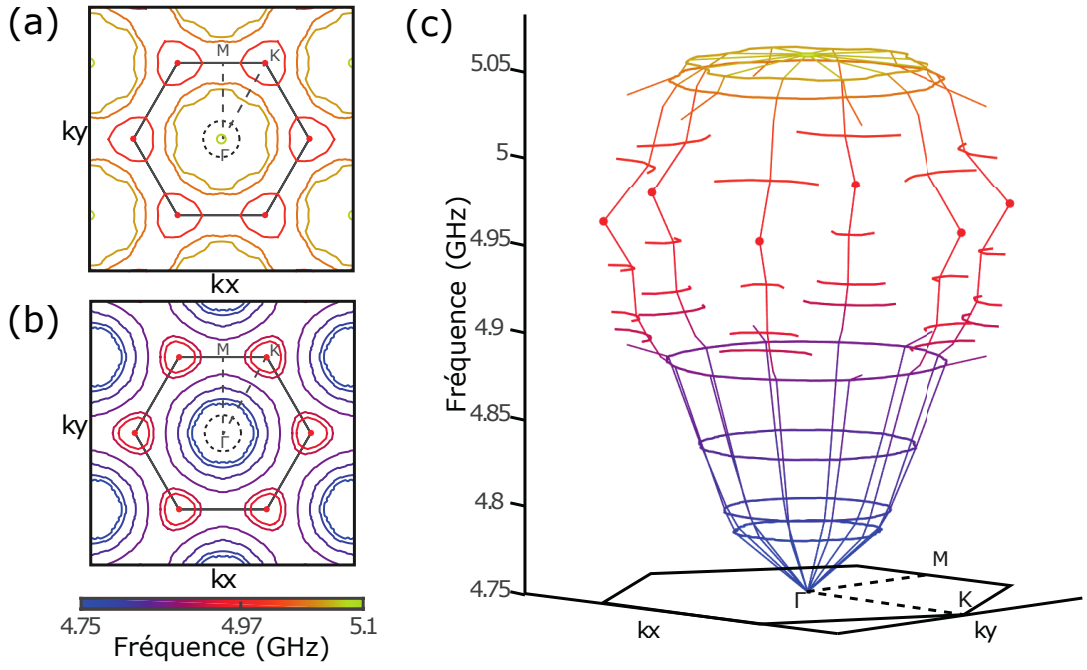


FIGURE II.18 – (a)(resp.(b)) Empilement des contours isofréquences pour la bande supérieure (resp. inférieure). (c) Représentation 3D de la relation de dispersion discrétisée du réseau de défauts obtenue expérimentalement. Elle correspond bien à la structure de bande du graphène.

Structure de bande

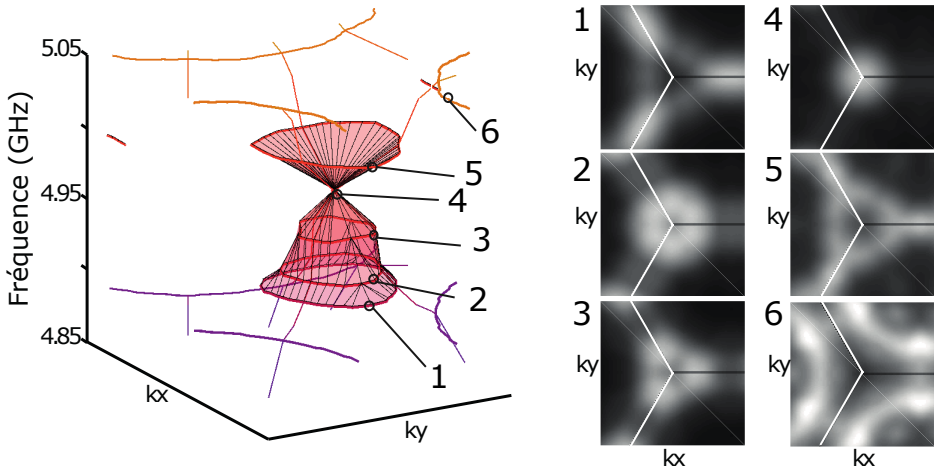


FIGURE II.19 – Zoom sur les cônes de Dirac sub-longueur d'onde obtenus expérimentalement.

Afin de mettre en évidence ces propriétés cristallines nous réalisons la procédure précédente pour plusieurs fréquences afin de reconstruire la structure de bande correspondant à ces modes de défauts. Nous superposons les différents contours isofréquence obtenus et leur attribuons une couleur liée à leur fréquence (figure II.18(a) et (b)). Cela permet de distinguer les deux différentes bandes de la relation de dispersion. Celle correspondant aux basses fréquences est composée de cercles concentriques centrés sur Γ dont le diamètre augmente avec la fréquence, ce qui témoigne de la pente positive de la bande. Ces contours deviennent ensuite des cercles centrés sur les coins K de la première zone de Brillouin dont le rayon diminue avec la fréquence jusqu'à ce qu'ils deviennent de simples points. Quant à la bande supérieure, elle présente le comportement inverse : les dégénérescences ponctuelles en K deviennent progressivement des cercles isotropes centrés sur Γ, donnant lieu à une pente négative de la bande.

La représentation 3D de ces résultats montre bien que nous avons réussi à obtenir expérimentalement une version discrétisée de la structure de bande du graphène au sein du milieu de fils (figure II.18(c)). Ceci s'explique par le nombre limité de modes accessibles dans notre échantillon de taille finie, par opposition à la relation de dispersion numérique continue calculée pour un milieu infini. Par ailleurs, cette structure de bande ne présente pas un profil parfaitement symétrique contrairement à celle calculée avec l'Hamiltonien *tight-binding* du graphène. Cela s'explique par le fait que pour cette fréquence de résonance de défauts le couplage n'est pas exclusivement entre les plus proches voisins mais s'étend

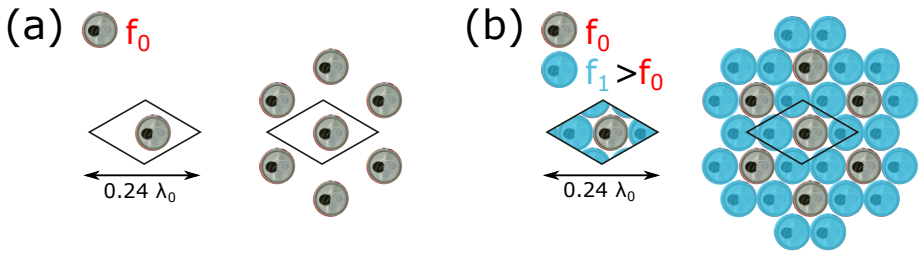


FIGURE II.20 – (a) Sous-réseau triangulaire de canettes vides avant l'ajout de défaut. (b) Similaire à (a) mais après l'ajout du sous-réseau hexagonal de canettes partiellement remplies (bleu).

légèrement plus loin dans le réseau. Nous expliquons ce phénomène plus en détail dans l'étude acoustique de la partie suivante.

Malgré tout, ces résultats démontrent sans ambigüité la mesure expérimentale de cônes de Dirac dans le métamatériau localement résonant. Contrairement à leurs homologues des cristaux photoniques, ces derniers, représentés plus en détail sur la figure II.19, sont de nature très sub-longueur d'onde. Ainsi en utilisant la bande interdite d'hybridation du métamatériau, nous avons réussi à induire un couplage localisé entre les sites voisins d'un réseau hexagonal de défauts. De cette manière nous avons réalisé, à l'échelle macroscopique, la physique décrite par l'Hamiltonien *tight-binding* du graphène.

II.2.4 Analogue acoustique : réseau de canettes

Après avoir vérifié expérimentalement notre procédure dans le domaine des micro-ondes, nous généralisons l'approche aux ondes acoustiques.

Nous utilisons ici des canettes de soda comme résonateurs de Helmholtz. Ces dernières, présentées dans le premier chapitre, ont une fréquence de résonance f_0 se situant autour de 420 Hz ce qui correspond à une longueur d'onde λ_0 d'environ 80 cm, beaucoup plus grande que le diamètre de la canette ($d = 6.6$ cm). Ce sont donc des méta-atomes pertinents pour notre étude. Leur fréquence de résonance est inversement proportionelle au volume d'air au sein de la canette. Les remplir partiellement d'eau augmente donc cette dernière.

Il est alors très simple en pratique d'appliquer notre procédure afin d'obtenir un équivalent acoustique du graphène (figure II.20). Nous formons un premier sous-réseau triangulaire non compact de canettes vides qui va créer une bande interdite d'hybridation pour les fréquences supérieures à f_0. Ensuite, nous ajoutons un deuxième sous-réseau hexagonal de canettes partiellement remplies autour du premier sous-réseau . Ces dernières se comportent ainsi comme des défauts résonants à la fréquence f_1 qui sont reliés entre eux

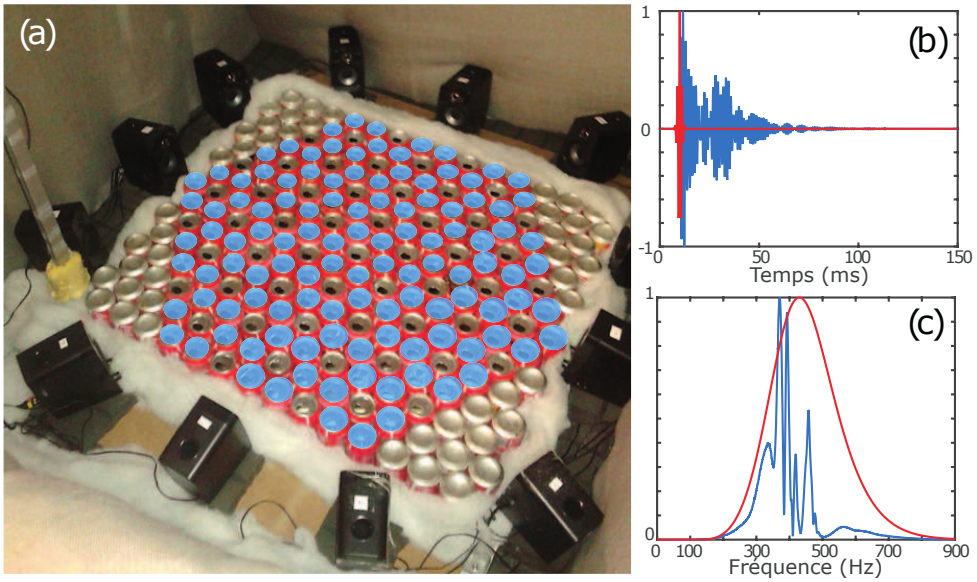


FIGURE II.21 – (a) Photo de l'expérience. (b) Signal temporel émis par un haut parleur (rouge) et reçu au centre de l'échantillon (bleu). (c) Spectre de (b).

par un couplage évanescent induit par la bande interdite environnante. Notons ici que la dimension maximale de la cellule unité est de 19 cm, soit 0.24 λ_0, ce qui montre que l'échelle de la structure du milieu est très inférieure à la longueur d'onde de travail.

Echantillon et expérience

Nous mettons donc en place un échantillon composé de 169 canettes, dont 122 sont remplies avec 8 cL d'eau (figure II.21). Sa forme est celle d'un grand hexagone afin de respecter les symétries des sous-réseaux et tous ses bords sont identiques. Ce métamatériau est ensuite placé à l'intérieur d'une chambre anéchoïque et entouré de 12 haut-parleurs positionnés à environ 15 cm des canettes et ce, selon les six axes de symétries du gros hexagone afin d'exciter toutes les directions du plan. La réponse du métamatériau est enregistrée grâce à un microphone monté sur un banc de mesure 2D et disposé 1 cm au-dessus de l'ouverture des canettes ce qui permet d'obtenir des cartes du champ de pression sur tout l'échantillon. Le signal envoyé est un chirp de 10 s dont le contenu fréquentiel s'étend de 100 Hz à 900 Hz. Après un filtrage adapté, ce signal d'émission revient en réalité à une impulsion gaussienne de 1.4 ms dont la fréquence centrale est 450 Hz (en rouge sur la figure II.21(b) et (c)).

Un signal typique obtenu au centre de l'échantillon est représenté en bleu sur la figure II.21(b). Nous voyons qu'il dure plus longtemps que le signal émis, ce qui témoigne de

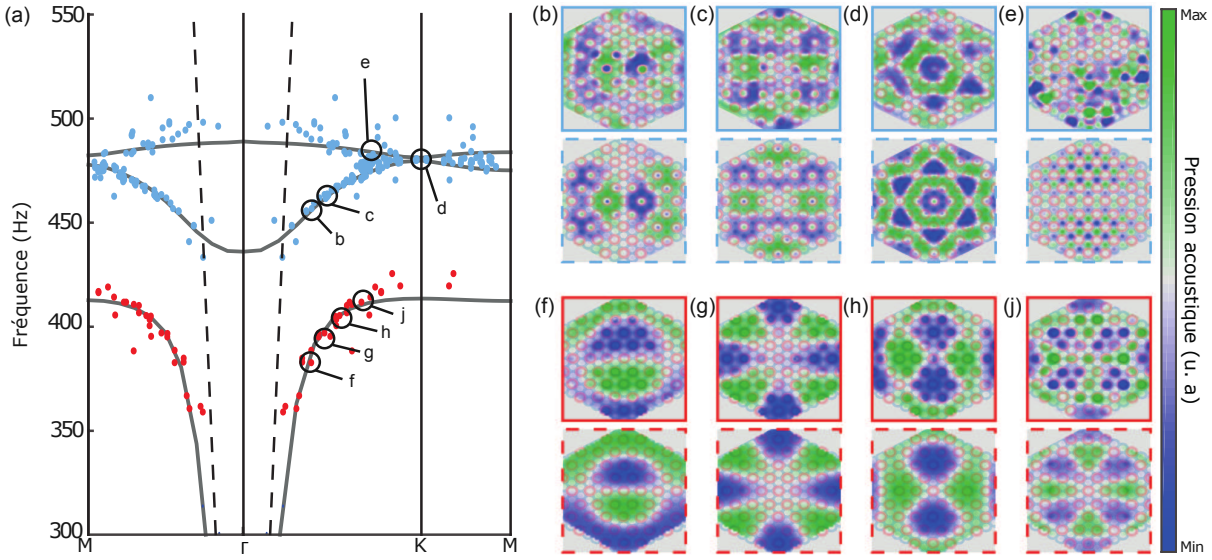


FIGURE II.22 – (a) Relation de dispersion obtenue expériementalement pour un volume de $8cL$ d'eau dans les défauts (gauche). Cartes de champ acoustiques numériques (trait pointillés) et expérimentales (trait continu) correspondantes (droite).

la présence de modes stationnaires au sein du métamatériau. Nous pouvons voir sur le spectre correspondant, présenté sur la figure II.21(c) (bleu), la présence d'un premier groupe de pics sous 450 Hz suivi ensuite par une bande interdite. Un deuxième groupe de pics existe ensuite juste en dessous de 500 Hz. Cependant, bien qu'ils témoignent du caractère dispersif de la propagation au sein du milieu ces résultats bruts ne sont pas assez précis afin de conclure sur la présence de bandes de défauts dans ce cas. Ceci s'explique par une dissipation intrinsèque plus importante dans les canettes comparé aux fils dans le cas électromagnétique précédent. Ceci élargit les pics du spectre et les fait se chevaucher. Par ailleurs, ces pertes ont une influence d'autant plus importante si les modes sont sub-longueur d'onde, ce qui est un problème majeur dans notre étude où l'on veut extraire la bande supérieure du réseau hexagonal de défauts ainsi que le cône de Dirac situé au coins de la zone de Brillouin.

Relation de dispersion

Nous voulons obtenir la relation de dispersion des ondes se propageant dans le milieu. Pour cela nous faisons tout d'abord une transformée de Fourier temporelle des signaux mesurés qui nous permet d'obtenir les cartes de champ de pression pour chacune des fréquences contenues dans l'impulsion émise. Le but est à présent de relier ces cartes à un nombre d'onde afin d'obtenir la relation de dispersion du milieu. Cependant, la dissipation

inhérente aux canettes et le recouvrement modal qu'elle entraîne empêche d'obtenir cette dernière en faisant une simple transformée de Fourier spatiale bi-dimensionnelle des cartes de champ.

Afin d'obtenir la relation de dispersion du milieu il faut donc aller plus loin dans le traitement des données. Nous simulons alors l'ensemble de l'échantillon grâce au logiciel COMSOL Multiphysics et obtenons les modes propres correspondants à l'échantillon complet ainsi que leur diagramme de rayonnement. Grâce à ces derniers il est envisageable d'exciter les modes propres du système avec les 12 sources utilisées dans l'expérience. En effet, le dispositif expérimental étant linéaire, nous pouvons générer l'effet d'excitations complexes en combinant linéairement les cartes de champ correspondant à chacun des haut-parleurs. L'étape suivante est de relier ces modes à la fréquence correspondante. Pour cela nous comparons à chaque fréquence la carte de champ correspondant à un schéma d'excitation bien précis avec tous les profils spatiaux des modes simulés. Finalement, le mode est placé dans l'espace réciproque en utilisant la relation de dispersion calculée initialement.

En accumulant ces correspondances entre fréquence et nombre d'onde, nous obtenons la relation de dispersion de la figure II.22. Cette dernière est en bon accord avec la relation de dispersion numérique (ligne grise) et présente deux groupes de points (rouges et bleus) séparés par une bande interdite. La bande supérieure se sépare en deux bandes se croisant au point K de la zone de Brillouin, prouvant l'existence d'un cône de Dirac dans le milieu, là encore bien en dehors du cône de son (pointillés).

Les cartes de champ correspondant à ces différentes bandes, présentées sur la figure II.22, montrent un bon accord entre expérience et simulation. Par ailleurs, si l'on se concentre sur les modes de la bande polaritonique (bleue), nous remarquons que le champ est majoritairement disposé sur le réseau triangulaire de canettes vides (cercles bleus). Pour les bandes de défauts c'est l'inverse : le champ est porté par les canettes remplies situées sur les sites du réseau hexagonal.

Ces résultats, bien que moins précis, sont similaires au cas électromagnétique de la partie précédente. Ils montrent que nous avons réussi, en jouant avec la structure et la composition de la cellule unité du métamatériau, à créer une structure cristalline hexagonale de défauts au sein de la bande interdite du métamatériau acoustique. Cependant, la structure de bande correspondante n'est pas symétrique par rapport à la fréquence du cône de Dirac ce qui nous force à penser que le couplage entre défauts n'est pas exactement de type plus proche voisin.

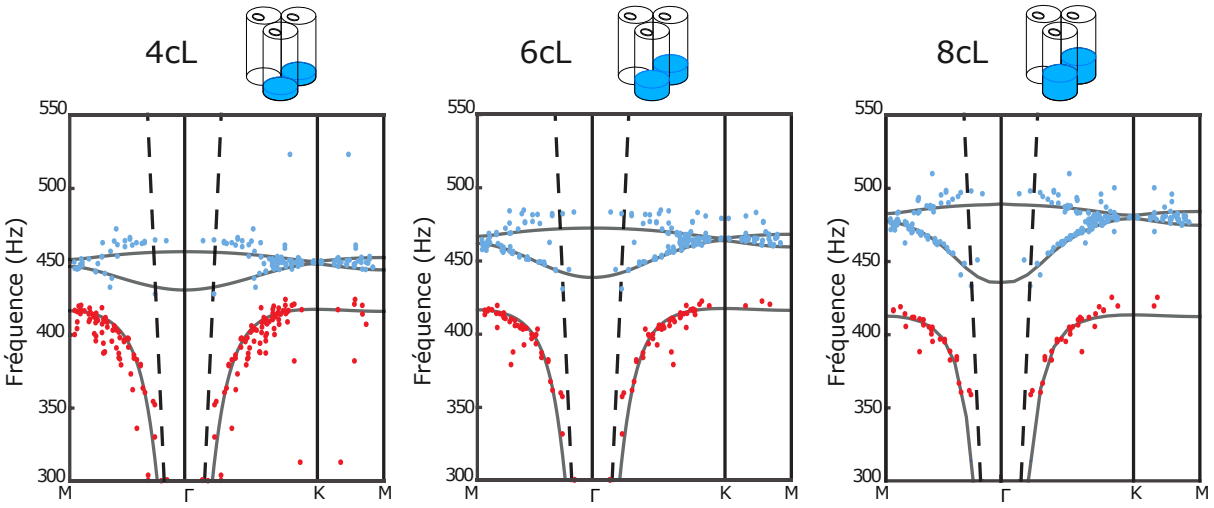


FIGURE II.23 – Relation de dispersion expérimentales pour plusieurs volumes d'eau dans les défauts (4 cL, 6 cL, 8 cL) correspondants à une fréquence de résonance f_1 croissante. On observe une transition entre un couplage localisé (4 cL) vers un système de type polariton.

Transition

Afin d'obtenir une interaction plus localisée nous allons tirer parti des propriétés de la bande interdite d'hybridation. Comme nous l'avons décrit précédemment, la force de confinement de cette bande interdite dépend, entre autres, de la fréquence de résonance du défaut f_1. Plus cette dernière s'éloigne de f_0 plus le champ s'étale spatialement ce qui délocalise progressivement le couplage entre les cavités résonantes. Pour étudier cette dépendance, nous avons effectué le même genre d'expérience et de traitement que précédemment mais pour des volumes d'eau plus faibles (4 cL et 6 cL). Les résultats, présentés sur la figure II.23, montrent tout d'abord qu'il est facile de choisir la fréquence du cône de Dirac avec l'approche proposée ici, simplement en jouant avec la valeur de f_1. En comparant ensuite les différentes structures de bande de défauts (en rouge) correspondant aux différents remplissages, nous voyons que la symétrie du profil est progressivement brisée quand f_1 augmente. La bande inférieure s'élargit de plus en plus alors que la bande supérieure ne semble pas affectée par ces modifications. Cela s'explique par la délocalisation progressive du couplage induit par la bande interdite. La propagation des ondes dans le réseau hexagonal passe ainsi par une transition entre un modèle de liaison forte localisée sur les sites des défauts et un modèle de type polariton émergeant de l'interaction globale des résonateurs avec l'onde provenant de l'espace libre. Notre approche permet donc de changer simplement la portée des interactions au sein d'une structure cristalline sans

changer sa taille mais uniquement en contrôlant sa fréquence de résonance.

Il est intéressant de noter ici que, même si la bande interdite est très peu efficace et donc que le couplage est délocalisé sur tout l'échantillon, les bandes de défauts possèdent toujours un cône de Dirac en K. Ce phénomène, qui va à l'encontre de la description effective du milieu en termes de polariton isotrope, fait l'objet du prochain chapitre.

Cette deuxième étude expérimentale prouve donc qu'il est possible d'étendre l'implémentation à l'échelle macroscopique de l'Hamiltonien du graphène au domaine de l'acoustique audible. Cette généralisation met en avant le potentiel de l'approche microscopique des métamatériaux localement résonant. En effet, il nous a été possible de modifier la structure de bande en ajoutant des interactions à plus longue portée en jouant uniquement sur un seul paramètre. Dans la partie suivante, nous continuons à exploiter la bande interdite dans le cas d'un Hamiltonien plus complexe.

II.3 Un Hamiltonien plus complexe : le cas du réseau *Dice* (ou *T3*)

II.3.1 Réseau

Après avoir obtenu la structure de bande d'un réseau hexagonal régi par un modèle de liaison forte nous nous intéressons à présent à une structure périodique plus complexe : le réseau *T3* [123]. Ce dernier est communément appelé *dice lattice* en anglais, car il donne l'impression d'être un empilement de cubes représentés en perspective. C'est un réseau triangulaire auquel des liaisons inter-sites ont été supprimées, comme représenté sur la figure II.24. Pour le réseau triangulaire, chaque site est équivalent et possède trois liaisons. Dans le cas du *dice*, un site sur trois présente encore ces six liens, quant aux autres ils n'en ont plus que trois. Cette distribution anisotrope des couplages permet de distinguer deux types de sites au sein du réseau : deux sites périphériques (3 liens) et un site central (6 liens). La cellule unité correspondante est donc composée de trois sites reliés différemment entre eux. Dans l'espace réciproque, la zone de Brillouin reste un hexagone similaire à celui du réseau hexagonal de la partie précédente.

Relation de dispersion

La relation de dispersion de ce réseau est présentée sur les figures II.25(a) et (b). Tout comme celle du graphène, elle a un profil symétrique, dû au couplage plus proches voisins du modèle de liaison forte. En revanche, elle est composée de trois bandes : deux semblables

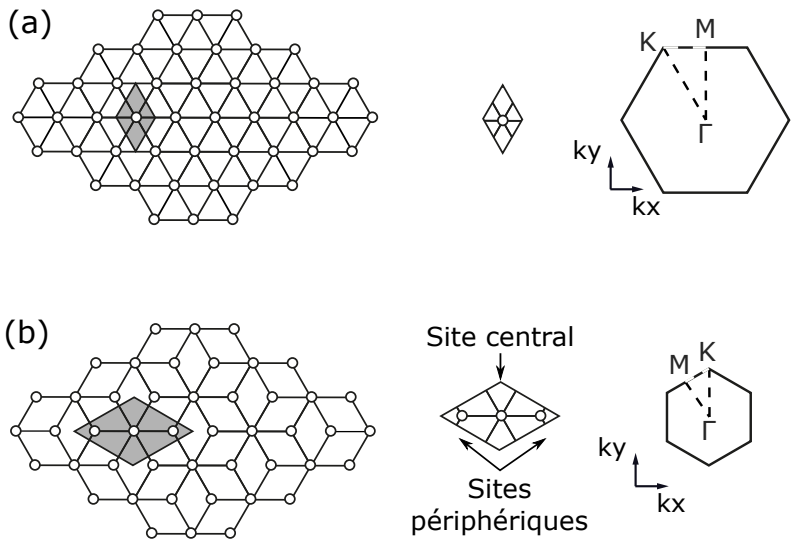


FIGURE II.24 – (a) Réseau triangulaire de liens. (b) Réseau *T3* obtenu en enlevant certains liens à (a).

à celles du graphène auxquelles s'ajoute une bande intermédiaire qui a la particularité d'être plate [123]. Si l'on excite le milieu avec une onde incidente dont la fréquence coïncide avec cette dernière, les modes correspondants à tous les nombres d'onde sont susceptibles d'être excités. Ce comportement se démarque des cas étudiés jusqu'à présent où la relation de dispersion faisait le lien entre une fréquence et un nombre d'onde (en valeur absolue). Cette bande est ainsi très particulière dans le sens où bien qu'elle émerge de la périodicité spatiale du milieu, elle représente des modes cristallins complètement indépendants de la structure du système. Par ailleurs, ceci n'est pas spécifique du *dice*, des dispersions similaires existant dans les réseaux de type Lieb ou Kagome [124]. Enfin, ces bandes plates correspondent théoriquement à une vitesse de groupe nulle.

Cette structure de bande présente une autre particularité aux coins K de la première zone de Brillouin. En effet les trois bandes sont dégénérées en ces points, formant un cône semblable au cas du graphène auquel vient s'ajouter la bande plate (figure II.25(c)). Il a été démontré que les modes propres correspondant à cette triple dégénérescence peuvent être décrits comme des particules de pseudo-spin 1. Ces dernières sont responsables de propriétés exotiques telles que le super tunnelling de Klein [125]. Ce phénomène est similaire au tunneling de Klein obtenu pour les particules de pseudo-spin 1/2 des cônes de Dirac du graphène. Cependant la transmission à travers la barrière de potentiel est totale quel que soit l'angle d'incidence dans ce cas.

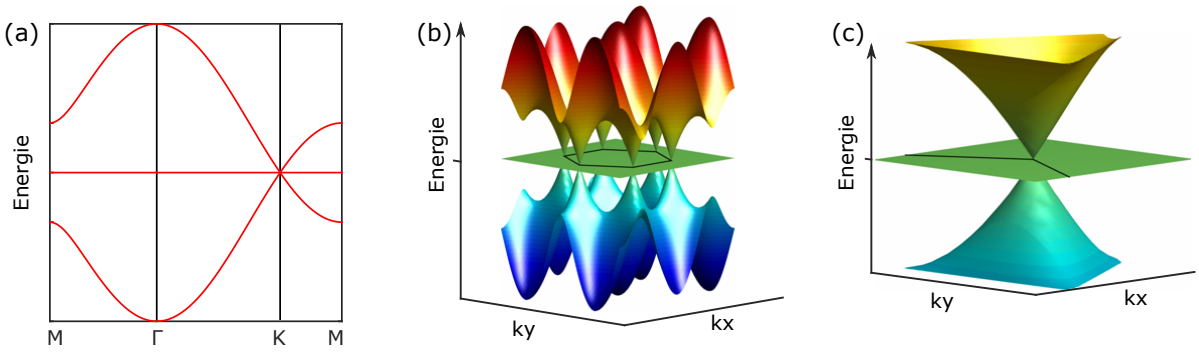


FIGURE II.25 – (a) Diagramme d'énergie obtenue avec l'Hamiltonien *tight-binding* du *T3* projetée selon les directions principales de la première zone de Brillouin. (b) Similaire à (a) mais pour toute la première zone de Brillouin. (c) Zoom sur le cône triple aux coins K de la première zone de Brillouin.

Analogues macroscopiques

Là encore, les particularités du diagramme d'énergie du réseau ont motivé la recherche d'analogues à l'échelle macroscopique. Ainsi ce cône triplement dégénéré a été mesuré dans un cristal photonique de maille carrée [126–128] (figure II.26(a)). Contrairement au *dice*, ce dernier émerge d'une dégénérescence accidentelle des trois bandes au centre de la première zone de Brillouin. En plus des caractéristiques liées au pseudo-spin 1, le fait d'être au point Γ confère une propriété d'indice effectif nul au milieu, que l'on peut ensuite utiliser pour faire un collimateur. Un système similaire a été réalisé en acoustique avec un cristal phononique [129] (figure II.26(b)).

Quant à l'équivalent macroscopique du *T3*, dont les cônes triples seraient en K, il n'a pas été démontré dans le domaine des cristaux. En effet, l'anisotropie des couplages au sein du réseau triangulaire est difficile à implémenter dans ces systèmes, leur design reposant sur le contrôle de la position des sites plutôt que sur les liens entre ces derniers. Nous montrons dans la suite de cette partie que cet obstacle peut être franchi en continuant l'approche que nous développons au long de ce chapitre.

II.3.2 Analogue du réseau *dice* avec un métamatériau localement résonant

Nous proposons ici un protocole simple afin d'obtenir la structure de bande du *dice* à une échelle macroscopique grâce à la description microscopique des métamatériaux localement résonants. Pour cela nous allons recréer les conditions inhérentes au modèle de liaison

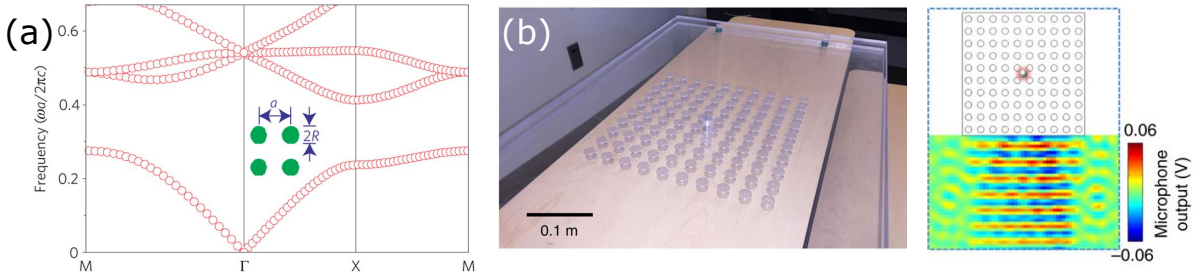


FIGURE II.26 – (a) Relation de dispersion d'un cristal photonique de maille carrée qui possède un cône triple en Γ. (b) La transposition de (a) en acoustique permet d'obtenir un milieu d'indice nul qui peut servir de collimateur.

forte du système. Comme expliqué précédemment, ce dernier est un réseau triangulaire auquel un sous-réseau de lien a été supprimé (figure II.27(a)).

Nous partons donc d'un réseau triangulaire de résonateurs sub-longueur d'onde de fréquence de résonance f_1 dont le pas est lui aussi très petit devant la longueur d'onde de travail. L'étape suivante consiste à habiller ce dernier avec un second sous-réseau de résonateurs dont les sites correspondent aux liens que l'on veut supprimer (figure II.27(b)). Ces inclusions résonantes ont une fréquence de résonance f_0 inférieure à f_1. Ils créent donc une bande interdite locale au sein du milieu et les résonateurs du premier sous-réseau triangulaire se comportent comme des défauts au sein de cette dernière. De cette façon, un couplage évanescent s'établit entre eux. Contrairement au cas du graphène, ce couplage évanescent est rendu anisotrope à cause de la position des résonateurs de basse fréquence : les défauts ne sont plus reliés qu'à certains de leurs plus proches voisins. De cette façon il est possible de reproduire le modèle de liaison forte du *dice*.

II.3.3 Résultats numériques : milieu de fils

Afin de vérifier la pertinence de cette approche nous implémentons cette procédure dans le domaine des micro-ondes avec le métamatériau localement résonant constitué de fils sur un plan de masse. La cellule unité correspondante est ainsi composée de six fils organisés en deux sous réseaux (figure II.28(a)). Un premier sous-réseau de fils longs ($h_0 = 14.9$ mm) sert à créer la bande interdite. Nous notons ici que ce réseau correspond en fait à un arrangement de type Kagome (disques noirs), sur lequel nous reviendrons au chapitre suivant. Le deuxième sous-réseau est composé de fils plus courts ($h_1 = 14$ mm) organisés selon une structure triangulaire. Le pas a du réseau de défauts est égal à 5 mm ce qui signifie que la longueur maximale de la cellule unité est égale à 0.26 λ_1 démontrant

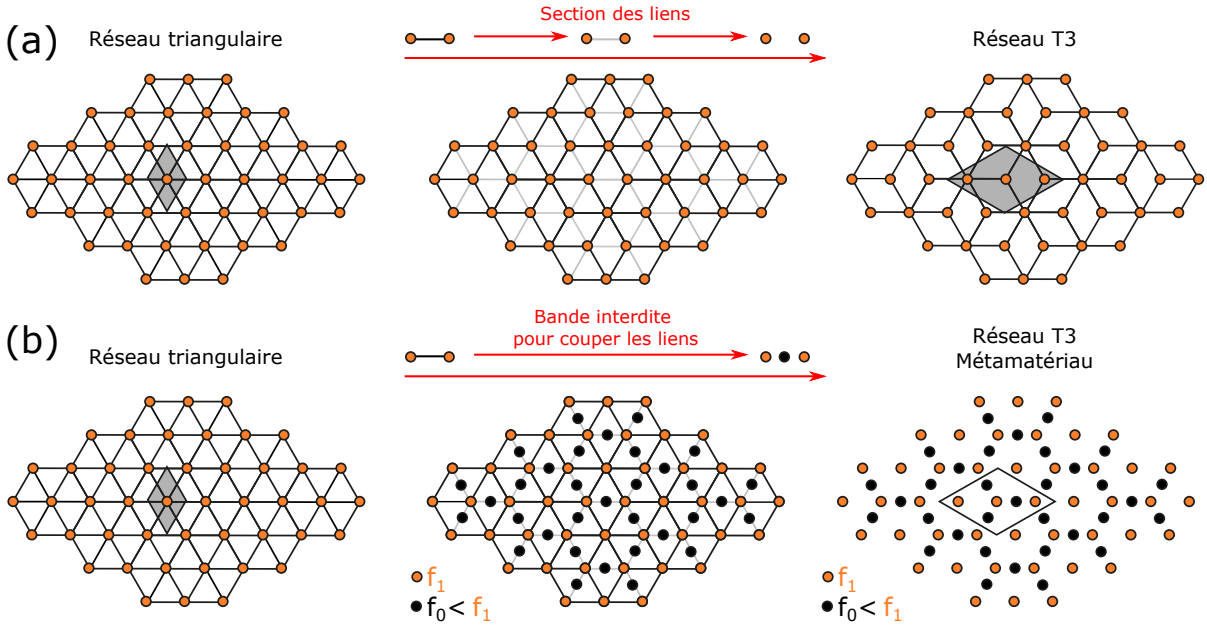


FIGURE II.27 – (a) Transition entre le réseau triangulaire et le réseau *T3*. (b) Protocole pour obtenir ce réseau en utilisant la bande interdite des métamatériaux localement résonant.

la nature très sub-longueur d'onde de la structure du milieu.

Relation de dispersion

En utilisant le logiciel COMSOL Multiphysics nous calculons la relation de dispersion du milieu infini correspondant après avoir imposé des conditions périodiques de Bloch aux bords de la cellule unité. Nous obtenons le résultat présenté sur la figure II.28(b), projeté sur les directions principales de la zone de Brillouin. De manière similaire à l'étude du graphène nous obtenons des bandes dans la bande interdite générée par les fils les plus longs (zone grisée).

En regardant les cartes de champ électrique numériques correspondant aux différentes branches, au point K, nous voyons que les modes de basse fréquence sont en effet majoritairement disposés sur le réseau de fils longs (disques noirs), et donc responsable de l'ouverture de la bande interdite. Les bandes à haute fréquence sont quant à elles supportées par le sous-réseau triangulaire. Il semble donc que nous ayons réussi à créer une structure cristalline de défauts dans la bande interdite du milieu.

Cependant, bien qu'il y ait trois bandes de défauts dans la relation de dispersion, ces dernières ne forment pas un cône triple en K. En effet, si deux bandes sont bien dégénérées la troisième apparaît pour des fréquences légèrement plus basses. Ceci peut s'expliquer

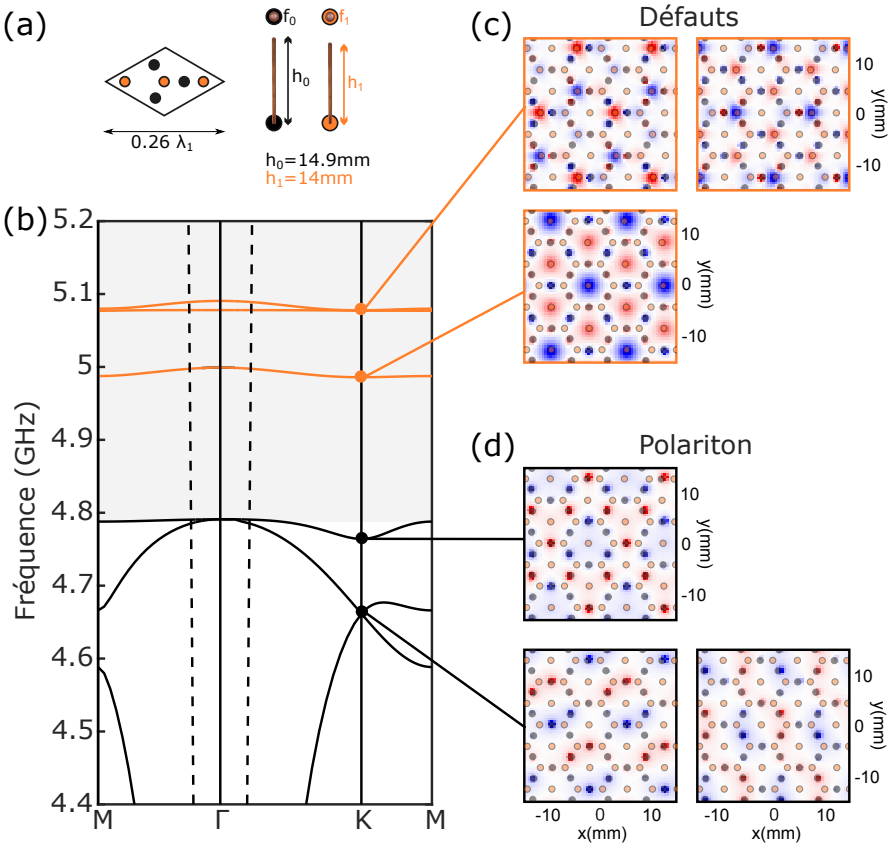


FIGURE II.28 – (a) Cellule unité du réseau *dice*. (b) Relation de dispersion correspondante composée de deux groupes de bandes dont les modes sont supportés sois par les fils courts (c) soit par les fils longs (d).

par le fait que, bien que la bande interdite induite par les résonateurs noirs diminue drastiquement le couplage entre les résonateurs orange spécifiques, ce dernier n'est sans doute pas rigoureusement nul dans le cas présenté ici. Ceci empêche donc de reproduire exactement les conditions voulues pour obtenir le réseau *dice*. La question suivante se pose alors : est-il néanmoins possible, au prix d'une légère optimisation de notre modèle, d'obtenir la triple dégénérescence des bandes de défauts en K ?

Transition

Pour cela nous regardons de plus près les modes de défauts portés par la bande solitaire. Au point K, ils sont majoritairement supportés par le résonateur central du réseau triangulaire comme le montre la figure II.28(c). Ainsi en augmentant la fréquence de résonance de ce résonateur nous pouvons envisager de faire monter cette bande vers les plus hautes fréquences, et en définitive de la faire coïncider avec les bandes voisines. Par

conséquent, nous distinguons à présent les sites périphériques (disques orange, hauteur h_p) du site central (disque vert, hauteur h_c) comme représenté sur la figure II.29(a).

En pratique cela revient à raccourcir la taille du fil vert par rapport aux fils oranges. Les relations de dispersion calculées pour trois hauteurs différentes de ce fil sont présentées sur la figure II.29. Ainsi, pour une hauteur de 13.72 mm nous obtenons effectivement la triple dégénérescence au point K de la zone de Brillouin.

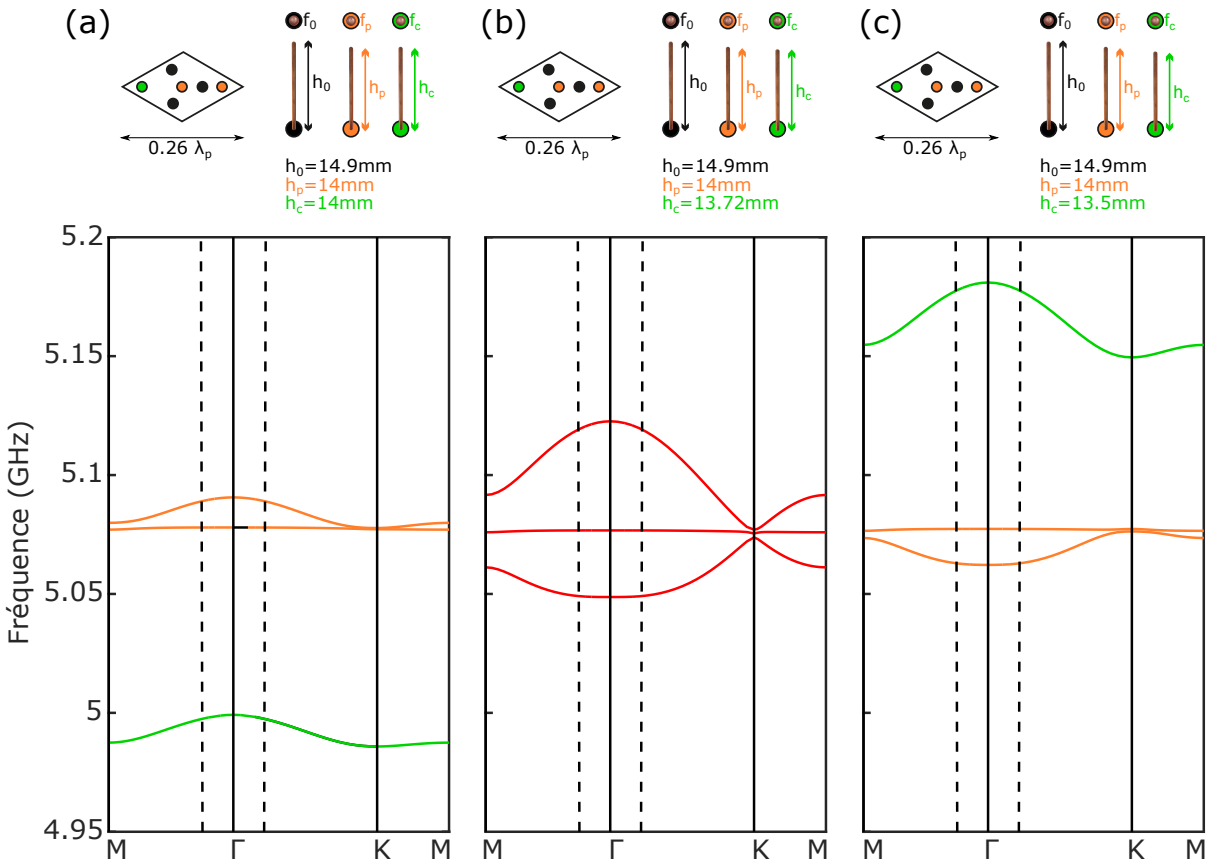


FIGURE II.29 – (a),(b),(c) Relation de dispersion obtenues pour différentes hauteurs du fil central (vert). Le cas (b) correspond à la structure de bande du réseau *Dice*.

Par ailleurs, en raccourcissant ce fil central nous pouvons continuer à faire monter la bande correspondante et au final inverser très simplement l'ordre initial des bandes (figure II.29(c)). Ceci démontre le haut niveau de contrôle sur la dispersion du milieu que permet notre approche.

Nous avons montré qu'il était possible de transposer facilement la physique du *dice* dans le domaine des micro-ondes avec un simple milieu de fils. Ce système aux propriétés prometteuses n'a pas encore été démontré dans le domaine des cristaux. Cette étude démontre ainsi le fort potentiel qu'offre la description microscopique des métamatériaux

localement résonants afin de reproduire des phénomènes de physique du solide à une échelle macroscopique plus facile à appréhender en pratique.

Au moment de l'écriture de cette thèse, les échantillons correspondant au réseau *T3* sont en cours de fabrication au CEA. Une étude expérimentale des propriétés liées au cône triple ainsi qu'à la présence de la bande plate dans le métamatériau sont prévues prochainement.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord expliqué comment il était possible de créer des défauts ponctuels au sein d'un matériau composite possédant une bande interdite. Dans le cas des cristaux photoniques/phononiques, modifier localement la structure du système génère ainsi une cavité où le champ est susceptible d'être confiné sur une échelle qui est de l'ordre de la longueur d'onde. De cette façon, une modification structurelle linéaire du milieu permet de guider les ondes.

Cette manière de créer des défauts ne fonctionne pas dans le cas d'un métamatériau localement résonant car les échelles sont très petites devant la longueur d'onde de travail. Dans ce cas, il faut jouer avec la composition de la cellule unité afin de générer une cavité résonante. Cela se fait simplement en augmentant la fréquence de résonance d'un résonateur du milieu. Le champ est alors confiné sur une échelle très sub-longueur d'onde. En faisant une chaîne de ces défauts, il est aussi possible de guider les ondes au sein du milieu. Cependant le mécanisme de propagation du guide est différent du modèle du polariton présenté jusqu'à présent pour décrire le métamatériau. En effet, à cause de la bande interdite, il n'y a plus l'onde propagative nécessaire à l'établissement de cette quasi-particule. L'onde est néanmoins susceptible de se propager le long des défauts via un couplage évanescent entre les cavités. En jouant avec la composition de la cellule unité du métamatériau localement résonant, *i.e* en adoptant une approche microscopique, il est ainsi possible d'induire un couplage localisé spatialement entre deux défauts voisins.

Ce couplage est similaire au terme de saut que l'on trouve dans les Hamiltonien *tight-binding* de physique du solide. Ce dernier décrit le recouvrement des orbitales électroniques qui est responsable de la propagation des électrons au sein des matériaux. Nous avons ainsi montré dans ce chapitre qu'il était possible de recréer les conditions de ces Hamiltoniens en créant un cristal bi-dimensionnel de défauts dans le métamatériau. Pour prouver la pertinence de cette approche, nous avons obtenu expérimentalement en micro-ondes la structure de bande du graphène avec un réseau de fils. Nous avons ensuite généralisée cette description au cas de l'acoustique audible avec de simples canettes de soda. De cette

façon nous avons mesuré un cône de Dirac qui, contrairement aux exemples des cristaux, est de nature très sub-longueur d'onde. L'étude acoustique a fait l'objet d'une publication dans *Scientific Reports* [130] et un article concernant le cône de Dirac électromagnétique est en cours de révision au moment de l'écriture de cette thèse.

Nous nous sommes ensuite intéressés à un réseau plus complexe, en l'occurence le réseau *T3*, dont les couplages sont anisotropes. Les résultats numériques correspondants montrent que nous avons réussi là encore à obtenir la structure de bande désirée au sein du cristal de défauts. Cette dernière possède un cône similaire au graphène auquel vient s'ajouter une bande plate. Ce système n'a pas été réalisé avec des cristaux à cause de la difficulté liée à l'anisotropie de la distribution spatiale des liens du réseau. Cette étude montre donc d'autant plus la pertinence de l'approche microscopique des métamatériaux localement résonants afin de reproduire des phénomènes de physique de la matière condensée à l'échelle macroscopique de manière extrêmement simple. Notons néanmoins que cela se limite pour l'instant à des cas relatifs aux bosons, les propriétés liées au *spin* des fermions n'étant pas prises en compte dans notre analogie. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier chapitre de cette thèse.

Par ailleurs, au cours de ce chapitre nous avons remarqué, dans l'étude de l'analogue acoustique du graphène, que lorsque le champ n'est presque plus confiné sur les sites des défauts, il y avait toujours deux bandes dans la relation de dispersion (figure II.23). C'est aussi le cas des bandes relatives au sous-réseau de fils longs dans l'étude du réseau *T3*. Ceci parait être en contradiction avec l'approche du polariton isotrope des métamatériaux localement résonant.

La question suivante se pose alors : est-il possible que la structure du réseau, bien que très sub-longueur d'onde au sein du métamatériau, aient une influence sur sa dispersion, et ce même en dehors de la bande interdite d'hybridation ? Cette problématique fait l'objet du chapitre 3.

Chapitre III

Les métamatériaux cristallins : de la bande négative aux cônes de Dirac

III.1 Au delà de l'approche effective du polariton

III.1.1 Anisotropie des bandes

Dans les deux premiers chapitres de cette thèse nous avons expliqué que la physique des ondes au sein d'un métamatériau localement résonant était décrite par le modèle du polariton. Ce dernier résulte d'une interaction entre la collection de résonateurs et l'onde incidente. La relation de dispersion qui en découle est ainsi isotrope ce qui est en accord avec une approche effective du milieu. Sa structure sub-longueur d'onde n'a donc pas d'influence sur la dispersion dans ce cas.

Nous avons montré qu'il était aussi possible d'adopter une vision microscopique du système et de définir un polariton localement à l'échelle du résonateur. Ceci nous a permis de tirer parti de l'une de ces caractéristiques, à savoir la bande interdite d'hybridation, afin d'introduire des défauts dans le métamatériau. Cette dernière induit un couplage évanescent localisé entre les défauts qui diffère du modèle polaritonique. Ce couplage, très similaire à celui décrivant les recouvrements d'orbitales atomiques dans les solides, nous a permis de créer des cristaux bi-dimensionnels de défauts, analogues macroscopiques du graphène et du réseau *T3*. Au niveau de la relation de dispersion, ceci se traduit par l'apparition de nouvelles bandes de propagation dans la bande interdite du polariton. Ces bandes présentent quant à elles une anisotropie conséquente qui découle de la nature cristalline de l'arrangement des défauts. Pour autant, étant donné que ces bandes émergent d'un couplage localisé entre plus proches voisins, et non pas d'une interaction globale avec l'onde propagative incidente, il semble logique que la structure du réseau de défauts ait

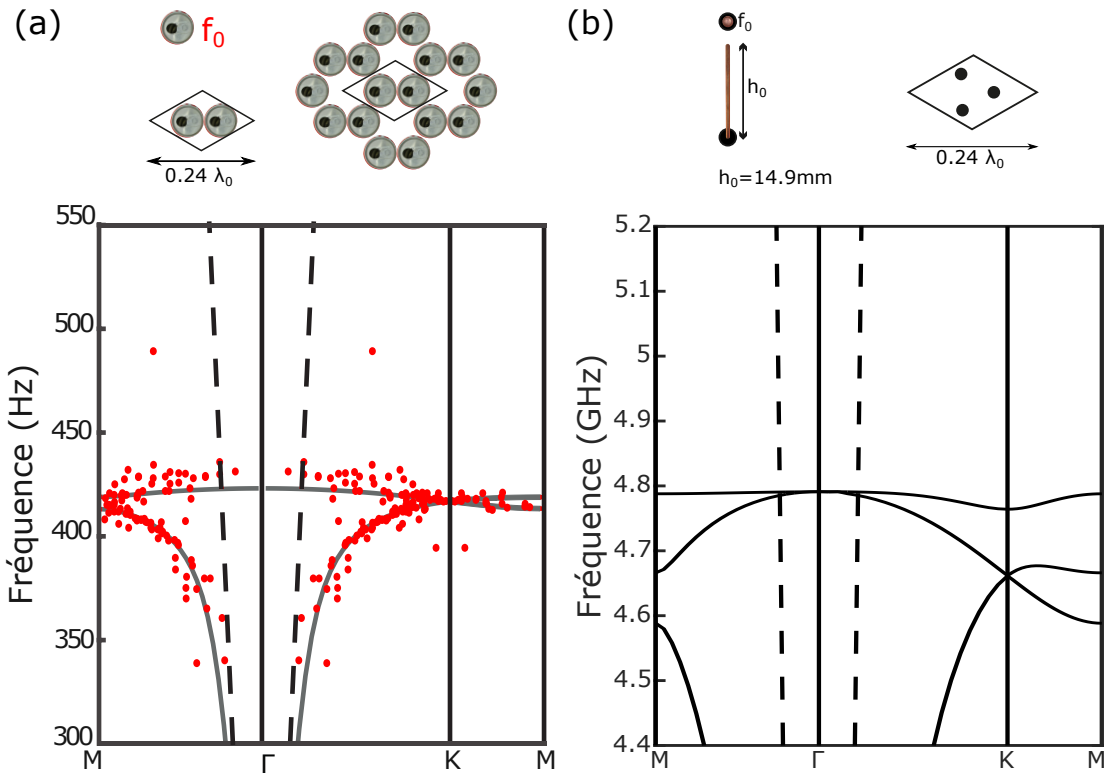


FIGURE III.1 – (a) Relation de dispersion d'un réseau hexagonal de canettes. (b) Relation de dispersion d'un réseau Kagomé de fils.

un rôle crucial à jouer dans la propagation des ondes.

Cependant, certains résultats liés à cette étude suscitent plusieurs interrogations. Tout d'abord, nous avons vu que dans le cas du graphène acoustique, même lorsque le couplage s'étend à des défauts de plus en plus éloignés, l'anisotropie des bandes correspondantes est toujours présente. D'ailleurs, nous avons poussé l'étude plus loin et extrait la relation de dispersion pour le cas d'un réseau hexagonal de canettes vides, présenté sur la figure III.1(a). Ici, il n'y a plus de bande interdite environnante, les ondes se propagent en suivant le modèle du polariton. Pourtant, la relation de dispersion expériementale correspondante présente toujours deux bandes avec des pentes de signes opposés qui se croisent au point K de la première zone de Brillouin. Cette forte anisotropie est donc en contradiction avec la vision effective du polariton présentée jusqu'à présent.

Par ailleurs, dans l'étude du réseau *T3*, nous avons aussi remarqué que la dispersion correspondant au sous-réseau responsable de la bande interdite n'avait pas l'allure habituelle du polariton. En effet, elle est composée de trois bandes, et présente elle-aussi un caractère fortement anisotrope (figure III.1(b)).

Quant au polariton lui-même, aux fréquences situées dans le voisinage de la résonance, il supporte des modes dont la variation spatiale est de l'ordre du pas du réseau. Il ne semble donc pas aberrant que la structure du milieu puisse avoir une influence sur ces modes.

III.1.2 Diffusion multiple au sein du métamatériau

Tout ceci nous pousse à reconsidérer le fait de négliger les effets de la structure sub-longueur d'onde du métamatériau localement résonant, comme c'est le cas pour les milieux diélectriques. Pour ces derniers, les distances inter-atomiques sont infiniment faibles par rapport à la longueur d'onde incidente. Les effets de diffusion multiple sont négligeables, justifiant ainsi leur description effective (figure III.2(a)). En revanche, les échelles en jeu dans les métamatériaux que nous étudions sont certes très sub-longueur d'onde mais pas autant que dans la matière : l'onde incidente interagit fortement avec les résonateurs autour de la résonance ce qui génère de nombreuses réflexions au sein du milieu (figure III.2(b)). Il devient alors légitime d'étudier les effets structurels, bien que sub-longueur d'onde, sur la propagation des ondes au sein du métamatériau localement résonant. Cela fait l'objet des parties suivantes.

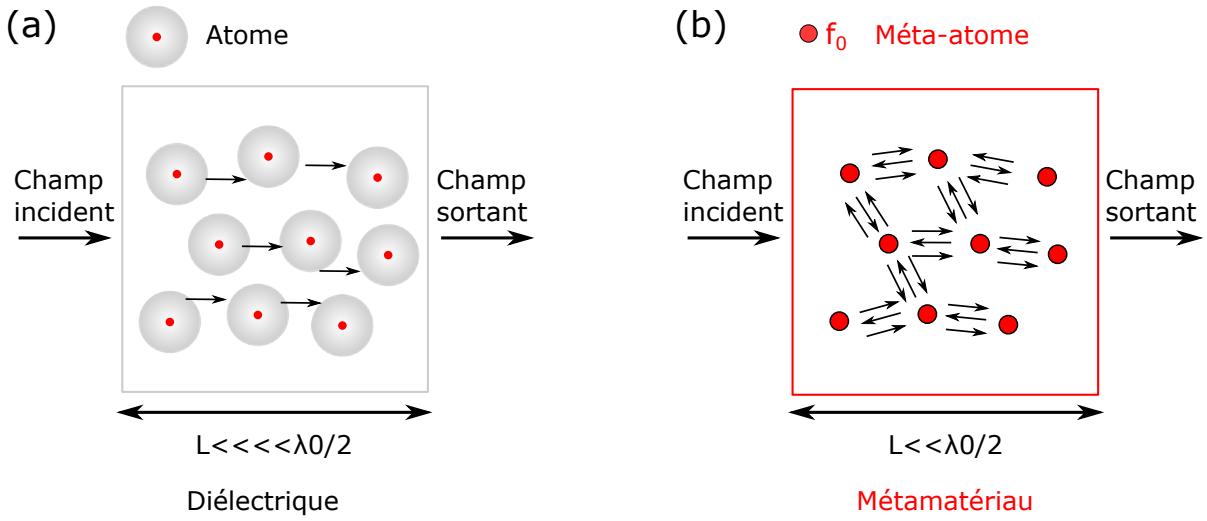


FIGURE III.2 – (a) Absence de diffusion multiple dans un diélectrique. (b) Diffusion multiple dans un métamatériau localement résonant.

III.2 Chaîne de résonateurs structurée à l'échelle sub-longueur d'onde

Dans cette partie nous nous intéressons au cas unidimensionel d'une chaîne de résonateurs identiques, de fréquence de résonance f_0, dont l'espacement a est très petit par rapport à la longueur d'onde. Pour cela, nous reprenons le travail effectué par Nadège Kaina au cours de sa thèse en adoptant une approche analytique utilisant la théorie de dipôles couplés [131]. Elle repose sur le modèle du résonateur ponctuel qui permet d'obtenir la réponse en champ lointain d'un résonateur. Dans le cas unidimensionel cela s'écrit :

$$T(\omega) = 1 + \frac{ic}{2\omega} A(\omega) \tag{III.1}$$

où le terme 1 correspond à la propagation de l'onde sur la cellule unité de la chaîne sans interaction avec le résonateur, et le deuxième terme est relié à l'onde rayonnée par le résonateur. Pour le cas unidimensionnel $A(\omega)$ a la forme suivante :

$$A(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega - i\frac{\Gamma}{2}} \tag{III.2}$$

où $\omega_0 = 2\pi f_0$ est la pulsation de résonance du résonateur et $\Gamma = \omega_0/Q$ la largeur spectrale correspondante. C'est la réponse propre du résonateur. Ce modèle est particulièrement intéressant car très général. En effet il s'applique aussi bien aux ondes électromagnétiques qu'aux ondes acoustiques, et les caractéristiques du résonateur sont controlâbles indépen-

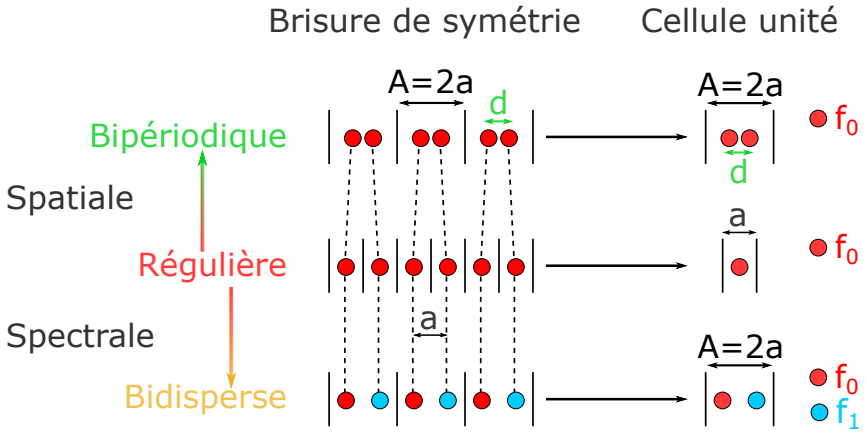


FIGURE III.3 – Brisure de symétrie spatiale et spectrale de la cellule unité sub-longueur d'onde d'une chaîne régulière de résonateurs

damment. A partir de ce formalisme il est alors possible de remonter à la relation de dispersion de la chaîne infinie. Nous n'entrons pas dans les détails ici, et nous contentons de reprendre les résultats que Nadège a obtenu afin d'introduire l'approche cristalline des métamatériaux développée dans ce chapitre. Nous choisissons ici $f_0 = 0.15$ GHz et $Q = 8$.

III.2.1 Structuration de la cellule unité

Afin d'étudier le rôle de la structure dans la propagation des ondes le long de cette chaîne de résonateurs nous allons introduire une brisure de symétrie au sein de sa cellule unité sub-longueur d'onde. Cependant, le milieu est toujours périodique, dans le sens où la symétrie de translation est conservée à l'échelle de la chaîne infinie. En modifiant la cellule unité nous modifions donc globalement l'ensemble des propriétés de propagation du système. Il existe deux façons d'introduire cette brisure de symétrie dans la chaîne de résonateurs : soit spatialement en décalant la position des résonateurs, soit spectralement en modifiant légèrement la fréquence de résonance de certains résonateurs (figure III.3). Dans chacun des cas cela revient à agrandir la dimension de la cellule unité.

Chaîne régulière

Nous partons ainsi d'une chaîne régulière de résonateurs identiques, monopériodique dont le pas est de $a = \lambda_0/12$. Sa relation de dispersion est représentée sur la figure III.4(a). Comme nous nous y attendons, elle a le profil d'un polariton, avec les deux bandes de propagation séparées par une bande interdite d'hybridation qui s'ouvre au voisinage de la fréquence de résonance f_0 (zone rouge).

Chaîne bipériodique : brisure de symétrie spatiale

A présent, nous décalons d'une distance $a - d$ un résonateur sur deux de cette chaîne régulière. De cette façon, le système présente deux échelles de variations spatiales, d et $A = 2a$ qui est la longueur de la nouvelle cellule unité. Elle est donc bipériodique. Pour des valeurs de d et A respectivement égales à 0.0075 λ_0 et 0.105 λ_0, on obtient la relation de dispersion présentée en III.4(b). Gardons à l'esprit ici que les distances entre résonateurs ($d = 0.0075\ \lambda_0$ et $A - d = 0.03\ \lambda_0$) sont très petites devant la longueur d'onde. Le système rentre donc dans le cadre habituel des approches effectives et pour les plus simples d'entre elles, rien n'est censé distinguer la chaîne bipériodique de la chaîne régulière car elles sont composées des mêmes résonateurs avec la même densité. Cependant, en regardant la relation de dispersion correspondante nous observons l'apparition d'une nouvelle bande au voisinage de f_0, séparée de la branche inférieure polaritonique par une petite bande

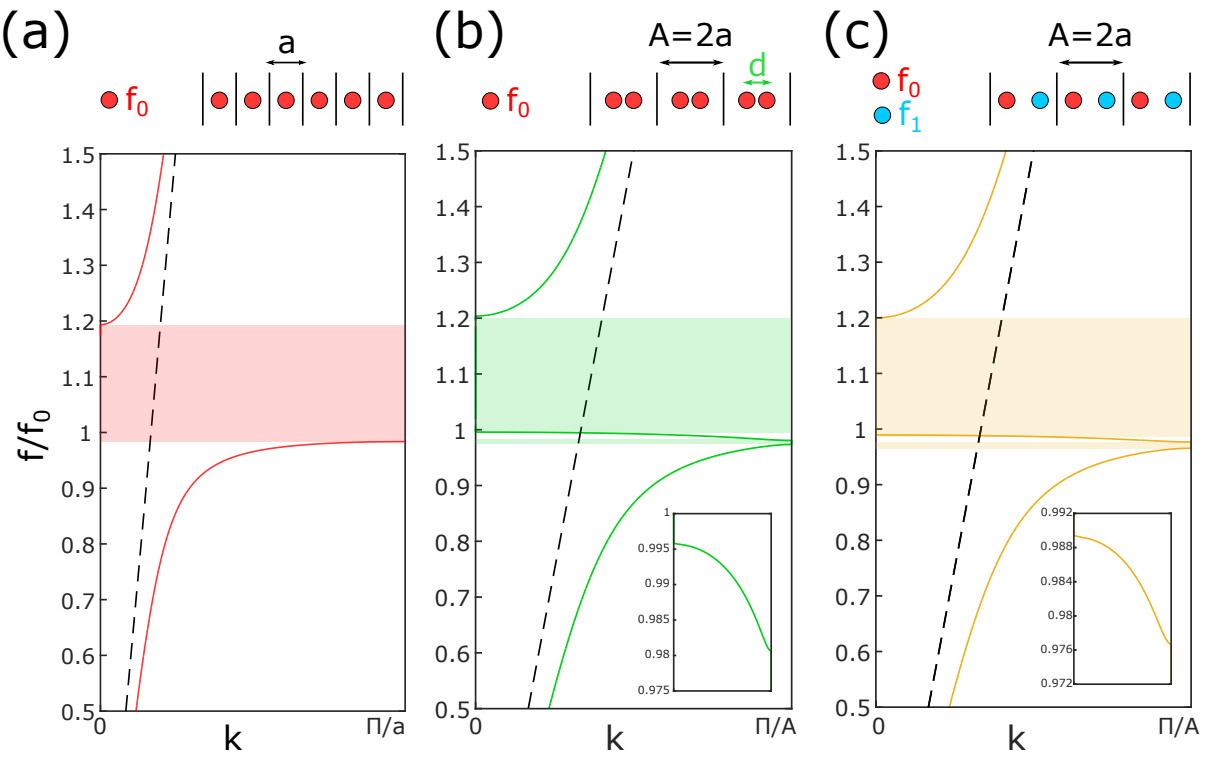


FIGURE III.4 – (a) Relation de dispersion analytique calculée avec la théorie des dipôles couplés pour le cas d'une chaîne régulière. (b) Idem pour une chaîne bipériodique. (c) Idem pour une chaîne bidisperse.

interdite (zone verte). Cette bande a la particularité d'avoir une pente négative (figure III.4(b), insert) . Les modifications structurelles au sein de la cellule unité sub-longueur d'onde de la chaîne ont donc une influence non négligeable sur la propagation des ondes.

Chaîne bidisperse : brisure de symétrie spectrale

Une autre façon de briser la symétrie de la cellule unité de la chaîne est de jouer avec sa composition. Nous partons donc de la chaîne régulière et modifions légèrement la fréquence d'un résonateur sur deux ($f_1 \neq f_0$). Le résultat est une chaîne bidisperse dont la cellule unité est aussi de longueur $A = 2a$, et comporte deux résonateurs de fréquences de résonance différentes : f_0 en rouge et $f_1 = 1.01 f_0$ en bleu (figure III.4(a)). La relation de dispersion correspondante est semblable au cas bipériodique : une nouvelle bande de pente négative apparaît au voisinage de f_0, séparée de la bande inférieure du polariton par une petite bande interdite (figure III.4(c)). Ce résultat montre que c'est bien la brisure de symétrie de la cellule unité en soi qui est responsable de l'apparition de la bande négative, plutôt que la nature exacte de la modification.

Mélange de chaînes régulières

Chacune de ces chaînes structurées peut aussi être interprétée comme le mélange de deux chaînes régulières de période A. La chaîne bipériodique est ainsi la superposition de deux chaînes identiques décalées de d (figure III.5(a)). La chaîne bidisperse est quant à elle la superposition de deux chaînes de résonateurs de résonances f_0 et f_1 (figure III.5(b)). Étant donné que toutes les chaînes précédentes ont la même période A il est alors plus simple de comparer directement leurs relations de dispersion. Nous voyons que chaque chaîne régulière est décrite par un polariton (identiques dans le cas bipériodique, légèrement décalés en fréquence pour le bidisperse). Pourtant leur superposition crée la bande négative, ce qui accentue d'autant plus le rôle de la structuration de la cellule unité. Les sections suivantes proposent deux interprétations physiques complémentaires afin de comprendre l'émergence de cette nouvelle bande au sein de la relation de dispersion.

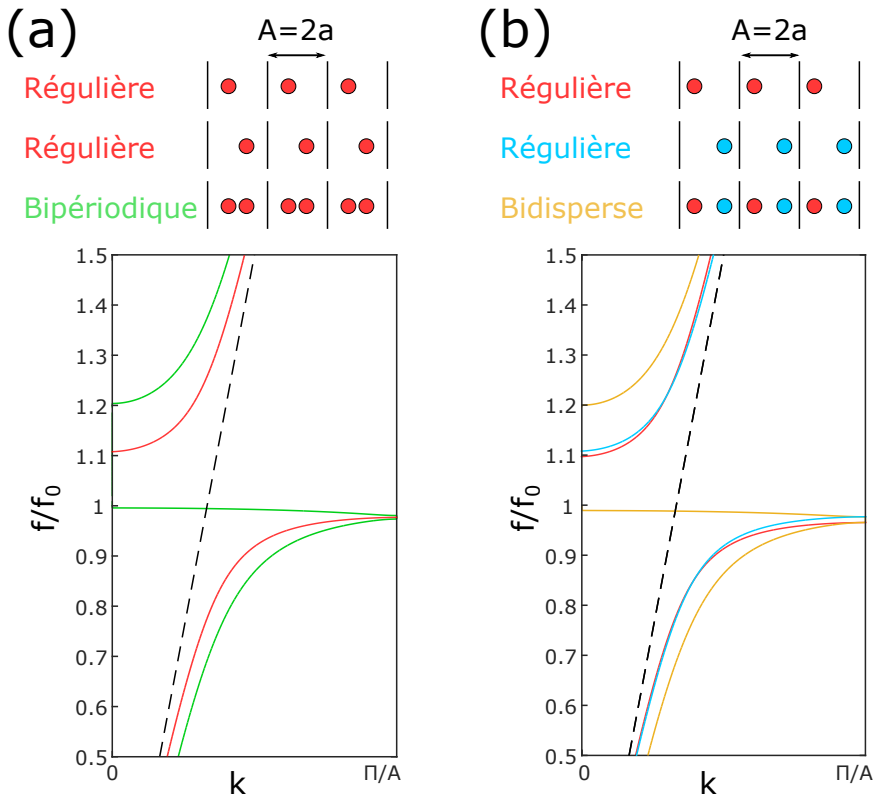


FIGURE III.5 – (a) Relation de dispersion de la chaîne bipériodique ainsi que des chaînes régulières constitutives. (b) Idem pour le cas bidisperse.

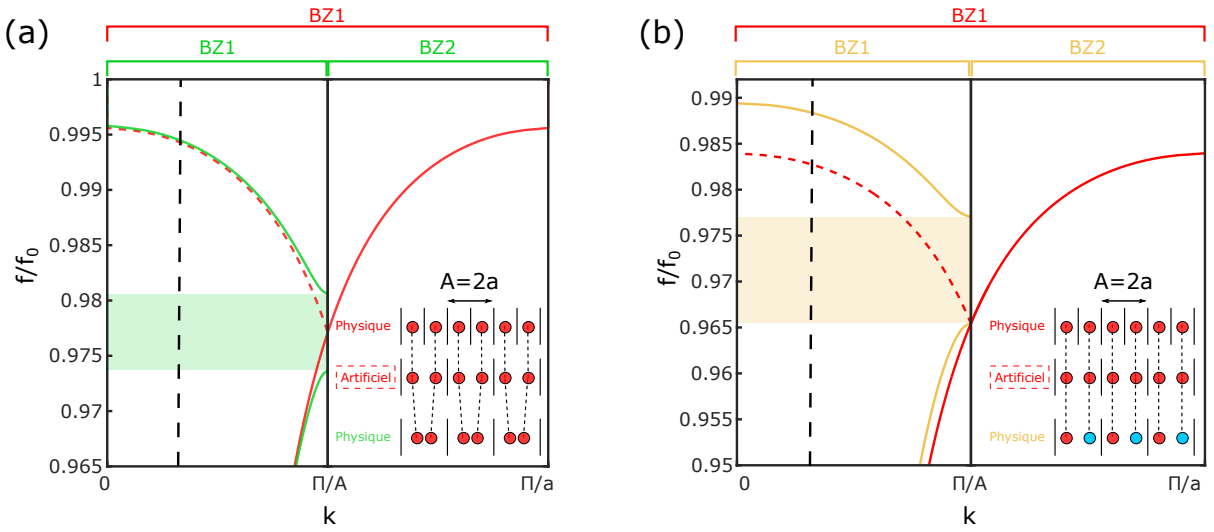


FIGURE III.6 – (a) Repliement artificiel (pointillés rouges) et physique (vert) du polariton de la chaîne régulière pour donner le cas bipériodique. (b) Repliement artificiel (pointillés rouges) et physique (jaune) du polariton de la chaîne régulière pour donner le cas bidisperse.

III.2.2 Approche cristalline

Espace réciproque : repliement spectral

Nous avons vu au chapitre 1 qu'un système structuré à l'échelle de la longueur d'onde, tel que le miroir de Bragg, possédait lui aussi des bandes négatives. Elles sont la conséquence directe de la périodicité de la relation de dispersion dans l'espace réciproque. Le fait de délimiter cet espace en zones de Brillouin entraîne le repliement spectral des bandes propagatives dès que le vecteur d'onde atteint le bord de zone. Chaque repliement est responsable d'un changement de signe de la pente de la bande : la première est positive, la seconde négative etc.

Dans le cas de la chaîne sub-longueur d'onde de résonateurs, briser la symétrie de la chaîne régulière revient en définitive à doubler la taille de la cellule unité dans l'espace réel. Dans l'espace réciproque cela implique une modification des limites de la première zone de Brillouin : elle est ainsi deux fois plus petite. Le calcul de la relation de dispersion de la chaîne régulière avec une cellule unité de longueur $A = 2a$ donne en effet un repliement du polariton (figure III.6). Ce dernier, représenté en pointillés rouges sur la figure est cependant artificiel, comme le prouve l'absence de bande interdite en bord de zone.

Pour le cas où la symétrie de la cellule unité est brisée, la période minimale de la chaîne est effectivement de $2a$ et le repliement n'est plus un simple artefact mathématique mais

acquiert une réalité physique. Il s'accompagne dans ce cas de l'ouverture d'une bande interdite, comme le montre la figure III.6 pour les cas bipériodique (a) ainsi que bidisperse (b). Pour résumer, dans l'espace réciproque, cette nouvelle bande provient du repliement spectral du polariton qui est rendu physique par la brisure de symétrie de la cellule unité.

Espace réel : modes dipolaires

Dans l'espace réel, cette bande repliée supporte des modes dont la variation spatiale au sein de la cellule unité est deux fois plus petite que ceux de la bande à plus basse fréquence. Ils correspondent donc à la seconde zone de Brillouin. Dans le cas des cristaux, l'établissement d'un tel type de mode se fait directement grâce à la phase accumulée par l'onde lors de sa propagation dans le milieu. Ils existent pour des fréquences deux fois plus grandes (ou des longueurs d'onde deux fois plus faibles) que ceux de la première bande. Pour la chaîne de résonateurs, les échelles en jeu sont beaucoup trop faibles pour permettre l'accumulation de phase nécessaire. Le surplus de phase est donné par le biais des résonateurs au voisinage de la résonance, cette dernière étant marquée par un saut de phase de π. Il devient donc possible de créer un mode dipolaire à n'importe quelle échelle spatiale dans le métamatériau une fois que la symétrie est brisée, et ce grâce à la nature résonante des inclusions.

Cette approche démontre que les métamatériaux localement résonants peuvent être décrits aussi en termes de structure de bande via le repliement spectral du polariton. Ceci en fait des analogues sub-longueur d'onde des cristaux photoniques/phononiques.

III.2.3 Approche type Méta-molécule

Transmission d'un dimère de résonateurs

Par ailleurs, le fait de briser la symétrie de la cellule unité peut être vu comme une manière de générer un dimère de résonateurs. Dans le contexte des métamatériaux analogues des diélectriques nous avons appelé les résonateurs sub-longueur d'onde des méta-atomes dans le chapitre 1. Par conséquent le dimère, dont la taille est elle-aussi très petite par rapport à la longueur d'onde, est une méta-molécule.

La prochaine étape est de caractériser son interaction avec l'onde incidente. Afin de faciliter la comparaison avec l'étude du chapitre 1, nous nous plaçons de nouveau dans le domaine de l'acoustique audible et formons la méta-molécule avec deux canettes de soda. Nous simulons, avec le logiciel COMSOL Multiphysics, la transmission en champ lointain au sein d'un guide d'onde disposé au-dessus de l'ouverture des canettes, comme

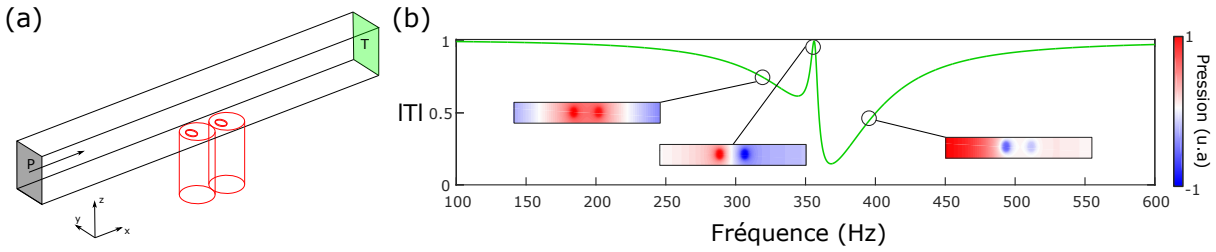


FIGURE III.7 – (a) Schéma du dimère de canettes sous le guide d'onde. (b) Transmission en champ lointain correspondante.

représenté sur la figure III.7(a). Le profil obtenu présente un premier pic de résonance assez large centré sur $f_0 = 370$ Hz, qui correspond à la fréquence de résonance d'une canette. En regardant les cartes de champ correspondantes, on remarque qu'il s'agit d'un mode monopolaire (à 325 Hz sur la figure III.7(b)). Son comportement est donc très similaire à celui d'une canette individuelle présentée au chapitre 1. C'est en effet la réponse en phase de deux monopoles, chacun situé sur un résonateur. Au delà de la fréquence de f_0, ces derniers répondent en oposition de phase avec l'onde incidente, générant la bande interdite (carte de champ à 385 Hz sur la figure III.7(b)).

Le dimère présente quant à lui un deuxième pic de résonance qui est centré sur la fréquence $f_d = 361$ Hz juste en-dessous de f_0. Ce second pic correspond à une symétrie de mode dipolaire sur le dimère. La variation spatiale du champ correspondante étant très petite par rapport à la longueur d'onde dans l'espace libre, ce mode rayonne difficilement ce qui explique que la résonance soit très étroite par rapport à celle du monopole. L'émergence de ce mode dipolaire est intimement liée à la présence de diffusion multiple entre les deux résonateurs. Elle est responsable d'un couplage, véhiculé par l'onde propagative incidente, qui induit une rétro-action entre ces derniers. Une autre façon d'expliquer l'existence de ce dipôle à une échelle très sub-longueur d'onde est de considérer que le champ puisse changer de signe entre les deux résonateurs grâce au surplus de phase donné par chacun d'entre eux au voisinage de la résonance.

Une méta-molécule créée en rapprochant deux méta-atomes sur une échelle très sub-longueur d'onde possède donc deux modes de résonance dont les symétries sont différentes.

Hybridation avec l'onde propagative

Nous nous intéressons à présent à une chaîne infinie de ces dernières. Nous avons vu que la dispersion de la chaîne régulière est un polariton qui émerge de l'hybridation du mode résonant monopolaire du méta-atome avec l'onde propagative. Il se passe la même

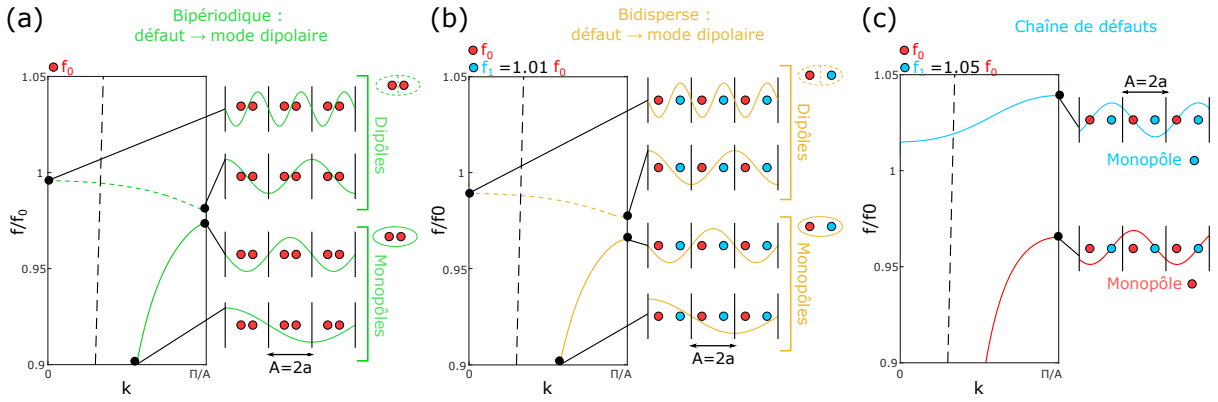


FIGURE III.8 – (a) Vision de la relation de dispersion bipériodique en terme de bande de défauts de modes dipolaires (pointillés) dans la bande interdite des modes monopolaires. (b) Idem pour le cas bidisperse. (c) Relation de dispersion d'une chaîne de défauts résonants (bleu) dans la bande interdite d'une chaîne de résonateurs (rouge).

chose avec le mode monopolaire de la méta-molécule. Cela est responsable de la bande basse fréquence de la chaîne structurée dont le profil est similaire à ce polariton. Pour cette bande, les modes de la chaîne infinie sont bien portés par des monopoles (figure III.8(a) pour le bipériodique et (b) pour le bidisperse). La deuxième bande quant à elle supporte des modes dont la symétrie sur la méta-molécule est de type dipolaire. Ceci est connu en physique du solide dans le cadre de la description des vibrations d'un réseau cristallin, appelées phonons, sous le nom de branche optique (la bande inférieure étant la branche acoustique) [98]. Par conséquent, tout se passe comme si ces modes dipolaires étaient des modes de défauts dans la bande interdite créée par le mode monopolaire à plus basse fréquence. Nous sommes donc dans le même cas qu'au chapitre 2, excepté qu'ici le mode de défaut émerge de la diffusion multiple au sein de la méta-molécule créée par la brisure de symétrie de la maille. Cette bande supérieure entre donc dans le cadre du modèle *tight-binding* développé au chapitre précédent : les modes dipolaires de cellules adjacentes tunnellent d'une méta-molécule à l'autre par un couplage évanescent induit par la bande interdite du mode monopolaire. La bande correspondante présente un profil symétrique qui se décrit avec le modèle de liaisons fortes présenté auparavant où le coefficient de couplage κ est positif.

Afin de pousser ce parallèle plus loin, il est d'ailleurs possible de retrouver le cas du chapitre 2 où κ est négatif. En effet, en augmentant la différence de fréquence entre les deux résonateurs, les résonances vont finir par ne plus se chevaucher. Il n'y a plus de dimère mais deux résonateurs indépendants. Ceci supprime le mode dipolaire et l'on se retrouve dans le cas du chapitre précédent où l'on a un premier sous-réseau de résonateurs de

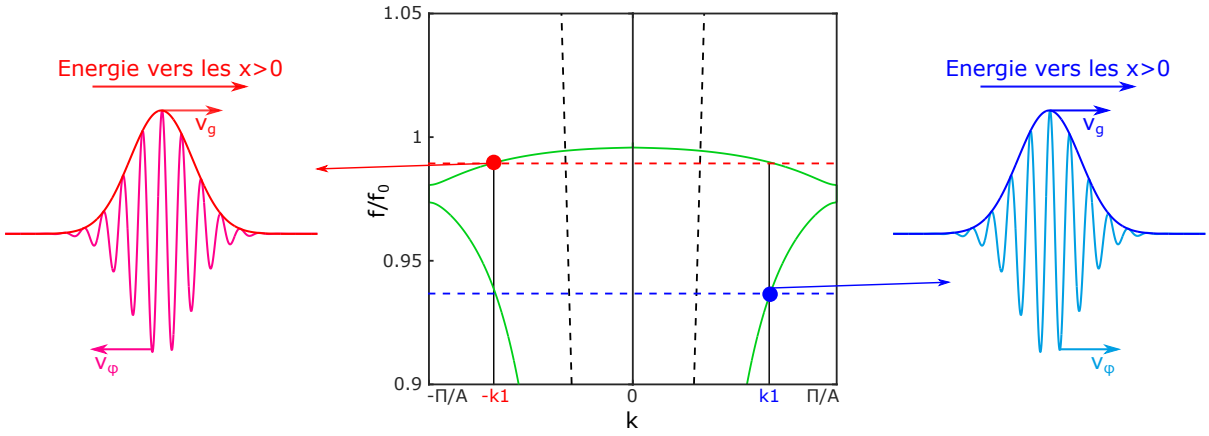


FIGURE III.9 – Conséquences sur la propagation d'une impulsion en fonction de la pente de la bande correspondante.

fréquence de résonance f_0 qui va créer une bande interdite dans lequel se forme un second sous-réseau de résonateurs de fréquence $f_1 > f_0$ assimilables à des défauts résonants. Cette transition est présentée sur la figure III.8(c). Ici il n'y a plus que des méta-atomes portant des modes monopolaires.

III.2.4 Bande « négative »

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que la structuration de la maille sub-longueur d'onde de la chaîne de résonateurs était responsable de la création d'une bande négative au sein de la première zone de Brillouin de la relation de dispersion. Nous expliquons ici les conséquences de ce phénomène dans l'espace réel.

Dans le cas de notre étude unidimensionnelle, la relation de dispersion est telle qu'à chaque fréquence il existe deux ondes susceptibles de se propager dans le milieu, comme le montre la figure III.9. Les deux vecteurs d'onde de norme k_1 a la même norme mais de signes opposés. La vitesse de phase v_ϕ correspondant à un cas est opposée à l'autre cas. Le sens de propagation de l'énergie associée est quant à lui donné par la pente de la bande, lié à la vitesse de groupe v_g. Par conséquent si l'on s'intéresse à un paquet d'onde centré sur k_1, se dirigeant vers les x positifs, la solution physique correspondante est celle pour laquelle la pente de la bande est elle aussi positive. Dans le cas de l'espace libre, ou encore de la première bande reliée au mode monopolaire de la chaîne de résonateur, cette solution est dans la partie positive de l'espace des k. Elle est représentée par un point bleu sur la figure III.9. Dans ce cas, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont de même signe.

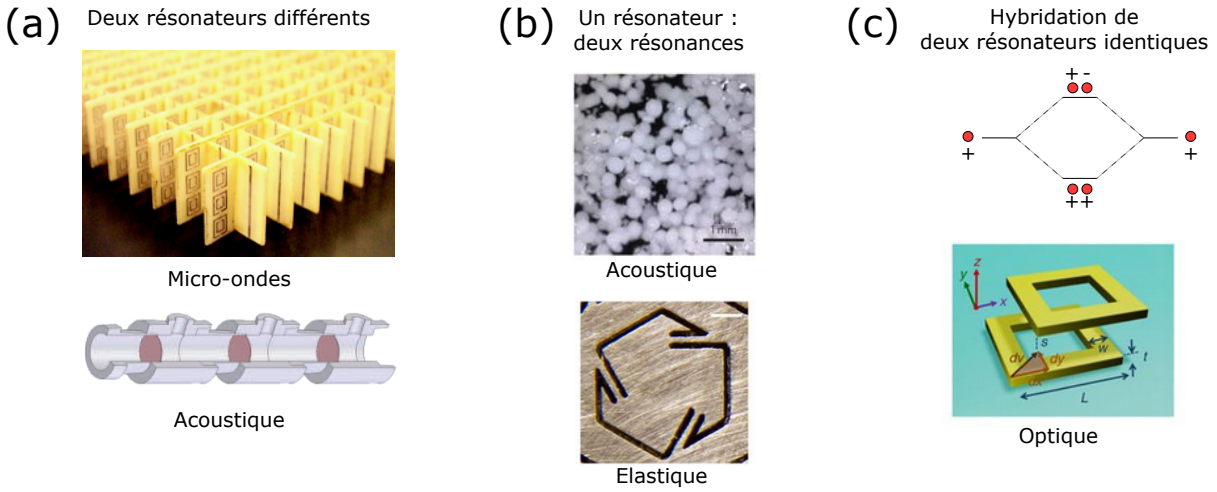


FIGURE III.10 – (a) Obtention d'un indice négatif en combinant les résonances de deux systèmes différents. (b) Idem mais en utilisant un résonateur présentant intrinsèquement deux résonances différentes. (c) Idem en hybridant les modes deux deux résonateurs identiques.

Cela est différent pour la bande « négative » : la solution correspondant à une pente positive est cette fois dans la partie négative de l'espace réciproque (point rouge sur la figure III.9). Dans ce cas, la vitesse de phase est négative ce qui traduit le fait que les fronts d'onde au sein du paquet d'onde se propagent dans le sens opposé au déplacement du paquet d'onde lui-même.

Bien que ce phénomène existe dans les systèmes dont la structure induit une bande négative, il se retrouve aussi au sein des milieux d'indice négatif. Ces derniers, théorisés par Veselago [35] puis réinterprétés quelques années plus tard par sir John Pendry, ont grandement contribué au développement du domaine des métamatériaux. Les premières réalisations expérimentales de ces milieux en micro-ondes [132, 133] ont rapidement été suivies par des démonstrations en optique [134–136] et en acoustique [137].

Deux propriétés négatives

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, afin d'obtenir un indice négatif, il faut que deux propriétés négatives cohabitent à la même fréquence dans le système. Dans cette optique, plusieurs méthodes ont été proposées dans le domaine des métamatériaux. La première est d'avoir deux résonateurs différents qui amènent chacun une propriété négative particulière. C'est le cas des mélanges de disques fendus ($\mu < 0$) et de fils de cuivre ($\epsilon < 0$) en micro-ondes [132] ou de résonateurs de Helmholtz ($\chi < 0$) couplés à des membranes

($\rho < 0$) [49, 138] dans un tube en acoustique (figure III.10(a)). Une autre approche, proposée par Jensen Li et C.T. Chan [137], est d'utiliser un résonateur qui possède deux modes de résonances dont les symétries sont différentes. C'est typiquement le cas lorsqu'un mode monopolaire ($\chi < 0$) et un mode dipolaire ($\rho < 0$) se chevauchent en fréquence, comme démontré expérimentalement avec des billes de silice poreuses pour les ondes acoustiques [43]. Pour les ondes élastiques cela fonctionne aussi en ayant une symétrie de translation ($\rho < 0$) conjointement avec une symétrie de rotation ($\chi < 0$) [139] (figure III.10(b)). Une autre façon d'obtenir ces deux symétries est d'utiliser deux résonateurs identiques et de les coupler entre eux. De leur hybridation découle un mode symétrique et un mode antisymétrique. Cela a été démontré en optique par Kanté *et al* [140], en utilisant un couplage de type champ proche (figure III.10(c)).

Dans notre étude, nous avons montré que briser la symétrie de la cellule unité de la chaîne de résonateurs la transformait en une chaîne de méta-molécules. Or ces dernières possèdent deux modes aux symétries différentes (monopolaire et dipolaire) qui émergent de la diffusion multiple au sein du dimère. Elles nous permettent d'avoir deux propriétés effectives négatives qui cohabitent en fréquence. Ceci est responsable de l'indice négatif dans le milieu. Ce cas de figure se rapproche de l'idée de Kanté *et al* [140], à la différence majeure qu'ici nous n'avons aucun couplage fort. Les modes résonant du dimère proviennent d'un couplage réalisé par l'intermédiaire de l'onde propagative. En comparaison, cette idée est donc beaucoup plus simple à mettre en oeuvre.

Milieux désordonnés

Pour l'instant nous avons montré l'émergence d'une bande négative dans un milieu périodique ordonné, qui peut être décrite par un diagramme de bande. Cependant nous avons réussi à expliquer les propriétés d'indice négatif du milieu en se basant sur une description modale de la cellule unité. Dans ce cas, il semblerait que l'ordre de la chaîne ne soit pas nécessaire à l'obtention d'un indice négatif, les deux propriétés négatives étant déjà présentes au sein de la méta-molécule, et ce pour des fréquences communes. Une collection spatialement désordonnée de tels dimères devrait donc présenter un indice négatif pour les fréquences auxquelles les deux modes cohabitent. Ainsi, au cours de sa thèse, Maxime Lanoy a démontré analytiquement qu'une tranche d'un milieu composé de dimères de résonateurs monopolaires (de simples bulles), possédait cette propriété dans le cas où l'on se restreint à la partie cohérente de l'onde qui s'y propage [141]. Ceci montre bien l'importance de la diffusion multiple au sein du milieu ainsi que la pertinence de l'approche en termes de méta-molécules.

Dans cette première section nous avons démontré que la structuration de la maille d'une chaîne de résonateurs sub-longueur d'onde avait un rôle primordial à jouer dans la propagation des ondes. Dans la suite nous généralisons cette approche, qui va au delà des théories d'homogénéisation habituelles, à des métamatériaux localement résonant bi-dimensionnels. Nous introduisons ainsi le concept de métamatériaux cristallins.

III.3 Généralisation à deux dimensions

Dans cette partie nous nous intéressons à des systèmes 2D périodiques dont la période a est très petite par rapport à la longueur d'onde. Ils obéissent donc au théorême de Bloch ce qui permet d'encapsuler la physique du réseau dans sa cellule unité. Nous choisissons d'étudier ces métamatériaux cristallins dans le domaine des micro-ondes avec des milieux de fils, beaucoup moins sensibles à la dissipation en comparaison avec les canettes en acoustique audible [142].

Dans les paragraphes suivants nous allons donc introduire des brisures de symétries, spatiales et spectrales, au sein de la maille sub-longueur d'onde de ces métamatériaux localement résonant et étudier leur influence sur la propagation des ondes dans le plan xOy. Notons ici qu'à la différence d'un milieu unidimensionnel, les milieux structurés bi-dimensionnels sont habituellement anisotropes. Les brisures de symétries que nous implémentons vont donc dépendre de la direction dans laquelle l'onde se propage. C'est pourquoi nous représentons chaque relation de dispersion suivant les directions principales propres à leur réseau.

III.3.1 Réseau Hexagonal

Bipériodicité

Nous travaillons ici avec le réseau de Bravais de type hexagonal, déjà décrit au chapitre 1. Ce choix est motivé par le souhait d'étudier le milieu le plus isotrope possible. Dans l'espace réciproque, cela signifie avoir une zone de Brillouin proche d'un cercle. Celle du réseau hexagonal étant un hexagone, elle s'en rapproche le plus. La cellule unité du réseau est donc un losange de côté d que l'on peut peupler d'un ou de deux résonateurs afin d'obtenir respectivement un milieu régulier ou bipériodique.

Dans le cas où il n'y a qu'un seul méta-atome par maille, le réseau est alors de type triangulaire (figure III.11). Il est monopériodique selon les deux directions principales ΓM et ΓK. En effet, selon ΓM il consiste en un empilement de plans de Bragg avec une période de $A = a\sqrt{3}/2$. Dans la direction ΓK ils sont séparés de $a/2$.

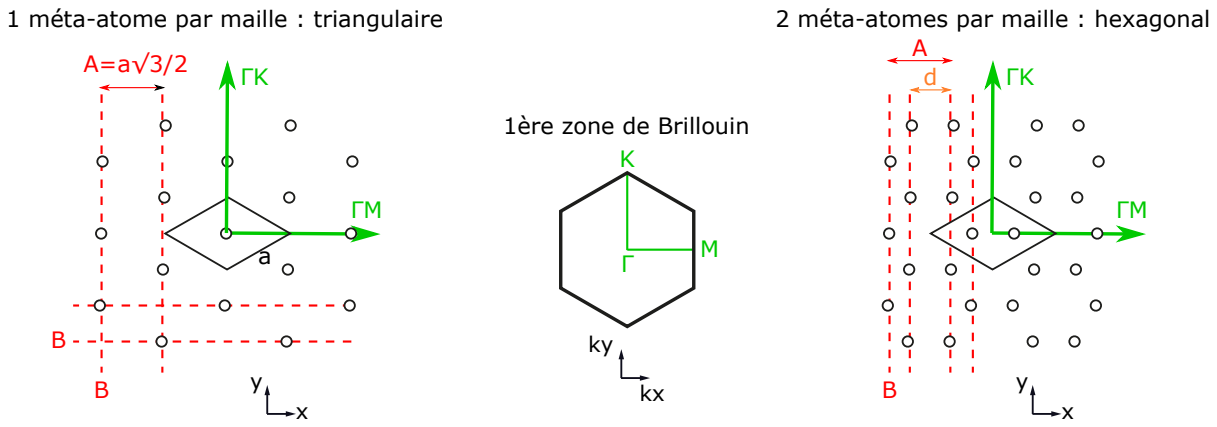


FIGURE III.11 – Mise en évidence de la bipériodicité du réseau hexagonal.

Si à présent on place deux résonateurs au centre du losange, le long de la grande diagonale, séparés d'une distance $d = a/\sqrt{3}$, on obtient le réseau en nid d'abeille. Dans ce réseau, la succession des plans de Bragg dans la direction ΓM est cette fois-ci bipériodique : des couples de plans de Bragg B séparés de a se succèdent avec une période A. Ceci est décrit sur la figure III.11.

Le passage du réseau triangulaire au réseau hexagonal est donc un moyen pertinent d'introduire une brisure de symétrie spatiale au sein de la maille.

Relation de dispersion numérique

Nous transposons ce protocole au domaine des micro-ondes. Comme précédemment nous utilisons des fils de cuivres comme méta-atomes. Le réseau hexagonal que nous implémentons est composé de fils de hauteur $h_0 = 16$ mm avec un pas $d = 10$ mm $= 0.15\ \lambda_0$ (figure III.12(c)). En utilisant le logiciel COMSOL Multiphysics, nous obtenons la relation de dispersion présentée sur la figure III.12(d) selon les deux directions principales ΓM et ΓK. Elle est composée de deux bandes : une à pente positive (en bleu), qui correspond au modes monopolaires du dimère, et une à pente négative qui cette fois-ci correspond aux modes dipolaires (en rouge). Cette bande négative peut aussi être vue comme étant le fruit du repliement du polariton correspondant au réseau triangulaire analogue, représenté sur la figure III.12(a),(b).

Cependant, le réseau hexagonal n'étant pas rigoureusement isotrope, il existe quelques différences entre les deux directions ΓM et ΓK. Au point K, les deux bandes se touchent et forment un cône de Dirac. Ce dernier, bien que lui aussi de nature sub-longueur d'onde, est cependant différent de celui présenté dans le chapitre précédent car il ne provient

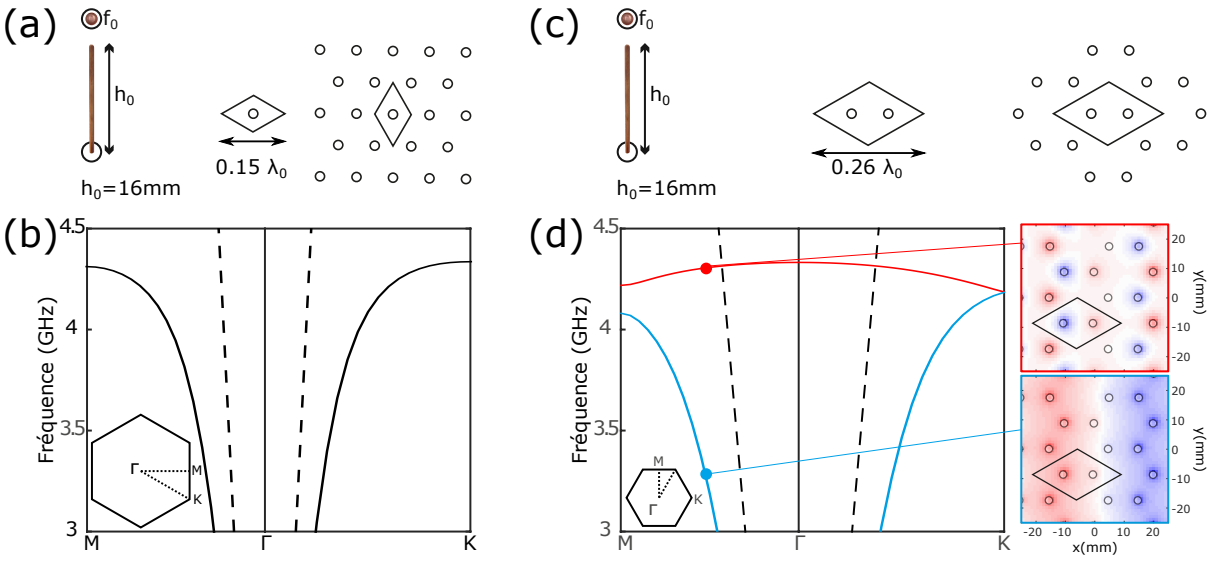


FIGURE III.12 – (a) Réseau triangulaire de fils. (b) Relation de dispersion associée à (a). (c) Réseau hexagonal de fils.(d) Relation de dispersion et modes cristallins associés à (c).

pas d'une structure décrite par le modèle de liaisons fortes. Il existe cependant grâce au repliement particulier du polariton, propre à la symétrie de la maille hexagonale.

Expérience

L'étape suivante est de vérifier expérimentalement que nous avons bien une bande négative au sein du milieu. Avec l'aide de l'équipe de Thomas Berthelot au CEA, nous fabriquons l'échantillon correspondant. Nous utilisons le même processus que précédemment lorsque nous avons fabriqué l'analogue électromagnétique du graphène. Il a la forme

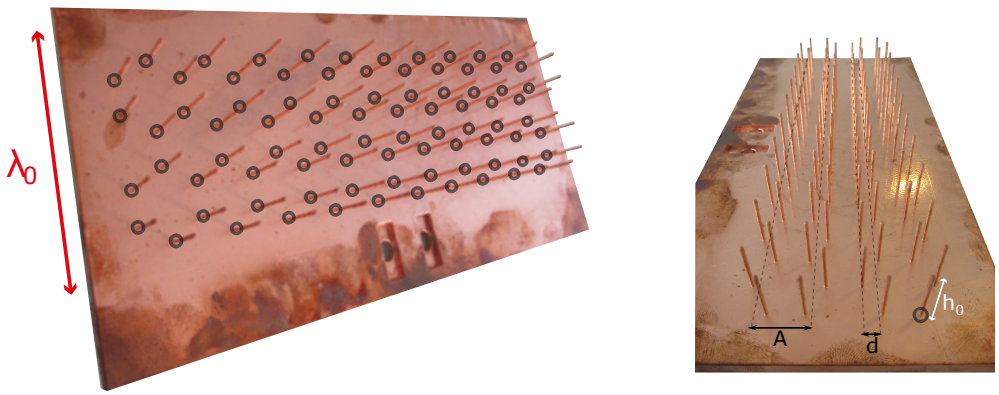


FIGURE III.13 – Photos de l'échantillon bipériodique.

d'un rectangle dont le petit côté est de l'ordre de λ_0 (figure III.13).

Nous faisons ensuite une expérience où nous mesurons la transmission entre une source ponctuelle électrique (une petite antenne) placée au voisinage du métamatériau et une sonde, montée sur un banc de mesure 2D, qui vient mesurer le champ 1 mm au dessus des fils. Cette mesure se fait via un analyseur de réseau ce qui nous permet d'obtenir en chaque point la réponse pour un grand nombre de fréquences en une seule fois. Nous effectuons des scans sur une zone englobant l'ensemble de l'échantillon. De cette façon nous obtenons une carte de champ électrique à chaque fréquence. C'est le même protocole expérimental qu'au chapitre 2.

Contours Isofréquences

En faisant la moyenne spatiale de toutes les cartes de champ électrique obtenues à chaque fréquence nous obtenons le spectre moyenné de la figure III.14. La présence de pics de transmission témoigne du bon couplage entre la source et les modes propres du réseau de fils. Nous voulons à présent mettre en évidence l'existence d'une bande négative au sein de la relation de dispersion du milieu. Nous effectuons donc la transformée de Fourier 2D spatiale de ces cartes. Le protocole expérimental étant linéaire il est possible de leur appliquer ensuite les opérations de symétries relatives au réseau hexagonal (rotation de 60 degrés et deux miroirs), de la même façon qu'au chapitre précédent. En extrayant les emplacements dans l'espace réciproque des maxima des cartes obtenues nous obtenons les contours isofréquences correspondants. Deux exemples à deux fréquences différentes sont présentés sur la figure III.14. Ce sont des hexagones dont les sommets sont très en dehors du cône de lumière (représenté par un cercle en pointillés). A ces fréquences les ondes

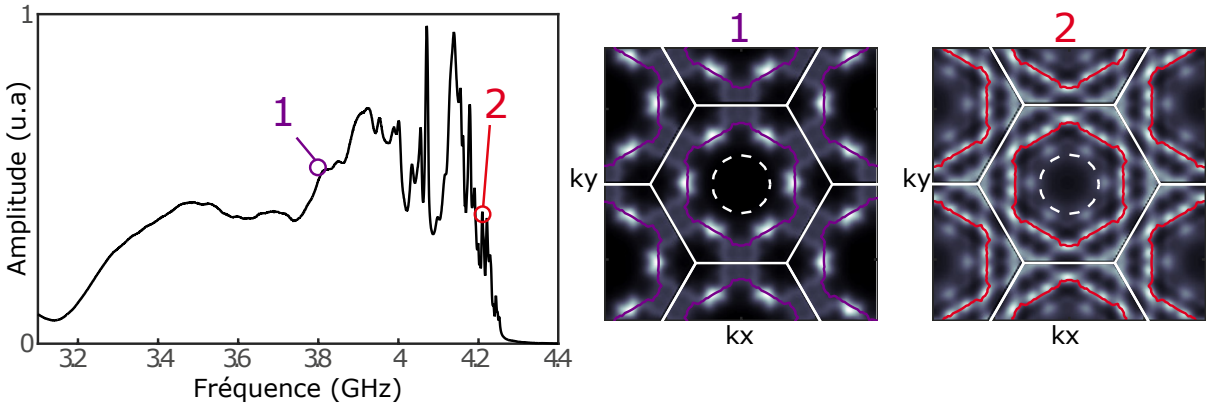


FIGURE III.14 – Spectre expérimental (gauche) et contours isofréquences expérimentaux obtenus pour deux fréquences différentes pour le réseau bipériodique.

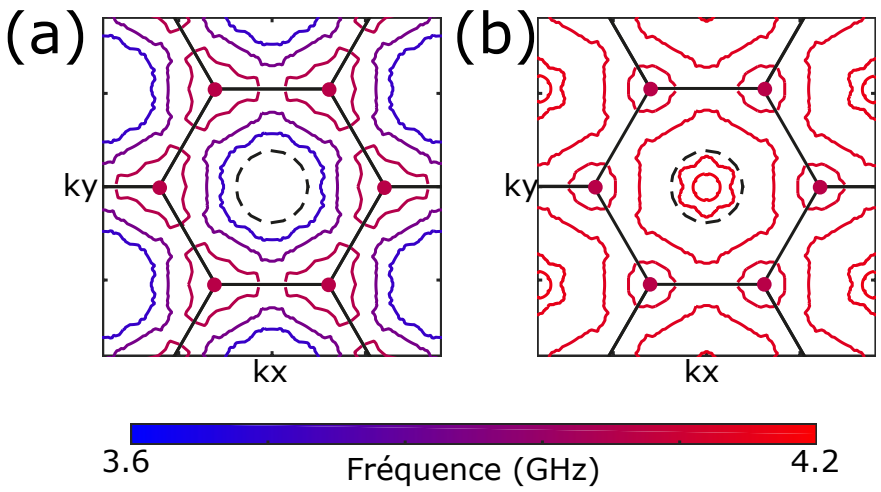


FIGURE III.15 – (a) Empilement des contours isofréquences de la bande inférieure du réseau bipériodique. (b) Idem pour la bande supérieure.

dans le milieu sont donc beaucoup plus sub-longueur d'onde que dans le cas d'un cristal photonique. Par ailleurs les contours n'étant pas exactement circulaires, la propagation des ondes y est légèrement anisotrope.

Structure de bande

Nous empilons ensuite ces contours expérimentaux et en leur attribuant une couleur relative à leur fréquence, nous obtenons une version discrétisée de la structure de bande du réseau. Cette dernière possède bien deux bandes. La première à basse fréquence est constituée de contours circulaires dont le rayon augmente rapidement avec la fréquence, ce qui est en accord avec la description isotrope du polariton dont la pente est positive (figure III.15(a)). A plus haute fréquence en revanche, les contours tendent à se concentrer autour des coins de la première zone de Brillouin. Ceci témoigne d'une forte anisotropie au sein de cette bande et donc de la nature cristalline des modes sub-longueur d'onde du milieu. Ces contours deviennent ensuite des points aux coins de la zone de Brillouin. La bande supérieure présente quant à elle le comportement inverse (figure III.15(b)). Les cercles autour des points K de la zone de Brillouin redeviennent rapidement des cercles centrés sur Γ quand la fréquence augmente. Nous mesurons donc encore une fois un cône de Dirac au sein du métamatériau. Pour les plus hautes fréquences, les contours sont circulaires et leur rayon décroit avec la fréquence. Le milieu peut être considéré comme isotrope et se voir attribuer un indice de réfraction effectif négatif comme c'est habituellement le cas dans les métamatériaux.

Par ailleurs, la bande supérieure est beaucoup plus plate que la bande inférieure. Ceci montre bien que nous sommes dans le cas d'un repliement d'un polariton et non pas du cône de lumière comme dans les cristaux, auquel cas les deux bandes auraient eu un profil plus symétrique en fonction de la fréquence. Il est aussi possible de comparer ce milieu aux bandes du réseau hexagonal de défauts de l'analogue macroscopique du graphène du chapitre 2. Pour ce dernier le profil de la relation de dispersion était symétrique à cause de l'interaction localisée au sein du réseau. Ici, l'interaction est complètement délocalisée entre l'onde propagative incidente et le mode monopolaire de la méta-molécule ce qui donne une bande inférieure de type polariton. Enfin, le mode dipolaire étant très proche en fréquence du mode monopolaire, il est analogue à un mode de défaut résonant situé au début de la bande interdite du polariton. Le champ est donc très confiné sur les méta-molécules ce qui est une autre façon d'expliquer pourquoi la bande négative est très plate.

Cette première étude expérimentale démontre qu'en brisant la symétrie spatiale de la maille d'un métamatériau localement résonant 2D, il est possible d'introduire un repliement spectral, même à l'échelle sub-longueur d'onde. Dans la partie suivante, nous nous intéressons au cas bidisperse.

III.3.2 Réseau Carré bidisperse

Réseau Bidisperse

Afin d'implémenter à deux dimensions une brisure de symétrie spectrale au sein de la maille nous nous intéressons cette fois-ci à un réseau de Bravais de type tétragonal

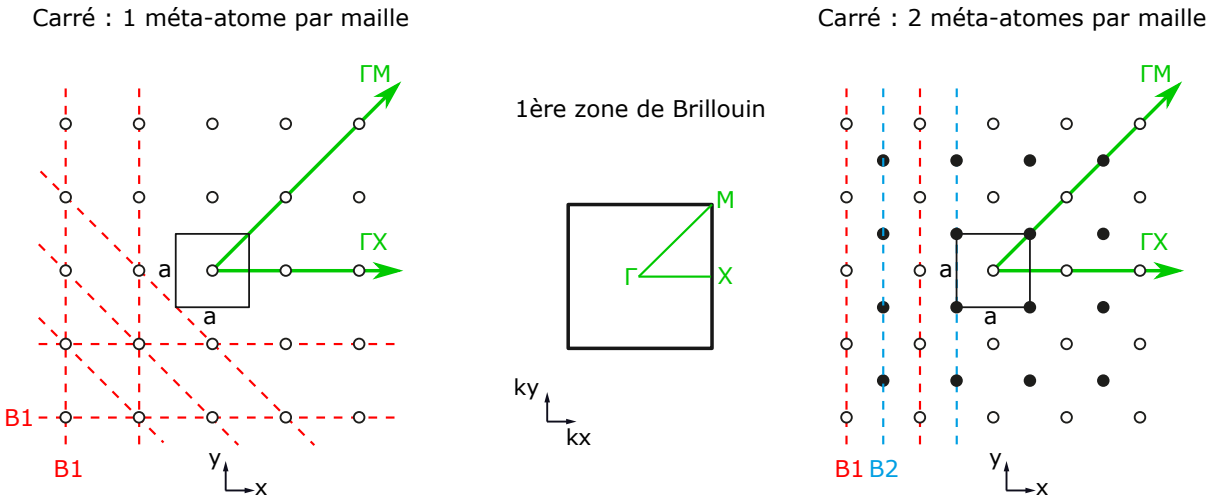


FIGURE III.16 – Mise en évidence du caractère bidisperse du réseau étudié.

(figure III.16). Ce réseau, présenté lui aussi au chapitre 1, est moins isotrope que le réseau hexagonal. Cependant, il permet de différencier l'influence de la structure et de la composition de la maille sur la relation de dispersion du milieu en se démarquant du réseau bipériodique précédent.

Dans ce cas la maille élémentaire est un carré de côté a. Lorsqu'on y dispose un résonateur unique (f_0) on obtient un réseau régulier qui présente une succession monopériodique de plans de Bragg identiques selon les directions principales du réseau (qui sont ici ΓM et ΓX). Ces plans sont distants de a et formés de résonateurs identiques eux aussi espacés de a. Quelle que soit la direction, le réseau est monopériodique et monodisperse.

A présent on ajoute un second résonateur au sein de la maille, de fréquence de résonance $f_1 \neq f_0$. Ce dernier est disposé dans les coins de la maille, formant un sous réseau carré identique au premier, décalé de ($a/2$,$a/2$). Dans la direction ΓX, ce milieu est une succession de plans de Bragg composés alternativement des différents types de résonateurs. Cette succession est monopériodique de période a ce qui en fait un cas très proche de la chaîne bidisperse de résonateur. Il semble donc que ce réseau bidisperse brise effectivement la symétrie spectrale de la maille. Selon la direction ΓM en revanche la situation est plus complexe et il est difficile d'anticiper les propriétés de propagation de l'onde.

Relation de dispersion numérique

Le milieu de fils correspondant à ce cas de figure est un réseau carré formé de deux fils de longueurs différentes : $h_0 = 16$ mm (cercles noirs) et $h_1 = 15.7$ mm (disques noirs). La distance les séparant est égale à 10 mm $= 0.15\lambda_0$. Nous obtenons comme précédemment la relation de dispersion du milieu infini représentée selon les directions ΓM et ΓX sur la figure III.17(c). Elle possède bien deux bandes, de pente positive pour celle à basse fréquence (bleu) et négative à haute fréquence (rouge), qui correspondent réciproquement à des symétries monopolaires et dipolaires au sein de la cellule unité. Tout comme le cas bipériodique précédent, cette relation de dispersion s'interprête aussi comme le repliement du polariton lié au réseau carré régulier de la figure III.17(a),(b).

Contours isofréquences

Nous fabriquons à nouveau un échantillon de forme rectangulaire dont le petit côté mesure environ λ_0, et effectuons la même étude qu'au paragraphe précédent (figure III.18).

Après avoir appliqué les opérations de symétries liées à la maille carrée (rotation de 45 degrés et deux miroirs) aux tranformées de Fourier spatiales des cartes de champ expérimentales, nous obtenons de la même façon que précédemment les contours isofré-

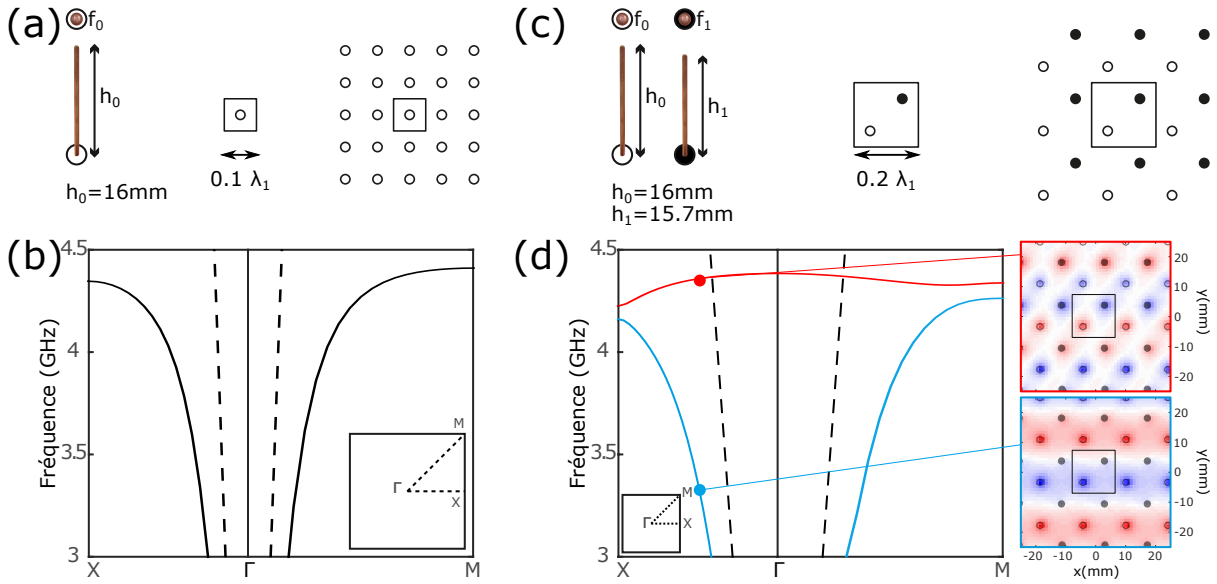


FIGURE III.17 – (a) Réseau carré de fils. (b) Relation de dispersion associée à (a). (c) Réseau carré bidisperse de fils. (d) Relation de dispersion et modes cristallins associés à (c).

quences du milieu. Les deux exemples de la figure III.19, témoignent d'une anisotropie plus prononcée que pour le réseau hexagonal et ce à une échelle très sub-longueur d'onde.

Structure de bande

La structure de bande expérimentale discrétisée est présentée sur la figure III.20. Elle est en bon accord avec la dispersion numérique et présente deux bandes de pentes opposées. De la même façon que pour le réseau hexagonal, la bande supérieure négative est beaucoup plus plate que la bande inférieure. L'isotropie de son caractère négatif augmente avec la fréquence. Il est alors possible de lui attribuer un indice effectif négatif comme c'est habituellement le cas dans le domaine des métamatériaux.

Ces deux démonstrations expérimentales prouvent qu'à la fois la composition et la structure de la maille élémentaire d'un métamatériau localement résonant jouent un rôle prépondérant dans la propagation des ondes, notamment en créant une bande négative.

Jusqu'à présent nous avons caractérisé cette dernière à partir de la relation de dispersion dans l'espace réciproque avec des contours isofréquences. Dans la partie suivante nous exploitons ses propriétés dans l'espace réel et réalisons une super-lentille.

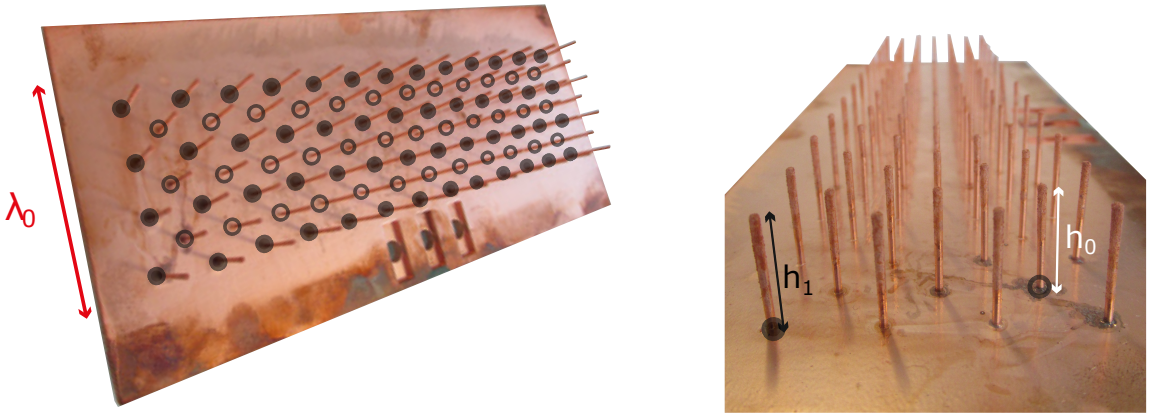


FIGURE III.18 – Photos de l'échantillon bidisperse.

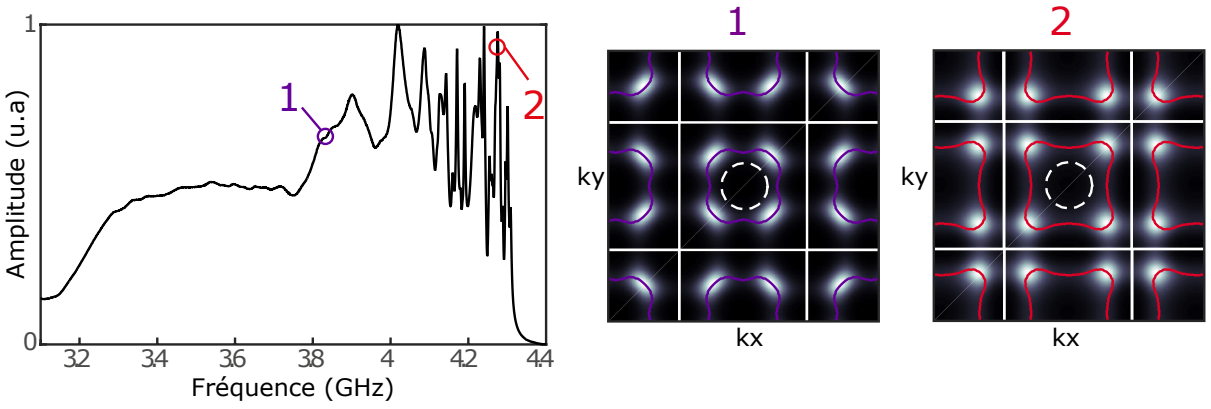


FIGURE III.19 – Spectre expérimental (gauche) et contours isofréquences expérimentaux obtenus pour deux fréquences différentes pour le réseau bidisperse.

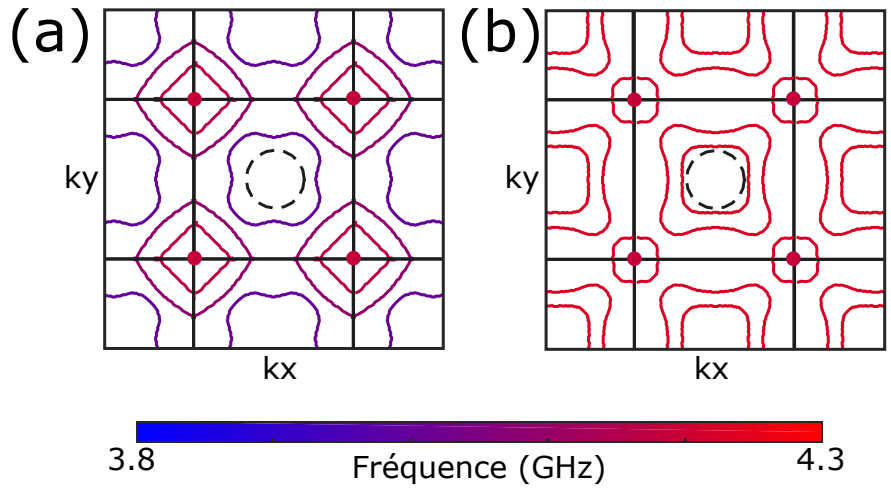


FIGURE III.20 – (a) Empilement des contours isofréquences de la bande inférieure du réseau bidisperse. (b) Idem pour la bande supérieure.

III.3.3 Super-lentille électromagnétique

Réfraction négative

A la fin de la première partie de ce chapitre, nous avons remarqué que certaines propriétés de la bande négative, notamment relatives à la propagation d'une impulsion, étaient similaires à celles d'un milieu d'indice négatif.

Ici nous poursuivons ce parallèle en étudiant des phénomènes d'interface. Nous avons vu au cours du premier chapitre qu'il était possible de décrire précisément les lois de réfraction à l'interface entre deux milieux au moyen des contours isofréquences dans l'espace réciproque. Ceci repose sur le fait que la composante du vecteur d'onde incident qui est parallèle à l'interface se conserve d'un milieu à l'autre, comme le rapelle la figure III.21(a). La pointe des flèches représentées correspondent à la vitesse de phase de l'onde. Dans le cas d'un milieu d'indice positif, l'onde transmise est bien du même côté que l'onde réfléchie.

Si l'on regarde à présent le cas d'une interface entre deux milieux dont les indices sont de signes opposés, la réfraction est très différente. En effet, si l'onde qui est transmise dans le milieu négatif s'obtient toujours grâce à la conservation de la composante parallèle du vecteur d'onde incident, l'interface étant toujours invariante par translation dans la direction y, il faut cependant prendre en compte son signe. L'indice étant négatif, les flèches correspondant au vecteur d'onde pointent vers le centre du cercle. Par conséquent, la conservation de $k_{\|}$ nous impose que le rayon réfracté soit dans la partie « anormale » (figure III.21(b)). La vitesse de phase de ce mode est bien de sens opposé

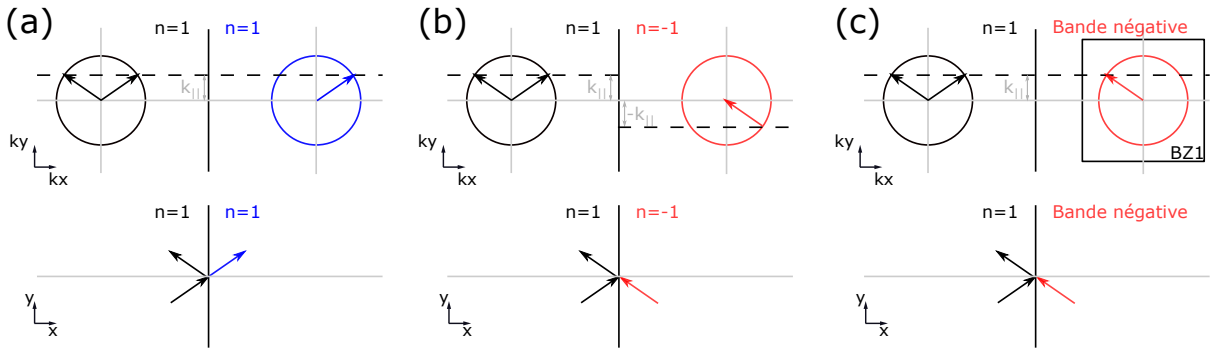


FIGURE III.21 – (a) Réfraction à l'interface entre deux milieux d'indice positifs dans l'espace réciproque (haut) et dans l'espace réel (bas). (b) Idem pour un milieu d'indice négatif. (C) Idem pour un cristal carré avec une bande négative.

à la vitesse de groupe. Ce phénomène est connu sous le nom de réfraction négative et à été théorisé par Veselago [35].

Intéressons nous maintenant au cas d'un milieu cristallin qui possède une bande négative (figure III.21(c)). Ici, comme nous l'avons expliqué dans la partie précédente, la solution de la première zone de Brillouin présentant une vitesse de groupe positive, donc liée à propagation vers les x positifs, est cette fois située dans la partie négative de l'espace réciproque. Parmi les deux vecteurs d'onde possédant la composante $k_{\|}$ de l'onde incidente, nous devons donc choisir celui qui pointe vers les x négatifs. Ceci résulte en un phénomène de réfraction qui est très similaire au cas théorique du milieu d'indice négatif : l'onde est transmise du côté « anormal » dans le milieu cristallin et le signe de la vitesse de phase est opposé à celui de la vitesse de groupe.

Il est donc aussi possible d'obtenir un phénomène de réfraction négative, similaire à ce qu'on obtiendrait dans un milieu d'indice négatif, en exploitant les propriétés de la bande négative d'un milieu structuré. Dans la suite nous exploitons les caractéristiques de cette réfraction particulière afin de créer une « lentille » plate.

Concept de « lentille » plate

Une lentille est un milieu diélectrique d'indice positif dont la forme incurvée permet de compenser la phase des différents trajets des rayons émis par une source (objet) ce qui les re-focalise en sortie. La position de l'image obtenue dépend de la distance séparant l'objet de la lentille, de la distance focale de cette dernière et de la fréquence de travail. La courbure inhérente à ces lentilles traditionnelles impose une ouverture angulaire finie et provoque des aberrations géométriques dans le cas des instruments d'optique épais (figure

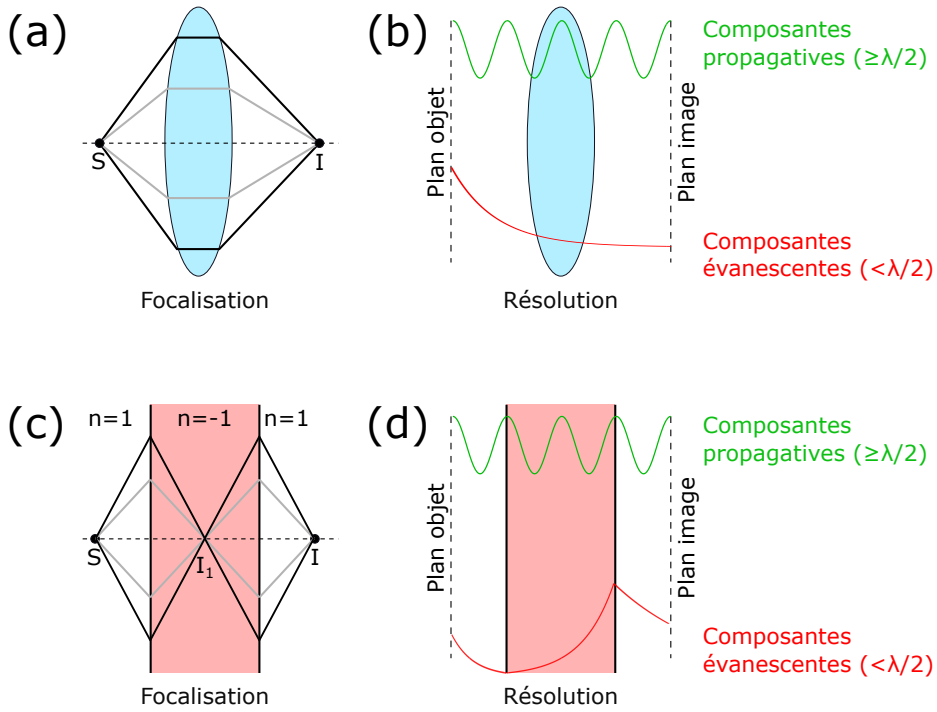


FIGURE III.22 – (a) Focalisation par une lentille conventionnelle. (b) Résolution correspondant à (a). (c)(resp.(d)) Focalisation (resp.résolution) d'une « lentille » plate.

III.22(a),(b)).

Veselago a remarqué qu'il était aussi possible d'utiliser une tranche de matériau d'indice négatif avec deux interfaces parallèles afin de retrouver l'image d'une source en sortie du milieu, formant ainsi une « lentille » plate [35]. En effet, la réfraction négative à l'entrée de la « lentille » permet tout d'abord de faire converger les rayons divergents venant de l'objet, puis la réfraction à la seconde interface refocalise le faisceau (figure III.22(c)). Si l'indice vaut -1, tous les rayons venant de la source convergent au même point, ce qui permet de s'affranchir des distorsions géométriques. Bien que nous parlons de « lentille » ici, il faut garder à l'esprit que ce système particulier n'en possède pas toutes les propriétés : il n'y a pas d'axe optique, il ne peut pas agrandir l'image de l'objet ni focaliser un faisceau parallèle incident.

Plus tard, sir John Pendry, en allant plus loin que l'approche d'optique géométrique de Veselago, a proposé l'idée qu'un tel système pouvait potentiellement, via l'existence de modes de surface, amplifier les ondes évanescentes afin qu'elles contribuent à la formation de l'image [66]. Ces dernières pourraient donc atteindre la sortie du milieu en apportant les détails sub-longueur d'onde de la source ce qui permettrait de battre la limite de diffraction ($\lambda/2$), au voisinage immédiat de la lentille. Pendry explique ainsi qu'avec un

milieu d'indice $n = -1$ ($\epsilon = -1$ et $\mu = -1$), sans dissipation, il est possible de créer une lentille parfaite (figure III.22(d)). En pratique, il est évidemment très difficile d'obtenir de telles conditions, à cause notamment des pertes intrinsèques, de la dispersion ou encore de l'anisotropie du milieu. Les démonstrations de super-résolution à travers des lentilles plates sont alors basées sur un autre mécanisme, moins restrictif, à savoir le couplage de modes de surface entre deux interfaces d'un milieu simplement négatif d'épaisseur sub-longueur d'onde [143, 144].

Des « lentille » plates basées sur la réfraction négative, ont aussi été réalisées en utilisant la bande négative de matériaux structurés à l'échelle de la longueur d'onde [145]. C'est le cas de la démonstration en acoustique ultrasonore de l'équipe de John Page grâce à un réseau triangulaire de tiges d'acier immergées par exemple [34]. Notons qu'il est aussi possible de re-focaliser les ondes en sortie d'un cristal photonique en exploitant l'anisotropie de la première bande positive [25]. Cela a été démontré en micro-ondes [146, 147], en optique [148] mais aussi en acoustique [149] et pour les ondes élastiques [150].

Cependant, bien que l'absence de résonance les rendent moins sensibles à la dissipation, ces lentilles particulières ne permettent pas d'obtenir des détails plus petits que la périodicité du milieu, soit $\lambda/2$. En effet, la propriété négative ici ne découle pas de l'amplification d'ondes évanescentes mais des ondes de Bloch.

Dans la section précédente, nous avons étudié deux exemples de métamatériaux localement résonant dont la structure sub-longueur d'onde était responsable de l'émergence d'une bande négative dans la relation de dispersion du milieu. Nous pouvons donc obtenir un phénomène de réfraction négative de la même façon que pour les cristaux. Cependant, dans notre cas les modes supportés par cette bande présentent une variation spatiale très petite par rapport à la longueur d'onde de la source. Ils permettent donc de transporter des détails beaucoup plus fins qu'un cristal photonique habituel, et donc de battre la limite de diffraction. Ceci a été démontré par Nadège Kaina au cours de sa thèse en acoustique audible avec un réseau hexagonal de canettes de soda [142].

Démonstration expérimentale : 1 source

Ici, nous vérifions l'approche expérimentalement en plaçant une source ponctuelle à l'entrée de chacun de nos échantillons et effectuons un scan d'une zone environ trois fois plus large que la largeur du rectangle où sont disposés les fils. La figure III.23 représente, pour chaque échantillon, une carte expérimentale de l'intensité du champ électrique pour deux fréquences. Pour chacun d'entre eux, l'une (bleue) correspond à un contour isofréquence circulaire, donc isotrope, de la première bande d'indice positif (figure III.23(a),(c)).

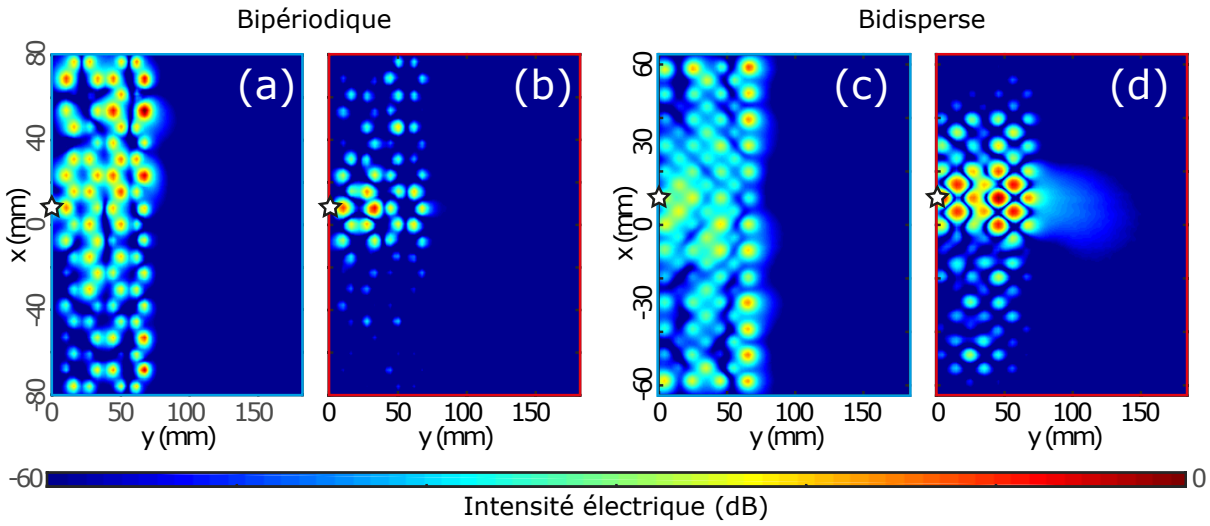


FIGURE III.23 – (a) Carte d'intensité du champ électrique correspondant à un contour isofréquence positif dans le réseau bipériodique. (b) pareil que (a) mais pour un contour isofréquence négatif. (c) et (d) pareil que (a) et (b) mais pour le cas bidisperse.

Dans ce cas nous voyons que le champ diverge depuis la position de la source et allume l'ensemble de l'échantillon, ce qui est en accord avec un milieu d'indice positif. L'autre carte de champ (en rouge), correspond quant à elle à une fréquence pour laquelle le contour isofréquence est aussi circulaire mais pour la bande négative supérieure (figure III.23(b),(d)). Dans ce cas, le champ est localisé spatialement ce qui est lié au fait que l'onde converge au sein du milieu. Ceci témoigne d'un indice négatif en accord avec le contour isofréquence situé en dehors du cône de lumière. En gardant à l'esprit que la largeur du rectangle est de l'ordre de la longueur d'onde, ces résultats montrent que nous avons en effet focalisé le champ en dessous de la limite de diffraction en sortie de chacun des deux métamatériaux cristallins.

Démonstration expérimentale : 4 sources

Nous allons ensuite plus loin et effectuons la même expérience mais cette fois-ci avec quatre sources en entrée. Ces dernières sont espacées par une distance faible par rapport à la limite de diffraction (0.24 λ pour le cas bipériodique, 0.39 λ pour le bidisperse). Ces sources multiples nous permettent d'envoyer un signal plus complexe en entrée fait d'une alternance de champ positif et négatif (+1,-1,-1,+1), comme représenté sur la figure III.24. Le profil du champ à la sortie des réseaux de fils (ligne pointillée blanche) permet de récupérer une image de cet objet en sortie du milieu, avec une résolution plus fine que la limite de diffraction au voisinage de la « lentille ».

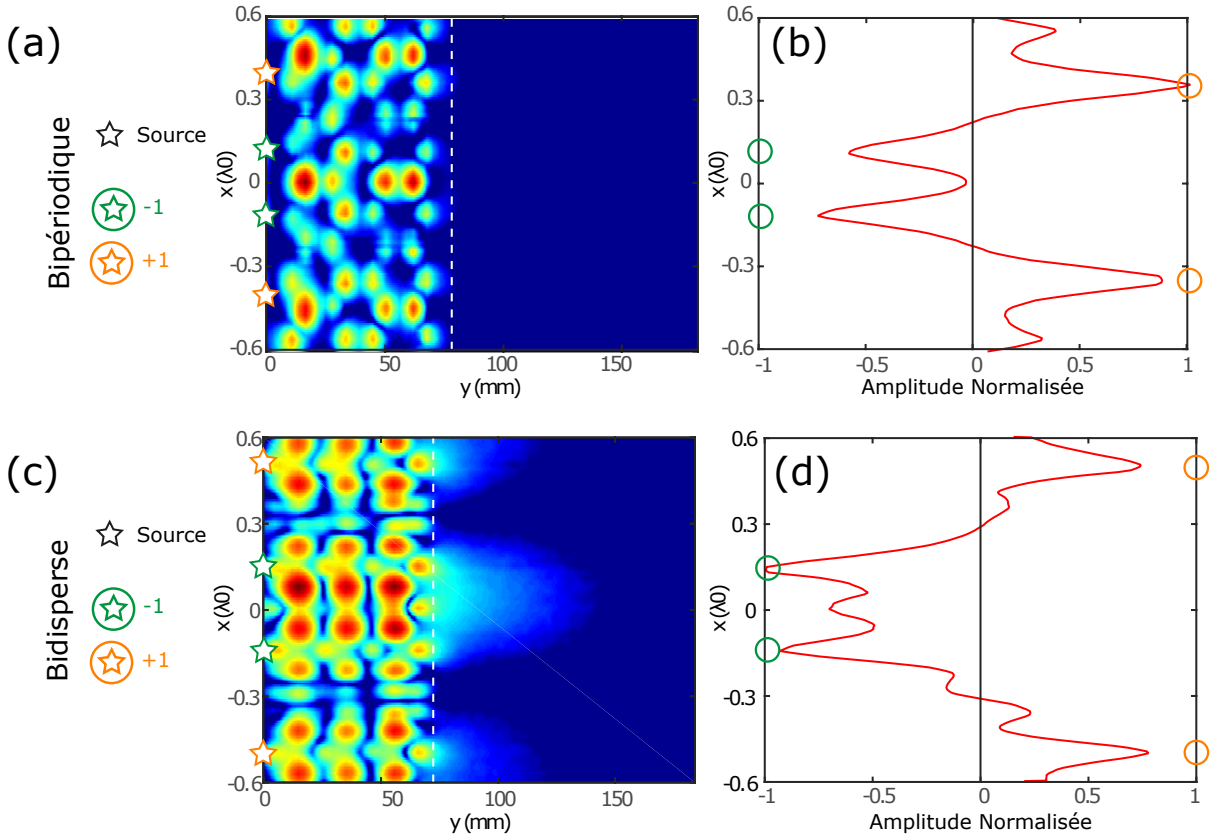


FIGURE III.24 – (a) Cartes d'intensité de l'expérience avec 4sources montrant la résolution sub-longueur d'onde d'une super-lentille obtenue grâce au réseau bipériodique. (b) Profil du champ en sortie de la lentille (ligne pointillée sur (a)). (c) et (d) pareil que (a) et (b) dans le cas bidisperse.

Par ailleurs, bien qu'étant dans le cadre de métamatériaux localement résonants, nous n'observons pas à proprement parler d'amplification des ondes évanescentes comme l'avait prédit Pendry. Les détails sub-longueur d'onde sont transmis à travers le milieu via les modes propagatifs dipolaires venant du repliement spectral du polariton. En arrivant sur l'interface de sortie, ces modes sub-longueur d'onde deviennent à nouveau évanescent dans l'air. Ces métamatériaux cristallins refocalisent l'onde issue de la source en sortie, tout comme le permettent les cristaux photoniques avec une bande négative. Cependant, sa structuration sub-longueur d'onde permet de propager les modes qui sont habituellement évanescents dans l'air, dont l'échelle spatiale très petite permet de récupérer les détails fins de l'objet.

Dans cette partie nous avons généralisé à deux dimensions l'idée que la structuration de la cellule unité des métamatériaux localement résonants avait une influence primordiale, malgré sa nature sub-longueur d'onde, sur la propagation des ondes dans le milieu.

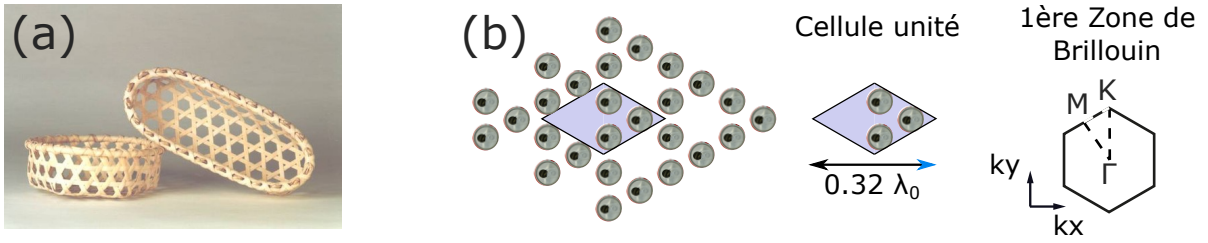


FIGURE III.25 – (a) Panier avec le réseau Kagomé. (b) Réseau Kagomé de canettes de soda.

L'extraction des contours isofréquences expérimentaux des réseaux bipériodiques et bidisperses étudiés ont permis de mettre en évidence la structure cristalline de ces milieux, ce qui nous mène à les dénommer métamatériaux cristallins. Cette approche, qui s'apparente à celle des cristaux photoniques en termes de structure de bande, nous a permis de mesurer un cône de Dirac à des échelles très faibles devant la longueur d'onde, mais cette fois-ci au sein de la bande polaritonique. Elle a aussi permis d'implémenter très simplement une « super-lentille » électromagnétique. Dans la dernière partie nous appliquons cette approche cristalline à un réseau plus complexe : le Kagomé.

III.4 Un réseau plus complexe : le Kagomé

Nous nous intéressons à présent au réseau appelé Kagomé que nous avons déjà rencontré au chapitre précédent. Il correspond à la façon dont sont arrangés les résonateurs basse fréquence formant la bande interdite de l'étude du réseau $T3$. Pour information, il tire son nom du motif utilisé pour décorer certains paniers japonais (figure III.25(a)). Ici nous faisons le choix de travailler dans le domaine acoustique avec un métamatériau constitué de canettes de soda. Le réseau spécifique que nous étudions, ici numériquement avec le logiciel COMSOL Multiphysics, est ainsi représenté sur la figure III.25(b). La distance a entre deux canettes est de 9.9 cm = 0.10 λ_0, la fréquence de résonance f_0 de la canette simulée étant de 370 Hz. Nous sommes donc bien dans le cas d'un métamatériau cristallin tels que ceux introduits dans la partie précédente.

La cellule unité sub-longueur d'onde du réseau Kagomé peut être vue comme un losange composé de trois canettes identiques disposées sur un triangle. Nous sommes donc dans un cas plus complexe que celui de la partie précédente. En effet, les réseaux hexagonal et bidisperse avaient une cellule unité où seulement deux résonateurs étaient alignés selon un de ses axes de symétrie. Celle du réseau Kagomé en possède un supplémentaire qui

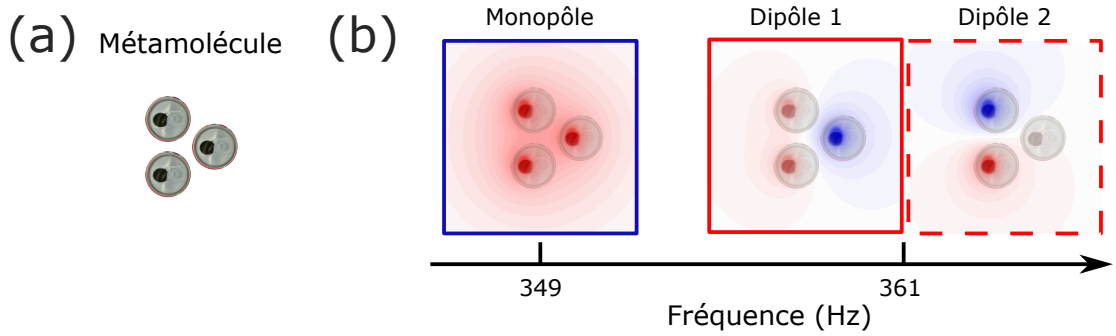


FIGURE III.26 – (a) Trimère de résonateurs. (b) Modes prores correspondants.

brise cet alignement.

III.4.1 Méta-molécule triangulaire

Trimère de résonateurs

Il est possible d'appréhender ce système comme un réseau triangulaire d'une méta-molécule, orientée selon une direction bien précise au sein de la cellule (figure III.26(a)). Cette dernière est un triangle équilatéral dont les sommets sont occupés par des canettes identiques. Elle possède trois modes propres qui sont décrits sur la figure III.26(b). Le mode de plus basse fréquence est de nature monopolaire : toutes les canettes répondent en phase (cadre bleu). A plus haute fréquence ($361Hz$) on trouve deux modes dégénérés orthogonaux qui ont chacun une symétrie dipolaire. Pour l'un, deux résonateurs sont en phase et l'autre est en opposition de phase avec eux (cadre plein rouge), pour l'autre deux résonateurs sont en opposition de phase et le troisième est sur un noeud du champ (cadre pointillé rouge).

Mode « sourd »

Nous nous intéressons à présent à la réponse en champ lointain de cette méta-molécule. Pour cela nous simulons la transmission d'une onde acoustique en sortie d'un guide d'onde placé sur l'ouverture des canettes avec COMSOL Multiphysics, comme précédemment. Ce trimère peut être disposé selon plusieurs orientations dont deux sont présentées sur la figure III.27(a) et (c).

Dans le premier cas, le profil de la transmission en sortie du guide d'onde en fonction de la fréquence possède deux pics (figure III.27(b)). Le premier est très large et centré sur la fréquence de résonance $f_0 = 370$ Hz d'une canette. En regardant le champ associé, nous

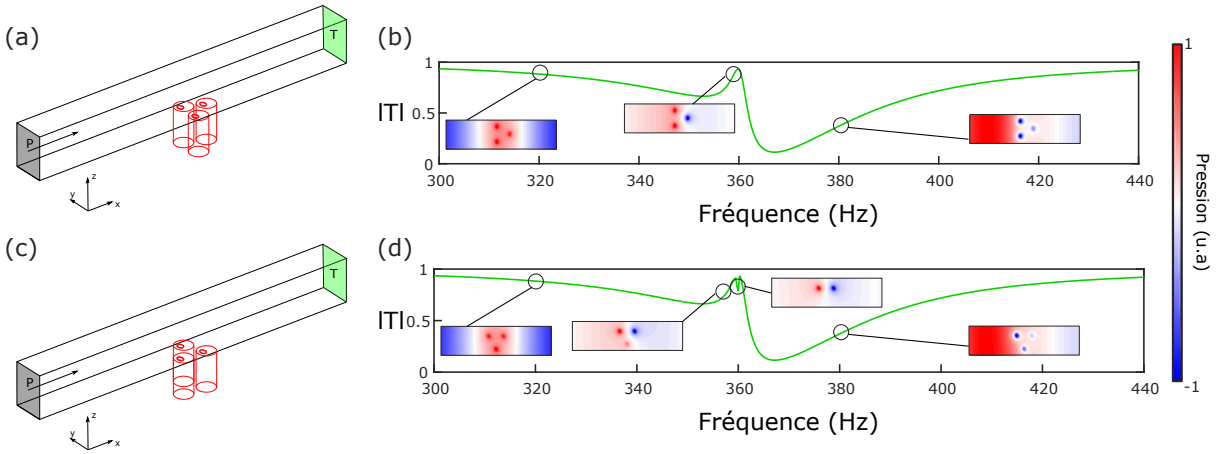


FIGURE III.27 – (a) Trimère composé de canettes sous le guide d'onde selon une première orientation. (b) Transmission en champ lointain correspondant à (a). (c) (resp. (d)) pareil que (a) (resp. (b)) pour la deuxième orientation.

voyons qu'il correspond au mode monopolaire. Ce dernier se couple très bien avec l'onde qui se propage dans le guide. Le second pic, situé à 361 Hz, est quant à lui beaucoup plus étroit. Il est lié au mode dont la symétrie est dipolaire, ce qui explique son facteur de qualité plus élevé. Ce mode dipolaire émerge de la diffusion multiple entre les résonateurs de la cellule unité, exactement de la même façon que le cas du nid d'abeille ou bidisperse vu précédemment. Le profil de la transmission en fonction de la fréquence est ainsi identique à celui du dimère étudié dans la première partie de ce chapitre.

Cependant, nous n'observons ici qu'un seul des modes propres dipolaires de la méta-molécule. Cela s'explique par le fait que le second dipôle est orienté dans la direction transverse au guide. En champ lointain il est donc impossible pour une onde plane incidente d'exciter ce mode dans ce cas de figure. On parle de mode « sourd » en acoustique, ou bien de mode « sombre » en optique.

Regardons à présent la transmission correspondant à l'autre orientation (figure III.27(c)). Là encore le pic large est lié au monopôle dont la symétrie isotrope permet de l'exciter efficacement dans toutes les directions. Nous observons ensuite le même pic que précédemment à la fréquence de 361 Hz relié à la symétrie dipolaire. Cependant, au sommet de ce pic, un léger creux est apparu. Le mode correspondant présente la seconde symétrie dipolaire. Avec cette orientation du trimère, il est donc possible d'exciter en champ lointain les deux symétries dipolaires.

Nous avons ainsi une méta-molécule qui possède trois modes propres mais dont seulement deux interagissent avec une onde propagative de l'espace libre provenant de direc-

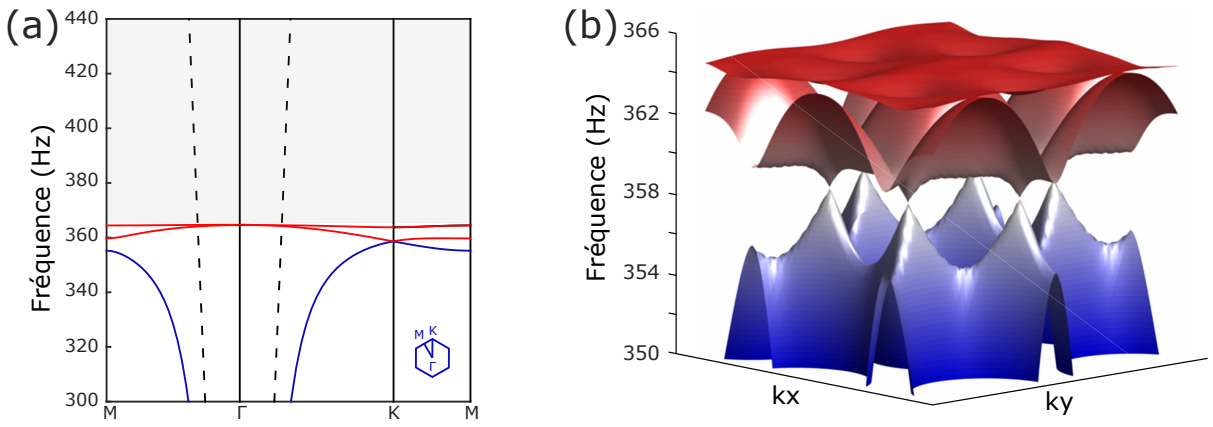


FIGURE III.28 – (a) Relation de dispersion du réseau de Kagomé de canettes de soda. (b) Idem en vision 3D.

tions particulières. Dans la partie suivante nous montrons cependant que l'existence du mode « sourd » doit être prise en compte afin d'expliquer le comportement des ondes dans le réseau.

III.4.2 Métamatériau cristallin de type Kagomé

Relation de dispersion

Nous calculons la relation de dispersion du réseau Kagomé de canettes en appliquant les conditions périodiques de Bloch à notre cellule unité. Le résultat est présenté sur la figure III.28. Elle est composée de trois bandes dont la pente est positive pour la première, négative pour la seconde et quasi-nulle pour la dernière. Elle présente aussi deux points de dégénérescence : au point K pour la première et la seconde bande, formant un cône de Dirac, et au point Γ pour la seconde et la troisième bande. Ainsi, bien qu'elle partage certaines caractéristiques avec les réseaux bidisperses et bipériodiques précédents, tels que la bande négative ou le cône de Dirac par exemple, cette relation de dispersion est cependant assez différente. Il est toutefois possible de l'expliquer, dans une certaine mesure, à partir du concept de méta-molécule.

Hybridation : direction ΓM

Pour cela nous nous intéressons aux cartes de champ acoustique correspondant aux différentes bandes de la relation de dispersion, et ce en fonction des différentes directions de propagation au sein du cristal. Nous nous concentrons tout d'abord sur le point Γ. Le

nombre d'onde de Bloch k_B y est nul, tous les résonateurs sont en phase. On y retrouve les symétries sur les modes cristallins correspondant (figure III.29, en trait pointillé et plein rouge), ce qui explique le croisement des deuxième et troisième bandes en ce point.

Nous regardons ensuite la direction ΓM. Dans ce cas, les fronts d'onde des modes propagatifs sont parallèles à la base des triangles de la cellule unité. Cela correspond au cas de transmission en champ lointain de la méta-molécule représentée sur la figure III.27(b). Il est possible d'exciter un mode monopolaire qui, après hybridation avec l'onde de l'espace libre, donne une branche de type polariton au sein du métamatériau (en bleu sur la figure). La diffusion multiple entre les canettes de la cellule unité est ensuite responsable de la création d'un mode dipolaire longitudinal qui va « tunneler » dans la bande interdite de ce polariton et donner une seconde branche dont la pente est négative (trait plein rouge). Jusqu'ici tout est similaire aux cas des réseaux bipériodiques et bidisperses précédents.

Si l'on se concentre à présent sur les modes de la troisième branche, au voisinage de Γ, nous voyons qu'ils correspondent à l'autre symétrie dipolaire au sein de la cellule unité (trait pointillé rouge). Or nous avons vu que ce mode est particulièrement difficile à exciter lorsque les triangles sont orientés de cette façon par rapport aux fronts d'ondes incidents (figure III.27(b)). Par conséquent, ce mode, à cause de sa symétrie, ne se propage pas au sein du cristal, ce qui explique la pente quasi-nulle de la bande. Dans cette direction, il ne « voit » pas l'onde incidente, à l'échelle du réseau.

Hybridation : direction ΓK

Nous nous intéressons à présent à la direction ΓK. Dans ce cas, les fronts d'onde ne sont plus parallèles mais perpendiculaires à la base du triangle de la méta-molécule. Concernant la première bande, le mode monopolaire existe de la même façon que précédemment et donne naissance à la branche polaritonique (en bleu). En revanche, les comportements des deux modes dipolaires s'inversent par rapport à la direction ΓM : il devient possible à présent d'exciter le dipôle de la bande plate évoqué au paragraphe précédent (trait pointillé rouge). Cette symétrie est dipolaire dans le sens de la propagation ce qui implique une pente négative de la bande. La troisième bande supporte quant à elle l'autre symétrie dipolaire, qui est beaucoup plus difficile à exciter dans cette direction (trait plein rouge). Ceci explique la pente quasi nulle de la bande au voisinage de Γ. Elle est cependant moins plate que dans la direction ΓM. Ceci peut s'expliquer par la particularité du point K de la zone de Brillouin qui est l'intersection de trois zones de Brillouin. Il correspond donc à trois directions de propagation ce qui est susceptible d'exciter ce mode dipolaire plus efficacement. Cependant, comme nous l'avons vu en faisant tourner la méta-molécule

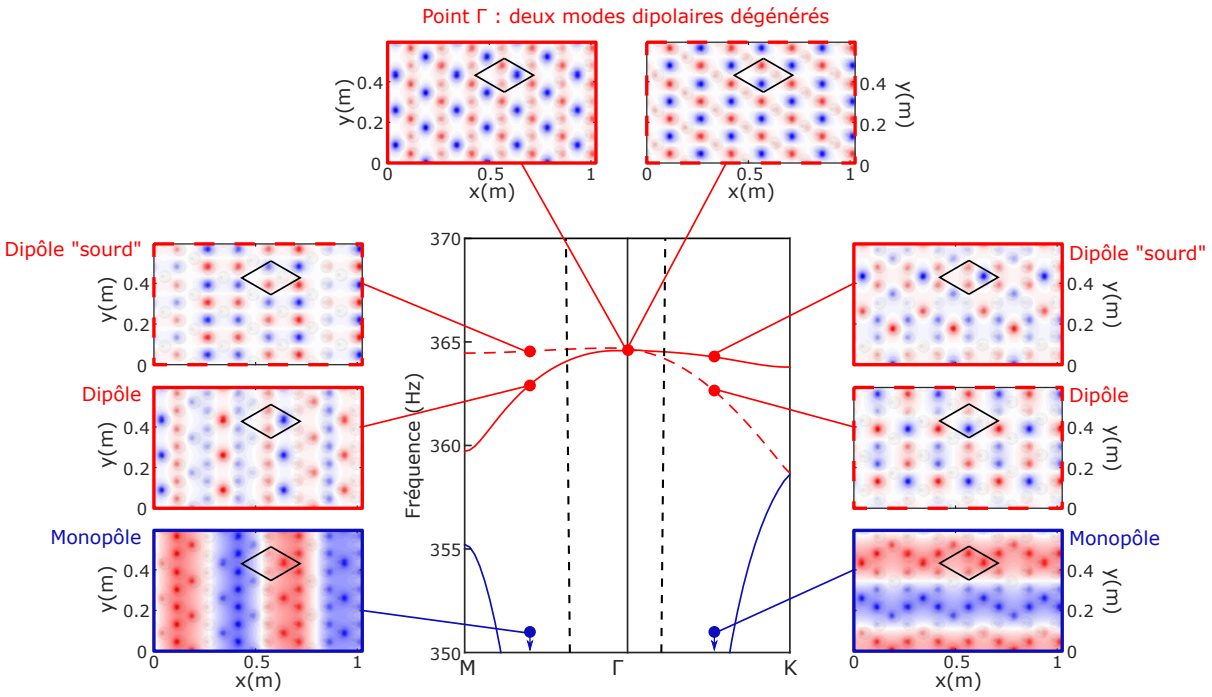


FIGURE III.29 – Symétries des modes correspondants aux différentes bandes de la relation de dispersion du réseau Kagomé.

dans le guide d'onde, ce mode a un facteur de qualité très élevé ce qui explique l'allure relativement plate de cette troisième bande.

La vision en termes de méta-molécule dont les modes résonants s'hybrident avec l'onde propagative incidente développée dans ce chapitre permet de comprendre de manière assez intuitive le comportement global des ondes au sein d'un métamatériau localement résonant. Par exemple, elle permet d'expliquer le cas de la bande négative ou de la bande plate que nous avons étudié jusqu'à présent. Cependant, plus le réseau est complexe, plus il y a des effets structurels précis responsables de particularités anisotropes de la structure de bande à prendre en compte. C'est le cas par exemple de phénomènes tels que les cônes de Dirac qui apparaissent uniquement aux points K de la zone de Brillouin.

Afin de décrire le plus précisément possible la relation de dispersion, il faut donc aller plus loin et prendre en compte les relations de symétrie entre la méta-molécule et la façon dont on la dispose au sein du réseau (soit la symétrie de cellule unité). Il devient alors intéressant de considérer un milieu dans lequel nous fixons la méta-molécule et faisons varier les propriétés géométriques de la cellule unité par exemple.

L'approche de type méta-molécule ne permet pas d'expliquer toutes les particularités liées à la propagation des ondes dans un milieu, mais elle a le mérite d'appréhender le

système de manière plus intuitive dans l'espace réel, plutôt que dans l'espace réciproque. En cela elle offre la possibilité de dresser des parallèles intéressants entre des systèmes apparemment différents. Cela fait l'objet de la section suivante.

III.4.3 Comparaison avec le réseau hexagonal

Le réseau Kagomé et le réseau hexagonal que nous avons étudiés jusqu'à présent possèdent tous les deux la particularité d'avoir des cônes de Dirac aux points K de la première zone de Brillouin. Il est alors intéressant de comparer ces deux milieux.

Repliement du réseau triangulaire

Tout comme le réseau hexagonal, il est possible d'obtenir la structure de bande du réseau Kagomé à partir du réseau triangulaire régulier (en rouge sur la figure III.30(b)). Ce dernier est décrit avec une cellule unité primitive qui est un losange possédant un seul résonateur, ce qui correspond à une relation de dispersion de type polariton. Cette vision a une réalité physique. Il est ensuite possible de le décrire avec deux types de super-cellules unité qui sont toujours des losanges mais qui possèdent plusieurs résonateurs : soit 3 (vert), soit 4 (bleu) (figure III.30(a)). Ces cellules unités ne sont plus primitives mais elles continuent à paver l'espace. Les utiliser en tant que tel conduit à un repliement du polariton précédent.

Cependant ce dernier n'est qu'un artefact mathématique, similaire au repliement artificiel de la relation de dispersion lié à la chaîne 1D de résonateurs évoqué dans la première partie du chapitre. Afin de donner un sens physique à ces repliements, il faut que les cellules unité correspondantes deviennent réellement les cellules primitives. Pour cela, nous enlevons un résonateur dans chacune d'entre elle. Ainsi, on obtient le réseau hexagonal d'une part (en vert sur la figure III.30(b)) et le réseau Kagomé d'autre part (en rouge figure III.30(c)).

Pour le cas hexagonal, le repliement se fait selon la direction ΓK du réseau triangulaire initial. Il crée une nouvelle première zone de Brillouin, verte ici, qui est aussi un hexagone, bien que tourné de 90 degrés par rapport au cas initial (rouge). Dans le cas du Kagomé, le repliement se fait selon la direction ΓM, ce qui donne une première zone de Brillouin hexagonale, sans rotation cette fois, dont l'aire est plus petite que celle du réseau hexagonal. Par conséquent, en comparaison avec le réseau hexagonal, le repliement du polariton dans la première zone de Brillouin du Kagomé entraîne un second croisement des bandes en Γ , comme le montre la figure III.30(c).

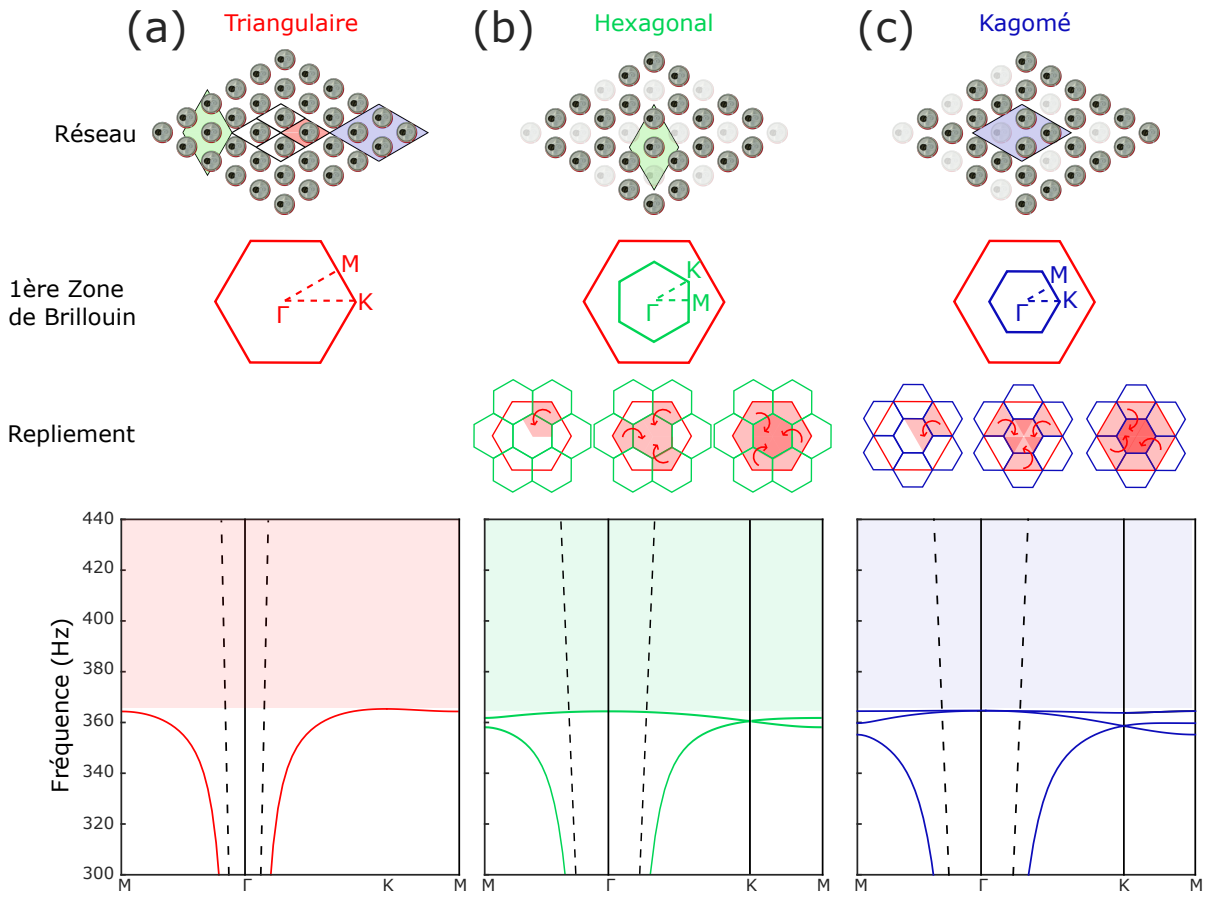


FIGURE III.30 – (a) Réseau triangulaire. (b) Réseau hexagonal vu du point de vue du repliement du réseau triangulaire. (c) similaire à (b) pour le réseau Kagomé.

Quant à l'émergence des cônes de Dirac aux coins de la zone de Brillouin, ceci s'explique par leur forme hexagonale, le point K étant l'endroit où trois zones de Brillouin différentes se touchent.

Correspondance des méta-molecules

Il est ensuite intéressant de faire un parallèle entre les deux réseaux du point de vue de leur méta-molécule, dans l'espace réel. Dans le cas du réseau hexagonal, la cellule unité est composée de deux résonateurs, qui sont chacun de simples méta-atomes (figure III.31(a)). Il est aussi possible de regarder le réseau Kagomé avec une cellule unité similaire, comme représenté sur la figure III.31(b). Dans ce cas, elle est constituée de deux méta-molécules triangulaires disposées de la même façon que le réseau hexagonal. Cela revient à voir le réseau Kagomé comme un réseau hexagonal dont les sites sont au centre des trimères.

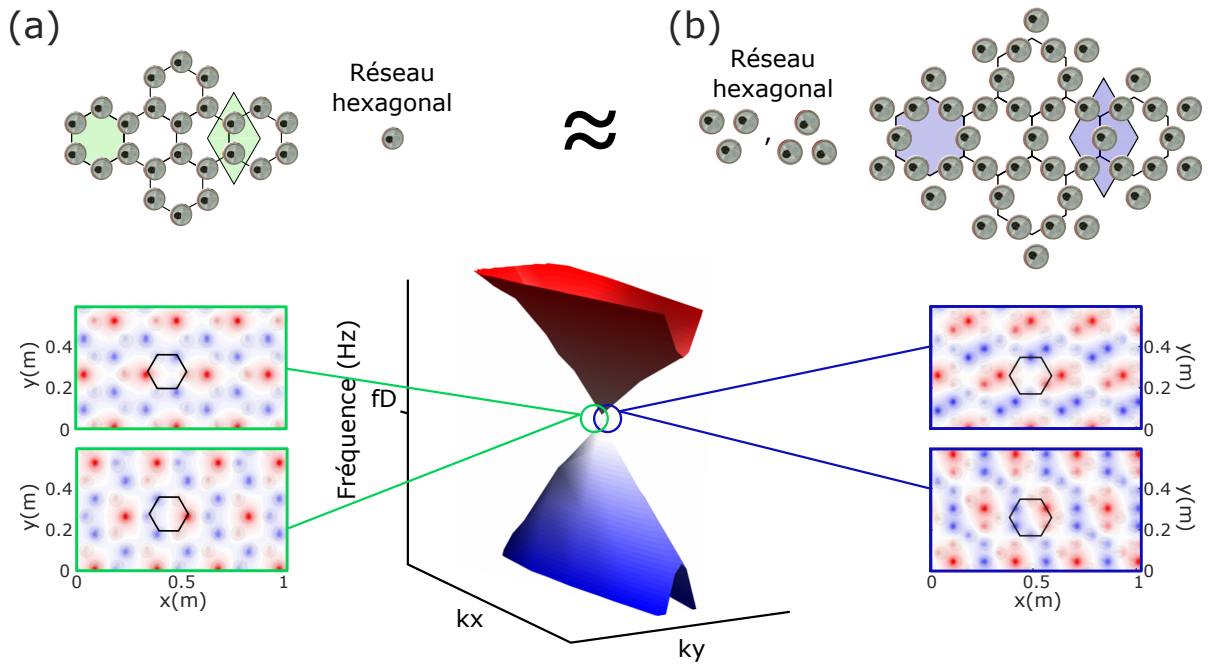


FIGURE III.31 – Comparaison des réseaux hexagonal (a) et Kagomé (b) dans l'espace réel au niveau du cône de Dirac.

Ceci transparait lorsqu'on regarde l'allure des modes cristallins au point de Dirac : leurs symétries sont identiques sur l'hexagone témoignant de l'équivalence entre les deux réseaux (trait noir),

Cette correspondance permet de mettre en évidence l'origine commune du cône de Dirac entre ces deux réseaux. Elle nous permet aussi d'envisager la transposition d'études d'un réseau à l'autre de façon très intuitive. Notamment, jouer avec la composition dans le cas hexagonal, revient dans certains cas à contrôler la structure dans le Kagomé. En effet, les modes propres du trimère étant liés à son arrangement spatial, il est possible de modifier leur résonance en modifiant ce dernier. Nous reviendrons sur cette approche au cours des chapitres suivants.

III.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons tout d'abord mis en évidence le rôle de la structuration du milieu dans la propagation des ondes avec l'étude analytique d'une chaîne unidimensionnelle de résonateurs sub-longueur d'onde. En particulier, nous avons montré qu'induire une brisure de symétrie à l'échelle de la cellule unité sub-longueur d'onde, qu'elle soit spectrale ou spatiale, donnait naissance à une nouvelle bande de propaga-

tion dans les relations de dispersion correspondantes. Ceci peut s'expliquer en utilisant le formalisme du repliement spectral utilisé dans le domaine des cristaux photoniques structurés à l'échelle de la longueur d'onde, afin de décrire le système en termes de structure de bande dans l'espace réciproque.

Dans notre cas, cependant, nous travaillons avec des métamatériaux dont les échelles sont beaucoup plus petites par rapport à la variation spatiale du champ incident. Il est alors possible d'adopter une seconde approche, complémentaire de la première, afin d'expliquer l'influence de la structure et de la composition de la cellule unité sur la propagation des ondes. La brisure de symétrie de cette dernière peut être vue comme étant à l'origine de la formation d'un dimère de résonateurs, que l'on dénomme méta-molécule. Cette dernière, grâce à la diffusion multiple entre ses deux constituants, possède deux modes résonants avec des symétries différentes : un monopôle et un dipôle. Le premier mode, à plus basse fréquence, s'hybride ainsi avec l'onde incidente afin de donner une bande de type polariton exactement de la même façon que ce que nous avons décrit au premier chapitre pour le cas d'un métamatériau régulier composé de simples méta-atomes. Le deuxième mode, de symétrie dipolaire, se comporte comme un mode de défaut au sein de la bande interdite de ce polariton, de manière similaire à l'étude développée au chapitre 2.

Nous avons ensuite transposé cette étude à des milieux bi-dimensionnels en micro-ondes. A partir des mesures en champ proche effectuées sur un milieu hexagonal (bipériodique) et carré bidisperse, nous avons pu extraire une version discrétisée de la structure de bande expérimentale de chacun de ces réseaux. Ces dernières témoignent clairement d'un comportement anisotrope à une échelle sub-longueur d'onde attestant de la pertinence de l'approche cristalline du système. En particulier, nous avons exploité la présence d'une bande négative afin d'implémenter des super-lentilles dont la résolution est meilleure que la limite de diffraction. Dans le cas du réseau hexagonal, cette étude nous a aussi permis de mettre en évidence l'existence de cônes de Dirac dans les coins de la première zone de Brillouin, donc là encore très en dehors du cône de lumière. Ce travail fait l'objet d'un article en cours de révision [151].

Dans la dernière partie du chapitre, nous nous sommes intéressés à un cas plus complexe : le réseau de type Kagomé. Nous avons montré, dans une étude numérique en acoustique audible, qu'il est possible de le décrire comme un réseau triangulaire d'une méta-molécule comportant trois résonateurs disposés sur les sommets d'un triangle équilatéral. Ce trimère, ici constitué de canettes de soda, possède cette fois trois modes propres : un monopôle et deux dipôles orthogonaux dégénérés. Selon l'orientation de la méta-molécule, l'excitation de ces modes dipolaires est plus ou moins efficace. Cette propriété permet d'expliquer intuitivement la présence d'une bande plate au sein de la relation de dispersion

du métamatériau, en plus de la bande négative liée aux dipôles. Enfin, nous terminons cette partie en établissant un parallèle entre le réseau Kagomé et le réseau hexagonal et montrons que certaines de leurs particularités, telle que le cône de Dirac au point K de la première zone de Brillouin, ont la même origine. Bien que l'étude acoustique soit essentiellement numérique ici, des expériences avec des canettes de soda ont été réalisées et les résultat font bientôt l'objet d'un article.

Ce chapitre a donc permis de mettre en évidence l'importance cruciale des effets de structure et de composition de la cellule unité d'un métamatériau localement résonant, bien que la taille de cette dernière soit très sub-longueur d'onde. Cette approche met ainsi l'accent sur la nature cristalline de ces métamatériaux qui est négligée par les approches effectives usuelles les plus naïves.

Dans les chapitres suivants, nous approfondissons ce concept de métamatériaux cristallins. En particulier, nous traitons plus en détail le cas des cônes de Dirac, assez récurrent dans cette thèse.

Chapitre IV

Des métamatériaux cristallins aux guides d'onde polarisés

IV.1 Contrôle de la structure et de la composition

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en avant l'importance de la structuration des métamatériaux localement résonants à l'échelle de leur cellule unité sub-longueur d'onde. Nous avons ainsi démontré l'existence d'une bande négative au sein d'un milieu dont la cellule unité est soit bipériodique, soit bidisperse. Cette dernière peut être vue comme issue du repliement du polariton du milieu triangulaire régulier.

Dans ce chapitre nous allons plus loin en modifiant conjointement la structure et la composition d'un métamatériau cristallin et regardons les conséquences sur la propagation des ondes.

IV.1.1 Réseau hexagonal

Réseau

Le point de départ de l'étude est le réseau bipériodique introduit au chapitre précédent, à savoir le réseau hexagonal. Ici nous travaillons dans le domaine des micro-ondes avec le milieu de fils quart d'ondes disposés sur un plan de masse. La cellule unité correspondante est un losange composé d'un dimère de résonateurs séparés d'une distance $d = 5$ mm, alignés selon son grand axe (figure IV.1). Ces fils mesurent 13.9 mm ce qui correspond à une fréquence de résonance f_0 autour de 5.39 GHz. La dimension maximale de la cellule unité vaut donc 0.29 λ_0, ce qui confirme le fait que nous sommes bien dans le cas d'un métamatériau cristallin structuré à une échelle très petite par rapport à la longueur d'onde

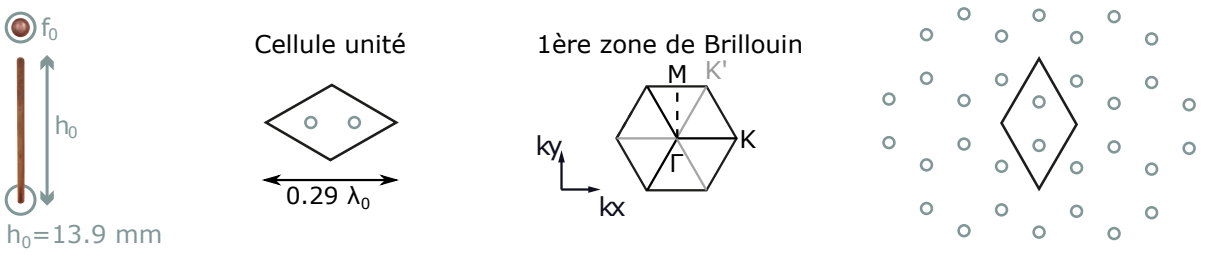


FIGURE IV.1 – Réseau hexagonal étudié. K et K' représentent les deux vallées non équivalentes de la première zone de Brillouin.

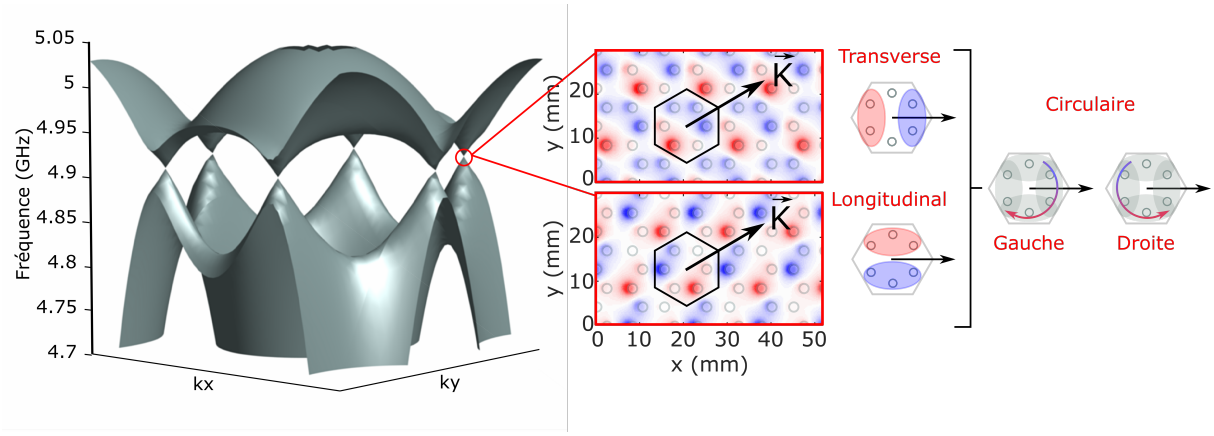


FIGURE IV.2 – Relation de dispersion du réseau hexagonal (gauche). Symétries des modes propres cristallins du cône de Dirac (droite).

de travail.

La première zone de Brillouin correspondante est l'hexagone habituel. Cependant, nous faisons ici une différence entre ses coins en les classant en deux types non-équivalents : K et K'. En physique du solide, ces derniers sont appelés vallées.

Relation de dispersion

Comme nous l'avons décrit plus tôt, la relation de dispersion du réseau hexagonal s'obtient en repliant le polariton correspondant au réseau triangulaire. Ceci donne naissance à deux bandes de pentes opposées qui se rejoignent au point K de la première zone de Brillouin pour former un cône de Dirac. Les modes cristallins en ce point de dégénérescence sont représentés sur la figure IV.2. Si l'on fixe arbitrairement un hexagone particulier au sein du réseau (contour noir), on peut décrire ces deux modes avec deux symétries dipolaires orthogonales à l'échelle de l'hexagone. Contrairement au cas du trimère

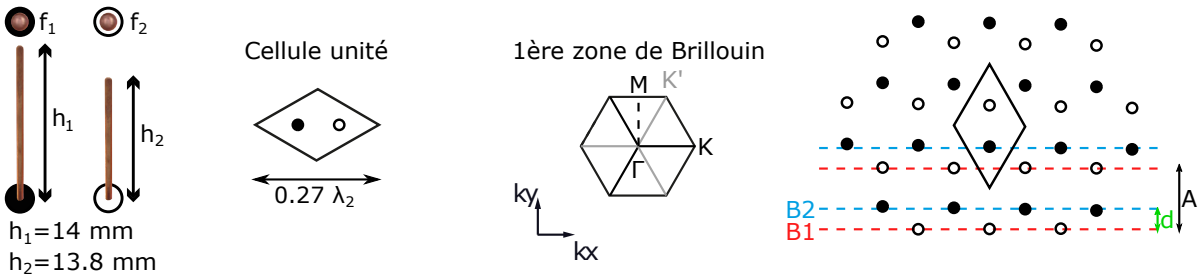


FIGURE IV.3 – Réseau hexagonal bidisperse étudié.

de résonateurs étudié dans la dernière partie du chapitre précédent, ici ces deux dipôles sont générés par la structure globale du réseau et non par la symétrie intrinsèque de la méta-molécule. Cette dernière ne possède qu'un mode monopolaire et un unique mode dipolaire. Les deux dipôles de cet hexagone sont donc longitudinal pour l'un et transverse pour l'autre. Cependant, il est aussi possible de les représenter dans une base circulaire. Dans ce cas, on obtient deux modes circulaires tournant au sein de ce même hexagone, chacun dans un sens. Jusqu'ici rien ne permet de distinguer le comportement de l'onde en fonction de la direction K ou K'.

IV.1.2 Réseau hexagonal bidisperse

Réseau bipériodique et bidisperse

Nous jouons à présent avec la composition de la cellule unité du réseau précédent. Au lieu d'avoir deux résonateurs identiques nous modifions légèrement la fréquence de résonance de chacun d'entre eux (figure IV.3). En pratique il suffit d'augmenter la longueur d'un des fils ($h_1 = 14$ mm, disques noirs) et de diminuer celle de l'autre ($h_2 = 13.8$ mm, cercles noirs). La structure quant à elle ne change pas : la cellule unité est toujours un losange dont la grande dimension est très sub-longueur d'onde ($0.27\ \lambda_2$) et la zone de Brillouin correspondante est le même hexagone que précédemment.

Ce réseau est donc à la fois bipériodique et bidisperse dont l'anisotropie est beaucoup moins prononcée que celle du réseau carré bidisperse étudié au chapitre précédent. Selon la direction ΓM, il consiste donc en une alternance bipériodique de deux plans de Bragg différents, chacun composé d'un type de résonateurs (figure IV.3). Nous reviendrons plus en détails sur la direction ΓK dans la suite.

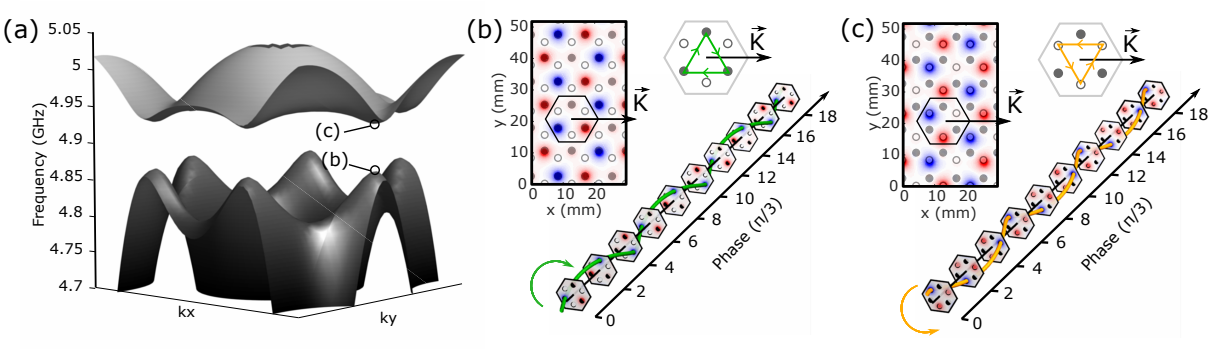


FIGURE IV.4 – (a) Structure de bande du réseau hexagonal bidisperse. (b) Mode propre cristallin au point K pour la bande inférieure. Mise en évidence de la rotation du champ électrique au sein de la méta-molécule. (b) comme (a) pour la bande supérieure.

Relation de dispersion

La relation de dispersion correspondant à ce métamatériau cristallin est représentée sur la figure IV.4(a). Elle possède des similitudes avec le cas hexagonal, telles que la présence de deux bandes dont une négative, ce qui prouve que nous n'avons que légèrement perturbé le système précédent. Cependant, cela a suffi à faire disparaître les cônes de Dirac aux coins de la zone de Brillouin. Afin de comprendre cette levée de dégénérescence, nous retournons dans l'espace réel et regardons les modes cristallins correspondant tout d'abord au point K pour les bandes inférieure et supérieure. Pour rendre les choses plus claires, nous définissons un hexagone délimité par un contour noir sur les différentes cartes de champ, similaire à ce que nous avons fait pour le réseau hexagonal précédent. Ce dernier est à présent composé de deux triplets de résonateurs avec des fréquences de résonance différentes. Ces trimères sont représentés par des triangles qui ont soit leur base en-dessous (vert) ou au-dessus (jaune) du vecteur de Bloch correspondant. Ceci est décrit sur la figure IV.4(b) et (c) pour la direction $\vec{K}$.

Moment angulaire cristallin

Nous nous concentrons tout d'abord sur la bande inférieure au point K (figure IV.4(b)). Le champ électrique est concentré sur les fils qui résonnent à plus basse fréquence (disques noirs), et nul sur ceux qui résonnent à plus haute fréquence (cercles noirs). Par ailleurs, pour ce nombre d'onde, le champ électrique oscille avec un retard de phase égal à $2\pi/3$ entre chaque fil long. Ceci signifie que si le champ est maximal sur un des sommets du triangle, il est alors minimum sur un autre et nul sur le dernier.

On fait ensuite défiler la phase de ces modes afin de reproduire la propagation au

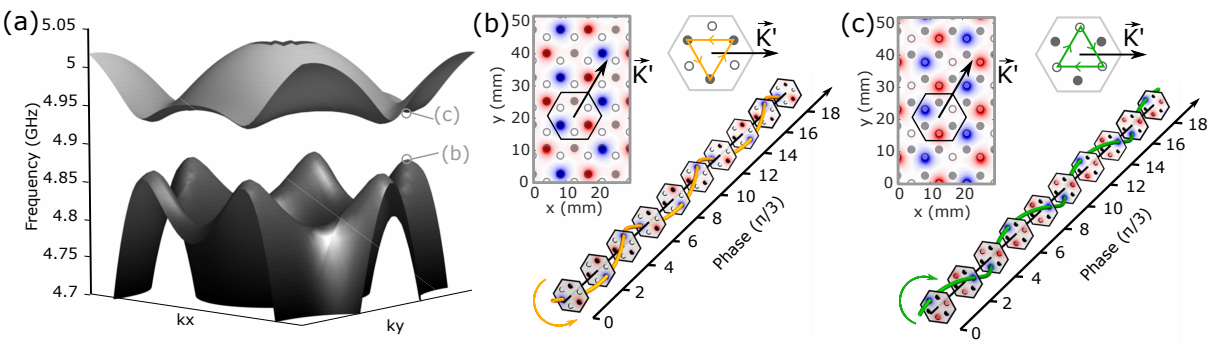


FIGURE IV.5 – (a) Structure de bande du réseau hexagonal bidisperse. (b) Mode propre cristallin au point *K'* pour la bande inférieure. Mise en évidence de la rotation du champ électrique au sein de la méta-molécule. (b) comme (a) pour la bande supérieure.

sein du métamatériau selon la direction ΓK. Ceci met en évidence une rotation du champ électrique au sein du triangle de fils longs, comme le montre l'hélice verte qui relie les différents maxima, dans le sens horaire.

Regardons à présent le cas de la bande supérieure (figure IV.4(c)). Cette fois-ci, le champ est distribué sur le triangle de fils courts, donc résonant à plus haute fréquence (cercles noirs). En faisant défiler la phase, on observe encore une fois une rotation du champ électrique au sein de l'hexagone, cependant cette dernière tourne dans le sens trigonométrique, comme le montre l'hélice jaune de la figure IV.4(b).

Si l'on regarde les modes correspondants à une onde se propageant dans la direction $\Gamma K'$, on observe là encore une rotation au sein de l'hexagone au contour noir (figure IV.5(b) et (c)). Néanmoins, les sens de rotation sont inversés par rapport au point K. Ceci est en accord avec le fait que bien que notre réseau n'ait plus la symétrie d'inversion, il possède encore celle d'invariance par renversement du temps.

Le fait d'avoir légèrement modifié la composition de la cellule unité du réseau hexagonal nous a donc permis d'introduire une polarisation circulaire bien définie au sein du milieu. Cette rotation qui accompagne l'onde lors de sa propagation est liée à la direction et la fréquence de cette dernière. Cela est différent du cas du cône de Dirac du réseau hexagonal précédent pour lequel deux rotations contraires coexistent à la même fréquence pour chacun des points K et K'. En cela, nous avons donc brisé l'équivalence entre les deux vallées.

Gardons aussi à l'esprit que le moment angulaire observé existe sur un hexagone que nous avons fixé arbitrairement. Cependant si l'on pave le cristal avec ce dernier, on obtient effectivement le même sens de rotation au sein de chacun des hexagones. La rotation au

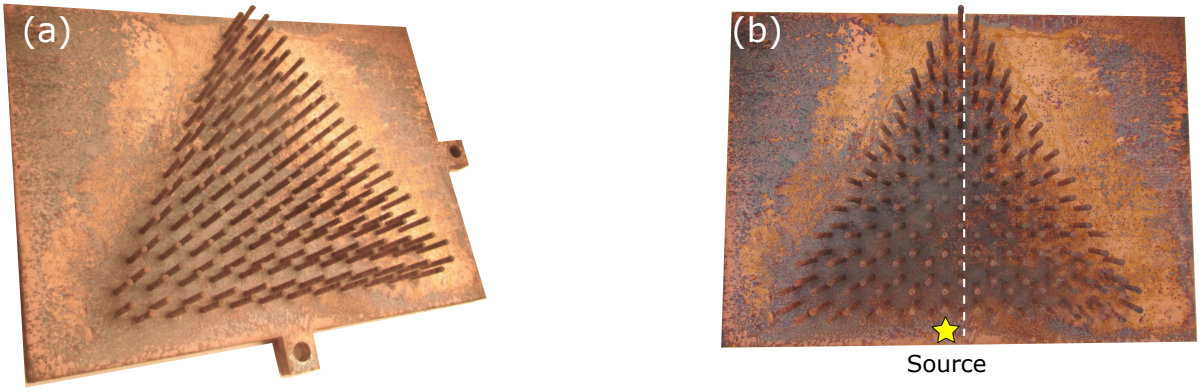


FIGURE IV.6 – (a) Photo de l'échantillon étudié. (c) Emplacement de la source ponctuelle.

sein du réseau qui accompagne l'onde a donc bien une réalité physique. Son sens en revanche est fixé par l'hexagone que l'on choisit.

IV.1.3 Vérification expérimentale

Échantillon et expérience

Afin de vérifier la pertinence de ces résultats numériques, nous fabriquons l' échantillon correspondant au réseau étudié avec l'aide de l'équipe de Thomas Berthelot au CEA. Il a la forme d'un triangle dont le côté est de la taille de la longueur d'onde de travail (figure IV.6).

Nous effectuons le même genre de mesure en champ proche que dans les études présentées dans les précédents chapitres. Notons ici que nous décalons légèrement sur la gauche de l'axe de symétrie du triangle la petite boucle qui sert de source, afin d'exciter préférentiellement le mode correspondant au point K (figure IV.6(c)).

Cartes de champ

En moyennant l'ensemble des spectres obtenus sur une zone à l'intérieur de l'échantillon nous nous affranchissons des effets de bords. Le spectre moyen correspondant est présenté sur la figure IV.7(a). Les pics témoignent du couplage efficace entre la source et les modes cristallins de l'échantillon. Ces derniers se trient en deux groupes séparés par une bande interdite (zone grisée) : l'un en-dessous de 4.98 GHz et l'autre au-dessus de 4.95 GHz. Ils correspondent respectivement à la première et à la seconde bande de la relation de dispersion.

Les cartes expérimentales de champ électrique pour les fréquences correspondant à chacune des bandes sont présentées sur la figure IV.7 ((b) à basse fréquence et (c) à haute fréquence). Elles démontrent la nature très sub-longueur d'onde des modes cristallins en présence, comme en témoignent les nombreuses variations du champ au sein de l'échantillon dont les côtés sont comparable à la longueur d'onde de travail.

A la droite de ces deux cartes de champ sont disposées leurs transformées de Fourier spatiales bi-dimensionelles. Pour chacun des cas, elles ne présentent que trois points situés dans les mêmes coins de la première zone de Brillouin, représentée par un hexagone en trait blanc continu. Ceci témoigne d'une très forte anisotropie de la propagation au sein de l'échantillon, reliée à la nature cristalline du métamatériau. Cela montre aussi que nous avons réussi à exciter spécifiquement une seule des vallées de la première zone de Brillouin (nous la notons K) (figure IV.7). Par ailleurs, cette dernière est très en dehors du cercle en pointillés blanc, relatif à la dispersion de l'espace libre, ce qui est en accord avec la nature sub-longueur d'onde des modes mesurés.

Moment angulaire cristallin

Si nous faisons ensuite défiler la phase de ces cartes afin de reproduire la propagation de l'onde dans le milieu, nous observons effectivement l'existence d'un moment angulaire au sein de l'hexagone central que nous avons fixé (contour noir). Cette rotation est d'ailleurs dans le sens trigonométrique à basse fréquence (b) et horaire à haute fréquence (c), comme le montre la figure IV.7, ce qui confirme expérimentalement les résultats de l'étude numérique précédente.

Ainsi, en modifiant légèrement la nature des résonateurs au sein du métamatériau cristallin hexagonal, nous avons ouvert une bande interdite en levant la dégénérescence des cônes de Dirac. Cela nous a aussi permis d'induire un moment angulaire au sein du cristal dont le sens de rotation dépend à la fois de la fréquence mais aussi de la direction dans laquelle l'onde se propage. Dans la partie suivante, nous expliquons comment nous pouvons relier cette polarisation circulaire au coeur du cristal infini à des phénomènes d'interface.

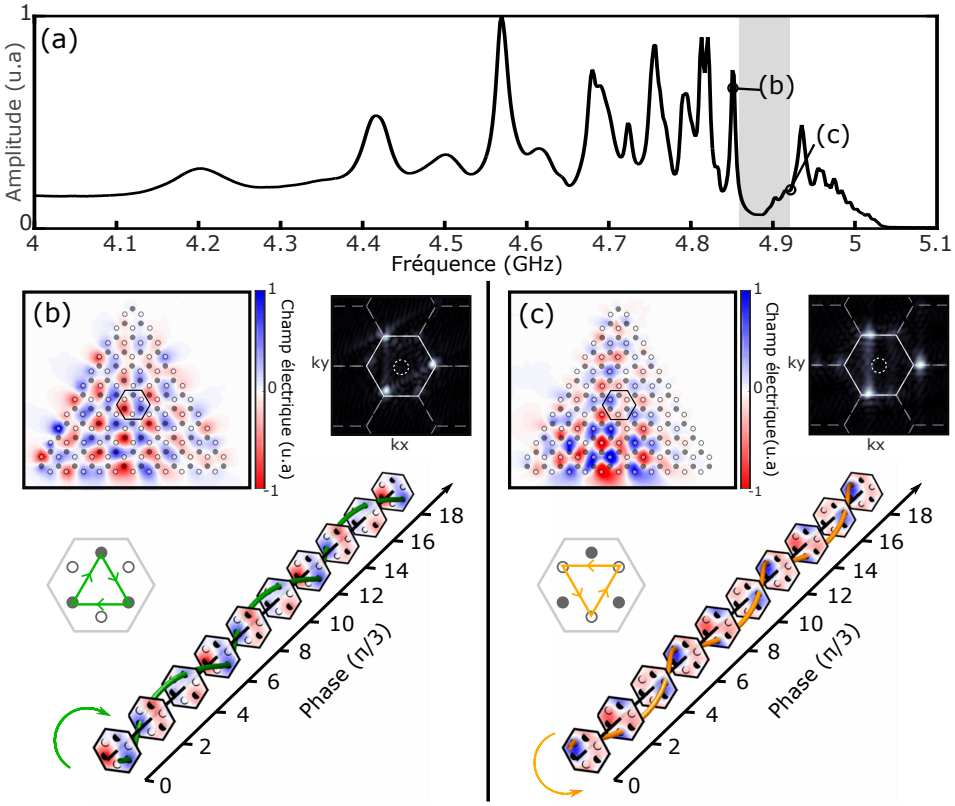


FIGURE IV.7 – (a) Spectre moyenné sur le centre de l'échantillon et cartes de champ électriques expérimentales pour les fréquences au-dessous (b) et au-dessus (c) de la bande interdite (partie grisée sur le spectre) avec leur transformée de Fourier spatiale. En dessous, mise en évidence de la rotation du champ au sein de la méta-molécule fixée (hexagone noir) dans chacun des cas.

IV.2 Du coeur du métamatériau à ses bords

IV.2.1 Effet Hall quantique de vallée

Pseudo-spin de Vallée

Ce moment angulaire est donc spécifiquement lié aux vallées K et K'. Le fait d'avoir brisé les cônes de Dirac a donc permis de mettre en évidence macroscopiquement un degré de liberté supplémentaire appelé « pseudo-spin » de vallée dans la communauté de la physique du solide. Ce nom vient du fait que dans des structures semblables au graphène, la fonction d'onde électronique présente une polarisation cristalline circulaire dont le sens de rotation dépend de la vallée. Cette dernière crée un moment magnétique intrinsèque comparable, dans une certaine mesure, au spin de l'électron. Il est néanmoins

fondamentalement différent. Les électrons possèdent intrinsèquement un spin, c'est-à-dire un degré de liberté indépendant de la structure du réseau (dans le cas simple étudié ici). Le pseudo-spin de vallée est quant à lui une propriété directement liée à cette structure globale.

Effet Hall quantique de Vallée

Cette caractéristique peut être reliée à un invariant topologique, appelé nombre de Chern de vallée, qui est égal à $\pm 1/2$ [152]. Ce dernier, propriété de la structure de bande du cristal infini, renseigne sur la présence de modes aux interfaces entre des milieux finis. Nous n'entrons pas ici dans les détails concernant le principe de la description topologique des structures de bandes, cela fait l'objet du chapitre suivant. Dans le cadre de cette étude nous exploitons simplement le protocole, issu de physique du solide, lié à l'implémentation de l'effet Hall quantique de vallée.

Il consiste à mettre en place une interface de telle façon qu'elle met des vallées différentes en regard. dans ce cas, elle est capable de guider un mode pour des fréquences au sein de la bande interdite de chacun des cristaux. Ces modes guidés possèdent un degré de liberté supplémentaire, la polarisation de vallée, qui limite les réflexions et permet de trier et diriger sélectivement l'information. Ceci a été réalisé avec un dispositif mettant en jeu du graphène bi-couche [153, 154].

Analogues macroscopiques

Ces caractéristiques prometteuses ont ainsi motivé la découverte d'analogues macroscopiques reproduisant ce phénomène. En effet, ce dernier étant lié à la structure du réseau et non au spin de l'électron, qui n'existe pas dans le monde classique, sa transposition aux plus grandes échelles semble réalisable. Au cours des deux dernières années, de nombreux travaux ont ainsi permis de mettre en évidence l'existence de ce degré de liberté de vallée. C'est le cas en micro-ondes avec des cristaux photoniques [46, 155] ou des systèmes de type *spoof-plasmons* [156], mais aussi en optique avec un réseau de guides d'onde couplés de manière évanescente [157]. D'autres études existent en acoustique avec des cristaux phononiques, où la levée de dégénérescence s'opère en tournant légèrement des triangles au sein de la cellule unité [158], mais aussi avec des ondes élastiques dans des milieux bidisperses [159].

Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment obtenir un analogue macroscopique de cet effet Hall quantique de Vallée avec notre métamatériau cristallin, structuré sur une échelle sub-longueur d'onde.

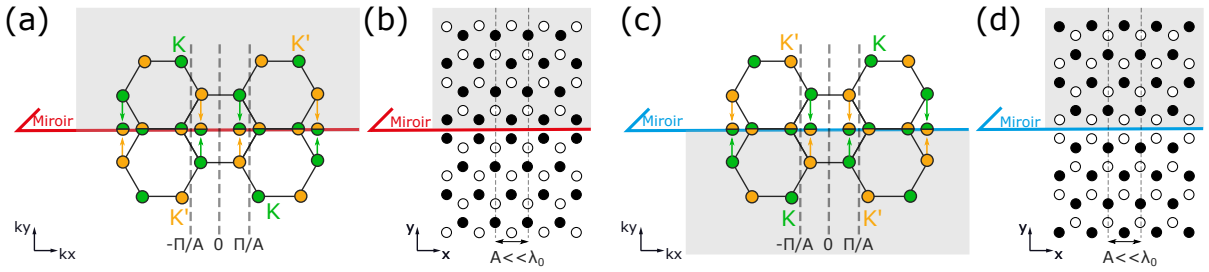


FIGURE IV.8 – (a) et (resp. (c)) Un miroir rouge (resp. bleu) selon l'axe *KK'* dans l'espace réciproque fait coïncider les points *K* (vert) et *K'* (jaune) d'un milieu et de son symétrique. (b) (resp.(d)) Interface correspondant à (a) (resp.(c)) dans l'espace réel.

IV.2.2 Interfaces

Protocole

Nous voulons mettre en place une interface qui permet d'être dans les conditions de l'effet Hall quantique de vallée. Dans l'espace réciproque, cela signifie superposer les point *K* et *K'* au niveau de l'interface. Une façon simple d'obtenir cela est d'ajouter un plan de symétrie le long de l'axe *KK'*. Ceci a pour effet de transformer *K* en *K'* de part et d'autre de ce miroir. De cette façon, la projection des relations de dispersion des cristaux sur ce dernier fait coïncider les point K d'un côté avec les points *K'* de l'autre (figure IV.8(a), (c)).

Dans l'espace réel, ce protocole correspond à deux types d'interfaces entre un cristal et son symétrique. La première, représentée en rouge, est obtenue en mettant deux fils longs (disques noirs) l'un en face de l'autre (figure IV.8(b)). La seconde (ligne bleue) fait la même chose mais avec des fils courts (cercles noirs) (figure IV.8(d)).

Relation de dispersion numérique

Nous calculons ensuite les relations de dispersion correspondant à chacune de ces interfaces. Dans les deux cas, elles montrent l'apparition d'une nouvelle bande de propagation qui traverse la bande interdite commune aux métamatériaux [figure IV.9(a) pour la rouge et IV.10(a) pour la bleue]. Ces bandes sont là encore situées bien en dehors de la projection du cône de lumière ce qui témoigne de la nature sub-longueur d'onde des modes qu'elles supportent. Par ailleurs, selon le type d'interface, la pente de la bande est différente : la rouge est positive quand la bleue est négative.

Ceci démontre donc que le protocole relatif à l'effet Hall quantique de vallée fonctionne bien dans le cadre de nos métamatériaux cristallins. Nous obtenons bien un mode de bord

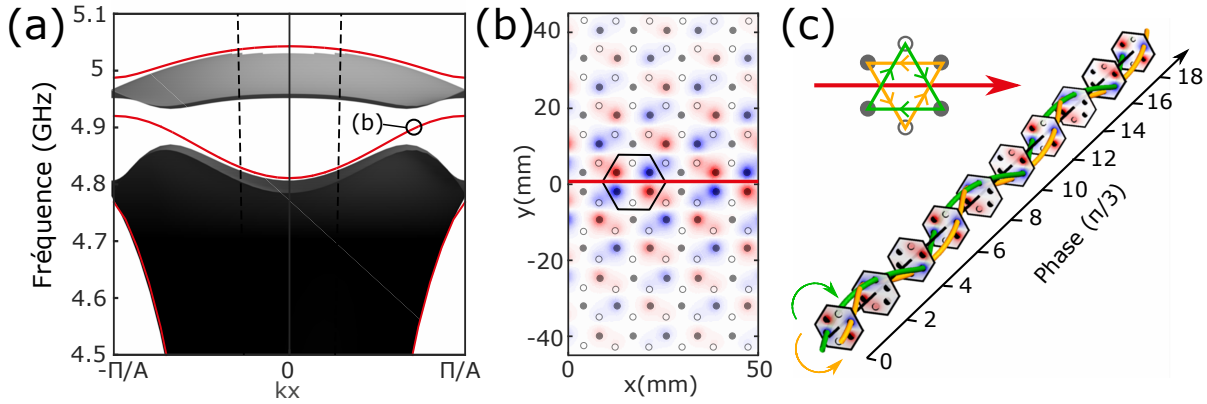


FIGURE IV.9 – (a) Relation de dispersion de l'interface rouge. (b) Mode guidé se propageant vers les x positifs. (c) Mise en évidence de la double rotation sur la méta-molécule d'interface.

par interface qui correspond à la somme des deux nombres de Chern de vallée. L'approche topologique des structures de bandes est donc extrêmement puissant car elle permet de prédire l'existence de modes aux bords d'un milieu fini à partir des propriétés du système infini. Cependant elle est assez abstraite et mathématique et ceci nous a posé des difficultés quant à la compréhension des phénomènes physiques qu'elle décrit. Dans la suite nous tentons de donner une description plus intuitive du phénomène, basée sur une approche microscopique du système dans l'espace réel.

Moment angulaire cristallin

Afin de comprendre le lien entre le moment angulaire des modes cristallins du milieu infini et l'émergence de ces modes d'interface, nous retournons dans l'espace réel et regardons les cartes de champ correspondantes. Notons ici que nous étudions les modes se propageant dans la direction des x croissants. Ce sont donc les points de la relation de dispersion où la pente, soit la vitesse de groupe, est positive.

Nous nous concentrons tout d'abord sur le cas de l'interface rouge (figure IV.9(b)). Dans ce cas, le champ électrique est principalement concentré sur un nombre limité de résonateurs au voisinage de l'interface. Ceci témoigne d'un confinement transverse très sub-longueur d'onde.

De façon similaire à l'étude du coeur du cristal, nous définissons un hexagone fixe (contour noir) le long de l'interface. Ce dernier englobe six résonateurs et il est à nouveau possible de définir deux triangles avec différentes orientations par rapport à la direction de propagation. Là encore, le vert a sa base en dessous de l'interface et c'est l'inverse pour

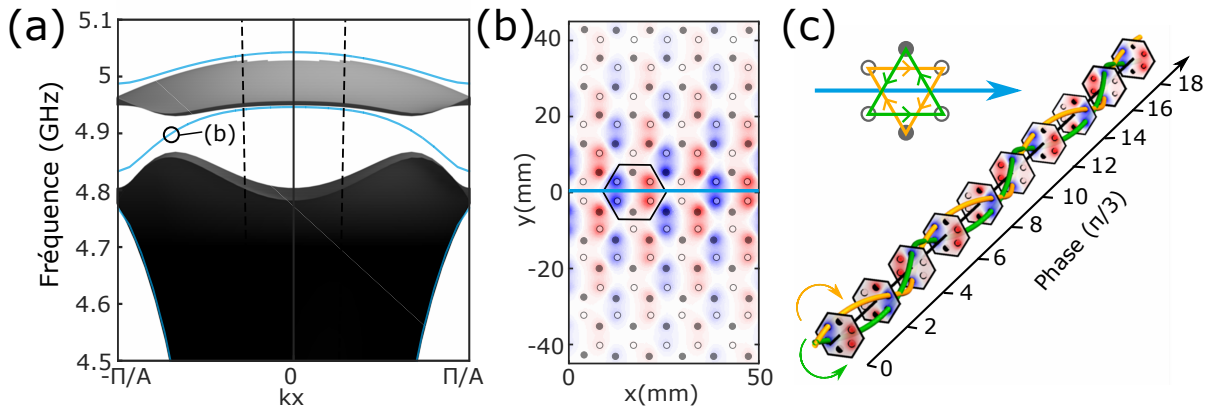


FIGURE IV.10 – (a) Relation de dispersion de l'interface bleue. (b) Mode guidé se propageant vers les x positifs. (c) Mise en évidence de la double rotation sur la méta-molécule d'interface.

le jaune (figure IV.9(c)).

Bien que cette méta-molécule d'interface se rapproche de celle du coeur du cristal, sa composition est différente. En effet, les deux triangles ne sont plus formés d'un seul type de résonateurs mais chacun d'entre eux possède deux fils longs (disques noirs) et deux fils courts (cercles noirs). A présent, le champ électrique est disposé sur ces deux triangles hybrides en même temps. Ensuite, nous appliquons la même procédure que pour l'étude du coeur du cristal et nous faisons défiler la phase afin de reproduire la propagation de l'onde le long de l'interface (figure IV.9(c)). Ceci donne non plus une mais deux hélices, chacune définie sur un des triangles, qui tournent dans des sens opposés : la jaune dans le sens trigonométrique et la verte dans le sens horaire. Cette superposition donne naissance à un mode anti-symétrique vis-à-vis du plan de l'interface.

Regardons à présent le cas de l'interface bleue, représentée sur la figure IV.10. Le mode correspondant à une vitesse de groupe positive est cette fois-ci situé dans l'espace $k_x < 0$. Il est noté (b) sur la figure IV.10(a). Son profil, symétrique par rapport à l'interface, présente des variations dipolaires dans le sens de propagation ce qui est en accord avec la pente négative de la bande. En adoptant la même étude microscopique que pour l'interface rouge, nous voyons que le champ est concentré sur une méta-molécule différente : les fils longs (disques noirs) et courts (cercles noirs) ont inversé leurs positions. En faisant défiler la phase comme précédemment, nous montrons encore une fois que la propagation de l'onde dans la direction k_x s'accompagne d'une combinaison de deux rotations de sens contraires définies sur les triangles vert et jaune. Ceci est mis en évidence par les deux hélices de la figure IV.10(c). Ces deux hélices tournent dans un sens opposé par rapport

à celles de l'interface rouge. La superposition de ces deux rotations donne dans ce cas un mode qui présente un profil symétrique par rapport au miroir de l'interface.

Avec cette étude numérique, nous avons ainsi montré qu'en faisant un analogue macroscopique de l'effet Hall quantique de vallée avec des métamatériaux cristallins nous sommes capables de guider des ondes sur une échelle très petite par rapport à la longueur d'onde de travail. Par ailleurs, en adoptant une approche microscopique du phénomène nous avons réussi à faire le lien entre les modes d'interface et les moments angulaires existant au coeur des deux milieux. Ces modes guidés possèdent ainsi eux-aussi des polarisations circulaires (combinées) qui sont « accrochées » à la direction de propagation. Le sens de rotation de ces dernières dépend de l'interface, ou en d'autres termes de la composition de la méta-molécule correspondante.

Dans la partie suivante nous mettons en évidence expérimentalement cette polarisation circulaire dans le domaine des micro-ondes.

IV.2.3 Exploitation du moment angulaire

Dans cette partie nous vérifions expérimentalement la présence des modes guidés le long des interfaces décrites précédemment. Pour cela nous fabriquons plusieurs échantillons, plus ou moins complexes, qui permettent de mettre en évidence l'existence mais surtout la polarisation particulière de ces modes.

Nous réalisons le même genre de mesure en champ proche que précédemment et obtenons des cartes de champ électrique pour chaque fréquence. A partir de ces cartes, nous sommes capables, en appliquant une opération de transformée de Fourier fréquentielle inverse, de générer des impulsions. Ceci nous permet donc d'appréhender la physique du système dans le domaine temporel en suivant la propagation de ces impulsions le long des interfaces.

Guide tortueux

Le premier échantillon correspond à une interface de type bleue dont le profil présente deux virages avec un angle aigu, comme le montre la figure IV.11(a). En regardant le spectre moyenné spatialement sur le coeur de chacun des milieux (noir) et sur l'interface (bleu) de la figure IV.11(b), nous remarquons la présence de pics de transmission bleus dans la bande interdite des métamatériaux environnants. Ceci est un premier indice sur l'existence de modes se propageant à l'interface, corroboré par la carte de champ de la figure IV.7(c).

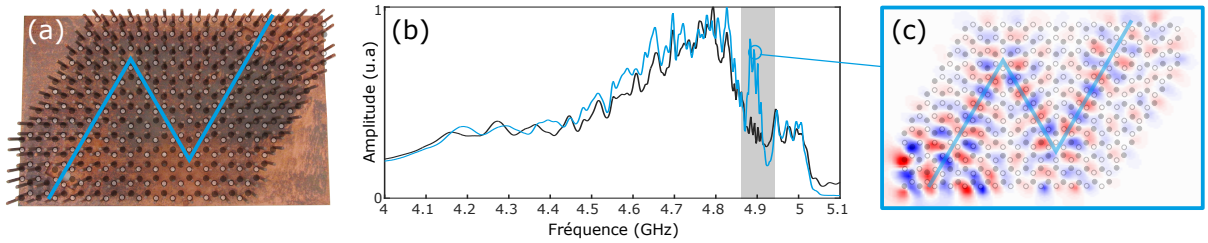


FIGURE IV.11 – (a) Photo de l'échantillon constitué d'un guide tortueux avec une interface bleue. (b) Spectre moyenné sur l'interface (ligne bleue) et le coeur des métamatériaux (noirs). En gris la bande interdite de chacun des milieux. (c) Carte expérimentale du champ électrique montrant un mode se propageant le long de l'interface.

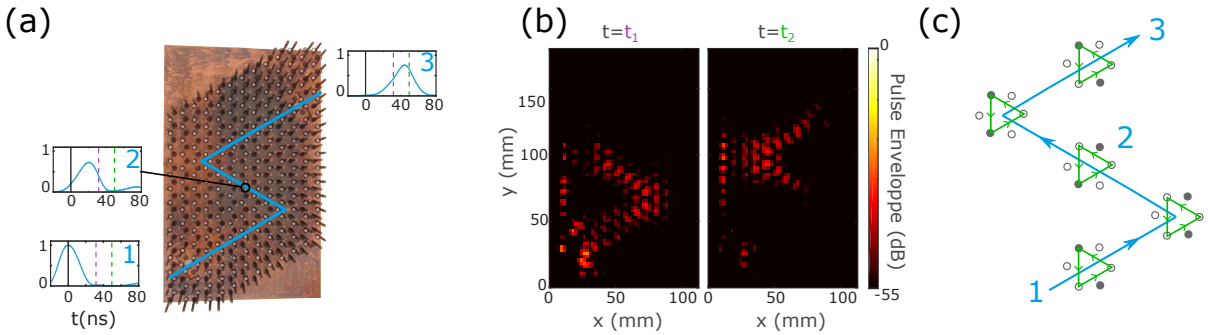


FIGURE IV.12 – (a) Transmission de l'impulsion du guide d'onde tortueux à 3 positions. (b) Cartes de l'enveloppe de l'impulsion aux temps t_1 et t_2. (c) Schéma expliquant que la conservation de la rotation sur la méta-molécule d'interface empêchait les réflexions lors de la propagation du pulse.

Ensuite, nous générons une impulsion de 20 ns dont la fréquence centrale est de 4.92 GHz, donc appartenant à la bande interdite des milieux infinis, depuis le bas de l'échantillon (position 1 sur la figure IV.12(a)). Nous mesurons l'intensité au cours du temps au niveau de l'interface en deux points : l'un au milieu de l'échantillon (position 2), l'autre après le deuxième tournant (position 3). Les transmissions au cours du temps présentées sur la figure IV.12(a) montrent que l'impulsion se propage le long de l'interface avec très peu de réflexions. Des clichés de l'intensité de l'impulsion aux temps t_1 et t_2, correspondants aux instants où l'impulsion prend respectivement le premier puis le second virage, mettent bien en évidence cette propagation à l'échelle sub-longueur d'onde (figure IV.12(b)). Par ailleurs, ils attestent aussi du profil symétrique de ces modes, en accord avec les simulations de la partie précédente.

Il est ensuite intéressant de relier les caractéristiques particulières de cette propagation avec la rotation locale du champ électrique au niveau de l'interface, que nous avons mis

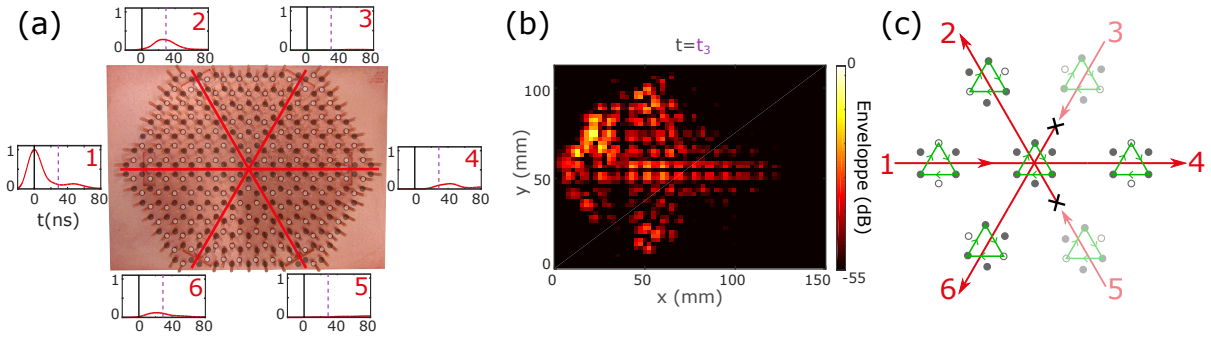


FIGURE IV.13 – (a) Transmission de l'impulsion en sortie du carrefour à 6 branches d'interfaces rouges. (b) Cartes de l'enveloppe de l'impulsion au temps t_3. (c) Schéma expliquant que la conservation de la rotation sur la méta-molécule d'interface permet le routage spécifique de l'impulsion.

en évidence numériquement. Ceci est représenté sur la figure IV.12(c), où l'interface bleue est schématisée en utilisant la méta-molécule correspondante. Ici, pour des raisons de clarté, nous représentons uniquement la rotation sur le triangle vert, mais il faut garder à l'esprit qu'une seconde rotation, dans le sens contraire, existe sur le triangle jaune inversé. Ceci montre que les virages spécifiques de l'interface, qui sont dictés par l'arrangement cristallin de l'échantillon, conservent toujours le même sens de rotation du champ sur la méta-molécule d'interface. L'onde réfléchie potentielle présentant un sens de rotation opposé sur cette méta-molécule, elle ne peut pas être générée avec ces virages. Cette description microscopique locale explique donc intuitivement l'absence de réflexions de ces ondes guidées.

Carrefour à six branches

Nous nous intéressons ensuite à un cas plus complexe : celui d'un carrefour composé de six branches d'interface rouge (figure IV.13(a)). De la même façon, nous générons une impulsion de 20 ns à l'entrée de la branche numéro 1 et mesurons la transmission à chacune des cinq sorties. Les résultats montrent que le paquet d'onde se propage uniquement dans les branches 2 et 6, et dans la branche 4 avec un léger retard. La réduction du signal est quant à elle liée à la dissipation au cours de la propagation.

Un cliché de l'intensité de l'impulsion au temps t_3 confirme la nature anti-symétrique du mode porté par ce type d'interface (figure IV.13(b)). Il montre aussi clairement l'acheminement spécifique des ondes dans certaines directions. Cela peut là encore s'expliquer intuitivement dans l'espace réel en prenant en compte le fait que la direction de propagation est liée au sens de rotation du champ sur la méta-molécule d'interface. Ceci est

représenté sur la figure IV.13(c). L'onde provenant de la position 1 présente un sens de rotation particulier sur le triangle vert qui est accroché à sa propagation. En arrivant à l'intersection, ce sens de rotation spécifique est induit sur la méta-molécule centrale (uniquement composée de résonateurs noirs ici). La conservation de ce sens de rotation, ainsi que sa relation avec la direction de propagation particulière aux guides, déterminent ensuite directement les directions que l'onde est autorisée à emprunter. C'est ainsi qu'aucune onde n'est générée en direction des positions 3 et 5 puisque la rotation ne l'y autorise pas.

Carrefour à quatre branches

Enfin nous regardons le cas d'un carrefour à quatre branches qui mélange les deux types d'interfaces (figure IV.14(a)). Dans ce cas, l'impulsion part de la position 1 et ne se propage que dans les branches 2 et 4. Ceci est accentué par le cliché de l'intensité pris au temps t_4 (figure IV.14(b)). Cette transmission dans des directions spécifiques s'explique là encore simplement grâce à la conservation ou non de la rotation au croisement. En outre, il faut garder à l'esprit dans ce cas que pour la même direction de propagation, la polarisation circulaire sur la méta-molécule d'interface est opposée entre les deux types d'interface. Ceci est expliqué sur la figure IV.14(c). En comparaison avec l'étude à six branches précédentes, l'onde ne peut plus se propager dans la direction en face de la branche d'injection (3 sur la figure IV.14(c), 4 sur la figure IV.13(c)). En effet, le sens de rotation lié à l'interface bleue l'en empêche. En revanche, cela permet à l'onde d'aller dans la direction 4 (pour le carrefour à quatre branches) alors qu'elle n'y était pas autorisée pour le cas à six branches (position 5 sur la figure IV.13(c)).

L'ensemble de ces résultats expérimentaux, représentés dans le domaine temporel, montre bien l'importance de la polarisation circulaire cristalline localisée sur les résonateurs de l'interface. Dans le domaine de la physique du solide, on parle de la conservation du pseudo-spin de vallée à l'intersection. Cependant, ce terme de vallée se réfère à la structure de bande du cristal, donc à une propriété globale d'un système infini de surcroît dans l'espace réciproque. Ainsi, bien que cette vision en termes de vallée soit exacte et très puissante, elle est néanmoins assez difficile à appréhender pour nous. Ici, nous expliquons les résultats obtenus en adoptant simplement une description locale du comportement du champ électrique au niveau de l'interface, dans l'espace réel. Nous pensons que cette approche microscopique peut donner une vision plus intuitive de la physique du phénomène.

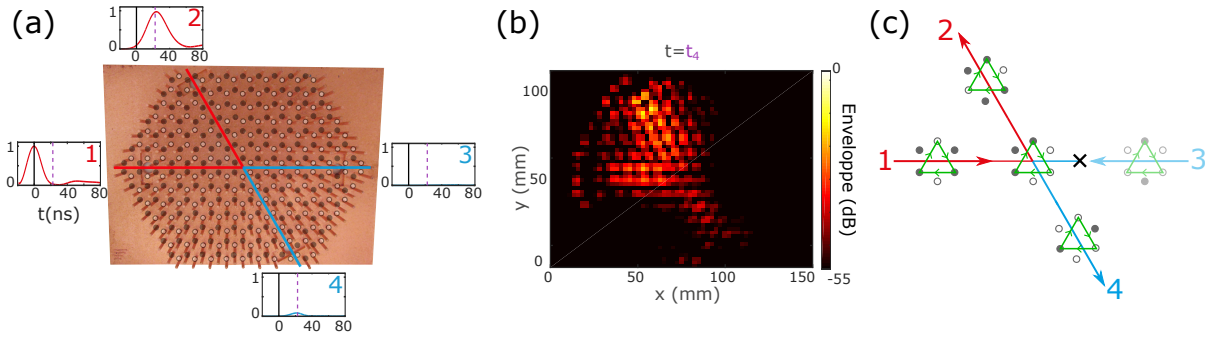


FIGURE IV.14 – (a) Transmission de l'impulsion en sortie du carrefour à 4 branches mélangeant les interfaces rouge et bleue. (b) Cartes de l'enveloppe de l'impulsion au temps t4. (c) Schéma expliquant que la conservation de la rotation sur la méta-molécule d'interface permet le routage spécifique de l'impulsion. Les sens de rotation sont inversés entre les deux types d'interfaces.

IV.2.4 Guides d'onde avec une polarisation cristalline

L'une des conséquences de cette description microscopique est de mettre en lumière le rôle des résonateurs qui sont loin de l'interface : ils ne servent qu'à créer une bande interdite qui confine le champ des modes guidés le long de l'interface (figure IV.15(a)). Les propriétés de propagation particulières de ces derniers sont en effet localisées sur la méta-molécule d'interface. Or, nous avons vu au chapitre 2 qu'il était très facile avec des métamatériaux localement résonant de générer une bande interdite d'hybridation sur laquelle nous avons un contrôle très poussé. Cette dernière permet ainsi d'introduire facilement des défauts dans le système et notamment de guider les ondes sur une échelle sub-longueur d'onde [96, 109]. Dans les paragraphes suivants, nous montrons comment il est possible d'exploiter ceci afin de créer des guides d'ondes porteurs d'une polarisation circulaire.

Protocole

Le protocole que nous mettons en place est très simple : nous gardons uniquement les résonateurs formant l'interface et remplaçons tous les autres par des fils plus longs ($h_3 = 16$ mm, en vert) (figure IV.15(b)). Ainsi, les fils des méta-molécules d'interface se comportent comme des défauts au sein de la bande interdite des fils verts (figure IV.15(c)). Comme nous avons vu au chapitre 1, la bande interdite d'hybridation trouve son origine dans la nature résonante des fils et non pas dans l'arrangement spatial de ces derniers. Nous pouvons donc les disposer aléatoirement autour de l'interface.

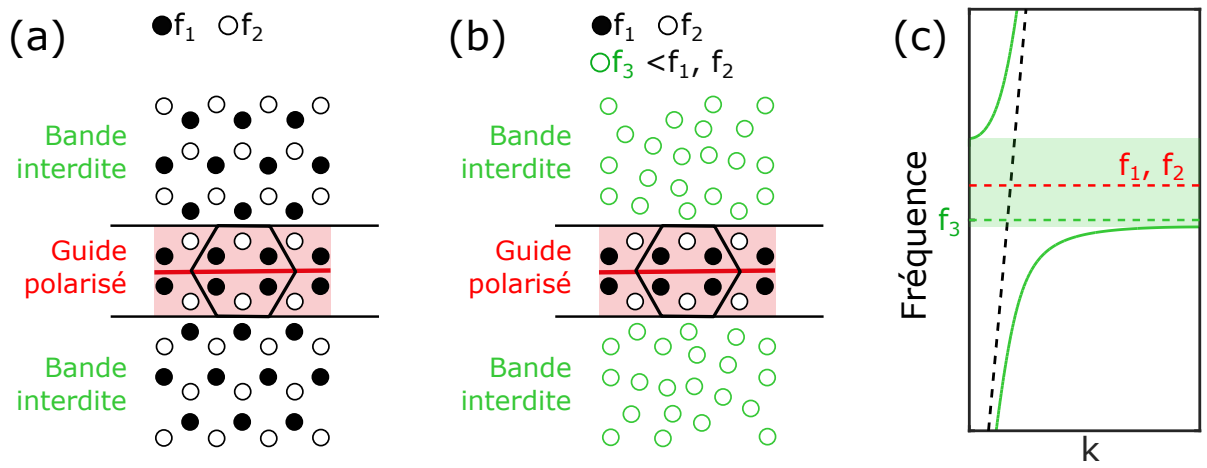


FIGURE IV.15 – (a) Rôle des résonateurs sur une interface rouge entre deux réseaux bidisperses symétriques. (b) Interface rouge polarisée comme un guide d'onde de défauts situé dans la bande interdite du métamatériau localement résonant constitué d'un arrangement aléatoire de fils longs (verts). (c) Relation de dispersion polaritonique correspondant à ce milieu de résonateurs basse fréquence.

Carrefours

Afin de vérifier cette idée, nous fabriquons des échantillons similaires aux précédents carrefours à quatre et six branches, mais cette fois avec un milieu désordonné de fils résonant à basse fréquence (vert) formant une bande interdite d'hybridation (figure IV.16 et IV.17). Nous réalisons ensuite le même type d'expérience que précédemment. Les résultats démontrent un acheminement spécifique des ondes identique à la partie précédente pour chacun des échantillons, et ce en ne gardant que les résonateurs d'interface. Dans le cas de l'échantillon à six branches, nous observons un léger signal autour de 40 ns en sortie de la branche 3, normalement éteinte. Ceci vient de la réflexion de l'impulsion à la fin des guides d'onde, rien n'étant adapté en impédance dans cette étude.

Ceci est une preuve supplémentaire de la validité de notre approche microscopique. En effet, ici il n'y a plus de cristal possédant de vallée, uniquement des méta-molécules dont l'arrangement permet d'obtenir des modes porteurs d'une symétrie circulaire dont le sens de rotation est lié à la direction de propagation. Il est ensuite possible de tirer partie de cette polarisation particulière afin de maîtriser précisément la propagation des ondes. Les propriétés de la bande interdite d'hybridation permettent aussi d'avoir un haut niveau de contrôle sur cette dernière, et ce de façon très intuitive. Ce travail fait donc le lien entre les métamatériaux cristallins introduits au chapitre trois, et l'approche liée aux défauts résonants présentée dans le chapitre deux.

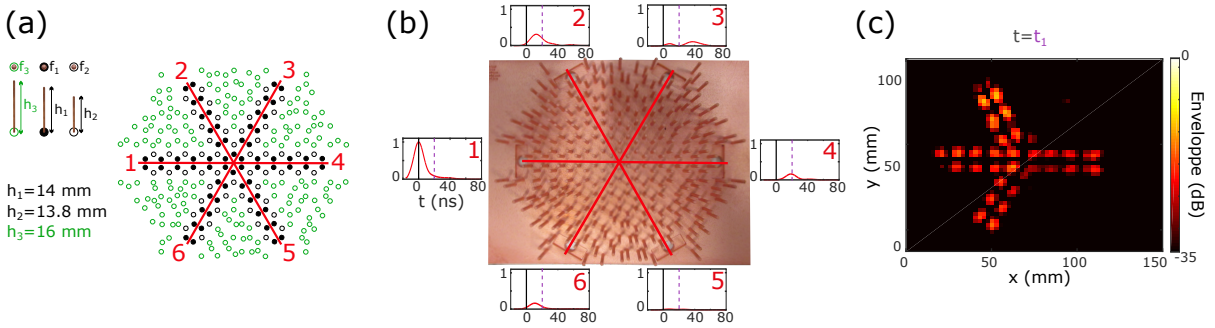


FIGURE IV.16 – (a) Schéma du carrefour à 6 branches de guides d'ondes de défauts avec des méta-molécules rouges. (b) Transmission de l'impulsion en sortie. (c) Cartes de l'enveloppe de l'impulsion au temps t1.

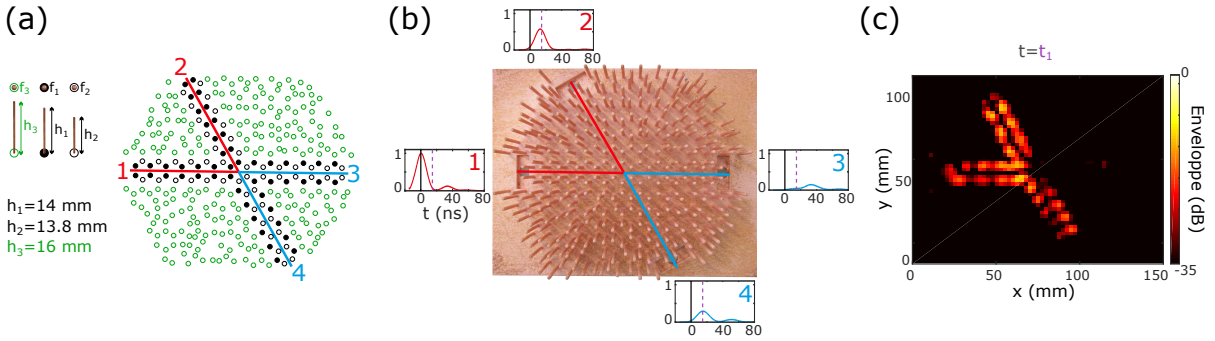


FIGURE IV.17 – (a) Schéma du carrefour à 4 branches de guides d'ondes de défauts mélangeant les méta-molécules rouges et bleues. (b) Transmission de l'impulsion en sortie. (c) Cartes de l'enveloppe de l'impulsion au temps t1.

Par ailleurs, cette étude montre encore une fois la pertinence de l'approche cristalline des métamatériaux localement résonants. En jouant avec la composition et la structure de ces méta-molécules nous avons réussi à implémenter un analogue macroscopique de l'effet Hall quantique de vallée, qui nous a servi ensuite de modèle pour créer des guides d'onde avec une polarisation cristalline à l'échelle sub-longueur d'onde. Par ailleurs, nous notons ici qu'étant dans le cadre des métamatériaux localement résonant, les ondes se propagent très lentement dans le système. A titre d'exemple nous avons ainsi pu obtenir un indice de groupe de l'ordre de 60 dans cette étude.

Dans la partie suivante nous continuons à exploiter ce concept en tirant parti des similarités entre le réseau hexagonal et le réseau Kagomé.

IV.3 Correspondance avec le Kagomé

A la fin du chapitre 3, nous avons établi une correspondance entre les réseaux hexagonal et Kagomé. En effet, leur relation de dispersion s'obtient en repliant spectralement le même réseau triangulaire. Cela génère un cône de Dirac aux points K de la première zone de Brillouin dans chacun des cas. Les modes cristallins associés à ces cônes sont très similaires entre les deux réseaux. Cela nous a amené à considérer le réseau Kagomé comme étant un réseau hexagonal constitué de méta-molécules triangulaires reliées par leur sommet. Dans cette partie, nous exploitons ceci en implémentant un analogue macroscopique de l'effet Hall quantique de vallée dans le domaine de l'acoustique audible avec un réseau Kagomé de canettes de soda.

IV.3.1 Équivalence structure-composition

Dans le cas du réseau hexagonal décrit dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré qu'en changeant légèrement la fréquence de chacun des résonateurs (méta-atomes) de la cellule unité, nous levions la dégénérescence des cônes de Dirac. Ici, dans le cas du Kagomé les méta-atomes équivalents ne sont plus de simples résonateurs mais un trimère de ces derniers.

Modes propres des trimères

Ainsi, plutôt que de changer la fréquence de résonance globale du trimère, en mettant un niveau d'eau identique dans les canettes par exemple, nous pouvons modifier légèrement la structure du trimère pour jouer avec la fréquence des modes résonants. En effet, la nature de ces modes est liée à leur structuration spatiale. Ainsi, plus le trimère est dense,

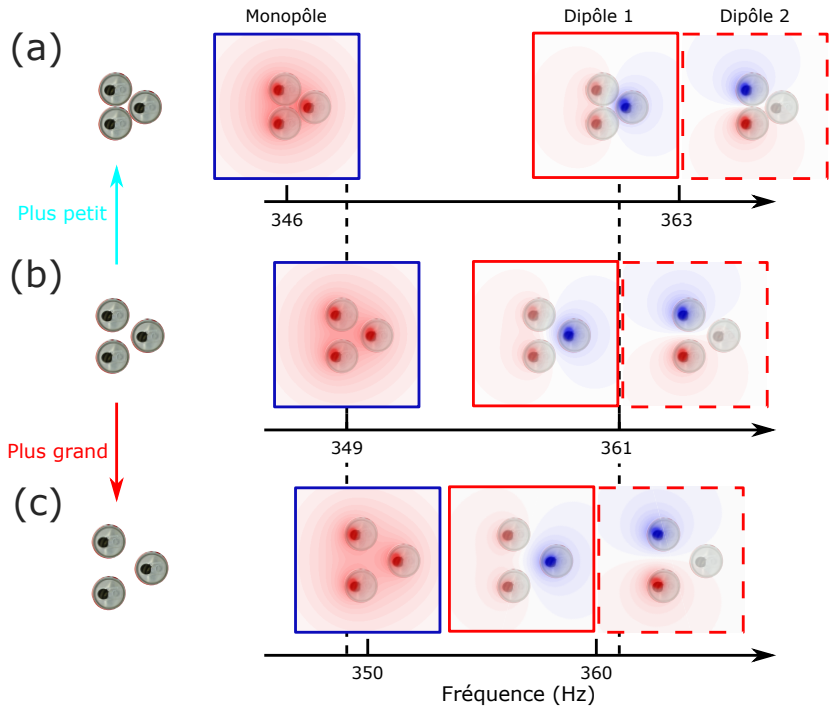


FIGURE IV.18 – (a) Modes propres du trimère dont les canettes de soda sont rapprochées. (b) Modes propres du trimère dont les canettes de soda sont identique au cas du chapitre précédent. (c) Modes propres du trimère dont les canettes de soda sont éloignées.

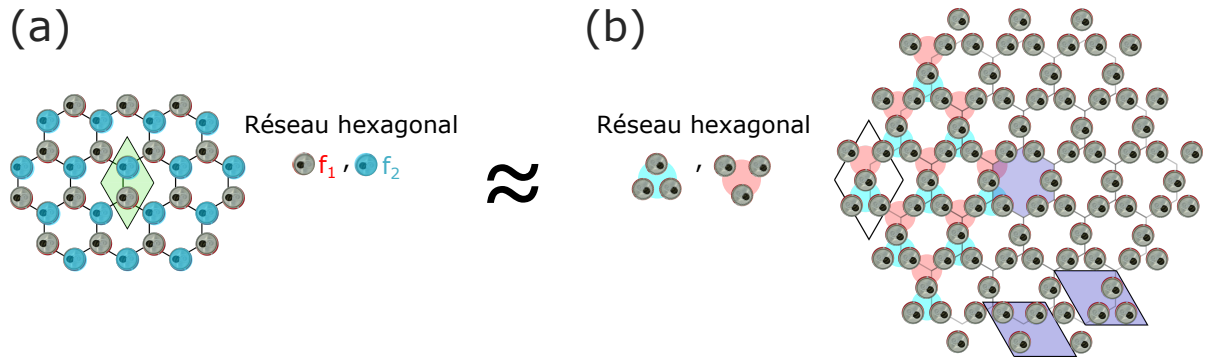


FIGURE IV.19 – (a) Réseau hexagonal bidisperse de canettes. (b) Équivalent de (a) avec le réseau Kagomé.

plus les modes dipolaires seront à haute fréquence. Ceci s'explique par le fait que l'échelle des variations spatiales de ces modes dipolaires est directement reliée à la taille du trimère.

La nature des modes propres correspondants est liée à leur structuration spatiale. Ainsi, jouer avec cette dernière permet de contrôler les modes résonants (figure IV.18). De cette façon, plus le trimère est dense, plus les modes dipolaires sont à haute fréquence et les monopôles à basse fréquence. En grossissant la méta-molécule, on obtient le comportement inverse : les monopôles montent en fréquence alors que les dipôles descendent. Ceci s'explique par le fait que l'échelle des variations spatiales de ces modes est directement reliée à la taille du trimère, les résonateurs étant tous identiques.

Réseau bidisperse équivalent

En acoustique, un réseau hexagonal bidisperse peut être obtenu en versant de l'eau dans une des canettes de la cellule unité (figure IV.19(a)). L'équivalent serait ici un réseau Kagomé alternant entre des petits (zone cyan) et des grands triangles (zone rose) (figure IV.19(b)). La cellule unité d'un tel réseau est ainsi composée d'un trimère qui peut être petit ou grand de manière équivalente, une réduction de la taille d'un triangle entraînant l'agrandissement de son voisin, comme le montre la figure IV.19(b). Les modifications structurelles opérées sont très faibles (variations de $\pm 10\%$ de la taille des côtés des trimères). La cellule unité est donc la même que pour le cas du réseau Kagomé étudié au chapitre précédent. Sa taille est très petite par rapport à la longueur d'onde ce qui fait que nous sommes bien dans le domaine des métamatériaux cristallins.

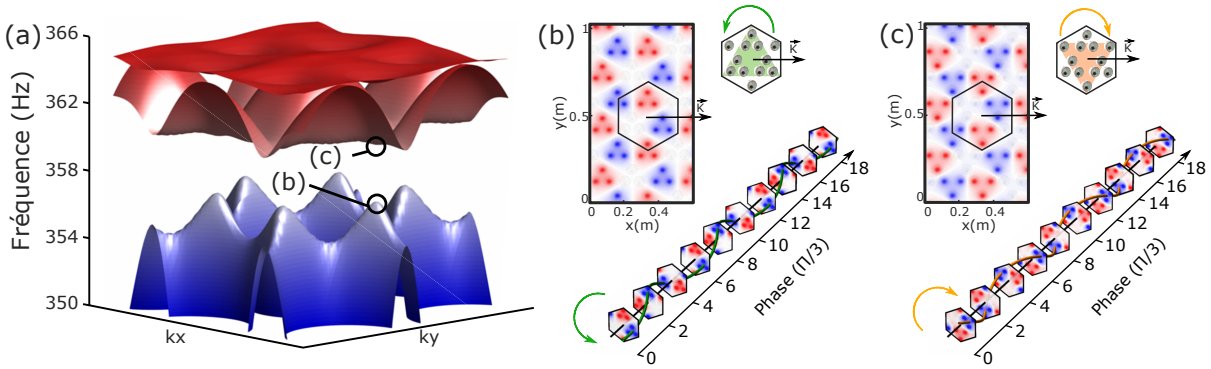


FIGURE IV.20 – (a) Relation de dispersion du réseau Kagomé modifié. (b) Mode cristallin correspondant à la bande inférieure au point K (gauche). Mise en évidence de la rotation sur la méta-molécule définie par l'hexagone noir. (c) pareil que (b) pour la bande supérieure.

Relation de dispersion

La relation de dispersion d'un tel milieu est très semblable à celle du réseau Kagomé (figure IV.20(a)). Elle possède trois bandes : une positive, une négative et une relativement plate. Cependant, le cône de Dirac est à présent brisé. Ceci s'explique par le fait que la dégénérescence est initialement liée à la structure totale du milieu et non pas uniquement à celle de la méta-molécule, contrairement à la dégénérescence au point Γ entre les deux bandes dipolaires, qui elle existe toujours.

Nous regardons ensuite les modes cristallins correspondant aux deux points K et K'. Ils sont représentés respectivement sur les figures IV.20(b) et (c), et IV.21(b) et (c). Nous fixons là encore un hexagone sur les cartes de champs. Il est orienté différemment par rapport à celui du cas hexagonal afin d'englober plusieurs trimères. Ce dernier contient six trimères arrangés en deux triangles inversés : l'un de petits trimères l'autre de grands. Ceci est l'équivalent structurel de ce que nous avons mis en évidence avec le réseau hexagonal bidisperse. De la même façon, nous attribuons deux couleurs aux triangles selon leur orientation par rapport à la direction de propagation : vert si leur base est en-dessous du vecteur $\vec{K}$ (ou $\vec{K'}$) et jaune si elle est au-dessus.

Pour la bande de basse fréquence, le champ acoustique est un monopôle sur les petits triangles, ce qui correspond à un mode dipolaire sur les grands triangles adjacents. Ceci est en accord avec l'ordre fréquentiel des modes propres des trimères isolés. En comparaison avec le réseau hexagonal bidisperse, l'emplacement du monopôle, ici disposé sur trois résonateurs, correspond à celui des résonateurs basse fréquence (qui sont aussi des monopoles). Le dipôle, où le champ est nul au centre, se rapproche quant à lui des résonateurs

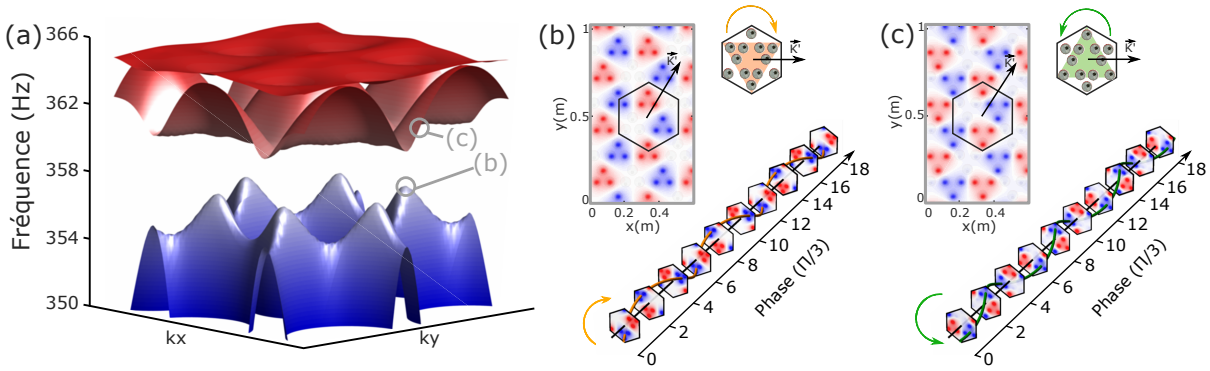


FIGURE IV.21 – (a) Relation de dispersion du réseau Kagomé modifié. (b) Mode cristallin correspondant à la bande inférieure au point K' (gauche). Mise en évidence de la rotation sur la méta-molécule définie par l'hexagone noir. (c) pareil que (b) pour la bande supérieure.

haute fréquence (qui sont aussi des noeuds du champ). Ce comportement s'inverse pour la bande supérieure : les modes dipolaires occupent à présent l'emplacement des petits trimères et les monopôles sont sur les gros.

Moment angulaire cristallin

En faisant défiler la phase de ces modes pour reproduire la propagation de l'onde dans le réseau selon la direction ΓK (ou $\Gamma K'$) nous mettons aussi en évidence un moment angulaire au sein de l'hexagone que nous avons fixé dans le réseau. Ceci est décrit sur la figure IV.20 ((b) et (c) en K, et sur la figure IV.21 (c) et (d) en K'. Comme dans l'étude précédente, des hélices dont la couleur est reliée à l'orientation du triangle de trimères qui porte le champ témoignent bien d'une rotation du champ au sein de l'hexagone fixé. Le sens de cette dernière dépend de la fréquence ainsi que de la direction de propagation de l'onde dans le métamatériau, exactement de la même façon que pour l'étude du milieu de fils. Cela s'explique encore une fois par le fait que, bien que notre réseau n'ait plus la symétrie d'inversion, il possède encore celle d'invariance par renversement du temps.

En exploitant le parallèle entre la structure Kagomé et le réseau hexagonal, nous avons donc réussi à introduire une polarisation circulaire au sein d'un métamatériau cristallin acoustique. La prochaine étape est d'appliquer la procédure de l'effet Hall quantique à notre réseau de canettes.

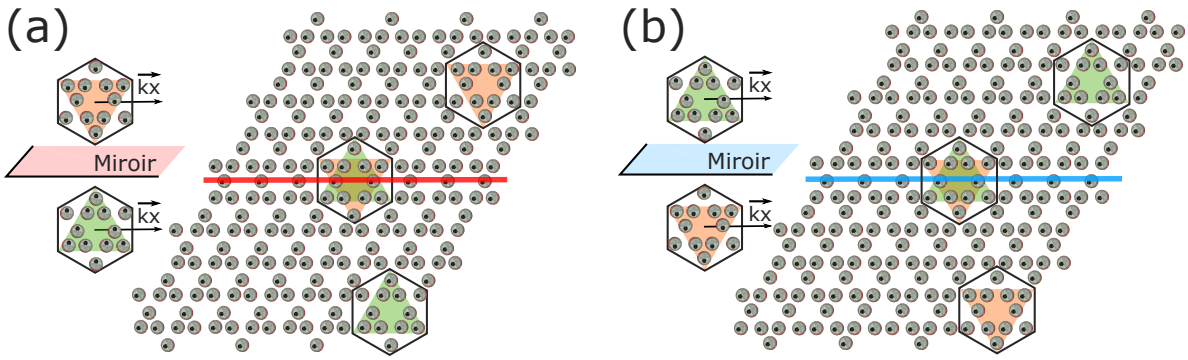


FIGURE IV.22 – (a) Interface rouge obtenue grâce à une symétrie miroir. (b) pareil que (a) pour l'interface bleue.

IV.3.2 Interface

Protocole

Pour faire coïncider les points K et K' du réseau Kagomé au niveau d'une interface nous appliquons un miroir le long de l'axe KK' dans l'espace réciproque. Cela donne deux types d'interfaces représentées en rouge et en bleu sur la figure IV.22. L'interface rouge est obtenue en mettant deux petits trimères en regard. Elle peut être ainsi décrite avec une méta-molécule d'interface constituée de deux triangles hybrides inversés (vert et jaune), chacun composé de deux petits trimères et d'un gros (figure IV.22(a)). L'interface bleue est quant à elle obtenue en mettant les gros trimères en face l'un de l'autre. La méta-molécule obtenue a donc une composition différente de celle de l'interface rouge : elle possède deux triangles hybrides constitués cette fois-ci de deux gros trimères et un petit (figure IV.22(b)).

Relation de dispersion

Les relations de dispersion correspondant à chacune de ces interfaces sont représentées sur les figures IV.23(a) et IV.24(a)). Dans le cas de l'interface rouge de canettes, équivalente à celle composée de fils de l'étude précédente, une bande de propagation à pente positive apparaît dans la bande interdite des milieux environnants. Les modes correspondants ont un profil antisymétrique et sont confinés sur une échelle sub-longueur d'onde. Il est alors possible de définir une méta-molécule d'interface, comme dans l'étude du réseau hexagonal bidisperse. En faisant défiler la phase du mode se propageant vers les x positifs, nous pouvons de la même façon faire sortir la double polarisation circulaire au sein de la méta-molécule (figure IV.25). Son sens de rotation est « accroché » à la direction de

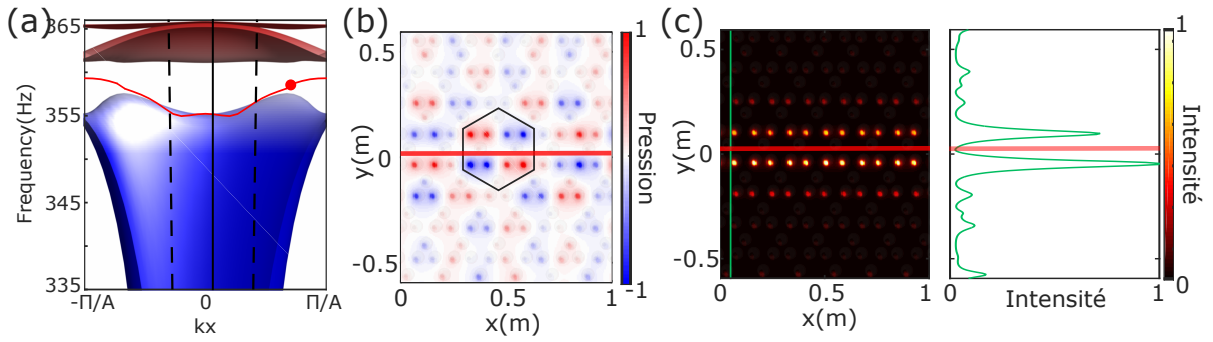


FIGURE IV.23 – (a) Relation de dispersion de l'interface rouge. (b) Carte de pression du mode guidé se propageant vers les x positifs. (c) Intensité du mode guidé et coupe transverse (ligne verte) mettant en évidence son antisymétrie. En insert, schéma mettant en évidence de la rotation sur la méta-molécule d'interface.

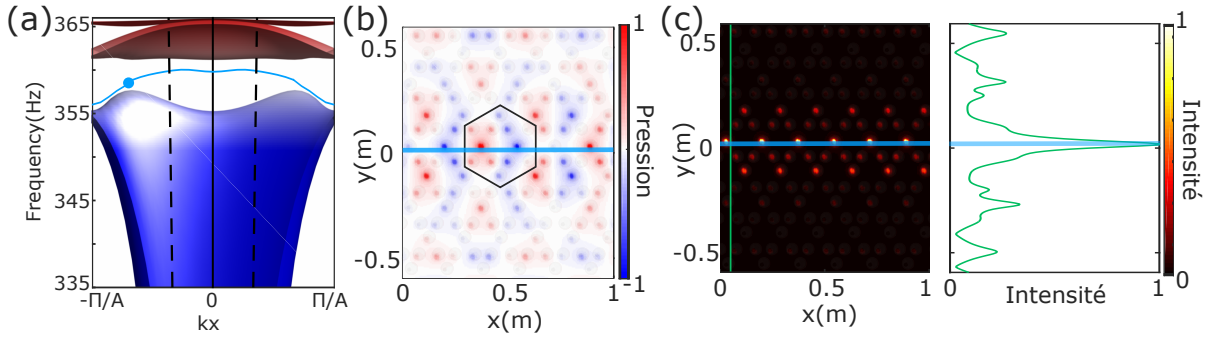


FIGURE IV.24 – (a) Relation de dispersion de l'interface bleue. (b) Carte de pression du mode guidé se propageant vers les x positifs. (c) Intensité du mode guidé et coupe transverse (ligne verte) mettant en évidence sa symétrie. En insert, schéma mettant en évidence de la rotation sur la méta-molécule d'interface.

propagation.

Dans le cas de l'interface bleue, la méta-molécule d'interface présente elle aussi une double polarisation circulaire mais, parce qu'elle a une composition différente, le sens de rotation est opposé par rapport au cas de l'interface rouge. Ceci est aussi indiqué par la différence du signe de la pente de la bande entre les deux cas de figure.

Propagation polarisée : simulation

Nous voulons à présent mettre en évidence ce lien entre le sens de rotation de champ de pression sur les canettes de l'interface et la direction de propagation de l'onde guidée. Contrairement au cas du réseau hexagonal bidisperse, nous étudions ici une interface

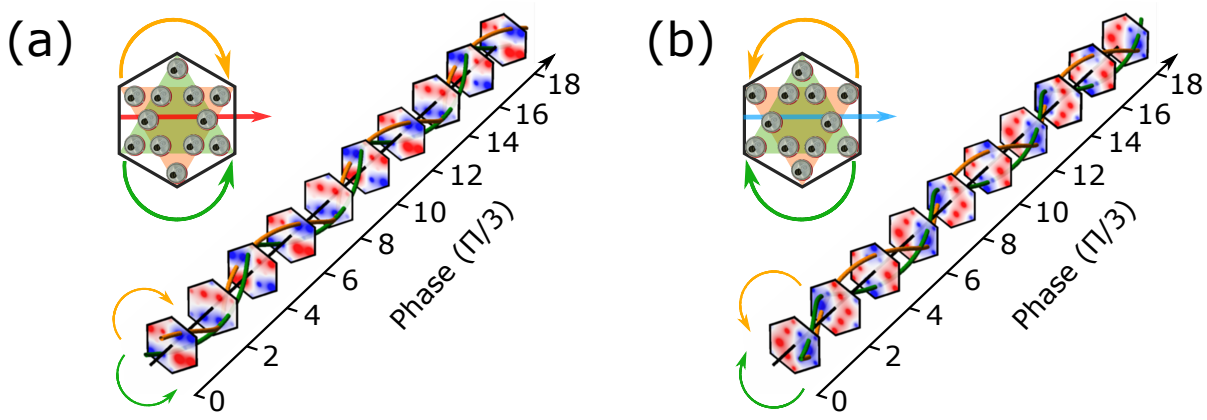


FIGURE IV.25 – (a) Rotation au sein de la méta-molécule d'interface rouge. (b) Idem pour la bleue.

très simple, linéaire, simulée avec le logiciel COMSOL Multiphysics. L'excitation est en revanche plus complexe : nous utilisons deux sources, chacune disposées sur un sommet d'un des triangles hybrides de la méta-molécule. En jouant sur le déphasage entre ces deux sources, nous sommes capables d'induire une rotation du champ acoustique au sein de la méta-molécule d'interface.

Les résultats sont présentés sur la figure IV.26, pour les deux types d'interfaces. Les deux sources sont placées au milieu du système simulé et l'on enregistre la transmission du guide à l'extrémité gauche (vert) et droite (jaune). Nous remarquons que la transmission d'un côté ou de l'autre des sources dépend fortement du déphasage entre ces dernières. En particulier, il est possible de faire en sorte que le son ne se propage que vers la gauche ou vers la droite comme en témoigne les différentes cartes d'intensité acoustiques.

Ceci montre bien l'existence d'un lien direct entre le sens de rotation du champ sur les canettes de l'interface et la direction de propagation de l'onde guidée. Par ailleurs, nous observons une inversion de comportement entre les deux interfaces : le déphasage entre les deux sources, donc le sens de rotation, correspondant à la propagation vers la droite pour l'interface rouge, envoie le champ vers la gauche le long de l'interface bleue. Cela témoigne des sens de rotation opposés entre les deux types d'interfaces.

Propagation polarisée : expérience

L'étape suivante est de vérifier le lien entre le sens de rotation de la polarisation circulaire et la direction de propagation expérimentalement. Pour cela nous mettons en place des canettes de soda afin de créer l'interface rouge. Cette expérience est réalisée

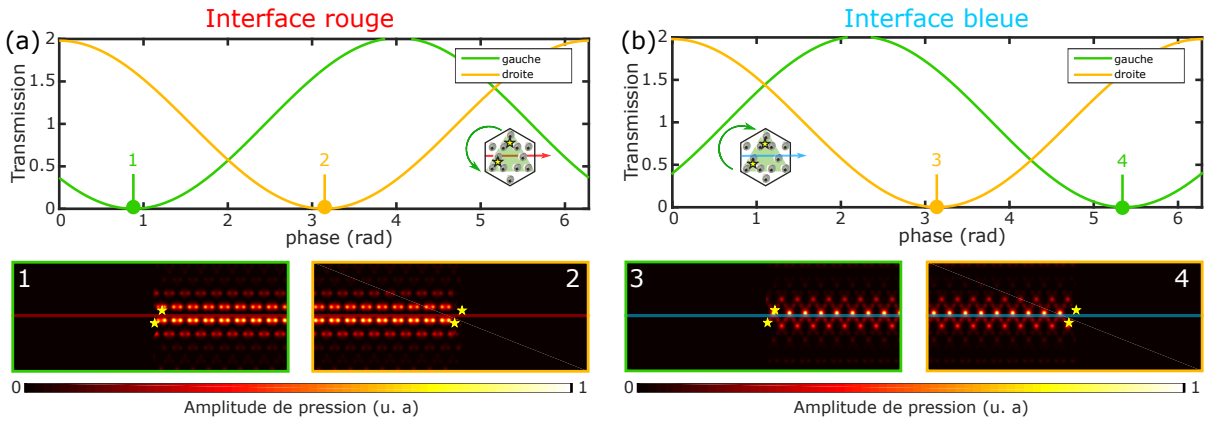


FIGURE IV.26 – (a) Transmission simulée du guide d'onde rouge vers la gauche (vert) et la droite (jaune) en fonction du déphasage entre les deux sources. Les cartes de champ mettent en évidence la possibilité d'envoyer du son uniquement dans une direction. (b) Idem pour l'interface bleue.

dans une chambre anéchoïque afin de s'affranchir du bruit extérieur (figure IV.27(a)). Nous plaçons deux sources, qui sont de simples haut-parleurs commerciaux, au milieu de l'interface dans les positions appropriées (insert de la figure IV.27(a)). Notons ici le manque de place nous empêche de les placer exactement au sommet des triangles au risque de briser l'arrangement des canettes. Tout comme dans l'étude du graphène acoustique du chapitre 2, nous envoyons un signal temporel de type *chirp* possédant une large gamme de fréquence (0 à 800 Hz), centrée sur la résonance d'une canette ($f_0 = 420$ Hz). Nous enregistrons la réponse du milieu avec un micro disposé au-dessus de l'ouverture des canettes. Un banc de mesure 2D nous permet de scanner le champ acoustique au-dessus de l'ensemble de l'échantillon. En faisant une transformée de Fourier temporelle de l'ensemble des cartes de champ mesurées, nous obtenons une carte pour chaque fréquence, et pour chaque source.

Nous identifions ensuite les fréquences correspondant aux modes d'interface. De la même manière que pour l'étude numérique du paragraphe précédent, nous changeons le déphasage entre les deux haut-parleurs. Nous mesurons l'intensité du champ à gauche et à droite à une distance $d = 35$ cm de l'excitation, au niveau de l'interface, lorsque nous sommons les deux cartes avec le déphasage correspondant. Les résultats sont représentés sur la figure IV.27(b), avec le même code couleur que précédemment. Nous remarquons là encore que la direction de propagation de l'onde dépend fortement du déphasage entre les deux sources. En particulier, il est possible de faire en sorte que le son n'aille que vers la gauche ou la droite comme le montre les cartes de la figure IV.27(b). Notons ici que si le

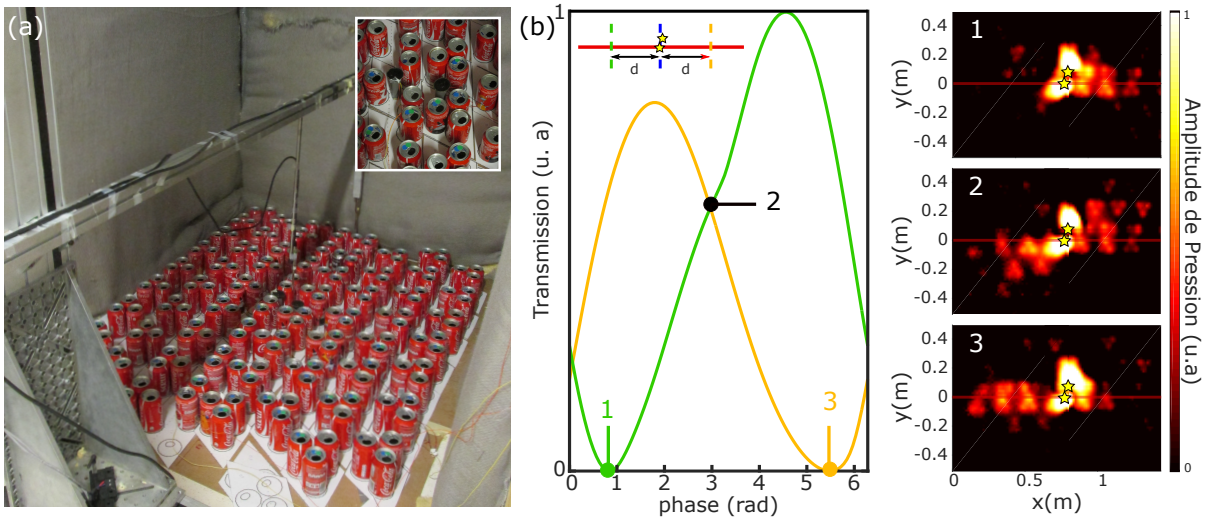


FIGURE IV.27 – (a) Photo de l'expérience réalisée avec des canettes de soda dans la chambre anéchoïque. En insert, la position des hauts parleurs au sein de la méta-molécule d'interface rouge. (b) Transmission mesurée à une distance d=35cm à gauche (vert) et à droite (jaune) des sources. Les cartes de champ correspondantes montrent que l'on peut envoyer du son uniquement dans une direction (1 et 3).

champ ne se propage pas sur de très longues distances à cause des pertes intrinsèques aux canettes, il est néanmoins bien guidé sur une échelle sub-longueur d'onde ($\lambda_0 = 80$ cm).

Dans cette partie, grâce au parallèle que nous avons établi au chapitre précédent entre les réseaux hexagonal et Kagomé, nous avons réussi à obtenir un analogue de l'effet Hall quantique de vallée avec une structure différente, où tous les résonateurs sont identiques. Cette étude, réalisée dans le domaine de l'acoustique audible avec de simples canettes de soda, nous a permis de mettre en évidence les propriétés de polarisation des modes guidés d'une façon différente. Ceci témoigne de la pertinence et de la versatilité de l'approche cristalline des métamatériaux localement résonant.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous sommes parti d'un métamatériau cristallin, un simple milieu de fils, organisé selon une structure hexagonale. La structure de bande de ce dernier possède des singularités aux coins K et K' de la première zone de Brillouin appelés cônes de Dirac. En ces points, les deux bandes se touchent. Il existe donc deux modes dégénérés que l'on peut décrire avec deux symétries dipolaires orthogonales au sein d'un hexagone fixé, mais aussi avec une polarisation circulaire. Dans ce cas, l'onde qui se propage au sein du milieu,

s'accompagne de deux rotations de sens contraires sur l'hexagone en question.

Nous avons ensuite montré qu'en changeant légèrement la fréquence de résonance des deux résonateurs de la cellule unité de façon asymétrique, nous pouvions briser ces cônes. Au point K, au sein de l'hexagone précédent, nous avons à présent deux modes à deux fréquences différentes qui présentent des sens de rotation opposés. Par ailleurs, au point K' il se passe sensiblement la même chose, néanmoins, les sens de rotation sont échangés par rapport au point K, respectant ainsi la propriété d'invariance par renversement du temps. En jouant simultanément avec la structure et la composition de la cellule unité sub-longueur d'onde d'un métamatériau localement résonant, nous avons réussi à induire un moment angulaire local au sein du milieu qui accompagne l'onde qui s'y propage. Son sens de rotation dépend ainsi de la fréquence mais aussi de la direction de cette dernière.

En physique du solide, cela revient à lever la dégénérescence de vallée. Dans ce domaine, cela est utilisé pour faire des interfaces qui sont capables de guider les courants électriques dans certaines directions, donnant naissance au phénomène d'effet Hall quantique de vallée. Nous avons montré qu'il était possible d'appliquer les mêmes procédures à notre système en faisant coïncider des vallées différentes au niveau de l'interface entre un milieu hexagonal bidisperse et son reflet dans un miroir. Ceci nous a permis d'obtenir des modes se propageant le long de ces interfaces spécifiques. En les regardant de plus près, nous nous sommes rendus compte que les résonateurs de l'interface portaient eux-aussi deux moments angulaires, tournant dans des sens opposés, hérités de ceux disposés au coeur du cristal. Le sens de rotation de ces derniers est directement lié à la direction de propagation de l'onde le long de l'interface.

Grâce à cette description microscopique dans l'espace réel de ces interfaces, nous avons pu expliquer le guidage spécifique et la propagation peu sensible aux réflexions de ces modes guidés polarisés. En gardant uniquement les résonateurs portant cette polarisation circulaire et en les entourant d'un milieu désordonné spatialement présentant une bande interdite d'hybridation, nous avons créé des guides d'ondes avec un degré de liberté supplémentaire cristallin de la même façon qu'au chapitre 2. Ces derniers permettent tout aussi bien de diriger l'onde dans des directions spécifiques. Ce travail fait l'objet d'un article en cours de révision [151].

Nous avons ensuite tiré parti de la correspondance établie entre le réseau hexagonal et le réseau Kagomé à la fin du chapitre 3. De cette façon, il est possible d'induire ces moments angulaires à la fois dans le coeur des métamatériaux et au niveau de l'interface en modifiant légèrement la structure du réseau Kagomé. Cette étude, réalisée en acoustique audible avec des canettes de soda, a permis d'illustrer le parallèle entre la composition spectrale de la méta-molécule et son arrangement spatial. Nous avons ainsi

démontré l'existence d'une polarisation circulaire du champ guidé à l'interface de deux métamatériaux en utilisant un schéma d'excitation tournant dont le sens de rotation permet d'envoyer du son uniquement vers la gauche ou vers la droite. Ce travail fait l'objet d'un article en cours de finalisation.

Ces travaux nous ont permis de comprendre en partie certains phénomènes liés à la description topologique de la structure de bandes des milieux structurés, ici à l'échelle sub-longueur d'onde. Dans le chapitre suivant, nous continuons cette investigation en tentant de réaliser l'analogue macroscopique d'un isolant topologique de spin.

Chapitre V

Introduction d'effets topologiques au sein des métamatériaux cristallins

V.1 Cône de Dirac et topologie

Au cours des chapitres précédents nous avons montré qu'il était possible d'obtenir des cônes de Dirac au sein d'un métamatériau localement résonant. Leur existence est intimement liée à la symétrie hexagonale du réseau, ce qui met en avant le rôle de la structuration sub-longueur d'onde du système.

Dans les systèmes électroniques tels que le graphène ces cônes se caractérisent par des propriétés de transport augmentées. En effet, la linéarité de la relation de dispersion autour du niveau de Fermi traduit le fait que les électrons de conduction n'ont pas de masse effective, et sont décrits par l'équation de Dirac pour les particules relativistes [112]. A l'échelle macroscopique, il est difficile de transposer cette amélioration des propriétés de transport, les photons n'ayant pas de masse intrinsèque. En revanche il est possible d'exploiter une autre facette de la physique liée à ces cônes de Dirac, à savoir leur topologie.

Au cours de ce dernier chapitre nous allons donc continuer à jouer avec la structuration d'un métamatériau cristallin afin d'obtenir un milieu dont les propriétés sont semblables, dans une certaine mesure, à celles d'un isolant topologique de spin. J'ajoute ici qu'avant le début de ma thèse, nous n'avions aucune expérience dans ce domaine particulier. C'est vraiment la mesure de ces cônes de Dirac et les propriétés surprenantes qui en découlent qui nous ont poussés à essayer de comprendre ces phénomènes physiques. Cela a été grandement facilité par l'apport de Romain Fleury au cours de l'année de post-doctorat qu'il a passé dans le groupe. Le travail qui fait l'objet de ce chapitre ainsi que d'autres projets annexes ont été effectués en étroite collaboration avec lui.

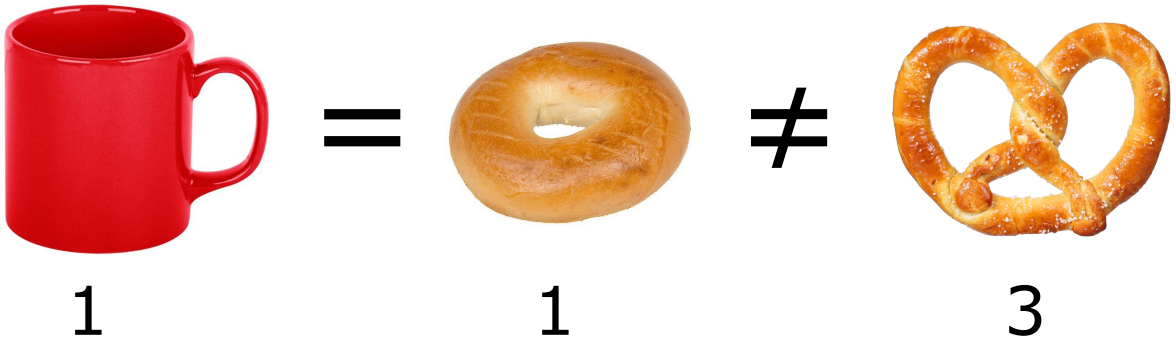


FIGURE V.1 – Classification topologique de plusieurs objets. Chaque classe est reliée au nombre d'ouvertures dans l'ensemble.

V.1.1 Isolants topologiques

Description topologique de la matière

La topologie est une branche des mathématique qui fournit un cadre rigoureux aux notions de proximité, de continuité et de discontinuité. Ainsi, elle permet par exemple de classer des systèmes en fonction de la conservation de propriétés communes lorsqu'on leur applique des déformations continues. C'est l'exemple bien connu de la tasse et du beignet (figure V.1). Ils ont chacun une seule ouverture et il est donc possible de passer de l'un à l'autre continûment. En revanche pour passer du beignet au bretzel, qui lui a trois trous, il faut nécessairement introduire une discontinuité dans l'ensemble. Ils ont donc des propriétés topologiques différentes [160].

Cette branche des mathématiques a longtemps été l'une des seules, avec la théorie des nombres, à ne pas trouver d'application dans le domaine de la physique [161]. Ceci a changé avec les travaux pionniers de David Thouless, Duncan Haldane et Michael Kosterlitz, prix Nobel en 2016 [162, 163], qui ont démontré que la description topologique de systèmes physiques permettait d'expliquer de manière très précise des phénomènes de transition de phase pour lesquels la vision en termes de groupe de symétries ne suffisait pas.

Leurs travaux ont mené à une approche différente de la matière condensée. Celle-ci permet de décrire les différentes bandes, autorisant ou interdisant la propagation électronique, des diagrammes d'énergie d'un milieu en fonction de leur propriétés topologiques. En pratique, on peut classer ces propriétés grâce à un unique nombre entier, appelé invariant topologique, qui se rapproche du nombre de trous dans l'exemple du beignet précédent. Cet invariant est une caractéristique globale de la bande, et donc du cristal infini. S'il est nul, la bande est dite triviale, sinon elle est appelée topologique.

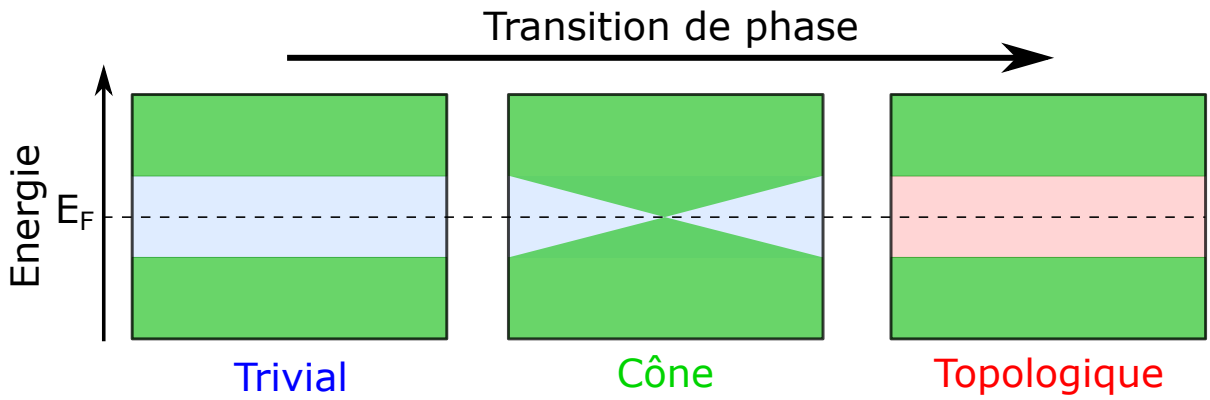


FIGURE V.2 – Transition de phase topologique d'une bande interdite triviale vers une bande non-triviale en passant par sa fermeture (cône).

Cette description a permis, entre autres, de découvrir une nouvelle famille de matériaux, connus sous le nom d'isolants topologiques [164]. Ces derniers sont des isolants en volume, donc leur diagramme d'énergie possède une bande interdite. Cependant, leurs bords sont métalliques et conduisent le courant. Le nombre des modes de bords en présence est directement lié à l'invariant topologique de la bande interdite. Ainsi, en pratique, faire une interface entre deux isolants aux propriétés topologiques différentes, ouvre des canaux de propagation pour les électrons le long de l'interface.

Le cône de Dirac comme point de départ

Il devient donc intéressant de contrôler la topologie des bandes d'un milieu. Pour cela, il est possible de s'appuyer sur la propriété fondamentale suivante : une transition topologique s'accompagne obligatoirement de la fermeture d'une bande interdite. Ceci se relie donc directement aux cônes de Dirac, qui sont un endroit particulier de la relation de dispersion où deux bandes se touchent (figure V.2). Ils constituent des points de transition potentiels entre deux phases aux topologies différentes. En cela, ce sont une base de travail pertinente afin d'induire des propriétés topologiques non-triviales dans un milieu. L'objectif est donc d'ouvrir ces cônes de la bonne manière.

Ces derniers sont protégés par deux symétries fondamentales : la symétrie par renversement du temps T et la symétrie d'inversion P. En brisant la première, avec un champ magnétique par exemple, une bande interdite s'ouvre et elle présente un mode de bord unidirectionnel. Ceci se relie à l'effet Hall quantique et a en effet une origine topologique, le nombre de canaux de bords étant égal à l'invariant topologique appelé nombre de Chern [135, 165].

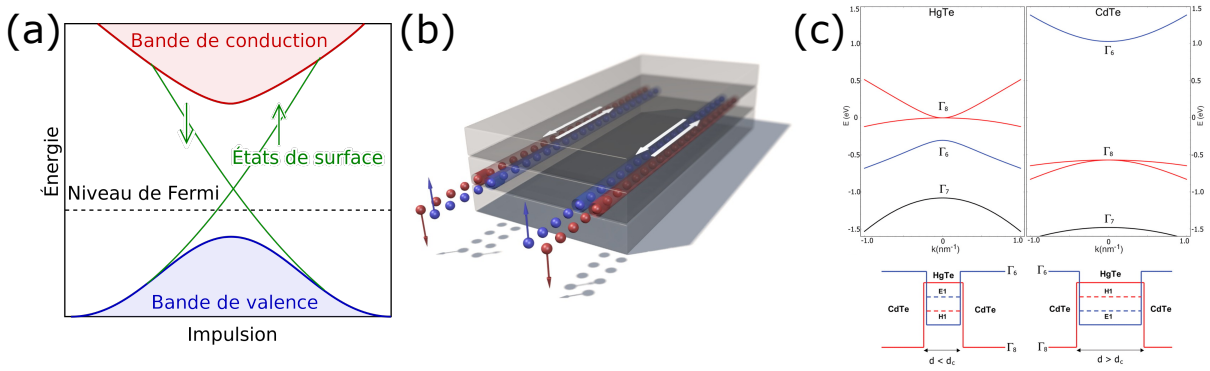


FIGURE V.3 – (a) Structure de bande d'un isolant topologique de spin. (b) Modes hélicoïdaux aux bords d'un tel milieu. (c) Inversion de bande due au couplage spin-orbite, entre un puit quantique CdTe et HgTe.

La disparition de la symétrie d'inversion génère aussi une bande interdite. Cependant cette dernière n'est pas topologique. Il reste tout de même possible de définir des invariants localement autour des vallées K et K'. Ces derniers ne sont plus des entiers mais des demi-entiers et sont appelés invariants topologiques de vallée. Nous les avons déjà rencontrés dans le chapitre précédent. Ils sont reliés à des modes qui se propagent le long d'interfaces particulières : c'est l'effet Hall quantique de vallée [152].

Isolant topologique de spin

Pour l'instant, nous n'avons pris en compte à aucun moment le degré de liberté supplémentaire qu'est le moment angulaire intrinsèque aux électrons, le spin. La structure de bande électronique totale du graphène est en réalité formée de deux copies identiques, chacune correspondant à un spin. Par ailleurs, ce dernier est capable de se coupler au moment angulaire orbital lié au mouvement de l'électron autour du noyau : c'est le couplage spin-orbite. Il est notamment responsable de la structure fine du diagramme d'énergie de la matière. En 2005, Kane et Mele ont démontré théoriquement qu'il était possible de tirer parti de ce couplage particulier afin d'ouvrir les cônes de Dirac du graphène [166, 167]. Cette levée de dégénérescence s'accompagne d'une inversion entre les deux bandes. Cette dernière joue un rôle crucial afin d'induire une topologie non triviale à la bande interdite résultante. Elle est représentée par un invariant pouvant uniquement prendre la valeur de 0 ou 1, appelé Z_2. Dans le cas où il est égal à 1, le milieu est appelé isolant topologique de spin. Deux bandes liées aux modes de bords contre-propagatifs apparaissent dans la bande interdite et la traversent totalement, comme le montre la figure V.3(a). Leur sens de

propagation est accroché au spin de l'électron, ce qui les rend hélicoïdaux (figure V.3(b)). Par ailleurs ces bandes se croisent aux points de symétrie qui sont invariants par renversement du temps. Ceci est intimement lié au spin 1/2 des électrons. En effet, dans le cas de ces particules fermioniques, l'opérateur de renversement du temps T est tel que $T^2 = -1$. Ainsi, pour chaque état de Bloch de vecteur d'onde k, un état de même énergie, mais de spin et vecteur d'onde opposé existe. Ils sont connus sous le nom de paire de Kramers. A l'interface, ceci est bien le cas si chacune des bandes liées à un spin se croisent au centre et en bordure de zone de Brillouin. En s'éloignant de ces points particuliers les bandes acquièrent une dispersion opposée à cause du couplage spin-orbite.

Cette dispersion particulière à l'interface est responsable de propriétés très intéressantes. En effet, étant donné que le sens de propagation des électrons est directement lié à leur spin, ils ne peuvent pas être réfléchis par des impuretés à moins que ces dernières ne renversent leur spin. Ce n'est le cas que lorsqu'elles sont magnétiques. Cela montre le grand potentiel de ces isolants topologiques de spin, qui permettent d'avoir une propagation protégée topologiquement, et ce sans avoir recours à un champ magnétique extérieur.

En pratique, le couplage spin-orbite est trop faible dans le graphène pour espérer observer un tel phénomène. Cependant, il a été démontré théoriquement et expérimentalement qu'en faisant varier l'épaisseur d'un puits quantique fait de mercure et tellurium (HgTe) au sein d'un milieu de cadmium et tellurium (CdTe), il était possible d'obtenir une inversion de bande (figure V.3(c)). Cette dernière, liée au couplage spin-orbite, a permis d'induire une topologie non-triviale dans le milieu [168,169]. Ce système, décrit par le trio Bernevig-Hugues-Zhang (hamiltonien BHZ), est le premier exemple d'isolant topologique de spin jamais découvert. La protection, dite topologique, des modes d'interface a créé par la suite un engouement formidable dans le domaine de la matière condensée. Elle suscite de nombreux espoirs quant aux applications en électronique, en spintronique et dans les autres domaines du transport d'information.

Analogues macroscopiques

Cette propriété a aussi motivé la découverte de leurs analogues macroscopiques. En effet, dès le premier chapitre de ce manuscrit nous avons mis en évidence la présence de structure de bande au sein des cristaux photoniques. Il est donc légitime de se demander si l'on peut obtenir un analogue macroscopique de cet isolant topologique de spin. Il existe cependant un problème fondamental : les ondes classiques ne possèdent pas de spin demi-entier. Les photons, ou encore les phonons en acoustique, sont des bosons au spin entier.

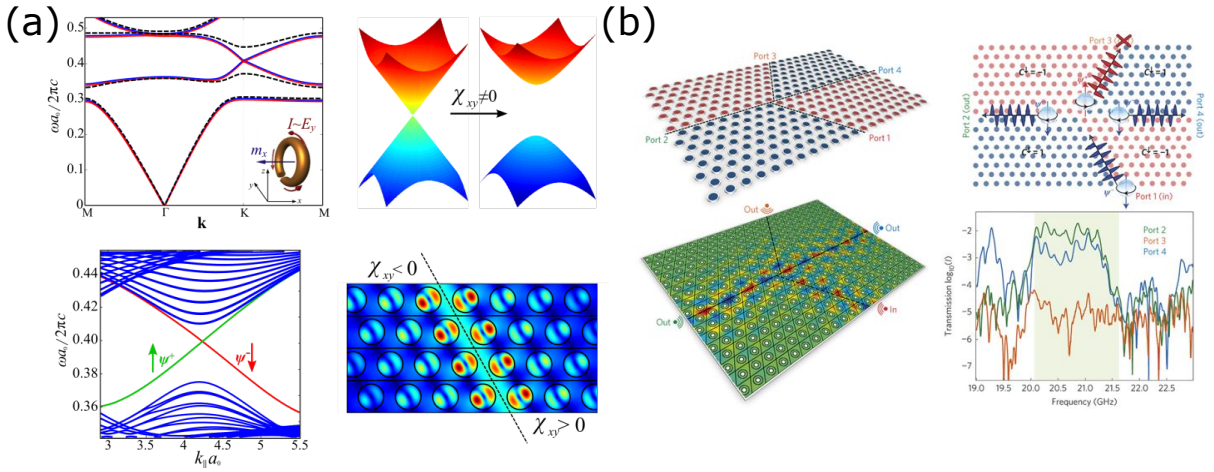


FIGURE V.4 – (a) Analogue photonique d'un isolant topologique de spin obtenu en mélangeant les deux polarisations des ondes électromagnétiques. (b) Routage spécifique en fonction du pseudo-spin à un croisement où il se conserve.

Dans leur cas l'opérateur de renversement du temps T est tel que $T^2 = 1$, ce qui interdit l'obtention des paires de Kramers avec ces particules.

Il est néanmoins possible de contourner cet écueil. Ajouter une symétrie U qui se conserve dans le système, revient à introduire un degré de liberté supplémentaire au sein du milieu qui se comporterait comme un « pseudo-spin ». Cela permet de définir un pseudo-opérateur de retournement temporel T' tel que $T' = UT = -1$. Une fois ce pseudo-spin obtenu, il reste à reproduire un équivalent du couplage spin-orbite.

En 2013, Alexander Khanikaev et ses collègues ont démontré qu'un milieu possédant les mêmes tenseurs de permittivité ϵ et de perméabilité μ permettait de faire se chevaucher deux cônes de Dirac, l'un étant lié à la polarisation TE et l'autre TM (figure V.4(a)) [170]. Cela reproduit la dégénérescence de la structure de bande, avec deux pseudo-spins qui sont issus d'une combinaison linéaire des deux polarisations. Le couplage spin-orbite est lui au cône de Dirac qui porte des modes cristallins avec une polarisation circulaire. En rendant le milieu bi-anisotrope une bande interdite s'ouvre. Elle est peuplée par des modes de bord dont le sens de propagation est lié directement au pseudo-spin qu'ils ont obtenu. Ces modes se propagent sans réflexions le long de chemins tortueux, qui peuvent même être en partie désordonnés [171, 172]. La protection topologique dans ce cas est effective tant que les défauts ne mélangent pas les pseudo-spins. Par ailleurs, ces modes hélicoïdaux se comportent de manière particulière lorsqu'ils arrivent sur une intersection. En effet la conservation de leur pseudo-spin les poussent à aller dans certaines directions uniquement, comme montré dans l'étude de la figure V.4(b). Cette idée a ensuite été généralisée à

d'autres symétries tels que l'inversion hors du plan du cristal photonique [173]. Cela s'applique aussi aux ondes élastiques dans les cristaux phononiques [174,175]. Cependant, bien que cette méthode ait prouvé son efficacité, elle semble difficile à implémenter dans nos métamatériaux cristallins. La symétrie d'inversion hors plan rend difficile la mesure en champ proche du champ électrique ou acoustique dans le milieu.

En 2015, Wu et Hu ont proposé un autre protocole afin d'obtenir un analogue macroscopique d'un isolant topologique de spin [176]. Ce dernier est relié à la conservation de la symétrie C6 et induit un pseudo-spin dans le plan du cristal. De cette façon, ils ont montré numériquement, dans le cadre d'un cristal photonique, la présence d'une inversion topologique de bande, leur modèle reproduisant l'hamiltonien BHZ. Ce modèle a été étudié expérimentalement avec des ondes acoustiques et élastiques dans des cristaux phononiques [177,178]. Cela a été montré en optique à l'aide d'une méta-surface en diélectrique [179]. Un guide d'onde hélicoïdal reliant deux puits quantiques a aussi été démontré récemment [180]. Dans la suite de ce chapitre, nous suivons leur protocole et démontrons numériquement en acoustique puis expérimentalement en micro-ondes la réalisation d'un tel système, à l'échelle sub-longueur d'onde, avec nos métamatériaux cristallins.

V.1.2 Ingénierie de bandes pour obtenir un pseudo-spin

Dans cette section, nous tentons de retrouver les conditions décrites par Kane et Mele dans leur étude du graphène avec un couplage spin-orbite [166]. Pour cela nous devons tout d'abord induire un pseudo-spin dans le milieu puis créer une inversion de bande. Nous travaillons au sein du métamatériau acoustique formé de canettes de soda.

Réseau triangulaire

Nous partons du réseau triangulaire régulier que l'on commence à bien connaître (figure V.5(a)). Ce dernier a une cellule unité qui prend la forme d'un losange et qui comporte un unique résonateur de fréquence de résonance $f_0 = 370$ Hz. La distance c entre le centre de deux canettes est de $c = 99$ mm soit 0.1 λ_0, le réseau n'étant pas choisi comme compact ici. La relation de dispersion correspondante est donc un polariton qui possède une bande interdite d'hybridation pour les fréquences supérieures à f_0. Sa première zone de Brillouin est l'hexagone habituel, avec les points Γ, K et M.

Réseau hexagonal primitif

La prochaine étape est d'obtenir un cône de Dirac au sein de la relation de dispersion. Celui-ci s'obtient en repliant le polariton associé au réseau triangulaire précédent. Cela

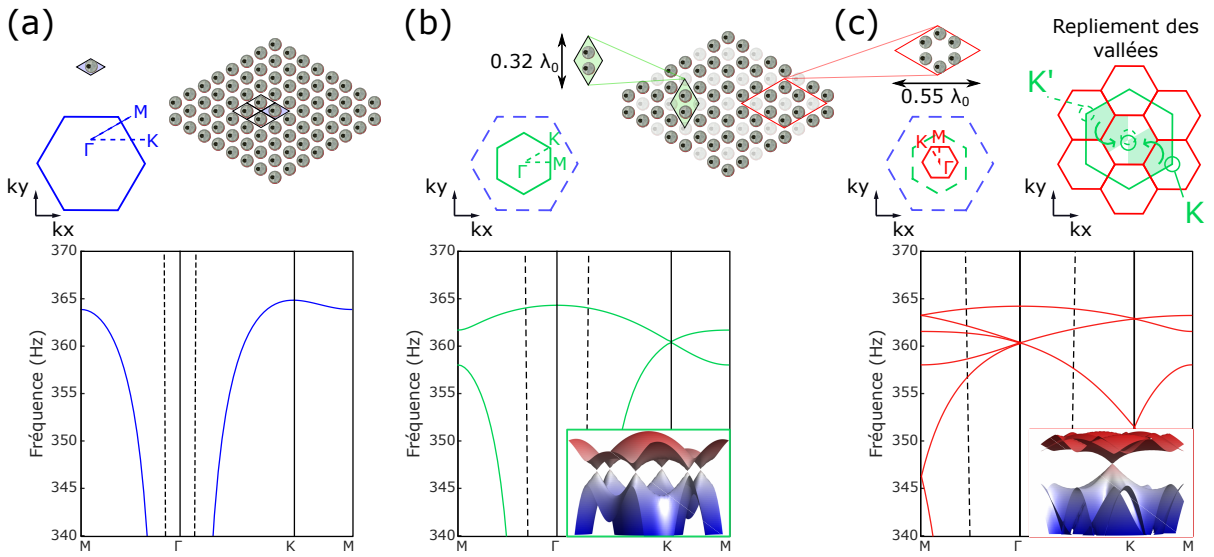


FIGURE V.5 – (a) Réseau triangulaire de canettes et le polariton correspondant. (b) Relation de dispersion physique du réseau hexagonal. Les cônes de Dirac sont en K. (c) Relation de dispersion artificielle de ce même réseau qui entraîne le repliement des cônes de Dirac au centre de la zone de Brillouin.

revient à enlever une canette sur trois dans le métamatériau afin d'obtenir une structure hexagonale comme le montre la figure V.5(b). La cellule unité est toujours un losange mais il est tourné de 90 degrés par rapport au cas précédent. Son aire est plus grande et il comporte deux résonateurs. Ces derniers forment donc un dimère dont les deux modes résonant s'hybrident avec l'onde de l'espace libre afin de donner la structure de bande correspondante. La première zone de Brillouin est dans ce cas un hexagone plus petit tourné lui aussi de 90 degrés par rapport au cas triangulaire (en vert sur la figure V.5(b)).

Réseau hexagonal étendu

La dernière étape est de reproduire la double dégénérescence de spin des bandes électroniques du graphène au niveau du cône de Dirac. Cela revient à faire coïncider un deuxième cône de Dirac sur celui déjà existant dans le réseau hexagonal. Ici, plutôt que de le trouver dans une structure de bande annexe, comme c'est le cas avec l'utilisation des polarisations TE et TM par exemple [170], nous allons utiliser ceux déjà présents dans la relation de dispersion. En effet, cette dernière en possède six : trois au point K et trois au point K'.

Ainsi, en considérant le réseau hexagonal précédent avec une cellule unité non primitive (rouge) qui comporte six résonateurs arrangés en un hexagone, on replie encore une fois

la relation de dispersion, et ce selon la direction ΓK (figure V.5(c)). De cette façon, nous faisons coïncider les cônes issus de K et de K' au centre de la première zone de Brillouin. Nous avons ainsi créé une quadruple dégénérescence conique au point Γ. Dans ce cas, la dimension maximale de la cellule unité est de l'ordre de la demi-longueur d'onde. Cependant, les échelles des modes cristallins que nous allons considérer par la suite sont elles très petites devant la longueur d'onde en espace libre. En cela nous sommes toujours dans le cas d'un métamatériau cristallin.

Pseudo-spin

Nous pouvons par ailleurs faire un lien avec le pseudo-spin de vallée décrit au chapitre précédent. Ces degrés de liberté cristallins pré-existent dans la structure de bande du réseau hexagonal. Au point de dégénérescence, deux modes dipolaires orthogonaux existent que l'on peut voir soit comme ayant une symétrie transverse et longitudinale, soit comme deux symétries circulaires tournant dans des sens opposés. En cela il est possible de les considérer comme un pseudo-spin demi-entier, dont le signe dépend de la vallée. Par ailleurs, chacun de ceux qui sont situés en K (spin haut) se transforment en K'(spin bas) par renversement du temps. En faisant ce repliement nous avons au final fait coïncider au même point ces deux pseudo-spins $1/2$, comme le montre la figure V.5(c). C'est une façon assez intuitive de faire le lien avec le cas exposé par Kane et Mele [166]. Au centre de la zone de Brillouin, quatre modes orthogonaux émergent dont les symétries sont le résultat des combinaisons linéaires des dipôles des différentes vallées. Quant au couplage spin-orbite il émerge directement de la polarisation circulaire que l'on peut attribuer aux modes cristallins au cône.

Cependant, voir le réseau hexagonal comme un réseau triangulaire d'hexagones mène à un repliement qui est purement artificiel. La cellule étendue ne rend pas compte de la réalité physique des ondes au sein du milieu. C'est un artefact mathématique similaire au cas rencontré lors de l'étude de la chaîne de résonateurs au chapitre trois. En s'inspirant de celle-ci, nous montrons comment la structuration de cette cellule unité permet de rendre ce comportement physique dans la partie suivante.

V.2 Étude du coeur du métamatériau

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'implémentation d'une transition de phase topologique au sein de nos métamatériaux cristallins. Cette dernière est obtenue en suivant le protocole que Wu et Hu ont proposé dans le cadre des cristaux photoniques [176].

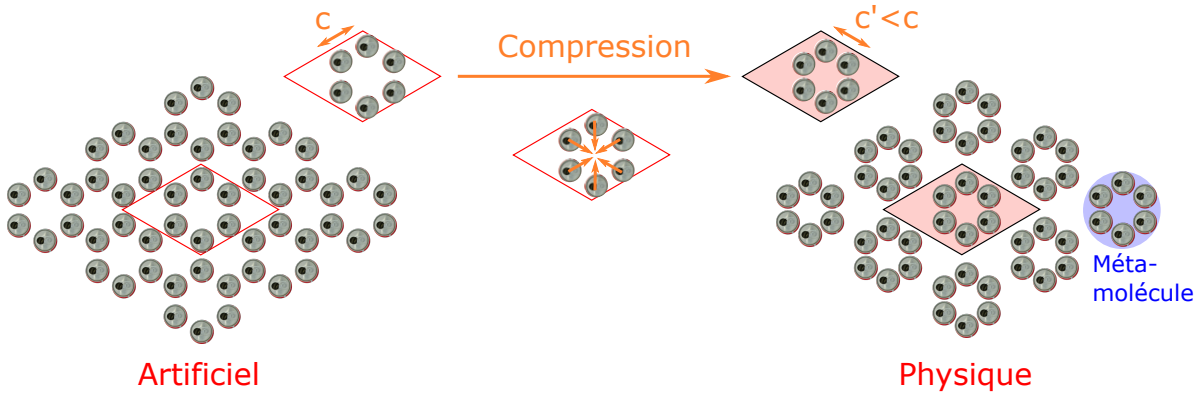


FIGURE V.6 – La compression de l'hexagone au sein de la cellule unité rouge procure une réalité physique à cette dernière. Le réseau obtenu est un réseau triangulaire de la méta-molécule bleue.

Comme nous l'avons expliqué dans la partie précédente, le cône de Dirac correspond à un point de transition potentiel entre deux phases topologiques. Pour l'instant, le double cône que nous avons obtenu est issu d'un repliement de bandes qui est purement mathématique. Afin de lui donner un sens physique il faut que la cellule unité étendue correspondante devienne primitive. Pour cela, nous allons induire deux types de modifications structurelles au sein de cette dernière, en comprimant ou en dilatant de manière isotrope les hexagones qu'elle contient. Cela va nous amener à deux métamatériaux dont la structure sub-longueur d'onde génère des caractéristiques topologiques triviales dans un cas et non triviales dans l'autre.

V.2.1 Métamatériau topologiquement trivial

Compression de l'hexagone

La première modification structurelle revient à rapprocher les résonateurs de la cellule unité rouge vers le centre de l'hexagone, et ce de manière isotrope. C'est la raison pour laquelle nous n'avions pas considéré de maille compacte. Ceci est caractérisé par la distance $c' < c$ entre les canettes formant ce dernier, comme le montre la figure V.6. Cela génère un réseau triangulaire composé d'une méta-molécule que l'on définit intuitivement comme étant l'ensemble des canettes les plus proches les unes des autres. Dans ce cas, cette dernière est un petit hexagone de résonateurs, représenté en bleu sur la figure V.6. La cellule unité rouge acquiert ainsi une réalité physique.

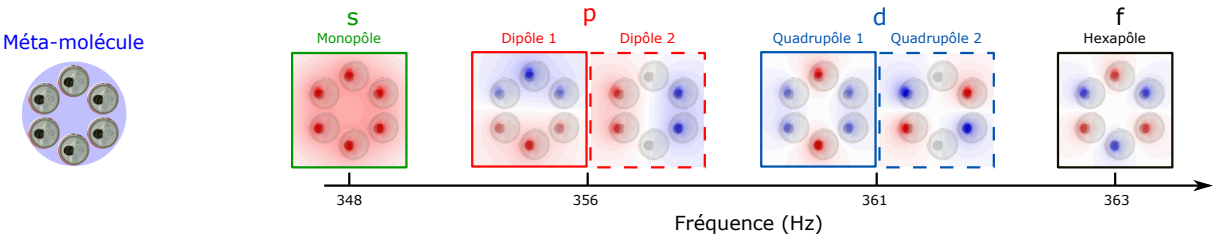


FIGURE V.7 – Modes propres de la méta-molécule bleue.

Modes propres de la méta-molécule

Les modes propres de cette méta-molécule sont obtenus à l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics et représentés sur la figure V.7. Ces derniers sont au nombre de six. A basse fréquence, un premier mode monopolaire existe (vert). Ensuite, viennent deux modes dipolaires dégénérés, l'un étant transverse et l'autre longitudinal (rouge). A plus haute fréquence, on trouve deux symétries quadrupolaires dégénérées (bleu). Enfin un hexapôle unique existe pour les plus hautes fréquences (noir). A part le monopôle, chacun de ces modes propres présente des variations à une échelle sub-longueur d'onde. Quant à leur ordre fréquentiel, il est bien en accord avec le nombre de ces variations au sein de la méta-molécule. Formulé différemment, plus on monte en fréquence, plus le champ présente de noeuds. Enfin, il est intéressant de comparer ces symétries aux différentes orbitales atomiques. Le monopôle a une symétrie s, les dipôles sont les modes p_x et p_y, les quadrupôles sont les modes d_{xy} et $d_{x^2-y^2}$ et l'hexapôle correspond à la symétrie f (figure V.7). Par ailleurs, de façon similaire que pour l'étude du réseau Kagomé du chapitre 3, plus la modification structurelle est importante, plus l'écart entre les modes résonants dipolaires et quadrupolaires augmente.

Relation de dispersion

On calcule ensuite la relation de dispersion correspondant au réseau total, dans le cas d'une déformation telle que $c' = 0.95\ c$ ($0.05\ \lambda_0$). Ceci est représenté sur la figure V.8(a). Un petit hexagone en trait plein noir indique l'emplacement de la méta-molécule bleue dans le réseau. La structure est composée de six bandes. La première a une pente positive qui correspond à l'hybridation du monopôle, comme pour le cas du polariton du réseau triangulaire non structuré (mode s en vert). Les deux suivantes présentent quant à elles des pentes négatives, cohérentes avec la nature dipolaire des deux modes de la méta-molécule (mode p en rouge). La symétrie hexagonale de cette dernière est assez isotrope pour permettre à chacun des dipôles d'interagir avec l'onde propagative quelle que soit sa

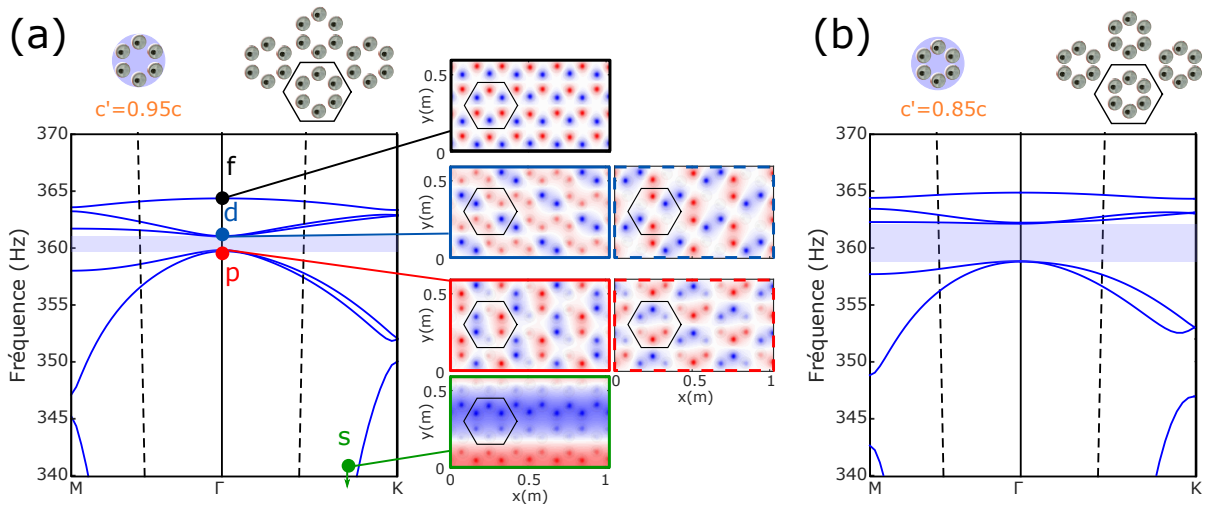


FIGURE V.8 – (a) Relation de dispersion du réseau infini pour une faible compression de l'hexagone ainsi que les symétries correspondant aux bandes. (b) Relation de dispersion pour une déformation plus forte.

direction. En Γ, les deux bandes sont bien dégénérées, comme le laissait deviner l'étude des modes propres du paragraphe précédent.

Les deux bandes suivantes sont liées aux modes quadrupolaires (modes d en bleu). Elles sont elles-aussi dégénérées au point Γ. Leur pente est positive car ces symétries possèdent une variation du champ supplémentaire au sein de la métamolécule par rapport aux modes dipolaires. Cela s'explique par le second repliement du polariton original. Pour les mêmes raisons la dernière bande est de symétrie hexapolaire et sa pente est négative (mode f en noir).

La relation de dispersion peut donc être vue comme deux groupes de trois bandes dont le comportement en fonction du nombre d'onde est inversé l'un par rapport à l'autre. Une bande interdite les sépare, indiquée par une zone bleue sur la figure V.8(a). Si l'on compare cette relation de dispersion au cas du repliement mathématique du réseau hexagonal, elle correspond bien à la brisure du double cône. De part et d'autre de cette bande interdite, les bandes sont toujours dégénérées au voisinage du point Γ. Ceci témoigne de la présence de pseudo-spins qui ont des symétries différentes sur l'hexagone : dipolaire pour la bande du bas et quadrupolaire pour la bande du haut. Ils sont toujours liés à la symétrie $C6$. Cette dégénérescence n'est valable qu'au centre de la zone de Brillouin, ce qui marque une première différence fondamentale avec le cas des vrais spins des électrons.

Le fait de comprimer spatialement l'hexagone a donc bien modifié le couplage spin-orbite dans cette zone. La force de ce dernier, donc l'importance de la déformation, est

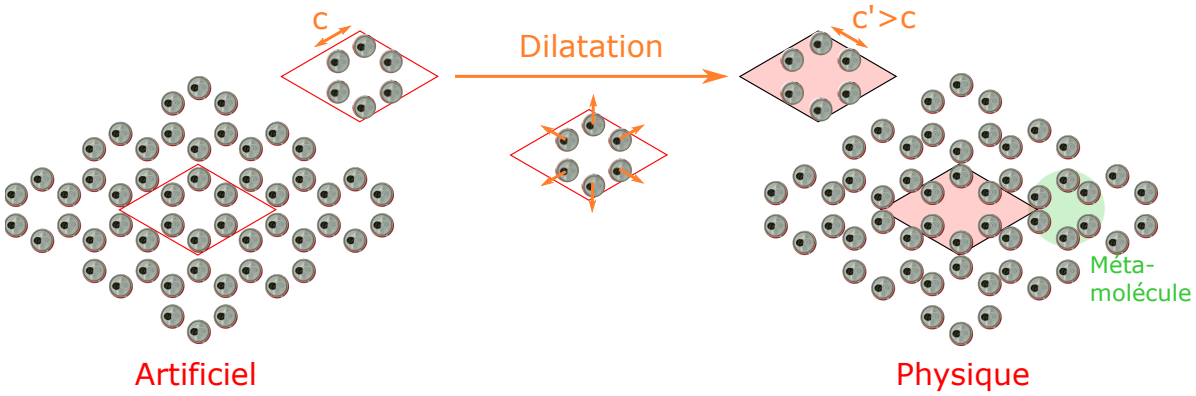


FIGURE V.9 – La dilatation de l'hexagone au sein de la cellule unité rouge procure une réalité physique à cette dernière. Le réseau obtenu est un réseau triangulaire de la méta-molécule verte, qui n'est plus un hexagone.

directement liée à la taille de la bande interdite. En accord avec la vision en termes de méta-molécule, plus les hexagones sont petits plus celle-ci augmente, comme le montre la figure V.8(b). Cependant, la symétrie des modes est conservée au sein de chacune des bandes. La transformation n'a donc pas induit d'inversion et la bande interdite est triviale. Wu et Hu ont ainsi montré que l' invariant topologique était en effet nul dans ce cas.

V.2.2 Métamatériau topologiquement non-trivial

Dilatation de l'hexagone

Nous nous intéressons à présent au cas où l'on agrandit l'hexagone au sein de la cellule unité (figure V.9). Ceci donne un réseau triangulaire dont la méta-molécule, que l'on définit comme étant l'ensemble des résonateurs les plus proches, n'est plus un hexagone. En effet, c'est intuitivement un triangle équilatéral dont les sommets sont occupés par des dimères de résonateurs parallèles aux côtés opposés du triangle. Elle est indiquée en vert sur la figure V.6. En cela, elle ressemble beaucoup au trimère que nous avions défini dans l'étude du Kagomé au chapitre 3. Comme pour le cas précédent, cette modification structurelle donne une réalité physique à la cellule unité rouge.

Modes propres de la méta-molécule

Les modes propres de cette méta-molécule sont présentés sur la figure V.7. de manière similaire à la méta-molécule obtenue par compression, on retrouve un mode monopolaire (vert), deux modes dipolaires dégénérés (rouge), puis deux modes quadrupolaires eux

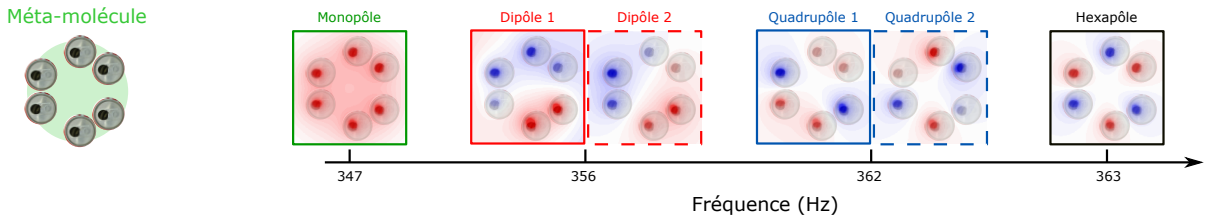


FIGURE V.10 – Modes propres de la méta-molécule verte.

aussi à la même fréquence (bleu) et enfin l'hexapôle (noir).

Comme précédemment, l'ordre fréquentiel des modes résonants de la méta-molécule verte est bien cohérent avec les variations spatiales du champ sur cette dernière. Par ailleurs, bien que les symétries obtenues soient semblables à celles de la méta-molécule hexagonale bleue, nous ne les appelons pas ici s, p, d ou f. Nous gardons cette appellation au cas spécifique d'un vrai hexagone afin de rendre l'explication plus claire.

Par ailleurs, ces modes résonants se comparent à ceux de la méta-molécule triangulaire du Kagomé. C'est directement vrai pour les trois modes de basse fréquence. Pour les trois derniers, ils correspondent au cas où le trimère serait constitué de résonateurs ayant une symétrie dipolaire. De cette façon, plus la modification structurelle est importante, plus l'écart fréquentiel entre ces deux types de trimères augmente.

Relation de dispersion

L'hybridation de ces modes résonants avec l'onde incidente génère ensuite les six bandes composant la relation de dispersion du milieu infini. Elle est représentée sur la figure V.11(a), pour une déformation telle que $c' = 1.04\ c$ ($0.04\ \lambda_0$). L'emplacement de la méta-molécule verte est indiqué là encore par un hexagone en trait plein noir. Cette fois-ci nous définissons aussi un repère pour l'hexagone élargit, en pointillés noir. Nous reviendrons sur ce dernier dans la partie suivante, toute la description qui suit étant réalisée à partir des modes résonants de la méta-molécule verte triangulaire.

Les trois premières bandes de la structure sont légèrement semblables à celle d'un réseau de type Kagomé, bien que la bande supérieure ne soit pas plate. Celle à basse fréquence est liée au monôpole de la méta-molécule (trait plein) et se comporte encore une fois comme le polariton habituel. Les deux suivantes correspondent aux modes dipolaires de cette dernière qui se croisent en K et en Γ. Elles ont chacune une bande négative, plus prononcée pour celle de plus basse fréquence. Le groupe des trois bandes à plus haute fréquence présente un comportement inversé par rapport à ces trois bandes de basse

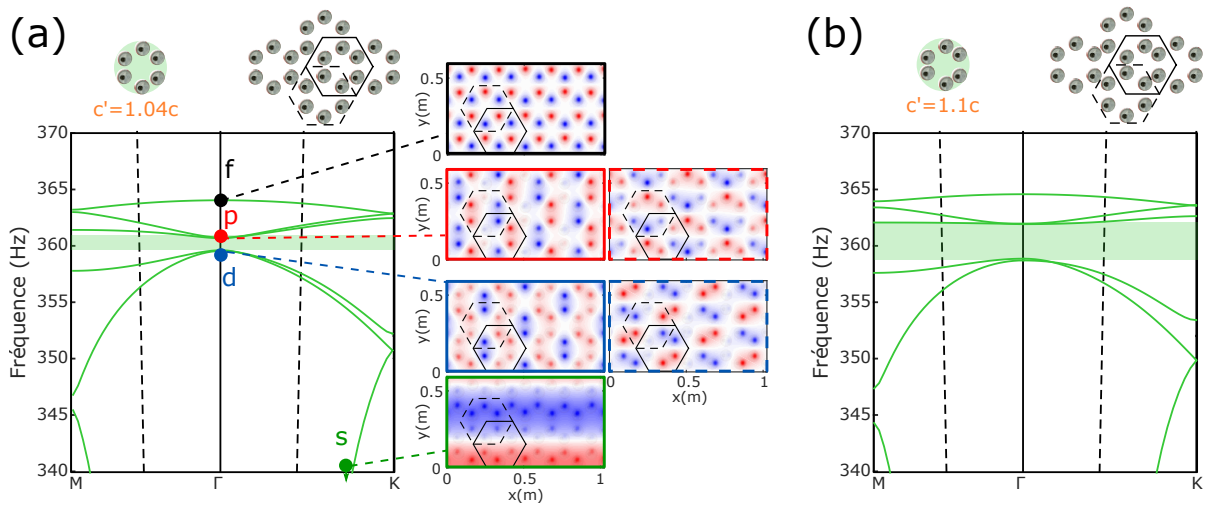


FIGURE V.11 – (a) Relation de dispersion du réseau infini pour une faible compression de l'hexagone. En trait pointillé,les symétries définies sur l'hexagone élargi pour chacune des bandes. (b) Relation de dispersion pour une déformation plus forte.

fréquence. Comme pour le cas du réseau trivial précédent, ces deux groupes sont séparés par une bande interdite, représentée par une zone verte, qui est apparue à la place du double cône. De part et d'autre de cette dernière, deux bandes sont toujours dégénérées ce qui témoigne de la présence du pseudo-spin.

Notons à nouveau que plus la modification structurelle est importante, plus l'écart fréquentiel entre les monopôles et dipôles des paires de résonateurs du triangle augmente. De cette façon, les modes dipolaires et quadrupolaires de la méta-molécule verte s'éloignent en fréquence. Cela implique que la taille de la bande interdite augmente mais aussi que les bandes liées aux pseudo-spins sont dégénérées sur des zones de plus en plus faibles (figure V.11(b)). Par ailleurs, cela s'accompagne aussi d'une diminution de la zone de recouvrement des bandes de part et d'autre de cette dernière. Cela s'explique par le fait que la méta-molécule ressemble de plus en plus à un triangle et le rapprochement avec le réseau de type Kagomé se fait plus flagrant. Dans ce cas limite, ce recouvrement n'est effectif qu'en Γ. Il semble donc que c'est dans le cadre de déformations assez faibles que l'on garde cette correspondance relative avec les spins de l'électron au voisinage de Γ.

Ainsi, le fait d'avoir augmenté la taille de l'hexagone au sein de la cellule unité à donc eu aussi pour effet de modifier le couplage spin-orbite. Cependant, cette fois-ci cela a conduit à un tout autre type de réseau qui présente plusieurs différences avec le précédent. En effet, au point K, les deuxième et troisième bandes ne se rejoignent plus. C'est aussi vrai pour les quatrième et cinquième. L'allure de ces deux groupes de bandes, chacun lié à

un pseudo-spin, laisse à penser que des différences fondamentales existent entre les deux types de réseaux.

Inversion de bandes en Γ

Afin de comparer ce milieu avec le précédent, nous regardons à présent l'allure du champ de pression sur l'hexagone élargi, indiqué cette fois par le contour pointillé. De cette façon, nous retrouvons effectivement les différentes symétries s, p, d et f en combinant les modes propres de la méta-molécule verte étudiée jusqu'à présent. Néanmoins nous observons une inversion dans l'ordre fréquentiel entre les modes p et les modes d par rapport au cas du réseau de petits hexagones. Cela est d'autant plus important que ce sont ces symétries qui sont liées aux pseudo-spins dans le système.

Ainsi, en agrandissant l'hexagone de la cellule unité, nous avons changé profondément la nature du réseau de canettes. Cela a permis d'inverser l'ordre d'apparition des symétries p et d, et ce au voisinage de Γ uniquement. En faisant le parallèle avec l'Hamiltonien BHZ, Wu et Hu ont trouvé dans ce cas un invariant topologique égal à 1 [176]. La bande interdite verte que l'on obtient présente donc une topologie non-triviale.

Par ailleurs, nous notons ici que nous n'aurions pas pu retrouver la structure de bande de ce réseau en prenant l'hexagone élargit comme méta-molécule. En effet, les modes dipolaires et quadrupolaires existent dans l'ordre fréquentiel normal sur ce dernier, tout comme sur le petit hexagone du milieu trivial précédent. Le changement de symétrie de la méta-molécule du milieu permet d'expliquer cette inversion de bandes localisée au centre de la première zone de Brillouin, et ce en conservant l'approche que nous avons développée tout au long de ce manuscrit. Dans la section suivante nous mesurons expérimentalement ce phénomène dans le domaine des micro-ondes.

V.2.3 Vérification expérimentale en micro-ondes

Réseaux et relation de dispersion numérique

Nous partons d'un réseau hexagonal de fils de hauteur $h_0 = 14$ mm dont le pas c est de 5 mm. Ceci correspond à une cellule unité étendue, *i.e* englobant un hexagone entier, dont la dimension maximale vaut 0.46 λ_0. Nous allons ensuite déformer de deux façons différentes l'hexagone de la cellule unité. L'échantillon trivial correspond à une modification $c' = 0.8\ c$, et pour le topologique $c' = 1.2\ c$. Ceci correspond à une modification de $0.017\lambda_0$. Nous sommes donc bien dans le cas de métamatériaux cristallins structurés à une échelle sub-longueur d'onde. Ces derniers sont présentés sur les figures V.12(a) et

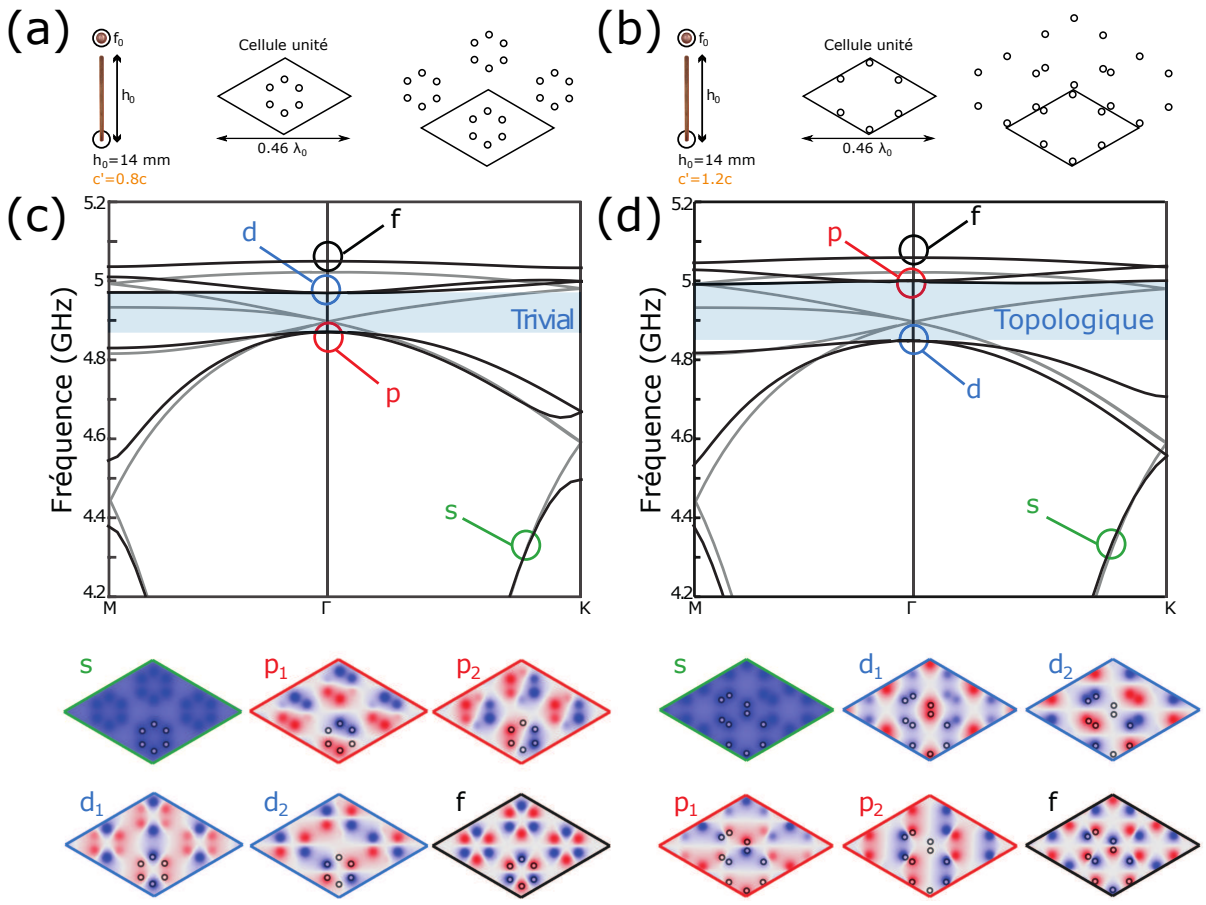


FIGURE V.12 – (a) Réseau trivial de fils. (b) Réseau topologique de fils. (c)(resp. (d)) Relation de dispersion et modes cristallins en Γ correspondant à (a) (resp. (b)).

(b).

Nous calculons les relations de dispersion numériques correspondantes avec le logiciel COMSOL Multiphysics (figure V.12(c) et (d)). Dans chacun des cas nous observons bien l'ouverture d'une bande interdite en lieu et place de la quadruple dégénérescence du cas hexagonal non modifié. En regardant les cartes de champ électriques des modes cristallins correspondant nous observons bien une inversion de l'ordre des bandes p et d entre les deux échantillons, au voisinage du point Γ.

Échantillons et expérience

La prochaine étape est la fabrication des échantillons correspondants. Ceci est encore une fois effectué en collaboration avec l'équipe de Thomas Berthelot au CEA, en utilisant la même méthode que précédemment. Nous fabriquons deux échantillons qui ont chacun

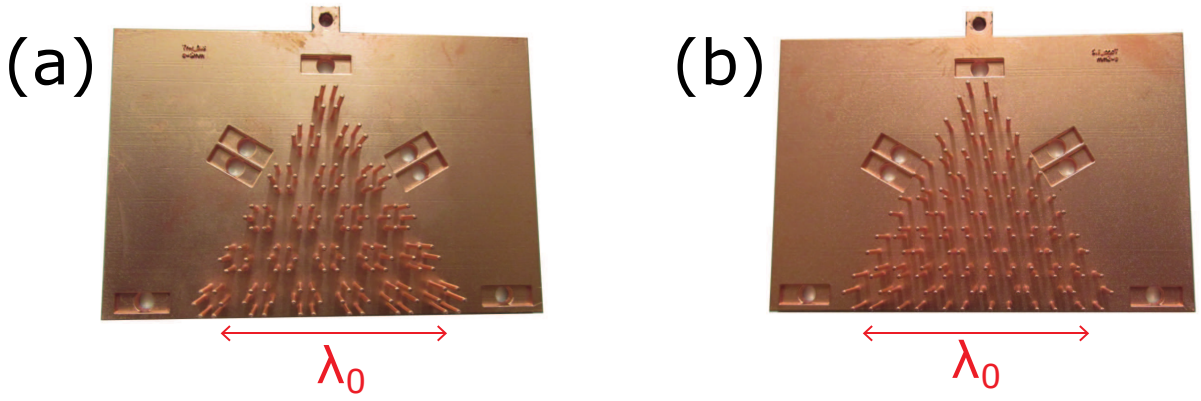


FIGURE V.13 – (a) (resp. (b)) Échantillon trivial (resp. topologique).

la forme d'un triangle dont les côtés sont de l'ordre de la longueur d'onde (figure V.13). Nous effectuons ensuite le même type de mesure en champ proche à l'aide d'un analyseur de réseau. Nous mesurons ainsi la transmission entre une source ponctuelle magnétique disposée à la base du triangle, et ce très proche des fils, et une sonde de champ électrique qui est situé à 1 mm du sommet des fils. En scannant ce champ sur une surface englobant l'ensemble de l'échantillon nous obtenons une carte de champ électrique pour chacune des fréquences avec une très bonne résolution spatiale et fréquentielle.

Par ailleurs, depuis le début de ce chapitre nous nous intéressons à des propriétés liées au point Γ. Or celui-ci est par définition situé au sein du cône de l'espace libre. Ainsi, les modes correspondants devraient « fuire » et ne pas rester confiner à la surface des fils. Cependant, étant donné que ces derniers proviennent de deux repliement consécutifs du polariton, ils présentent des échelles de variations très sub-longueur d'onde. Dans l'ensemble, ils vont donc avoir des difficultés à se coupler à l'espace libre environnant. Ceci autorise donc l'expérience en champ proche.

Echantillon trivial

Nous nous concentrons tout d'abord sur le cas de l'échantillon trivial (figure V.13(a)). En moyennant spatialement l'ensemble des spectres expérimentaux sur une zone au centre du triangle nous obtenons le spectre de la figure V.14. Ceci permet de s'affranchir, dans une certaine mesure, des effets de bords étant donné que nous regardons ici le comportement du coeur du métamatériau. Ce spectre moyenné présente plusieurs pics qui témoignent du bon couplage entre la source et les modes cristallins du milieu. Ils se distinguent en deux groupes séparés par une bande interdite qui s'étend de 4.9 GHz à 4.98 GHz (zone bleue).

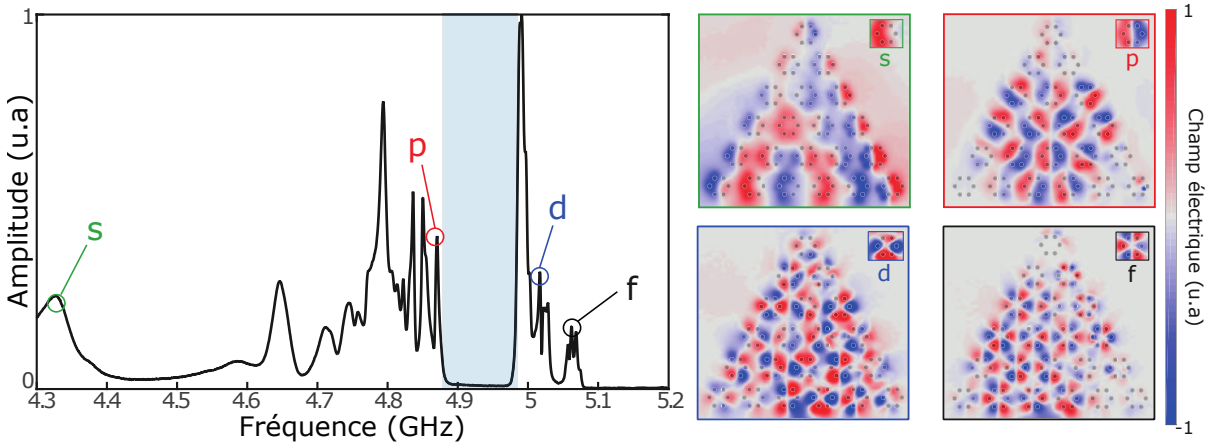


FIGURE V.14 – Spectre expérimental de l'échantillon trivial ainsi que les modes cristallins mesurés correspondant.

Ceci est en bon accord avec la structure de bande calculée numériquement du paragraphe précédent.

Nous regardons à présent les cartes de champ électrique mesurées correspondant à différentes fréquences (figure V.14). Sur chacune de ces cartes est représenté en insert la symétrie du mode sur un petit hexagone. Ainsi à basse fréquence nous retrouvons bien un mode monopolaire de type s (vert). Pour une fréquence juste avant l'ouverture de la bande interdite, la symétrie du mode est dipolaire de type p (rouge). Juste au dessus de la fermeture de cette dernière le mode est de type d (bleu). Enfin, à plus haute fréquence on retrouve l'hexapôle du mode f (noir).

Ces résultats expérimentaux sont en très bon accord avec l'étude numérique précédente. L'ordre fréquentiel des symétries au sein du petit hexagone est le même que si celui-ci était isolé. Il n'y a pas d'inversion de bande de part et d'autre de la bande interdite bleue, celle-ci est topologiquement triviale.

Echantillon topologique

Nous nous intéressons à présent au deuxième échantillon, obtenu en dilatant les hexagones de la cellule unité (figure V.13(b)). Le spectre moyenné présente lui aussi deux groupes de pics séparés par une bande interdite, colorée en bleue (figure V.15). Cependant les symétries des modes au sein de l'hexagone étendu diffèrent du cas précédent. L'ordre fréquentiel des symétries p (rouge) et d (bleu) est inversé. En effet, on trouve à présent les modes quadrupolaires à l'ouverture de la bande interdite alors que les dipolaires sont à la fermeture de cette dernière. Cette étude expérimentale montre donc clairement l'inversion

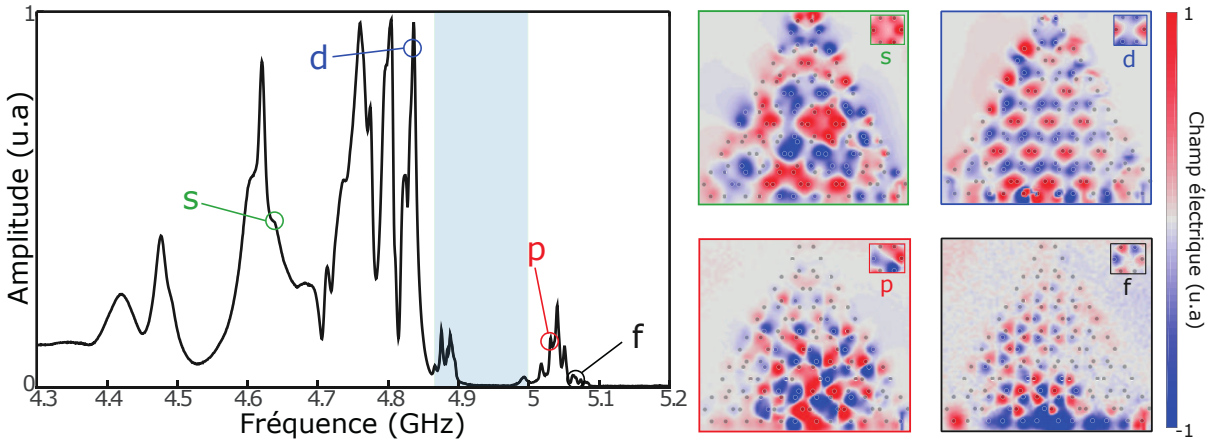


FIGURE V.15 – Spectre expérimental de l'échantillon topologique ainsi que les modes cristallins mesurés correspondant.

des bandes liées au pseudo-spin pour cet échantillon. Nous avons donc montré ici qu'il était possible d'induire une transition de phase topologique au sein d'un métamatériau cristallin. Toutes les modifications structurelles réalisées sont très petites par rapport à la longueur d'onde de travail.

Nous insistons ici sur le fait que dans de nombreux travaux, l'étude expérimentale du coeur du réseau est souvent négligée au profit d'uniques prédictions numériques ou analytiques. Or, avec ces métamatériaux cristallins nous pouvons avoir directement et simplement accès aux modes propres du système expérimentalement. Ceci nous permet d'étudier en pratique la nature des bandes et démontre le potentiel de l'approche cristalline des métamatériaux localement résonants. Dans la prochaine partie nous poursuivons cette étude en nous intéressant aux bords de ces échantillons.

V.3 Interface

Dans cette section nous étudions les différents phénomènes d'interface entre les deux métamatériaux de la partie précédente. De la même façon, nous effectuons tout d'abord une étude numérique en acoustique puis nous en vérifions certains points expérimentalement dans le domaine des micro-ondes.

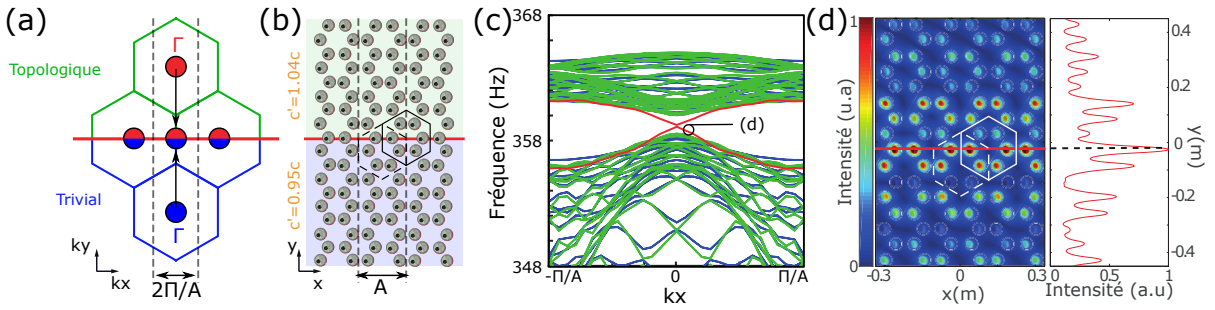


FIGURE V.16 – (a) Interface entre les échantillons trivial et topologique dans l'espace réciproque. (b) Similaire à (a) dans l'espace réel. L'interface génère deux méta-molécules représentées par des hexagones en trait plein et pointillés. (c) Relation de dispersion correspondante. (d) Carte et profil transverse de l'intensité du champ acoustique du mode guidé.

V.3.1 Modes d'interface topologiques

Protocole

Nous simulons avec le logiciel COMSOL Multiphysics une interface infinie selon l'axe Ox entre les réseaux de canettes topologique et trivial. Dans l'espace réciproque cela revient à faire coïncider les bandes aux symétries inversées au point Γ (rouge et bleue) au niveau de l'interface. Ceci est représenté sur la figure V.16(a). Les modifications effectuées sur ces deux milieux sont telles que leurs bandes interdites se chevauchent quasiment parfaitement. Cela correspond aux faibles déformations de $c' = 0.95\ c$ et $c' = 1.04\ c$ présentées précédemment (figures V.6(a) et V.9(a)). L'interface est telle que les cellules unités de chacun des milieux coïncide parfaitement, chacun des hexagones occupant le centre de ces dernières. Ceci est représenté sur la figure V.16(b). Sa formation donne naissance à deux méta-molécules qui se chevauchent et dont la forme est particulière. Elles sont représentées par deux hexagones, l'un en trait plein et l'autre en trait pointillé.

Relation de dispersion

La relation de dispersion correspondant à cette interface est représentée sur la figure V.16(c). Au sein de la bande interdite commune aux deux milieux, nous remarquons la présence de deux bandes de propagation avec des pentes différentes qui semblent se croiser au centre de la zone de Brillouin (bandes rouges). Les autres bandes, bleues et vertes, correspondent à des modes se propageant au coeur des métamatériaux. La carte d'intensité du champ acoustique correspondant à une des bandes rouges montre que ce mode est confiné sur l'interface (figure V.16(d)). Ceci est en accord avec la prédiction

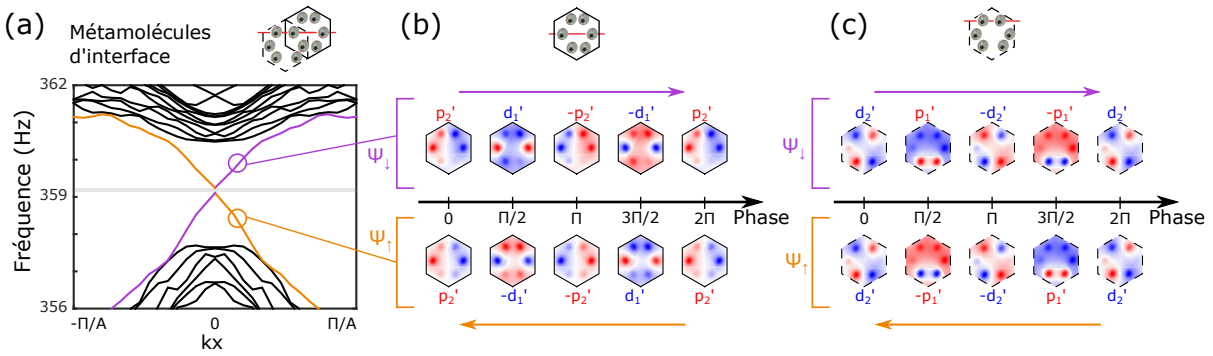


FIGURE V.17 – (a) Mise en évidence de l'hélicité des modes de bords. Elle est définie sur chacune des méta-molécules (b) et (c) et permet d'accoler un pseudo-spin au sens de propagation du mode (jaune ou violet).

obtenue par Wu et Hu lors de leur calcul des invariants topologiques des deux milieux [176].

Ici, les modifications structurelles étant faibles, la bande interdite est étroite. Par conséquent le degré de confinement de l'onde guidée n'est pas très élevé et celle-ci déborde dans chacun des milieux. Elle possède une composante transverse évanescente.

Modes hybrides avec un pseudo-spin

Chacune de ces bandes est censée être liée à un pseudo-spin. Comme nous avons vu avec le pseudo-spin de vallée, ce dernier peut être considéré comme étant une alternance entre deux modes orthogonaux au cours du temps. Le sens de l'alternance différenciant les deux degrés de liberté (circulaire gauche et droite par exemple).

La prochaine étape est donc d'identifier ces derniers. Pour cela nous nous intéressons à la partie réelle du champ acoustique correspondant à chacune des branches. En particulier, nous nous concentrons sur la symétrie au niveau des deux méta-molécules d'interface que nous avons définies plus haut (hexagones noirs en trait plein et pointillé). Ceci est décrit sur la figure V.17. Ces dernières n'étant pas rigoureusement hexagonales, nous désignons leurs modes dipolaires et quadrupolaires en utilisant les appellations : p' et d' respectivement. Nous commençons par le cas de la bande à pente négative pour les k_x positifs. Ceci signifie que l'onde correspondante se propage vers les x négatifs.

Comme au chapitre précédent, nous faisons défiler la phase afin de reproduire la propagation de l'onde le long de l'interface. Nous remarquons ainsi que les symétries portées par les deux méta-molécules varient au cours du temps. En effet, la première méta-molécule (trait plein) porte tout d'abord un mode p' transverse à l'interface (p'_2), puis un mode d' parallèle à celle-ci (d'_1). Ensuite le mode retrouve une symétrie transverse ($-p'_1$) puis

longitudinale ($-d'_1$) mais de signe opposé. Dans le même temps, l'autre méta-molécule (traits pointillés) présente une alternance semblable mais décalée en termes de symétrie par rapport à la première : lorsqu'un mode est transverse dipolaire (p'_1) sur l'une, il est transverse quadrupolaire (d'_2) sur l'autre. Le mode global oscille donc entre deux symétries, longitudinale et transverse, qui sont en quadrature de phase. Ceci se rapproche donc d'un pseudo-spin. Le fait que les méta-molécules d'interface soient hybrides entre les deux milieux environnant fait que les modes qu'elles portent, eux aussi hybrides, apparaissent à des fréquences situées dans la bande interdite.

Regardons à présent la bande supérieure de pente positive. Elle correspond à des modes qui se propagent vers les x positifs. Les modes présentent une alternance hybride similaire sur les méta-molécules d'interface. Cependant, celle-ci est dans le sens opposé par rapport à la bande inférieure comme le montre les figures V.17(b) et (c). En d'autres, termes elle correspond au pseudo-spin de signe opposé, la rotation étant inversée.

En prenant en compte la symétrie par renversement du temps, il est donc possible d'attribuer une couleur à ces bandes pour toute la zone de Brillouin en fonction de leur pseudo-spin, violet ou jaune, comme représenté sur la figure V.17(a). De cette façon, nous avons bien deux modes se propageant le long de l'interface qui sont hélicoïdaux.

Notons ici que leur nature est différente des modes guidés rencontrés dans le chapitre précédent. En effet, ces derniers étaient soit longitudinal (rouge) soit transverse (bleu) mais n'alternaient pas entre les deux symétries au cours de leur propagation. Bien qu'il était possible de les décrire avec une combinaison de deux polarisations circulaires, ces dernières étaient situées sur la même méta-molécule. Nous ne pouvions pas parler alors de guides d'onde hélicoïdaux. Ici, en revanche, les rotations du champ qui accompagnent la propagation de l'onde sont disposées sur deux méta-molécules différentes. L'onde qui se propage transporte donc vraiment un pseudo-spin dans ce cas.

Carrefour

Dans le domaine des analogues classiques des isolants topologiques, une démonstration habituelle de cette propriété est de faire une intersection entre plusieurs milieux aux propriétés topologiques différentes. Ici, nous simulons la propagation d'une onde le long d'une interface semblable à celle du paragraphe précédent qui va ensuite se scinder en quatre chemins respectant la symétrie des différents cristaux (figure V.18(a)). Pour limiter les réflexions aux extrémités des chemins nous avons ajouté dans la simulation des pertes augmentant progressivement avec la distance le long des interfaces.

A l'intersection, le pseudo-spin du mode se conserve, ainsi l'onde ne peut se propager

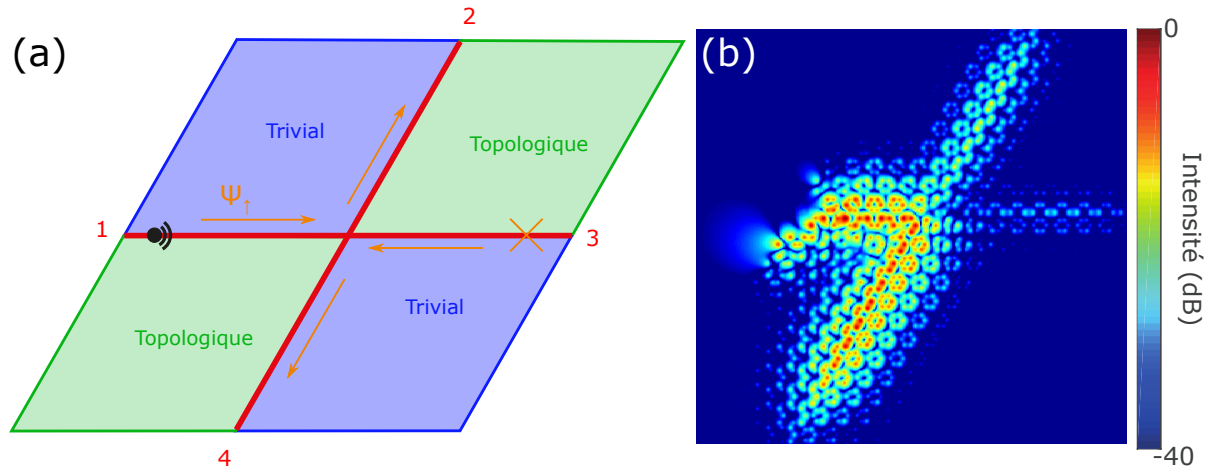


FIGURE V.18 – (a) Principe de la propagation du pseudo-spin jaune au sein d'un carrefour formé de 4 chemins. (b) Carte de l'intensité acoustique du champ correspondant à la propagation du pseudo-spin jaune.

que selon les sorties 2 et 4. C'est bien le résultat que l'on observe sur la figure V.18(b), même si une faible partie du champ se propage vers la sortie 3. Elle est due aux réflexions au bout du guide, ce qui a pour effet de changer le pseudo-spin porté par le champ. Il semble donc que nous ayons réussi à obtenir des modes hélicoïdaux aux bords de nos métamatériaux cristallins. Cependant, ces derniers possèdent des différences fondamentales par rapport aux vrais isolants topologiques. Nous développons ce point dans la prochaine section.

V.3.2 Brisure de la symétrie C6

Absence de paires de Kramers

Comme nous l'avons expliqué dans la première partie de ce chapitre, le sens de propagation des modes de bord est associé à leur spin. Or pour les électrons, l'opérateur par renversement du temps T est tel que $T^2 = -1$. Le théorème de Kramers qui en découle signifie que les deux bandes liées aux modes de bords doivent impérativement se croiser au centre de la zone de Brillouin.

Dans notre étude, bien que ces deux bandes soient très proches, en $k = 0$, il existe une petite bande interdite qui les sépare, colorée en gris sur la figure V.17(a). Ceci s'explique par le fait que nous avons défini un pseudo-opérateur de renversement du temps T' en lui accolant la symétrie $C6$. Ainsi, la notion exacte de paire de Kramers s'applique dans notre cas uniquement si la symétrie $C6$ est conservée. Or le fait même de créer une interface,

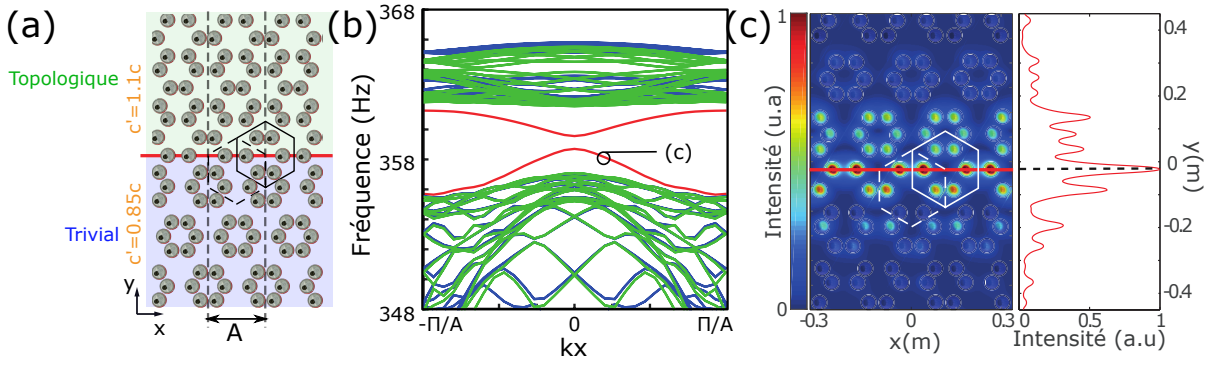


FIGURE V.19 – (a) Interface entre deux milieux, topologique et trivial, pour des déformations plus importantes. (b) Relation de dispersion correspondante. (c) Carte d'intensité et profil transverse de l'intensité du champ acoustique guidé correspondant.

donc de couper le milieu, détruit cette symétrie. En effet, les méta-molécules d'interfaces ne sont plus rigoureusement hexagonales. Les deux bandes correspondant aux modes s'y propageant ne sont donc pas dégénérées en $k = 0$. Leur description en termes de paire de Kramers n'est donc pas rigoureusement exacte dans notre cas et il est interdit d'affirmer que ces modes sont topologiquement protégés comme c'est le cas des électrons dans le modèle de Kane et Mele [166]. Nous les considérons tout de même comme topologiques, leur existence étant prédite par le calcul des invariants des bandes du milieu infini. Elles semblent par ailleurs avoir des caractéristiques hélicoïdales.

Force de la déformation

Dans le cas que nous avons étudié pour l'instant nous considérons des faibles modifications structurelles. La brisure de symétrie sur les méta-molécules d'interface est donc limitée. Par ailleurs, la bande interdite correspondante étant relativement étroite, le champ se propageant à l'interface déborde dans chacun des milieux qui eux présentent toujours la symétrie $C6$. La partie transverse de l'onde qui se propage, bien qu'évanescente, permet en partie de compenser la brisure de symétrie de l'interface. Ceci permet d'expliquer la très faible levée de dégénérescence entre les deux bandes au point $k = 0$.

En revanche, si l'on augmente l'importance de ces déformations structurelles, nous avons vu que nous augmentions la taille de la bande interdite. Cela signifie que les modes sont plus confinés sur les molécules d'interface. Ils brisent d'autant plus la symétrie $C6$ et la levée de dégénérescence entre les bandes augmente. Ceci est décrit sur la figure V.19, dans le cas d'une interface entre des milieux déformés de $c' = 0.85\ c$ et $c' = 1.1\ c$, correspondant aux métamatériaux des figures V.6(b) et V.9(b).

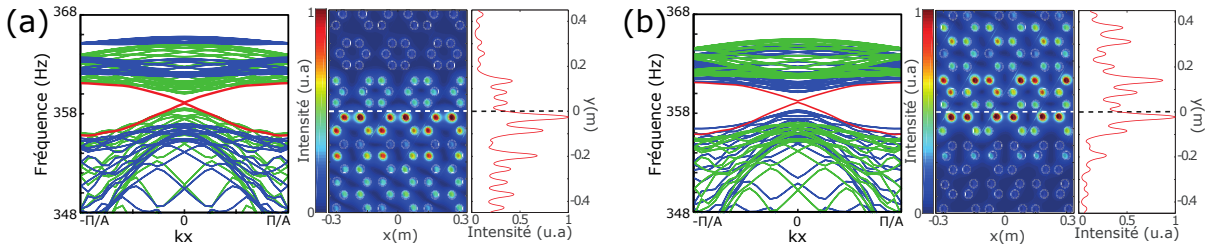


FIGURE V.20 – (a) Relation de dispersion et carte d'intensité du mode guidé correspondant à une interface entre deux milieux, topologique et trivial, pour des déformations asymétriques égales à $c' = 0.85\ c$ et $c' = 1.05\ c$. (b) Similaire à (a) pour $c' = 0.95\ c$ et $c' = 1.1\ c$

Par ailleurs, il est possible de former des interfaces entre deux milieux dont l'importance des déformations est asymétrique d'un côté par rapport à l'autre. C'est le cas des interfaces de la figure V.20, où l'on mélange les deux cas précédents. Dans ces cas, la brisure de symétrie au niveau de l'interface est plus limitée et la partie évanescente de l'onde guidée dans l'un des milieux explique le rapprochement des deux bandes en Γ. La petite bande interdite est alors quasiment invisible.

Robustesse relative

Nous pouvons comparer, certes très qualitativement ici, le comportement d'une onde se propageant le long d'une interface présentant plusieurs virages très serrés dans le cas d'une faible et d'une forte déformation symétrique (figure V.21). Dans le premier cas, l'onde se propage le long d'un guide tortueux avec un nombre négligeable de réflexions comme en témoigne l'homogénéité du champ acoustique du début à la fin du guide (figure V.21(b)). Cela n'est plus le cas lorsque les déformations augmentent, et des réflexions apparaissent (figure V.21(c)). Cela démontre bien l'absence de protection topologique intrinsèque de ces modes.

En revanche, l'hélicité relative supportée par les molécules d'interface autorise néanmoins une propagation de l'onde sans trop d'accrocs du début à la fin de l'interface. Cette dernière semble ainsi beaucoup moins affectée par les virages tortueux qu'un guide d'onde de cristal phononique usuel. Ces modes présentent donc une certaine robustesse, qui n'est certes pas comparable à une protection topologique, mais qui est liée à la symétrie intrinsèque des méta-molécules du guide. En cela, ces modes guidés se rapprochent de ceux présentant une polarisation cristalline que nous avons étudié dans le chapitre précédent.

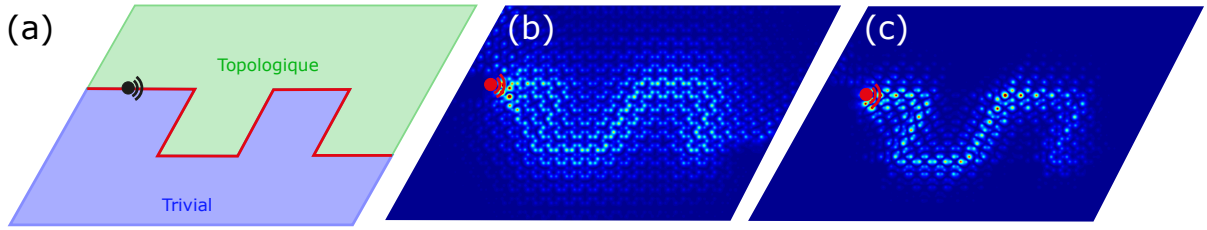


FIGURE V.21 – (a) Schéma d'une interface tortueuse entre deux milieux, topologique et trivial. (b) Carte d'intensité du champ acoustique correspondant à une faible déformation ($c' = 0.95\ c$ et $c' = 1.05\ c$). (c) Similaire à (b) pour une forte déformation ($c' = 0.85\ c$ et $c' = 1.1\ c$).

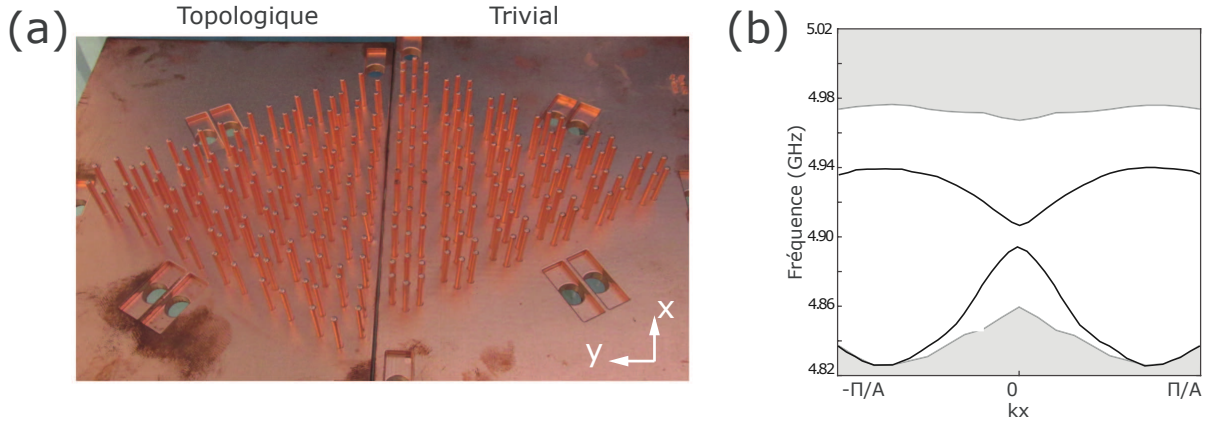


FIGURE V.22 – (a) Photo de l'expérience d'interface. (b) Relation de dispersion numérique correspondante.

V.3.3 Étude expérimentale en micro-ondes

Après avoir caractérisé numériquement ces interfaces entre deux métamatériaux acoustiques aux topologies différentes, nous passons à l'étude expérimentale en micro-ondes.

Protocole et relation de dispersion

Le protocole expérimental est très simple. Il suffit de prendre les deux échantillons de la partie précédente (figure V.13(a) et (b)) et de les mettre l'un en face de l'autre en respectant les symétries des réseaux. Ceci est représenté sur la figure V.22(a). Nous effectuons ensuite le même type de mesures que précédemment, la source étant cette fois-ci disposée au niveau de l'interface, au bas de la photo.

La relation de dispersion de l'interface correspondante montre l'apparition de deux bandes de propagation au sein de la bande interdite de chacun des milieux (figure V.22(b)).

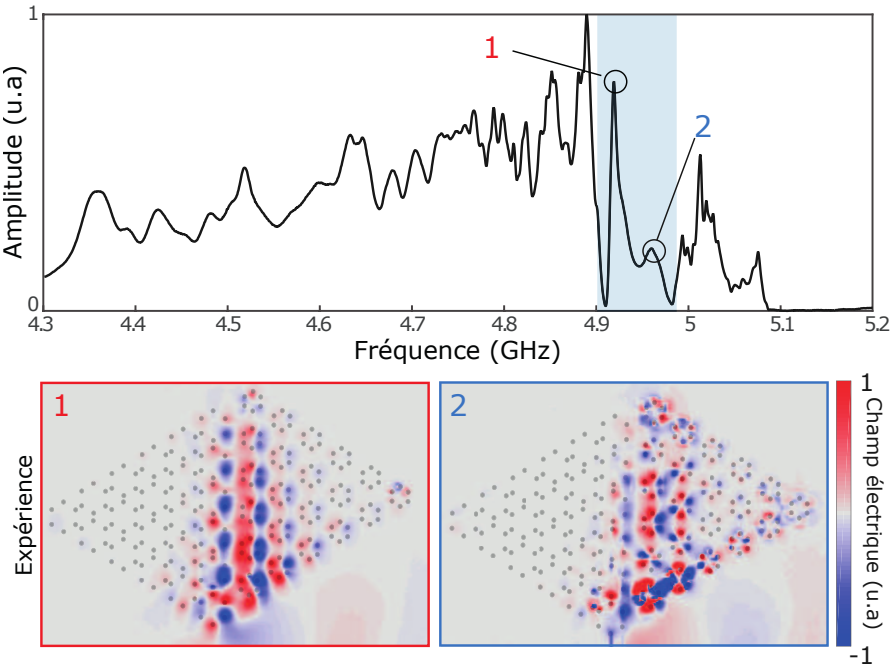


FIGURE V.23 – Spectre expérimental correspondant à la propagation des micro-ondes le long de l'interface, ainsi que les cartes de champ expérimentales en témoignant.

Les modifications structurelles correspondant à ces derniers étant assez importantes, on remarque bien l'ouverture d'une seconde bande interdite entre ces bandes au point $k_x = 0$.

Modes guidés

Le spectre moyenné sur l'interface est représenté sur la figure V.23. Nous voyons deux nouveaux pics de transmission au sein de la bande interdite commune au deux milieux (zone bleue). Si l'on regarde les cartes de champ correspondantes, nous remarquons qu'il est en effet confiné le long de cette interface, légèrement plus du côté gauche car la bande interdite de l'échantillon topologique est plus importante. Elles présentent les symétries attendues sur les méta-molécules d'interface, en accord avec les simulations précédentes.

Nous insistons sur le fait que dans la majorité des travaux publiés dans ce domaine, les parties relatives aux modes de bords présentent généralement des données de transmission entre les deux extrémités du guide. Ici, nous avons accès directement au profil du champ électrique de ces derniers. Cela témoigne encore une fois du potentiel des métamatériaux cristallins pour l'étude de ces phénomènes de matière condensée à une échelle macroscopique.

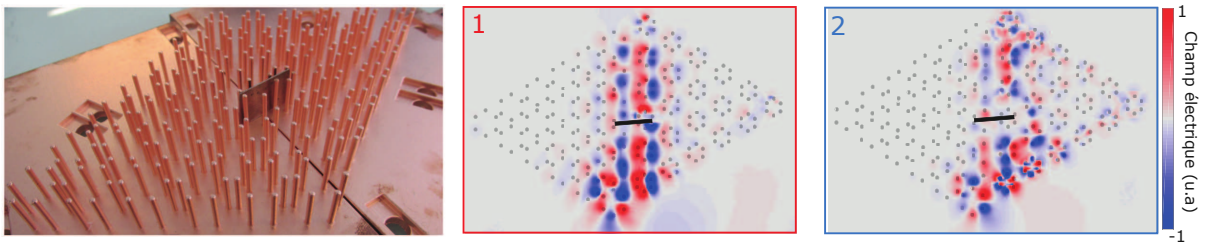


FIGURE V.24 – Comportement expérimental du mode guidé en présence d'un défaut métallique.

Robustesse relative

Comme en témoigne la séparation des deux bandes de modes d'interface en Γ, le mode guidé n'est pas topologiquement protégé. Néanmoins nous testons sa robustesse en ajoutant un bout de cuivre, de la hauteur des fils, au milieu de l'interface (figure V.24). Bien que des réflexions existent, nous remarquons tout de même qu'une bonne partie de l'onde contourne ce défaut métallique. Notamment, l'amplitude de l'onde est la même avant et après le défaut ce qui confirme l'absence d'interférences de Fabry-Pérot dans l'échantillon. Ceci peut s'interpréter, dans une certaine mesure, comme une propriété de robustesse du mode guidé.

Par ailleurs, nous avons effectué des simulations de diverses interfaces en utilisant la théorie des dipôles couplés qui appuient cette affirmation. C'est notamment le cas le long du contour très complexe de la cavité de la figure V.25. Ce dernier consiste en une tour Eiffel dont l'intérieur est le milieu topologique et l'extérieur le milieu trivial. Une source ponctuelle est disposée à la base de la tour. Les deux modes hélicoïdaux (flèche jaune et violette) arrivent ainsi à faire le tour complet de la structure. Par ailleurs, si l'on connecte le sommet de la tour Eiffel à l'espace libre, celle-ci est capable d'y rayonner. Ceci s'explique à la fois par le fait que les modes guidés soient dans le cône de lumière et que l'interface finisse par un dipôle unique.

Dans cette partie nous avons démontré numériquement et expérimentalement l'existence de modes se propageant à l'interface entre deux milieux aux topologies différentes. Bien que ces derniers ne possèdent pas de protection topologique à proprement parler, leur propriétés de symétrie leur permettent de se propager dans certaines directions bien définies mais aussi d'acquérir une certaine robustesse quant aux réflexions sur des virages abrupts.

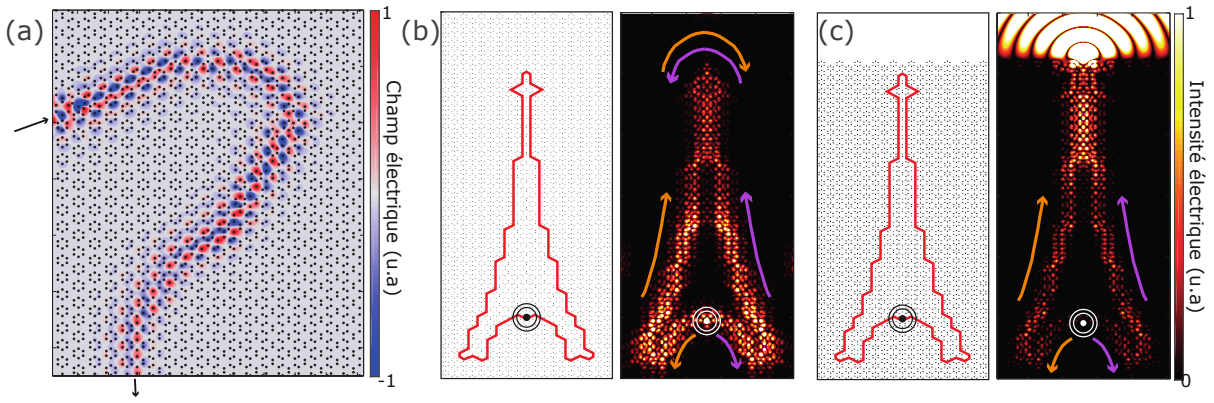


FIGURE V.25 – (a) Propagation numérique du mode guidé le long d'une interface tortueuse. (b) Étude numérique d'une cavité fermée en forme de tour Eiffel dont les bords sont des interfaces guidant des modes topologiques. (c) L'ouverture de cette dernière permet de coupler les modes guidé à l'espace libre.

V.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons montré qu'il était possible d'induire des propriétés topologiques au sein d'un métamatériau localement résonant. Nous sommes partis d'un des résultats du chapitre 3, à savoir la mesure d'un cône de Dirac au sein de la structure de bande d'un métamatériau cristallin arrangé selon un réseau hexagonal. Ce dernier provient du repliement du polariton d'un réseau triangulaire régulier. Il en existe deux versions chacune située à l'une des vallées de la première zone de Brillouin, qui peuvent être vues comme des pseudo-spins demi-entiers.

Nous avons ensuite considérer cet arrangement hexagonal comme un réseau triangulaire d'hexagones ce qui en pratique revient à agrandir la cellule unité du réseau. Cela a pour conséquence de replier une deuxième fois la structure de bandes. De cette façon, les cônes des deux vallées se superposent au centre de l'espace réciproque. Ce double cône reproduit, dans une certaine mesure, le comportement des électrons dans le graphène au niveau du cône de Dirac, en prenant en compte leur dégénérescence de spin.

Cependant, cette modification de la cellule unité n'ayant pas été accompagnée de structuration supplémentaire du réseau, le repliement qu'elle entraîne est purement mathématique. Afin de lui procurer une réalité physique, nous induisons des modifications structurelles en compressant ou en dilatant l'hexagone qu'elle contient, et ce à une échelle très sub-longueur d'onde. Cela mène à deux milieux différents qui sont chacun précisément décrits comme étant des réseaux triangulaires d'une méta-molécule propre. L'hybridation des modes résonants de cette dernière avec l'onde de l'espace libre mène à deux rela-

tions de dispersions différentes, qui présentent chacune une bande interdite à la place du double cône précédent. Par ailleurs, lorsqu'on regarde les modes cristallins correspondant, nous observons une inversion de symétrie localisée au voisinage du centre de la zone de Brillouin entre ces deux milieux. Cette dernière, que nous expliquons ici intuitivement avec l'approche en termes de méta-molécule, est responsable d'une transition de phase topologique.

Ainsi, en faisant une interface entre ces deux milieux au topologies différentes nous avons remarqué l'émergence de modes guidés. Ces derniers possèdent eux-aussi, dans une certaine mesure, un pseudo-spin. Bien qu'ils ne soient pas topologiquement protégés comme les électrons aux bords d'un isolant topologique, ils présentent cependant une certaine robustesse qui leur permet de se propager le long de guides tortueux par exemple. Leur hélicité autorise par ailleurs le routage des ondes au intersections.

En adoptant une approche cristalline des métamatériaux localement résonant nous avons donc réussi, en adaptant le protocole proposé par Wu et Hu [176], a créer un analogue macroscopique d'un isolant topologique de spin. Cette étude à la fois numérique en acoustique, et expérimentale en micro-ondes démontre encore une fois la pertinence de cette approche qui va au delà des descriptions effectives habituelles. Par ailleurs elle donne accès à des données expérimentales qui sont assez rares dans la communauté des isolants topologiques macroscopiques. Ces deux études, numérique et expérimentales font l'objet d'une publication dans *New Journal of Physics* [181] et dans *Nature Communications* [182].

Ce travail ouvre ainsi des perspectives quant à l'exploitation des métamatériaux cristallins pour l'obtention de propriétés topologiques. Au cours de ma thèse nous nous sommes ainsi aussi intéresser à étudier le comportement de ce cône de Dirac lorsqu'on brise la symétrie par renversement du temps. Cette étude expérimentale en micro-ondes est actuellement en cours. Nous pensons également généraliser ces principes à des dimensions plus élevées et entrer ainsi dans le domaine des isolants topologiques tridimensionnels.

Conclusion

Au cours de cette thèse nous avons mis en évidence le rôle de la structuration de la cellule unité des métamatériaux localement résonant. Cette approche va au delà de la description habituelle en termes de paramètres effectifs des métamatériaux, et rapproche ces derniers des cristaux photoniques/phononiques en les décrivant en termes de structure de bande comme c'est le cas pour les électrons dans les solides.

Le premier chapitre, après avoir introduit les deux types de matériaux composites, a mis en évidence la pertinence de la vision microscopique afin de décrire les métamatériaux cristallins. Nous sommes partis du cas le plus simple où la cellule unité est constituée d'un seul résonateur, que nous avons appelé méta-atome. Le réseau correspondant est donc régulier et sa relation de dispersion est un polariton qui présente une bande portant des modes sub-longueur d'onde et une bande interdite d'hybridation. En prenant en compte le fait que ce polariton existe aussi localement à l'échelle du résonateur, nous avons démontré un phénomène de *rainbow trapping* acoustique dans une chaîne de canettes de soda avec un gradient de remplissage.

Dans le deuxième chapitre, nous avons complexifié la cellule unité du métamatériau précédent en y ajoutant des défauts, c'est à dire des méta-atomes avec une fréquence de résonance plus élevée. De cette façon les modes portés par ces derniers sont situés dans la bande interdite du réseau précédent. Le champ correspondant est donc confiné sur les sites des défauts et un couplage local entre plus proches voisins, induit par la bande interdite environnante, se met en place. Ceci permet de faire un parallèle avec le terme de saut, traduisant les recouvrements d'orbitales atomiques, apparaissant dans les Hamiltoniens *tight-binding* de physique de solide. Nous exploitons ce dernier afin de recréer la structure de bande du graphène avec un milieu de fils en micro-ondes et un agencement particulier de canettes de soda en acoustique audible. Ceci nous a permis de mesurer expérimentalement pour la première fois dans cette thèse des dégénérescences particulières de cette structure de bande : les cônes de Dirac. Ensuite, grâce aux propriétés locales de la bande interdite située sur les résonateurs de basse fréquence, nous avons réussi à obtenir la structure de bande d'un réseau triangulaire dont les liens ont une distribution spatiale anisotrope : le

réseau « *dice* ». Cela nous a permis de mettre en évidence, numériquement pour l'instant, la présence d'une triple dégénérescence particulière aux coins de la première zone de Brillouin.

Le chapitre III quant à lui nous permet d'exploiter pleinement le concept de métamatériaux cristallins. En effet, ici nous structurons la cellule unité du milieu en modifiant légèrement sa composition ou sa structure. En cela, nous passons d'un simple méta-atome à une méta-molécule plus complexe. Cette approche de type physique du solide nous a permis d'induire une bande négative au sein de la relation de dispersion. Cela s'obtient avec une méta-molécule qui est un dimère de résonateur, ce qui correspond à un réseau bipériodique ou bidisperse par exemple. Nous tirons parti de cette bande négative afin de mettre en place une super-lentille électromagnétique dont la résolution est meilleure que la limite de diffraction. Par ailleurs, nous mesurons là aussi un cône de Dirac pour le cas du réseau bipériodique. Nous faisons ensuite une étude numérique acoustique sur le cas où la méta-molécule est un trimère de résonateurs. Arrangé en réseau triangulaire afin d'obtenir la structure Kagomé, cette dernière donne naissance à une bande supplémentaire, relativement plate. A cela s'ajoute là encore un cône de Dirac aux coins de la première zone de Brillouin. Ces similitudes nous poussent à établir une correspondance entre les réseaux en nid d'abeille et Kagomé que nous exploitons dans la suite.

Après avoir passé la première partie de cette thèse à mettre en évidence la dégénérescence liée aux cônes de Dirac dans le métamatériau, nous dédions la suite du manuscrit à briser cette dernière. Ainsi, dans le chapitre IV, nous modifions légèrement la composition du réseau hexagonal afin de le rendre bidisperse. Cela fait disparaître les cônes de Dirac précédents en induisant un moment angulaire lié à la propagation au sein du milieu. Le sens de rotation dépend à la fois de la direction et de la fréquence de l'onde dont il accompagne la propagation. Nous nous en servons ensuite pour générer des interfaces en suivant le protocole de l'effet Hall quantique de vallée. Ces dernières portent des modes dont la propagation est elle-aussi accompagnée par une polarisation circulaire qui rappelle celle existant au coeur des cristaux environnants. Nous montrons expérimentalement qu'elle permet notamment à l'onde de se propager dans des directions spécifiques quand elle arrive à une intersection ou encore de limiter ses réflections au sein d'un guide tortueux. Par ailleurs, cette polarisation est localisée sur les résonateurs de l'interface, que nous décrivons là encore comme étant une méta-molécule particulière. Cette approche nous permet de ne garder que ces derniers et de les inclure au sein d'un métamatériau très simple présentant une bande interdite. Nous montrons, expérimentalement en micro-ondes, que les propriétés de propagation polarisées sont conservées dans ce cas. En outre, nous tirons parti de la correspondance faite entre le réseau Kagomé et le réseau hexagonal du cha-

pitre précédent afin d'obtenir le même genre de phénomène mais cette fois-ci en ne jouant qu'avec la structure de la cellule unité. De cette façon, un réseau Kagomé constitué d'une alternance de petit et gros trimères de résonateurs permet lui-aussi d'obtenir un analogue macroscopique de l'effet Hall quantique de vallée. Nous démontrons, expérimentalement en acoustique, la polarisation circulaire des modes d'interface correspondant en les faisant se propager uniquement vers la droite ou la gauche selon le sens de rotation induit par une excitation particulière.

Le point de départ du dernier chapitre de cette thèse est là encore le réseau hexagonal ainsi que ses cônes de Dirac. Cette fois-ci, nous l'avons considéré comme étant un réseau triangulaire d'hexagones ce qui a pour conséquence de replier la relation de dispersion. De cette façon, deux cônes de Dirac se superposent au centre de la première zone de Brillouin, ce qui reproduit, dans une certaine mesure, la dégénérescence de spin des électrons dans le graphène. Afin de donner une réalité physique à ce repliement, pour l'instant purement artificiel, nous introduisons des modifications structurelles au sein de la cellule unité. Cela revient à considérer des milieux qui sont des réseaux triangulaires de deux nouvelles méta-molécules différentes, à chaque fois composée de six résonateurs. Entre ces deux milieux, une inversion de bande apparaît, qui est la marque d'un changement de phase topologique. Ainsi, en faisant une interface entre ces deux métamatériaux, nous sommes capables de mesurer la propagation de deux modes de bords dont la direction de propagation est liée à un pseudo-spin. Cela en fait, dans une certaine mesure, un équivalent macroscopique de l'effet Hall quantique de spin. De façon similaire au chapitre précédent, nous pouvons définir ce pseudo-spin en remarquant une rotation particulière du champ sur les résonateurs de l'interface, ces derniers formant deux méta-molécules hybrides se chevauchant. Ces modes d'interfaces topologiques, bien qu'ils ne soient pas protégés topologiquement *stricto sensu* comme le sont les électrons aux bords d'un isolant topologique, présentent tout de même une certaine robustesse liée à la conservation de leur pseudo-spin. Celle-ci leur permet de se propager le long de chemins accidentés sans être complètement réfléchis ou encore d'être acheminées sélectivement dans certaines directions à une intersection.

Ce travail participe ainsi à mettre en évidence la pertinence de la description cristalline des métamatériaux cristallins. Cela en fait des systèmes intuitifs qui permettent de reproduire des analogues de phénomènes de physique de la matière condensée à une échelle macroscopique plus simple à appréhender expérimentalement. Il ouvre plusieurs perspectives. Nous pouvons envisager de transposer ces études à trois dimensions et ainsi jouer avec des dégénérescences plus complexes, dites de Weyl. D'autre part, des expériences sont actuellement en cours afin d'introduire des effets non-réciproques au sein, ou en périphérie, de ces métamatériaux en complexifiant encore plus la cellule unité. Enfin,

il est intéressant de poursuivre l'étude des propriétés topologiques de ces milieux. En effet, la vision intuitive qu'ils offrent en fait un bon support pour comprendre et observer expérimentalement ces effets étonnants.

Bibliographie

[1] Jackson, J. D. *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, 2012).

[2] Feynman, R. P. Feynman lectures on physics. volume 2 : Mainly electromagnetism and matter. *Reading, Ma. : Addison-Wesley, 1964, edited by Feynman, Richard P. ; Leighton, Robert B. ; Sands, Matthew* (1964).

[3] Royer, D. & Dieulesaint, E. Elastic waves in solids i : Free and guided propagation, translated by dp morgan. *Springer-Verlag, New York* (2000).

[4] Holtzer, A. M. The collected papers of peter jw debye. *Journal of Polymer Science* **13**, 548–548 (1954).

[5] Drude, P. Zur elektronentheorie der metalle. *Annalen der Physik* **306**, 566–613 (1900).

[6] Röntgen, W. C. On a new kind of rays. *Science* **3**, 227–231 (1896).

[7] Friedrich, W., Knipping, P. & Laue, M. Interferenzerscheinungen bei roentgenstrahlen. *Annalen der Physik* **346**, 971–988 (1913).

[8] Bragg, W. H., Bragg, W. L. *et al.* The reflection of x-rays by crystals. *Proc. R. Soc. Lond. A* **88**, 428–438 (1913).

[9] Vukusic, P. & Sambles, J. R. Photonic structures in biology. *Nature* **424**, 852 (2003).

[10] Zi, J. *et al.* Coloration strategies in peacock feathers. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **100**, 12576–12578 (2003).

[11] Michielsen, K. & Stavenga, D. G. Gyroid cuticular structures in butterfly wing scales : biological photonic crystals. *Journal of The Royal Society Interface* **5**, 85–94 (2008).

[12] Yablonovitch, E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters* **58**, 2059 (1987).

[13] John, S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical Review Letters* **58**, 2486 (1987).

[14] Pendry, J. B., Holden, A., Stewart, W. & Youngs, I. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Physical Review Letters* **76**, 4773 (1996).

[15] Bloch, F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik* **52**, 555–600 (1929).

[16] Strutt, J. W. *et al.* On the reflection of light from a regularly stratified medium. *Proc. R. Soc. Lond. A* **93**, 565–577 (1917).

[17] Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N. & Meade, R. D. *Photonic crystals : molding the flow of light* (Princeton university press, 2011).

[18] Rayleigh, L. Xvii. on the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **24**, 145–159 (1887).

[19] McCall, S., Platzman, P., Dalichaouch, R., Smith, D. & Schultz, S. Microwave propagation in two-dimensional dielectric lattices. *Physical Review Letters* **67**, 2017 (1991).

[20] Villeneuve, P. R. & Piche, M. Photonic band gaps in two-dimensional square and hexagonal lattices. *Physical Review B* **46**, 4969 (1992).

[21] Plihal, M. & Maradudin, A. Photonic band structure of two-dimensional systems : The triangular lattice. *Physical Review B* **44**, 8565 (1991).

[22] Meade, R. D., Brommer, K. D., Rappe, A. M. & Joannopoulos, J. Existence of a photonic band gap in two dimensions. *Applied Physics Letters* **61**, 495–497 (1992).

[23] Ho, K., Chan, C. T. & Soukoulis, C. M. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures. *Physical Review Letters* **65**, 3152 (1990).

[24] Vainshtein, B. K. *Fundamentals of crystals : symmetry, and methods of structural crystallography*, vol. 1 (Springer Science & Business Media, 2013).

[25] Luo, C., Johnson, S. G., Joannopoulos, J. & Pendry, J. All-angle negative refraction without negative effective index. *Physical Review B* **65**, 201104 (2002).

[26] Berrier, A. *et al.* Negative refraction at infrared wavelengths in a two-dimensional photonic crystal. *Physical Review Letters* **93**, 073902 (2004).

[27] Yablonovitch, E., Gmitter, T. & Leung, K. Photonic band structure : The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms. *Physical Review Letters* **67**, 2295 (1991).

[28] Ho, K. M., Chan, C. T., Soukoulis, C., Biswas, R. & Sigalas, M. Photonic band gaps in three dimensions : new layer-by-layer periodic structures. *Solid State Communications* **89**, 413–416 (1994).

[29] Luo, C., Johnson, S. G. & Joannopoulos, J. All-angle negative refraction in a three-dimensionally periodic photonic crystal. *Applied physics letters* **81**, 2352–2354 (2002).

[30] Vasseur, J. *et al.* Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. *Physical Review Letters* **86**, 3012 (2001).

[31] Page, J. H. *et al.* Tunneling and dispersion in 3d phononic crystals. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials* **220**, 859–870 (2005).

[32] Sainidou, R., Stefanou, N. & Modinos, A. Formation of absolute frequency gaps in three-dimensional solid phononic crystals. *Physical Review B* **66**, 212301 (2002).

[33] Leroy, V., Bretagne, A., Lanoy, M. & Tourin, A. Band gaps in bubble phononic crystals. *AIP Advances* **6**, 121604 (2016).

[34] Sukhovich, A., Jing, L. & Page, J. H. Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Physical Review B* **77**, 014301 (2008).

[35] Veselago, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of and μ. *Soviet physics uspekhi* **10**, 509 (1968).

[36] Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J. & Stewart, W. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE transactions on microwave theory and techniques* **47**, 2075–2084 (1999).

[37] Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D., Nemat-Nasser, S. C. & Schultz, S. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical Review Letters* **84**, 4184 (2000).

[38] Liu, Z. *et al.* Locally resonant sonic materials. *Science* **289**, 1734–1736 (2000).

[39] Engheta, N. & Ziolkowski, R. W. *Metamaterials : physics and engineering explorations* (John Wiley & Sons, 2006).

[40] Von Helmholtz, H. *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music* (Longmans, Green, 1912).

[41] Bretagne, A., Tourin, A. & Leroy, V. Enhanced and reduced transmission of acoustic waves with bubble meta-screens. *Applied Physics Letters* **99**, 221906 (2011).

[42] Leroy, V. *et al.* Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens. *Physical Review B* **91**, 020301 (2015).

[43] Brunet, T. *et al.* Soft 3d acoustic metamaterial with negative index. *Nature Materials* **14**, 384 (2015).

[44] Ma, G., Yang, M., Xiao, S., Yang, Z. & Sheng, P. Acoustic metasurface with hybrid resonances. *Nature Materials* **13**, 873 (2014).

[45] Cummer, S. A., Christensen, J. & Alù, A. Controlling sound with acoustic metamaterials. *Nature Reviews Materials* **1**, 16001 (2016).

[46] Ma, G. & Sheng, P. Acoustic metamaterials : From local resonances to broad horizons. *Science Advances* **2**, e1501595 (2016).

[47] Fang, N. *et al.* Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nature Materials* **5**, 452 (2006).

[48] Yang, Z., Mei, J., Yang, M., Chan, N. & Sheng, P. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass. *Physical Review Letters* **101**, 204301 (2008).

[49] Lee, S. H., Park, C. M., Seo, Y. M., Wang, Z. G. & Kim, C. K. Composite acoustic medium with simultaneously negative density and modulus. *Physical review letters* **104**, 054301 (2010).

[50] Choi, M. *et al.* A terahertz metamaterial with unnaturally high refractive index. *Nature* **470**, 369 (2011).

[51] Shen, J.-T., Catrysse, P. B. & Fan, S. Mechanism for designing metallic metamaterials with a high index of refraction. *Physical Review Letters* **94**, 197401 (2005).

[52] Wei, X., Shi, H., Dong, X., Lu, Y. & Du, C. A high refractive index metamaterial at visible frequencies formed by stacked cut-wire plasmonic structures. *Applied Physics Letters* **97**, 011904 (2010).

[53] Belov, P. A., Simovski, C. R. & Ikonen, P. Canalization of subwavelength images by electromagnetic crystals. *Physical Review B* **71**, 193105 (2005).

[54] Liu, Z., Lee, H., Xiong, Y., Sun, C. & Zhang, X. Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects. *Science* **315**, 1686–1686 (2007).

[55] Lu, D. & Liu, Z. Hyperlenses and metalenses for far-field super-resolution imaging. *Nature Communications* **3**, 1205 (2012).

[56] Lemoult, F., Lerosey, G., de Rosny, J. & Fink, M. Resonant metalenses for breaking the diffraction barrier. *Physical Review Letters* **104**, 203901 (2010).

[57] Engheta, N. Pursuing near-zero response. *Science* **340**, 286–287 (2013).

[58] Silveirinha, M. & Engheta, N. Tunneling of electromagnetic energy through subwavelength channels and bends using ε-near-zero materials. *Physical Review Letters* **97**, 157403 (2006).

[59] Fleury, R. & Alù, A. Extraordinary sound transmission through density-near-zero ultranarrow channels. *Physical Review Letters* **111**, 055501 (2013).

[60] Alu, A., Silveirinha, M. G., Salandrino, A. & Engheta, N. Epsilon-near-zero metamaterials and electromagnetic sources : Tailoring the radiation phase pattern. *Physical Review B* **75**, 155410 (2007).

[61] Leonhardt, U. Optical conformal mapping. *Science* **312**, 1777–1780 (2006).

[62] Pendry, J. B., Schurig, D. & Smith, D. R. Controlling electromagnetic fields. *Science* **312**, 1780–1782 (2006).

[63] Cummer, S. A. & Schurig, D. One path to acoustic cloaking. *New Journal of Physics* **9**, 45 (2007).

[64] Schurig, D. *et al.* Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science* **314**, 977–980 (2006).

[65] Zigoneanu, L., Popa, B.-I. & Cummer, S. A. Three-dimensional broadband omnidirectional acoustic ground cloak. *Nature Materials* **13**, 352 (2014).

[66] Pendry, J. B. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters* **85**, 3966 (2000).

[67] Kildishev, A. V., Boltasseva, A. & Shalaev, V. M. Planar photonics with metasurfaces. *Science* **339**, 1232009 (2013).

[68] Lemoult, F. *Focalisation et contrôle des ondes en milieux complexes et localement résonants*. Ph.D. thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII (2011).

[69] Kaina, N. *Métamatériaux localement résonants : cristaux photoniques et phononiques sub-longueur d'onde*. Ph.D. thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII (2016).

[70] Cowan, M. L., Page, J. H. & Sheng, P. Ultrasonic wave transport in a system of disordered resonant scatterers : Propagating resonant modes and hybridization gaps. *Physical Review B* **84**, 094305 (2011).

[71] Sigalas, M. *et al.* Classical vibrational modes in phononic lattices : theory and experiment. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials* **220**, 765–809 (2005).

[72] Hopfield, J. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Physical Review* **112**, 1555 (1958).

[73] Pendry, J., Martin-Moreno, L. & Garcia-Vidal, F. Mimicking surface plasmons with structured surfaces. *Science* **305**, 847–848 (2004).

[74] Lemoult, F., Fink, M. & Lerosey, G. Acoustic resonators for far-field control of sound on a subwavelength scale. *Physical Review Letters* **107**, 064301 (2011).

[75] Tsakmakidis, K. L., Boardman, A. D. & Hess, O. 'trapped rainbow'storage of light in metamaterials. *Nature* **450**, 397 (2007).

[76] Gan, Q., Ding, Y. J. & Bartoli, F. J. "rainbow" trapping and releasing at telecommunication wavelengths. *Physical Review Letters* **102**, 056801 (2009).

[77] Zhu, J. *et al.* Acoustic rainbow trapping. *Scientific Reports* **3**, 1728 (2013).

[78] Yablonovitch, E. *et al.* Donor and acceptor modes in photonic band structure. *Physical Review Letters* **67**, 3380 (1991).

[79] Meade, R. D., Brommer, K. D., Rappe, A. M. & Joannopoulos, J. Photonic bound states in periodic dielectric materials. *Physical Review B* **44**, 13772 (1991).

[80] Fan, S. *et al.* Guided and defect modes in periodic dielectric waveguides. *JOSA B* **12**, 1267–1272 (1995).

[81] Lončar, M., Scherer, A. & Qiu, Y. Photonic crystal laser sources for chemical detection. *Applied Physics Letters* **82**, 4648–4650 (2003).

[82] Shih, M. *et al.* Photonic crystal lasers in ingaasp on a sio 2/si substrate and its thermal impedance. *Optics Express* **15**, 227–232 (2007).

[83] Johnson, S. G., Villeneuve, P. R., Fan, S. & Joannopoulos, J. D. Linear waveguides in photonic-crystal slabs. *Physical Review B* **62**, 8212 (2000).

[84] Lin, S.-Y., Chow, E., Hietala, V., Villeneuve, P. R. & Joannopoulos, J. Experimental demonstration of guiding and bending of electromagnetic waves in a photonic crystal. *Science* **282**, 274–276 (1998).

[85] Fan, S., Johnson, S. G., Joannopoulos, J., Manolatou, C. & Haus, H. Waveguide branches in photonic crystals. *JOSA B* **18**, 162–165 (2001).

[86] Milne, J. S., Dell, J. M., Keating, A. J. & Faraone, L. Widely tunable mems-based fabry–perot filter. *Journal of microelectromechanical systems* **18**, 905–913 (2009).

[87] Hohlfeld, D. & Zappe, H. An all-dielectric tunable optical filter based on the thermo-optic effect. *Journal of optics A : Pure and applied Optics* **6**, 504 (2004).

[88] Scotognella, F. *et al.* Nanoparticle one-dimensional photonic-crystal dye laser. *Small* **5**, 2048–2052 (2009).

[89] Deppe, D. G., Huffaker, D. L., Oh, T.-h., Deng, H. & Deng, Q. Low-threshold vertical-cavity surface-emitting lasers based on oxide-confinement and high contrast distributed bragg reflectors. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **3**, 893–904 (1997).

[90] Komikado, T., Yoshida, S. & Umegaki, S. Surface-emitting distributed-feedback dye laser of a polymeric multilayer fabricated by spin coating. *Applied physics letters* **89**, 061123 (2006).

[91] Borel, P. I. *et al.* Topology optimization and fabrication of photonic crystal structures. *Optics Express* **12**, 1996–2001 (2004).

[92] Frandsen, L. H. *et al.* Broadband photonic crystal waveguide 60 bend obtained utilizing topology optimization. *Optics Express* **12**, 5916–5921 (2004).

[93] Jensen, J. S. & Sigmund, O. Systematic design of photonic crystal structures using topology optimization : Low-loss waveguide bends. *Applied physics letters* **84**, 2022–2024 (2004).

[94] Kuramochi, E. *et al.* Disorder-induced scattering loss of line-defect waveguides in photonic crystal slabs. *Physical Review B* **72**, 161318 (2005).

[95] Villeneuve, P. R., Fan, S. & Joannopoulos, J. Microcavities in photonic crystals : Mode symmetry, tunability, and coupling efficiency. *Physical Review B* **54**, 7837 (1996).

[96] Lemoult, F., Kaina, N., Fink, M. & Lerosey, G. Wave propagation control at the deep subwavelength scale in metamaterials. *Nature Physics* **9**, 55 (2013).

[97] Kaina, N., Lemoult, F., Fink, M. & Lerosey, G. Ultra small mode volume defect cavities in spatially ordered and disordered metamaterials. *Applied Physics Letters* **102**, 144104 (2013).

[98] Kittel, C., McEuen, P. & McEuen, P. *Introduction to solid state physics*, vol. 8 (Wiley New York, 1996).

[99] Purcell, E. M. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. In *Confined Electrons and Photons*, 839–839 (Springer, 1995).

[100] Yariv, A., Xu, Y., Lee, R. K. & Scherer, A. Coupled-resonator optical waveguide : ? a proposal and analysis. *Optics Letters* **24**, 711–713 (1999).

[101] Notomi, M., Kuramochi, E. & Taniyama, H. Ultrahigh-q nanocavity with 1d photonic gap. *Optics Express* **16**, 11095–11102 (2008).

[102] Bayindir, M., Temelkuran, B. & Ozbay, E. Tight-binding description of the coupled defect modes in three-dimensional photonic crystals. *Physical Review Letters* **84**, 2140 (2000).

[103] Poon, J. K. *et al.* Matrix analysis of microring coupled-resonator optical waveguides. *Optics Express* **12**, 90–103 (2004).

[104] Stevens, C. J., Chan, C. W., Stamatis, K. & Edwards, D. J. Magnetic metamaterials as 1-d data transfer channels : an application for magneto-inductive waves. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **58**, 1248–1256 (2010).

[105] Wiltshire, M., Shamonina, E., Young, I. & Solymar, L. Experimental and theoretical study of magneto-inductive waves supported by one-dimensional arrays of "swiss rolls". *Journal of Applied Physics* **95**, 4488–4493 (2004).

[106] Krauss, T. F. Why do we need slow light ? *Nature Photonics* **2**, 448 (2008).

[107] Morichetti, F., Ferrari, C., Canciamilla, A. & Melloni, A. The first decade of coupled resonator optical waveguides : bringing slow light to applications. *Laser & Photonics Reviews* **6**, 74–96 (2012).

[108] Baba, T. Slow light in photonic crystals. *Nature Photonics* **2**, 465 (2008).

[109] Kaina, N. *et al.* Slow waves in locally resonant metamaterials line defect waveguides. *Scientific Reports* **7**, 15105 (2017).

[110] Novoselov, K. S. *et al.* Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. *Nature* **438**, 197 (2005).

[111] Geim, A. K. & Novoselov, K. S. The rise of graphene. *Nature Materials* **6**, 183 (2007).

[112] Castro Neto, A. H., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S. & Geim, A. K. The electronic properties of graphene. *Review of Modern Physics* **81**, 109–162 (2009).

[113] Peres, N. M. R. Colloquium : The transport properties of graphene : An introduction. *Review of Modern Physics* **82**, 2673–2700 (2010).

[114] Wallace, P. R. The band theory of graphite. *Physical Review* **71**, 622–634 (1947).

[115] Reich, S., Maultzsch, J., Thomsen, C. & Ordejón, P. Tight-binding description of graphene. *Physical Review B* **66**, 035412 (2002).

[116] Beenakker, C. W. J. Colloquium : Andreev reflection and klein tunneling in graphene. *Review of Modern Physics* **80**, 1337–1354 (2008).

[117] Bellec, M., Kuhl, U., Montambaux, G. & Mortessagne, F. Tight-binding couplings in microwave artificial graphene. *Physical Review B* **88**, 115437 (2013).

[118] Fang, K., Yu, Z. & Fan, S. Microscopic theory of photonic one-way edge mode. *Physical Review B* **84**, 075477 (2011).

[119] Peleg, O. *et al.* Conical diffraction and gap solitons in honeycomb photonic lattices. *Physical Review Letters* **98**, 103901 (2007).

[120] Ochiai, T. & Onoda, M. Photonic analog of graphene model and its extension : Dirac cone, symmetry, and edge states. *Physical Review B* **80**, 155103 (2009).

[121] He, W.-Y. & Chan, C. T. The emergence of dirac points in photonic crystals with mirror symmetry. *Scientific Reports* **5**, 8186 (2015).

[122] Bittner, S. *et al.* Observation of a dirac point in microwave experiments with a photonic crystal modeling graphene. *Physical Review B* **82**, 014301 (2010).

[123] Sutherland, B. Localization of electronic wave functions due to local topology. *Physical Review B* **34**, 5208 (1986).

[124] Leykam, D., Andreanov, A. & Flach, S. Artificial flat band systems : from lattice models to experiments. *Advances in Physics : X* **3**, 1473052 (2018).

[125] Bercioux, D., Urban, D., Grabert, H. & Häusler, W. Massless dirac-weyl fermions in a t 3 optical lattice. *Physical Review A* **80**, 063603 (2009).

[126] Huang, X., Lai, Y., Hang, Z. H., Zheng, H. & Chan, C. Dirac cones induced by accidental degeneracy in photonic crystals and zero-refractive-index materials. *Nature Materials* **10**, 582 (2011).

[127] Fang, A., Zhang, Z., Louie, S. G. & Chan, C. T. Klein tunneling and supercollimation of pseudospin-1 electromagnetic waves. *Physical Review B* **93**, 035422 (2016).

[128] Fang, A., Zhang, Z.-Q., Louie, S. G. & Chan, C. T. Anomalous anderson localization behaviors in disordered pseudospin systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 201620313 (2017).

[129] Dubois, M., Shi, C., Zhu, X., Wang, Y. & Zhang, X. Observation of acoustic dirac-like cone and double zero refractive index. *Nature Communications* **8**, 14871 (2017).

[130] Yves, S., Lemoult, F., Fink, M. & Lerosey, G. Crystalline soda can metamaterial exhibiting graphene-like dispersion at subwavelength scale. *Scientific Reports* **7**, 15359 (2017).

[131] De Vries, P., Van Coevorden, D. V. & Lagendijk, A. Point scatterers for classical waves. *Review of Modern Physics* **70**, 447 (1998).

[132] Shelby, R. A., Smith, D. R. & Schultz, S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science* **292**, 77–79 (2001).

[133] Shelby, R., Smith, D., Nemat-Nasser, S. & Schultz, S. Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial. *Applied Physics Letters* **78**, 489–491 (2001).

[134] Shalaev, V. M. *et al.* Negative index of refraction in optical metamaterials. *Optics Letters* **30**, 3356–3358 (2005).

[135] Zhang, S. *et al.* Experimental demonstration of near-infrared negative-index metamaterials. *Physical Review Letters* **95**, 137404 (2005).

[136] Dolling, G., Wegener, M., Soukoulis, C. M. & Linden, S. Negative-index metamaterial at 780 nm wavelength. *Optics Letters* **32**, 53–55 (2007).

[137] Li, J. & Chan, C. T. Double-negative acoustic metamaterial. *Physical Review E* **70**, 055602 (2004).

[138] Fok, L. & Zhang, X. Negative acoustic index metamaterial. *Physical Review B* **83**, 214304 (2011).

[139] Zhu, R., Liu, X., Hu, G., Sun, C. & Huang, G. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nature Communications* **5**, 5510 (2014).

[140] Kanté, B. *et al.* Symmetry breaking and optical negative index of closed nanorings. *Nature Communications* **3**, 1180 (2012).

[141] Lanoy, M. *et al.* Acoustic double negativity induced by position correlations within a disordered set of monopolar resonators. *Physical Review B* **96**, 220201 (2017).

[142] Kaina, N., Lemoult, F., Fink, M. & Lerosey, G. Negative refractive index and acoustic superlens from multiple scattering in single negative metamaterials. *Nature* **525**, 77 (2015).

[143] Fang, N., Lee, H., Sun, C. & Zhang, X. Sub–diffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *Science* **308**, 534–537 (2005).

[144] Ambati, M., Fang, N., Sun, C. & Zhang, X. Surface resonant states and superlensing in acoustic metamaterials. *Physical Review B* **75**, 195447 (2007).

[145] Sukhovich, A. *et al.* Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals. *Physical Review Letters* **102**, 154301 (2009).

[146] Luo, C., Johnson, S. G., Joannopoulos, J. & Pendry, J. Negative refraction without negative index in metallic photonic crystals. *Optics Express* **11**, 746–754 (2003).

[147] Cubukcu, E., Aydin, K., Ozbay, E., Foteinopoulou, S. & Soukoulis, C. M. Subwavelength resolution in a two-dimensional photonic-crystal-based superlens. *Physical Review Letters* **91**, 207401 (2003).

[148] Schonbrun, E. *et al.* Wave front evolution of negatively refracted waves in a photonic crystal. *Applied physics letters* **90**, 041113 (2007).

[149] Zhang, X. & Liu, Z. Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *Applied Physics Letters* **85**, 341–343 (2004).

[150] Dubois, M. *et al.* Flat lens for pulse focusing of elastic waves in thin plates. *Applied Physics Letters* **103**, 071915 (2013).

[151] Yves, S., Berthelot, T., Fink, M., Lerosey, G. & Lemoult, F. Left-handed band in an electromagnetic metamaterial inducedby sub-wavelength multiple scattering. *arXiv preprint arXiv :1809.10558* (2018).

[152] Xiao, D., Yao, W. & Niu, Q. Valley-contrasting physics in graphene : magnetic moment and topological transport. *Physical Review Letters* **99**, 236809 (2007).

[153] Ju, L. *et al.* Topological valley transport at bilayer graphene domain walls. *Nature* **520**, 650 (2015).

[154] Li, J. *et al.* Gate-controlled topological conducting channels in bilayer graphene. *Nature Nanotechnology* **11**, 1060 (2016).

[155] Dong, J.-W., Chen, X.-D., Zhu, H., Wang, Y. & Zhang, X. Valley photonic crystals for control of spin and topology. *Nature Materials* **16**, 298 (2017).

[156] Wu, X. *et al.* Direct observation of valley-polarized topological edge states in designer surface plasmon crystals. *Nature Communications* **8**, 1304 (2017).

[157] Noh, J., Huang, S., Chen, K. P. & Rechtsman, M. C. Observation of photonic topological valley hall edge states. *Physical Review Letters* **120**, 063902 (2018).

[158] Gao, F. *et al.* Topologically protected refraction of robust kink states in valley photonic crystals. *Nature Physics* **14**, 140 (2018).

[159] Pal, R. K. & Ruzzene, M. Edge waves in plates with resonators : an elastic analogue of the quantum valley hall effect. *New Journal of Physics* **19**, 025001 (2017).

[160] Bernevig, B. A. & Hughes, T. L. *Topological insulators and topological superconductors* (Princeton university press, 2013).

[161] Gamow, G. *The great physicists from Galileo to Einstein* (Courier Corporation, 1988).

[162] Kosterlitz, J. M. Nobel lecture : Topological defects and phase transitions. *Reviews of Modern Physics* **89**, 040501 (2017).

[163] Haldane, F. D. M. Nobel lecture : Topological quantum matter. *Reviews of Modern Physics* **89**, 040502 (2017).

[164] Hasan, M. Z. & Kane, C. L. Colloquium : Topological insulators. *Review of Modern Physics* **82**, 3045–3067 (2010).

[165] Hatsugai, Y. Topological aspects of the quantum hall effect. *Journal of Physics : Condensed Matter* **9**, 2507 (1997).

[166] Kane, C. L. & Mele, E. J. Quantum spin hall effect in graphene. *Physical Review Letters* **95**, 226801 (2005).

[167] Kane, C. L. & Mele, E. J. Z 2 topological order and the quantum spin hall effect. *Physical Review Letters* **95**, 146802 (2005).

[168] Bernevig, B. A., Hughes, T. L. & Zhang, S.-C. Quantum spin hall effect and topological phase transition in hgte quantum wells. *Science* **314**, 1757–1761 (2006).

[169] König, M. *et al.* Quantum spin hall insulator state in hgte quantum wells. *Science* **318**, 766–770 (2007).

[170] Khanikaev, A. B. *et al.* Photonic topological insulators. *Nature Materials* **12**, 233 (2013).

[171] Ma, T., Khanikaev, A. B., Mousavi, S. H. & Shvets, G. Guiding electromagnetic waves around sharp corners : topologically protected photonic transport in metawaveguides. *Physical Review Letters* **114**, 127401 (2015).

[172] Slobozhanyuk, A. P. *et al.* Experimental demonstration of topological effects in bianisotropic metamaterials. *Scientific Reports* **6**, 22270 (2016).

[173] Cheng, X. *et al.* Robust reconfigurable electromagnetic pathways within a photonic topological insulator. *Nature Materials* **15**, 542 (2016).

[174] Mousavi, S. H., Khanikaev, A. B. & Wang, Z. Topologically protected elastic waves in phononic metamaterials. *Nature Communications* **6**, 8682 (2015).

[175] Miniaci, M., Pal, R., Morvan, B. & Ruzzene, M. Experimental observation of topologically protected helical edge modes in patterned elastic plates. *Physical Review X* **8**, 031074 (2018).

[176] Wu, L.-H. & Hu, X. Scheme for achieving a topological photonic crystal by using dielectric material. *Physical Review Letters* **114**, 223901 (2015).

[177] He, C. *et al.* Acoustic topological insulator and robust one-way sound transport. *Nature Physics* **12**, 1124 (2016).

[178] Yu, S.-Y. *et al.* Elastic pseudospin transport for integratable topological phononic circuits. *Nature Communications* **9**, 3072 (2018).

[179] Gorlach, M. A. *et al.* Far-field probing of leaky topological states in all-dielectric metasurfaces. *Nature Communications* **9**, 909 (2018).

[180] Barik, S. *et al.* A topological quantum optics interface. *Science* **359**, 666–668 (2018).

[181] Yves, S., Fleury, R., Lemoult, F., Fink, M. & Lerosey, G. Topological acoustic polaritons : robust sound manipulation at the subwavelength scale. *New Journal of Physics* **19**, 075003 (2017).

[182] Yves, S. *et al.* Crystalline metamaterials for topological properties at subwavelength scales. *Nature Communications* **8**, 16023 (2017).